:

Lycée BILLES
Bilingual Lycee of Excellence in Sciences
Lycée Bilingue d'Excellence pour les Sciences

Devoir de mathématiques N°1/ TS1/ Durée 3h **11 octobre 2021**

Exercice 1 (3,5 points)

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente dans chacun des cas ci-dessous.
   a. $u_n = \frac{(-1)^n+3n}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$ **(0,5 pt)** b. $u_n = \frac{3n}{-2n+\sin(n^2)}$; $n \in \mathbb{N}^*$ **(0,75 pt)**

   c. $u_n = \frac{5^n+(-3)^n}{5^n-3^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ **(0,75 pt)**

2. Soit la suite (u_n) définie sur IN* par : $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$.

a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{n+1}{4n^2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2}$. **(0,75 pt)**

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_o = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$, pour tout entier naturel.

1. Dans la plan muni d'un repère orthornormal, représenter sur l'axe des abscisses des 3 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer sur le sens de variation et la limite de cette suite. **(1,5 pt)**

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 3$. **(0,75 pt)**

3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n). **(1 pt)**

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. **(0,5 pt+0,5 pt)**

5. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 3 = \frac{2(u_n-3)}{\sqrt{2u_n+3}+3}$. **(0,25 pt)**

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$. **(0,5 pt)**

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - 3| \leq 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **(0,5 pt)**

   d. En déduire la limite de (u_n). **(0,5 pt)**

:

Exercice 3 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2\times 3}} \text{ et } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}, n > 1.$$

1. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul on a:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{2}{\sqrt{2n+4}}\right)$$ **(0,5 pt**

   b. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante. **(0, 5 pt)**

2. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul on a:

$$\frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{(n+1)n+2)}}.$$ **(0,5 pt)**

   b. En déduire que la suite (u_n) est majorée par 1. **(0,5 pt)**

   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente. **(0,5 pt)**

   d. Montrer que la limite de (u_n).appartient à un intervalle que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

Exercice 4 (2,5 points)

1. Déterminer la forme algébrique chacun des nombres complexes ci-dessous

   a. $1+2i^{127}$ **(0,5 pt)** b. $\overline{(2+3i)}^{\,3}$ **(0,5 pt)** c. $\frac{3-i}{\overline{1+i}} - \frac{\overline{(3+i)^2}}{i-2}$; **(0,75 pt)**

2. Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z^2 \neq 1$.

   Montrer que le nombre complexe $\frac{z^2+1}{z^2-1}$ est imaginaire pur. **(0,75 pt)**

Exercice 5 (5 points)

Soit z un nombre complexe différent de $-2-i$ .On pose $z' = \frac{z+1-2i}{z+2+i}$.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit le point M(z) telle que $z = x+iy$, x, y réels.

1. Ecrire z' sous forme algébrique. **(1,5 pt)**

2. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M(z), tels que z' soit un réel. **(1 pt)**

3. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M(z), tels que z' soit un imaginaire pur. **(1,5 pt)**

4. Soit les points A, B et C d'affixes respectives (-1+2i), (-2-i) et (5).

a. Déterminer l'affixe de point G du centre de gravité du triangle ABC. **(0,5 pt)**

b. Déterminer l'affixe du point E symétrique de B par rapport à l'axe des réels. **(0,5 pt)**