Exercices calcul intégral / Compléments

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci-dessous puis calculer les dérivées lorsqu'elles existent.

$F_1(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t dt$; $F_2(x) = \int_{1-x^2}^{1+x^2} \ln t dt$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, u , v deux fonctions dérivables sur un intervalle J tel que u(J)⊂ I et v(J)⊂ I.

Démontrer que la fonction F définie sur I par

F(x) = $\int_{u(x)1}^{v(x=} f(t)dt$, est dérivable sur I et que pour tout de I

F'(x) = f[v(x)]× v'(x) − f[u(x)]× u'(x).

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur IR⁺ et F la fonction définie sur IR⁺ par :*

F(x) = $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ si x≠ 0 et F(0) =f(0).

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Démontrer que F est dérivable sur IR*⁺ et calculer F'(x) pour $x > 0$.

Exercice 4

Soit f une fonction continue dans IR telle qu'il existe M∈IR⁺ tel que ∀ t ∈IR , $|f(t)| \leq M$.

Soit F la fonction définie sur IR par :

F (x) = $\int_0^x f(t)dt$.

Démontrer que pour tous réels x et y :

$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$.

Exercice 5

1) Calculer $I_0=\int_0^1 e^x dt$ et $I_1=\int_0^1 xe^x dt$.
2) Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
   $I_n= \int_0^1 x^n e^x dt$

a) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.
b) Montrer que (I_n) est convergente.
c)Trouver à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n+1}.
d) Déterminer la limite de (I_n).
e) Calculer I_5.

Exercice 6

1. Montrer que pour tout réel x≠ −1, on a :

$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{x+1} - \frac{(-x)^n}{1+x}$.

2. En déduire que :

$\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$.

3. Montrer que ∀n ∈ IN*, ∀x ∈ [0; 1]

$-x^n \leq \frac{(-x)^n}{1+x} \leq x^n$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n) définie sur IN* par : $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie sur IN* par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln \frac{p}{n}.$$

1. Soit p∈ IN*. Justifier que :

$$\frac{1}{n}\ln\frac{p}{n} \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{p+1}{n}.$$

2. Démontrer que :

$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x dx \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x dx$.

3. En déduire que (u_n) converge vers -1.
4. Soit la suite (v_n) définie sur IN* par : $v_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

a) Montrer que ∀ n ∈IN* $v_n = e^{u_n}$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$, si n∈IN*.

1. Calculer u_{0° ; $u_1$et u_2
2. Montrer que $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$.
3. En déduire que pour tout n :
   $u_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\pi}{2^{2n+1}}$.
4. a)Montrer que (n+1) $u_{n+1}u_n$ est indépendant de n. Calculer ce réel
   b) En déduire une expression de u_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 9

Soit la suite (I_n) définie sur IN* par :

$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1 - x)^n e^x dx$.

1. Calculer I_1.
2. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} pour n≥ 2.
3. En déduire que pour n≥ 1

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$$

4.a)Majorer sur [0 ;1], la fonction $x \mapsto (1 - x)^n e^x$.

b) En déduire la limite de (I_n).

c. Montrer que e = $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$.