**Devoir de mathématiques N°8/ TS1/ Durée 3h** **29 Avril 2022**

**Exercice 1 (4 points)**

1. Résoudre l'équation différentielle ($E_1$) : $y'' + 2y' + 2y = 0$ **(0,75 pt)**
2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 2y = 4\cos 2x - 2\sin 2x$

a) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction $f_1$ définie dans IR par $f_1(x) = a\sin 2x + b\cos 2x$, soit solution de (E). **(0,75 pt)**

b) Soit f une fonction numérique. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - f_1$ est solution de ($E_1$). **(0,5 pt)**

c) En déduire la solution générale de l'équation (E) **(0,75 pt)**

3. a) Vérifier que la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0) = 2$ est définie par:

$f(x) = \sin 2x + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ **(0,5 pt)**

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})\right) dx$. **(0,75 pt)**

**Exercice 2 (5,5 points)**

Dans le plan P orienté on considère un carré ABCD de côté c tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Soit E le milieu de [AD] et le carré EDGF tel que $(\overrightarrow{ED}; \overrightarrow{EF}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

1. Faire la figure en considérant le côté [AB] horizontal. On complétera la figure au cours de l'exercice. **(0,75 pt)**
2. a)Montrer qu'il existe une similitude directe s telle que s(D) = F et s(B) = D. **(0,5 pt)**

b) Déterminer le rapport et l'angle de s. **(0,75 pt +0,5 pt)**

c) Soit Ω le centre de s. Montrer que Ω est l'intersection de demi-cercles de diamètre [DF] et [BD] passant respectivement par E et A. Placer Ω. **(0,5 pt +0,25 pt)**

3. Le plan complexe P est muni du repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

a) Préciser l'affixe de chacun des points B, D et F. **(0,5 pt)**

b) En déduire l'écriture complexe de s. **(1 pt)**

c) Déterminer les éléments caractéristiques de s. **(0,75 pt)**

**Problème: (10,5 points)**

Pour tout entier naturel n non nul, soit la fonction $f_n$ définie sur ]0;+∞ [par : $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$ et $C_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques 1cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

**Partie A : (6,75 points)**

1. Etudier les variations de $f_1$ puis dresser son tableau de variation. **(0,75 pt)**
2. Pour n≥2, étudier les variations de $f_n$ puis dresser son tableau de variation. **(2 pts)**
3. Dresser le tableau de variation de $f_2$. **0,5 pt)**
4. a)Démontrer que toutes les courbes $C_n$ passent par deux points fixes. **(0,5 pt)**

b) Etudier la position relative des courbes $C_1$ et $C_2$. **(0,5 pt)**

c) Construire $C_1$ et $C_2$ dans le même repère. **(2,5 pts)**

**Partie B (3,75 points)**

Pour tout entier naturel non nul on pose $I_n = \int_1^e f_n(x)dx$

1. Calculer $I_1$. **(0,75 pt)**
2. Montrer que $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$ . **(0, 5 pt)**
3. Calculer $I_2$ puis l'aire du domaine délimité par $C_1$, $C_2$ et les droites d'équation x =1 et x = e. **(0,5 +0,5 )**
4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul:$\frac{1}{n!}I_n = 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!}\right)$.**(0,5)**
5. Montrer que pour tout pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq I_n \leq 1$. **(0,5 pt)**
6. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!}\right)$. **(0,5 pt)**