TS1/ Cocyclicité et Isométrie

Exercice 1

Soit ABC un triangle et (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O. Une droite perpendiculaire à (OA) coupent les droites (AB) et (AC) respectivement en C' et B'. Démontrer que le quadrilatère BB'CC' est inscriptible (les points B, B' C et C' sont cocycliques).

Exercice 2

Soit (C) et (C') deux cercles sécants en A et B. Soit I un point de (C) distinct de A et B et J un point de (C') distinct de A et de B tels que I, J et A ne soient pas alignés Une droite passant par B coupe (C) en M et (C') en N. On suppose que les droites (IM) et (JN) sont sécants en K. Démontrer que les points A, I, J et K sont cocycliques.

Exercice 3

Soit (C) et (C') deux cercles sécants en A et B. Une droite passant par A coupe (C) en M et (C') en M'. Soit P un point de (C) et P' un point de (C')

1. $(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PM}) = (\overrightarrow{P'B},\overrightarrow{P'M'})\ [\pi]$
2. En déduire que si (PM) et (P'M') sont sécantes en N alors les points B, P, P' et N sont cocycliques.

Exercice 4

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. On considère [AI], [BJ] et [CK] les trois hauteurs et H l'orthocentre du triangle.

1. Montrer que *B, K, H et I* sont cocycliques.
2. Montrer que *H, I, C et J* sont cocycliques.
3. En déduire que (AI) est bissectrice de $\widehat{KIJ}$.
4. Montrer que (JB) est bissectrice de $\widehat{KJI}$ puis que (AI) est bissectrice de $\widehat{IKJ}$.
5. Quelle propriété peut-on retenir de ces résultats.

Exercice 5

Soit ABCD un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en I.

Soit P, Q, R et S les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AB), (BC), (CD) et (DA).

1. Montrer que les points *A, P, I* et S sont cocycliques. Citer trois autres résultats de cocyclicité similaires.

2. a) Montrer que :

$$(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})\ [\pi]$$

b) Montrer que :

$$(\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})\ [\pi]$$

3. En déduire que :

$$(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CA})\ [\pi]$$

4. Montrer que les points P, Q, S et R sont cocycliques si et seulement si les diagonales [AC], et [BD] sont perpendiculaires. Illustrer cette situation sur une figure.

Exercice 6

OAB est un triangle isocèle OA=OB. P est un point du segment [AB] , $P\neq A$ et $P \neq B$.

La parallèle à (OB) passant par P coupe (OA) en A', la parallèle à (OA) passant par P coupe (OB) en B'.

1. Montrer que OA'=BB'.
2. En déduire qu'il existe une unique rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(A0) = B'$. Préciser son angle Ω puis déterminer son centre.
3. Démontrer que les points O, A', B' et Ω sont cocycliques.

Exercice 7

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A, tel qu'une $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$

On appelle R la rotation de centre A, qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

On note I le milieu du segment [BC].

1. Construire $J = R(I)$.
2. On pose $F_1 = RoT$ et $F_2 = T\,oR$.
Déterminer $F_1(J)$ et $F_2(I)$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et F_2.
3. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 l'image de M par F_2. Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2 ?

Exercice 8

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Pour tout M point, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B.

1. On considère la transformation $T = R_B\, oR_A$.
a) Construire le point C image du point A par T.
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.
c) En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA.
2. On suppose que le point M décrit le cercle (Γ) de diamètre [AB].
a) Déterminer et construire l'ensemble (Γ_2) décrit par le point M_2 quand M décrit (Γ).
b) Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$
c) Déterminer l'ensemble (Γ_3) décrit par le point P, milieu de [M_1M_2] quand M décrit (Γ).