Lycée BILLES
Bilingual Lycee of Excellence in Sciences
Lycée Bilingue d'Excellence pour les Sciences

Devoir de mathématiques N°2/ TS1/ Durée 4h **23 octobre 2021**

Exercice 1 (3 points)

Soit les suites (u_n) et (v_n) définie sur IN* par :

$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{2}{1+\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{n}{1+n}$ et $v_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} \ldots + \frac{n}{n+n^2}$.

1. a. Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n$ on a : $\frac{1}{1+\sqrt{kn}} \geq \frac{1}{1+n}$. **(0,5 pt)**

   b. En déduire que $u_n \geq \frac{1}{2}$ n. **(0,75 pt)**

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n). **(0,5 pt)**

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leq v_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$. **(0,5 pt)**

   b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (4,75 points)

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_o = 3$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$, pour tout entier naturel.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$. **(0,25 pt)**

b . Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 3$. **(0,75 pt)**

c. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. **(0,75 pt)**

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. **(0,5 pt+0,5 pt)**

2. Soit (V_n) la suite définie par $V_0 = 0{,}1$ et $V_{n+1} = \frac{3v_n+2}{v_n+4}$, pour tout entier naturel.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $1 - V_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$ **(0,5 pt)**

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **(0,75 pt)**

c. Montrer que (V_n) convergente puis préciser sa limite. **(0,75 pt)**

Exercice 3 (3,25 points)

On considère le plan complexe du repère orthonormal direct.

Soit le nombre complexe $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

1. Montrer que $z^2 = -2\sqrt{3} - 2i$. **(0,5 pt)**
2. Déterminer le module et un argument de z^2. **(0,25 pt + 0,5 pt)**
3. En déduire le module et un argument de z. **(0,5 pt+ 0,75 pt)**
4. Déterminer $\cos\frac{19\pi}{12}$ et $\sin\frac{19\pi}{12}$. **(0,25 pt + 0,25 pt)**
5. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n pour que z^n soit un réel. **(0,25 pt)**

Exercice 4 (4,5 points)

Soit z un nombre complexe différent de 2 –3 i .On pose $z' = \frac{z+1-2i}{z-2+3}$.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit les points M(z), A(-1+2i) et B(2-3i).

1. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z' **(0,75 ptx2)**
2. En déduire l'ensemble des points M(z) tel que :
   a. z' soit un réel négatif. **(0,75 pt)**
   b. z' soit un imaginaire pur. **(0,5 pt)**
   c. $|z'|$= 1. **(0,5 pt)**
   d. $|z'|$= 3. **(0,75 pt)**

3. Déterminer l'ensemble des point M(z) tels que :
a. $|z-2+3i|=|z|$ **(0,5 pt)** ; b. $|\bar{z}+1+2i|$ = 3. **(0,5 pt)**

Exercice 5 (4 points)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Pour tout nombre complexe z≠ 1 on pose z' = $\frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

Montrer que :

1. $|z'|$ = 1. **(0,5 pt)** 2. $\frac{z'-1}{z-1}$ est un réel. **(0,5 pt)** 3. $\frac{z'+1}{z-1}$ est une imaginaire pur. **(0,5 pt)**

Partie 2

Pour tout nombre complexe z≠ i on pose: z' = $\frac{\bar{z}}{1-i\,\bar{z}}$.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit les points A(i) M(z) et M'(z').

1.a. Montrer que z' est réel si et seulement si $|z|^2$-Im(z) = 0. **(0,5 pt)**

b. En déduire l'ensemble des points M(z) tel que ; z' soit réel. **(0,5 pt)**

2. a. Montrer que z'-i = $\frac{-i}{1-i\,\bar{z}}$. **(0,25 pt)**

b. En déduire l'ensemble des points M(z) tels que : $|z'-i|$=2. **(0,5 pt)**

3. a. Montrer que z'-i = $\frac{1}{|1-i\,\bar{z}|^2}$ (z-i). **(0,25 pt)**

b. En déduire $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})$. **(0,5 pt)**