

DEVOIR DE VACANCES FIN D'ANNEE - MATHEMATIQUES
A RENDRE LE 07 JANVIER 2021

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 8$ (l'unité est le cm).

Déterminer et construire :

- 1) L'ensemble (E) des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8$
- 2) L'ensemble (F) des points M du plan tels que $2MA^2 - 3MB^2 = 93$
- 3) L'ensemble (T) des points M du plan tels $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

EXERCICE 2

- a) Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. I est le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de I sur (AC) et J le milieu de $[IH]$. Démontrer que les droites (AJ) et (BH) sont perpendiculaires :
- b) a) en s'appuyant sur le produit scalaire.
- c) b) en introduisant le milieu K de $[HC]$ et en démontrant que J est l'orthocentre du triangle AIK.

EXERCICE 3 :

On considère dans le plan P un triangle équilatéral ABC de côté a.

1. Construire le point D barycentre du système $\{(A; 2), (B; -2), (C; -1)\}$.
2. a. Déterminer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a.
b. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et que le triangle BCD est rectangle en B.
3. Calculer les distances CD, BD et AD en fonction de a. (indication : $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$)
4. Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par (F) l'ensemble des points du plan tels que $f(M) = 0$.
 - a. Vérifier que C appartient à (F).
 - b. Exprimer $f(M)$ en fonction de la distance MD et de a.
 - c. Déterminer et construire (F).
5. Pour tout point M du plan on pose $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DC} + a^2$
 - a. Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.
 - b. Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles (F) et (G).
Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

Passez de bonnes vacances studieuses !