TS1/ Limite-continuité-Dérivabilité/ compléments

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur [0 ;1], telle

$f([0\,;1]) \subset [0\,;1]$.

Démontrer qu'il existe un réel x_0 de [0 ;1] tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2

1. Soit f une fonction continue sur [a ; b] tel que $f([a\,;b]) \subset [a\,;b]$.
 Montrer qu'il existe c dans [a ; b] tel que f(c) = c.
2. Soit f une fonction continue sur [0 ; 1] tel que f(0) = f(1).
Montrer qu'il existe α dans $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a; b].
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels de [a; b].
Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$f(c) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_n)].$$

Exercice 4

1. Soit la fonction u définie par :
$u(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, $n \in IN^*$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{k}{n}\right) = 0$.
2. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\left[0\,;1 - \frac{1}{n}\right]$.
4. Déduire de ce qui précède que :
pour tout $n \in IN^*$, il existe un réel x_0 de [0 ; 1] tel que $f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = x - \cos x$.
1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 et que $x_0 \in \left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.
2. Démontrer qu'il existe un réel c de $\left]x_0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(c)$.
3. Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$ et en déduire que $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 < \frac{\pi}{4}$

Exercice 6

Soient f et g deux fonctions continues sur [a , b], dérivables sur] a , b [. On suppose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$.

En appliquant le Théorème des accroissements finis à la fonction :

$h: x \mapsto [g(a) - g(b)]f(x) - [f(a) - f(b)]g(x)$,

montrer qu'il existe un réel c de]a , b[tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(a)-f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a)-g(b)}.$$

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Etudier la dérivabilité de g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.
2. Calculer g'(x) pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$
3. Encadrer g'(x) pour tout x réel de $[0, \frac{1}{2}]$.
4. En déduire que pour tout x appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$ on a : $1 + \frac{x}{6} \leq g(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+1}$.

5. Etudier la dérivabilité de g sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.
6. Calculer g'(x) pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$
7. Encadrer g'(x) pour tout x réel de $[0, \frac{1}{2}]$.
8. En déduire que pour tout x appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$ on a : $1 + \frac{x}{6} \leq g(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 8

Soit φ l'application de IR dans IR définie par $\varphi(x) = \pi + \frac{1}{3}\sin x$

1. Prouver que :
$\forall (x,y) \in IR^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{3}|x - y|$.
2. Soit (u_n), ($n \in IN$ la suite définie par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
Montrer que $\forall\, n \in IN$, $|u_n - \pi| \leq \frac{1}{3^n}|u_0 - \pi|$.
Etudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 9

On cherche à démontrer la convergence de la suite (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

2. a. Montrer que : si $x \in \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$, alors $f(x) \in \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$.

b. Montrer que pour tout $x \in \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

c. En déduire que, pour tout $x \in \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$, $0 \leq f(x) - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{3}\right)$.

3.a. Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{3}\right)$$

c. Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2^n}\left(u_0 - \sqrt{3}\right)$$

a. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

1. Montrer que $\forall x \in$ IR, $(1+x^2)f'(x) = xf(x)$.
2. Démontrer par récurrence que: $\forall n \in$ IN, $\forall \in$ IR :

$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0$.

3. Démontrer que les dérivées d'ordre impair sont nulles en 0.

Exercice 11

1. Montrer que

$\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \leq \sin y - \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(y-x)$, pour tous x et y de $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x < y$.

2. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Exercice 12

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

a. Etudier les variations de g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

c. En déduire le signe de g.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x + x^3}{1 - x^3}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Etudier les variations de f.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c. Préciser la position de C_f par rapport à T.

d. Tracer C_f et T.

Exercice 13

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x - 2$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

d. Déterminer le signe de g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^4 + (x-2)^2}$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal.

c. Déterminer graphiquement l'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = x$.