LycéeBILLES
Bilingual Lycee of Excellence in Sciences
Lycée Bilingue d'Excellence pour les Sciences

Mathématiques

Devoir de vacances **Classe de TS2** **Décembre 2022**

<u>Problème</u> 1 (12 points)

Partie A (3,75 points)

Soit $\mathbf{g}$ la fonction définie par $\mathbf{g(x) = -x^3 + 3x - 6}$.

1) Etudier les variations de $\mathbf{g}$ puis dresser son tableau de variation. **(1 pt + 0,5 pt)**

2) Montrer que l'équation $\mathbf{g(x) = 0}$ admet une solution unique $\boldsymbol{\alpha}$. **(1 pt)**

3) Montrer que $\boldsymbol{\alpha} \in \left]-3; -2\right[$ puis déterminer une valeur approchée de $\boldsymbol{\alpha}$ à $\mathbf{10^{-1}}$ près. **(0,25pt+0,5pt)**

4) Déterminer le signe de $\mathbf{g(x)}$ pour tout $\mathbf{x}$ de l'ensemble de définition de $\mathbf{g}$. **(0,5 pt)**

Partie B (8,25 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \dfrac{-x^3 + 3}{x^2 - 1}}$.

1. Etudier la dérivabilité de $\mathbf{f}$. **(0,5 pt)**

2. Calculer $\mathbf{f\,'(x)}$ pour tout $\mathbf{x}$ de l'ensemble de dérivabilité de $\mathbf{f}$.

Montrer que $\mathbf{f\,'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2 - 1)^2}}$. **(0,5 pt+25pt)**

3. Etudier le sens de variation de $\mathbf{f}$ puis dresser son tableau de variation. **(0,5 pt + 0,75 pt)**

4. Soit $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un plan muni du repère orthonormal $(\boldsymbol{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Montrer que la droite $(\mathbf{D})$ d'équation $\mathbf{y = -x}$ est asymptote à $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$. **(0,5 pt)**

b) Préciser les autres branches infinies de $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$. **(0,5 pt)**

c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$ par rapport à $(\mathbf{D})$. **(0,75 pt)**

d) Construire $(\mathcal{C}_\mathbf{f})$. **(1, 5 pt)**

4. Soit $\mathbf{h}$ la restriction de $\mathbf{f}$ à l'intervalle $\left]\mathbf{1}\,;\,+\infty\right[$.

a) Montrer que $\mathbf{h}$ est une bijection de $\left]\mathbf{1}\,;\,+\infty\right[$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ à déterminer. **(0,5 pt)**

b) Etudier la dérivabilité de $\mathbf{h^{-1}}$. **(0,75 pt)**

c) Calculer $\mathbf{h(2)}$ et $\mathbf{(h^{-1})'\left(\frac{-5}{3}\right)}$. **(0,25 pt + 0,5 pt)**

d) Construire $(\mathcal{C}_{\mathbf{h^{-1}}})$ la courbe représentative de $\mathbf{h^{-1}}$ dans le plan muni du repère $(\boldsymbol{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **(0,5 pt)**

<u>Problème</u> 2 (8 points)

Partie 1 (1,5 points)

Soit la fonction $\mathbf{g}$ définie par $\mathbf{g(x) = x \ln x + (2 - x) \ln(2 - x)}$.

1) Etudier les variations de $\mathbf{g}$. **(1 pt)**

2) En déduire le signe de $\mathbf{g}$ sur son ensemble de définition. **(0,5 pt)**

Partie 2 (3,5 points)

Le plan est muni du repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$. Unité graphique $\mathbf{5\ cm}$.

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie par : $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{\ln(2-x)}}{\mathbf{\ln x}} & \mathbf{si\ x} \in \mathbf{]0\,;1[\cup]1\,;2[} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{si} & \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{-1} \quad \mathbf{si} & \mathbf{x = 1} \end{cases}$

1) Calculer la limite de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{2}$. **(0,5 pt)**

2) Etudier la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{0}$. **(0,5 pt)**

3) En remarquant que $\mathbf{f(x) = -\dfrac{\ln[\,1 + (1-x)\,]}{1-x} \cdot \dfrac{x-1}{\ln x}}$ pour $\mathbf{x}$ élément de $\mathbf{]\,0\,;1[\ \cup\ ]\,1\,;2[}$,

étudier la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{1}$. **(0,5 pt)**

4) Etudier la dérivabilité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{0}$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 pt + 0,5pt)**

5) En posant $\mathbf{t = x - 1}$, montrer que $\mathbf{\dfrac{f(x) + 1}{x - 1} = \dfrac{\ln(1 - \boldsymbol{t}^2)}{\boldsymbol{t}^2} \cdot \dfrac{t}{\ln(1 + t)}}$. **(0,5 pt)**

6) Déduire de la question précédente que $\mathbf{f}$ est dérivable en $\mathbf{1}$ et $\mathbf{f'(1) = -1}$. **(0,5 pt + 0,5pt)**

7) Montrer que pour tout $\mathbf{x}$ élément de $\mathbf{]\,0\,;1[\ \cup\ ]\,1\,;2[}$ on a : et $\mathbf{f'(x) = \dfrac{-\,g(x)}{x\,(2-x)(\ln x)^2}}$. **(0,5 pt)**

8) En déduire le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(1 pt)**

9) Tracer la courbe de $\mathbf{f}$ en mettant en évidence tous les résultats des questions précédentes. **(1 pt)**