**Devoir de mathématiques N°5/ TS1/ Durée 4h** **22 Janvier 2029**

**Exercice 1 (3,5 points)**

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = \frac{-i}{8}$. On donnera les solutions sous forme exponentielle et sous forme algébrique. **(1,5 pt)**

   b. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 4 cm, représenter les points images des solutions de (E). **(0,75 pt)**

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(iz+1)^3 + \frac{i(z-2i)^3}{8} = 0$. **(1,25 pt)**

**Exercice 2 (2 points)**

1. Résoudre dans IR l'équation : $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = -\sqrt{3}$. **(0,75 pt)**
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - (1-2i)^4 = 0$ **(1,25 pt)**

**Exercice 3 (2,5 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + z + z^2 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. **(1,25 pt)**
2. Calculer $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$. **(1,25 pt)**

**Exercice 4 (2,5 points)**

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{6x-1}{(3x+1)^2}$ et $g(x) = \frac{1}{3x+1}$.

1. Déterminer les dérivées successives de la fonction g. **(1,25 pt)**
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de l'ensemble de définition de f :
   $f(x) = \frac{a}{3x+1} + \frac{b}{(3x+1)^2}$. **(0,5 pt)**
3. En déduire les dérivées successives de f. **(0,75 pt)**

**Exercice 5 (1,75 point)**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+\lambda x)$, $\lambda$ étant un réel strictement positif.

On considère deux nombres réels a et b tels que $\frac{-1}{\lambda} < a < b$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha$ unique tel que : $f(b) - f(a) = f'(\alpha)(b-a)$. **(1 pt)**
2. Déterminer $\alpha$. **(0,75 pt)**

**Exercice 6 (7,75 points)**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln x$.

1. a. Etudier les variations de f. **(1,5 pt)**

   b. Dresser son tableau de variation. **(0,75 pt)**

   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une $\alpha$ appartient à $]3; 4[$. **(0,75 pt)**

   d. Montrer que $\alpha = \sqrt{1 + 8\ln\alpha}$. **(0,25 pt)**

2. Soit g la fonction définie sur $[3\,;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{1+8\ln x}$.
   a. Montrer que $\forall x \in [3\,;+\infty[$ $g(x) \geq 3$. **(0,5 pt)**
   b. Montrer que $\forall x \in [3\,;+\infty[$ $|g'(x)| \leq \frac{4}{9}$. **(0,75 pt)**
3. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 3$. **(0,5 pt)**
   b. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$. **(0,75 pt)**
   c. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. **(0,75 pt)**
   d. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite. **(0,5 pt+0,25 pt)**
   e. Trouver un entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$. **(0,25 pt)**
   f. Calculer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près. **(0,25 pt)**