TS1/ Produit vectoriel-Produit mixte

Exercice 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{p}$. Exprimer en fonction de $\vec{p}$, les vecteurs :

a. $\vec{u} \wedge (\vec{u} + \vec{v})$; b. $\vec{v} \wedge (\vec{u} - \vec{v})$; c. $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$

d. $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \wedge (-5\vec{u} + 4\vec{v})$

Exercice 2

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ soit une base orthonormale directe.

Déterminer les produits vectoriels ci-dessous :

a. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; b. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; c. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BD}$;

d. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$; e. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$; f. $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AH}$.

Exercice 3

Etant donnés quatre points A, B, C, D de l'espace, montrer que :

1. $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$.
2. $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Exercice 4

Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal direct; soient $A(-2;1;3)$, $B(1;-1;0)$, $C(0;0;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.
3. Déterminer un vecteur normal du plan (ABC).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice 5

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ les vecteurs définis par :

$\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j})$, $\vec{v} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} - 2\sqrt{2}\,\vec{k})$ et $\vec{w} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k})$.

1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale.
2. Cette base est-elle directe ou indirecte ?

Exercice 6

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct d'unité graphique 1 cm, on considère les points A(3, 0, -1), B(0, 1, 1), C(2, 1, -1), D(5, 0, 1).

1. Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Déterminer l'aire de ABCD.

Exercice 7

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de l'ensemble des vecteurs de l'espace et les vecteurs $\vec{u}(1,-2,1)$, $\vec{v}(2,1,-2)$ et $\vec{w}(1,-3,2)$ dans cette base.

1. a. Déterminer les vecteurs $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

b. Préciser la relation existant entre ces doubles produit de vecteurs.

2. Montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.
3. Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ sont égaux.

Exercice 8

Dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, préciser si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou non.

a. $\vec{u}(1;3;-5)$; $\vec{v}(2;7;-2)$ et $\vec{w}(5;1;0)$.

b. $\vec{u}(12;-24;37)$; $\vec{v}(31;-15;52)$ et $\vec{w}(17;-29;-43)$.

c. $\vec{u}(5;-2;7)$; $\vec{v}(12;-4;9)$ et $\vec{w}(9;-2;-3)$.

Exercice 9

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites $D_1(A, \vec{u})$ et $D_2(B, \vec{v})$. Calculer la distance entre D_1 et D_2 : $d(D_1, D_2)$ dans chacun des cas ci-dessous.

a. $A(1;3;-5)$, $\vec{u}(-1;2;1)$ et $B(1;2;0)$, $\vec{v}(1;-2;-1)$.

b. $A(2;1;-1)$, $\vec{u}(2;-3;-1)$ et $B(1;0;-1)$, $\vec{v}(1;2;3)$.

c. $A(4;0;-2)$, $\vec{u}(0;3;1)$ et $B(0;2;0)$, $\vec{v}(2;3;-1)$.

d. $A(7;1;0)$, $\vec{u}(2;-3;1)$ et $B(1;1;1)$, $\vec{v}(-4;6;-2)$.

Exercice 10

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites D_1, D_2 et D_3 de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + \mu \quad (\mu \in IR); \\ z = -2\mu \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 4t \quad (t \in IR); \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2\lambda \quad (\lambda \in IR). \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$

a. Démontrer que D_1 et D_3 sont strictement parallèles.

b. Démontrer que D_2 et D_3 sont sécantes en un point A dont on précisera les coordonnées.

c. Démontrer que D_1 et D_2 sont non coplanaires

d. Démontrer que D_1 et D_2 sont orthogonales.

e. Calculer les distances $d(D_1, D_3)$; $d(D_2, D_3)$ et $d(D_1, D_2)$.

Exercice 11

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer en utilisant le produit mixte une équation du plan (PQR) avec $P(2;-1;1)$, $Q(3;2;-1)$, $R(-1;3;2)$.

Exercice 12

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(3, 2, 6)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, -2, 5)$.

1. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   c. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
2. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
   Montrer que $OH = \frac{4}{3}$.

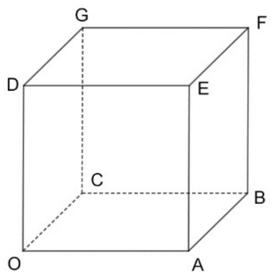
Exercice 13

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit les points $A(2 ;0 ;0)$, $B(0 ;3 ;0)$ et $C(0,0,1)$;

Calculer de de façon la distance OH du point O au tétraèdre (OABC).

Exercice 14

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-contre :



L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

On désigne par a un réel strictement positif. L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
   b. En déduire l'aire du triangle DLM.
   c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).
   a. Démontrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.
   b. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note x le réel tel que $\overrightarrow{OH} = x\overrightarrow{OK}$.
   Démontrer que $x = \frac{a}{a^2+2}$.
   c. En déduire que H appartient au segment [OK].
   c. Déterminer les coordonnées de H.
   d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

Exercice 15

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On considère les points $A(1;0 ;0)$, $B(0;1;1)$, $C(0 ; -1 ; -1)$.

1. a. Calculer l'aire du triangle ABC.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
   c. Vérifier que D n'appartient pas au plan (ABC).
2. a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $(\triangle)$ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite $(\triangle)$ et du plan (ABC).
   c. En déduire la distance du point D au plan (ABC).
3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
4. a. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P) du segment [DC].
   b. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite $(\triangle')$ intersection des plans (P) et (ABC).

Exercice 16

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite (D) passant par $A(1,-2, 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1, 1, -1)$. Soit $B(0,1,-2)$ un point de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur (D).
2. Calculer de deux manières différentes la distance de B à la droite (D).

Exercice 17

Soit dans l'espace u triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tel que

a. $(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.
b. $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$.
c. $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$