TS1/ Logarithme népérien / Compléments

Exercice 1 :

Calculer la limite de f à droite en 1 :

a. $f(x)= (x-1)\ln(x-1)$; b. $f(x)= \ln(x-1)+\frac{1}{x-1}$;

c. $f(x)= \ln(x-1) + \frac{2x-3}{x-1}$.

Exercice 2 :

Calculer la limite de f en 0:

a. $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; b. $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$;

c. $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}$; d. $f(x) = \frac{\ln(1-2x)}{x}$

Exercice 3 :

3. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$:

a. $f(x) = x \ln\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)$.

b. $(x)= (x-1) \ln\left(1 + \frac{2}{x-3}\right)$.

c. $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Exercice 4

Étudier la continuité et la dérivabilité de f définie sur $[0,+\infty[$, puis calculer f '(x) pour tout de $D_{f'}$:

1. $f(x)=x^2(2\ln x-1)$ si $x\neq 0$ et $f(0) = 0$
2. $f(x) = \frac{\ln x}{x-\ln x}$ si $x\neq 0$ et $f(0) = -1$:
3. $f(x) = \frac{\ln(1+ x^2)}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0) = 0$
4. $f(x)=\frac{x^2\ln x}{1+x}$ si $x\neq 0$ et $f(0) = 0$.

Exercice 5

Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2-2 +\ln x$.

1.a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

c) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie par $f(x)= \frac{x^2+1-\ln x}{x}$.

a) Déterminer le sens de variation de f.

b) Montrer que $f(\alpha)= 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par

$f(x) = x+4 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ et C_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

2.a)Montrer que C_f admet trois asymptotes dont l'une (Δ) d'équation $y = x+4$.

b) Préciser la position de C_f par rapport à (Δ).

3. Montrer que l'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées est centre de symétrie de C_f.

4. Construire C_f.

5. Soit k un réel. Étudier suivant les valeurs de k, le nombre de points d'intersection de Cf et de la droite (D) d'équation $y = x + k$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Déterminer les abscisses x_1, x_2, x_3 , x_4 des points M_1, M_2, M , M_4 tels que :

M_1 : intersection de (C) et de l'axe des abscisses ;

M_2 : point de (C) où la tangente à (C) passe par l'origine du repère ;

M_3 :point de (C) où la tangente à (C) est parallèle à l'axe des abscisses ;

M_4 : en x_4 la dérivée seconde de f s'annule.

Démontrer que les nombres x_1, x_2, x_3 , x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 8

1. Montrer pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{2n}$; $n\geq 1$

a. Montrer que pour tout $n\geq 1$:

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln 2$$

b. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{x} +\ln x$ et (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n\in$ IN.

1. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
2. Montrer que $f\left(\left[\frac{3}{2},2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2},2\right]$.
3. Montrer que $\forall x \in \left[\frac{3}{2},2\right]$ $|f'(x)| \leq \frac{2}{9}$.
4. a. Montrer l'équation $x^2-x\ln x-1=1$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[\frac{3}{2},2\right]$.

   b. Montrer que α est solution de l'équation $f(x) = x$.
5. Montrer pour tout $n\in$ IN :

   a. $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$; b. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{9}|u_n - \alpha|$

   b. $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$
6. En déduire la limite de (u_n).
7. Trouver n pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.