LYCEE D'EXCELLENCE BILLES
CLASSE TS2

ANNEE SCOLAIRE 2021 - 2022
M. FAYE

DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°7 - MAI 2022
DUREE 04 HEURES

EXERCICE 1 (04 points)

On considère l'équation $z^3 - (2+5i)z^2 + (-7+7i)z + 6+2i = 0$

1) Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure à préciser puis achever la résolution. **(01 pt)**

2) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe f qui laisse A(1+i) invariant et transforme B(1+2i) en C(2i). **(01 pt)**

3) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit g la transformation qui a tout point M(x,y) associe le point M' (x', y') par $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 1 \\ y' = 2x + 2y - 3 \end{cases}$. Déterminer l'affixe z' de M' en fonction de z affixe de M puis donner la nature et les éléments caractéristiques de g. **(01 pt)**

4) Donner la nature et les éléments caractéristiques de fog . **(01 pt)**

EXERCICE 2 : (07 points)

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_o = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{U_n + 1} \end{cases}$

1°) a) Représenter graphiquement les termes U_1, U_2, U_3, sur l'axe (ox) d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ à l'aide de la courbe Cf d'une fonction f bien choisie. **(01 pt)**

b) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de (U_n) ? **(0,5 pt)**

c) Démontrer par récurrence que $U_n > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ **(01 pt)**

d) Démontrer par récurrence la conjecture faite sur le sens de variation de (U_n) **(01 pt)**

2°) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de U_n **(0,5 pt)**

b) Démontrer que $V_{n+1} - V_n$ est constante et en déduire la nature de la suite (V_n) **(0,5 pt)**

c) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n. **(01 pt)**

3) En utilisant les questions 1-c) et 1-d), démontrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite. **(01 pt)**

4) En utilisant la question 2-c), retrouver le résultat de la question 3). **(0,5 pt)**

PROBLEME (09 pts)

PARTIE A

Soit la fonction u définie par $u(x) = x^2 - 2\ln x$

1) Dresser le tableau de variations de u **(01 pt)**
2) En déduire le signe de $u(x)$ **(0,5 pt)**

PARTIE B

Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{2 + 2\ln x}{x} & si\ x > 0 \\ (1 - 2x)e^{2x} & si\ x \leq 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0. Interpréter géométriquement la limite à droite en 0. **(01 pt)**
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 à gauche. Interpréter le résultat. **(01 pt)**
3) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition. **(01 pt)**
4) Etudier les branches infinies de Cf **(01 pt)**
5) Etudier la position de Cf par rapport à $\Delta : y = x$ pour $x \in]0,+\infty[$ **(0,5 pt)**
6) Dresser le tableau de variations de f **(01 pt)**
7) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]0,+\infty[$
   et vérifier que $e^{-2} < \beta < e^{-1}$ **(01 pt)**
8) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm **(01 pt)**

Au travail !