Devoir de mathématiques N°1/ TS1/ Durée 3h **02 novembre 2022**

Exercice 1 (4,25 points)

Soit les suites (u_n) et (v_n) définie sur IN* par :

$u_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{2}{1+\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{n}{1+n}$ et $v_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} \ldots + \frac{n}{n+n^2}$.

1. a. Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n$ on a : $\frac{1}{1+\sqrt{kn}} \geq \frac{1}{1+n}$. **(0,75 pt)**

b. En déduire que $u_n \geq \frac{1}{2} n$. **(1 pt)**

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). **(0,75 pt)**

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leq v_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$. **(1 pt)**

b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et préciser sa limite. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$, pour tout entier naturel.

1. a. Dans la plan muni d'un repère orthornormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm, tracer la courbe de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$; puis représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer sur le sens de variation et la limite de cette suite. **(1,75 pt)**

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$. **(1 pt)**

3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n). **(1 pt)**

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite. **(0,5 pt+0,75 pt)**

Exercice 3 (3,75 points) (Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes)

1. Déterminer la forme algébrique chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $-1+3i^{129}$ **(0,75 pt)** ; b. $(\overline{2+3i})^3$ **(0,5 pt)**; c. $\frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}} - \frac{\overline{(3+i)^2}}{i-2}$; **(1 pt)**

2. Soit les nombres complexes $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$ et $T_n = (1+i)^n - (1-i)^n$; n étant un entier naturel.

a. Montrer que S_n est un nombre réel. **(0,75 pt)**

b. Montrer que T_n est un nombre imaginaire pur. **(0,75 pt)**

Exercice 4 (2,5 points)

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul

$1+2i+3i^2+ \ldots +ni^{n-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i}{2}$ **(1 pt)**

2. En déduire que pour tout entier naturel k non nul :

$1-3+ \ldots +(-1)^k(2k+1) = (-1)^k(k+1)$ et $2-4+ \ldots +(-1)^{k-1}2k = \frac{1-(-1)^k(2k+1)}{2}$. **(0,75pt× 2)**

Exercice 5 (4,5 points)

Soit z un nombre complexe différent de $-2-i$ .On pose $z' = \frac{z+1-2}{z+2+i}$; $z \neq -2-i$.

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, soit le point M(z) telle que z = x+iy, x, y réels.

1. Ecrire z' sous forme algébrique. **(1 pt)**
2. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M(z), tels que z' soit un réel. **(1,25 pt)**
3. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M(z), tels que z' soit un imaginaire pur. **(1 pt)**
4. Soit les points A, B et C d'affixes respectives -1+2i, -2-i et 5.

a. Déterminer l'affixe de point G du centre de gravité du triangle ABC. **(0,5 pt)**

b. Déterminer l'affixe du point E symétrique de B par rapport à l'axe des réels. **(0,75 pt)**