TS1/Calcul Barycentrique

Exercice 1

On donne dans le plan (P) un carré ABCD de centre O et de côté a. Soit α un nombre réel

On considère l'application f_α du plan (P) dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de f_α.
2. Déterminer puis construire l'ensemble (E_1) ; (E_2) et (E_3) des points M de (P) qui vérifient respectivement :

a. $MA^2+MB^2+MC^2 + MD^2 = 4a^2$.

b. $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$

c. $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 2a^2$

Exercice 2

Dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne A(1 ;3), B(7 ;1) et C(7 ;11).

1. Déterminer l'isobarycentre G de ces trois points.
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2+MB^2+MC^2 = k$, k étant un nombre réel.
3. Tracer (E) pour k = 107.
4. Pour quelle valeur de k, le point O appartient-il à (E).

Exercice 3

ABC est un triangle équilatéral de côté a.

On considère l'application Φ qui à tout point M du plan (P) associe le réel :

$\Phi(M) = MA^2+2MB^2-MC^2$.

1. Soit G le point défini par : $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Calculer GA^2 ; GB^2 et GC^2 en fonction de a.

2. Déterminer α, β *et* γ tels que G soit barycentre des points $(A; \alpha)$, $(B; \beta)$ et $(C; \gamma)$.
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M de (P) tels que : $\Phi(M) = a^2$.

Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral de côté a. On note A' le milieu de [BC] et O le centre du triangle ABC.

1.a)Déterminer l'ensemble E des nombres réels m tels que les points A, B, C affectés des coefficients respectifs m, 1,1 admettent un barycentre.

b) Quel est l'ensemble des barycentres obtenus lorsque m décrit E ?

2. On pose m=2.

Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M tels que : $2MA^2+MB^2+MC^2 = 2a^2$.

3. On pose m= -2.

Déterminer et construire l'ensemble (D) des points M tels que : $-2\|\overrightarrow{MA}\|^2+\|\overrightarrow{MB}\|^2+\|\overrightarrow{MC}\|^2 = 0$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle, on pose BC = a, AC = b, AB = c ; A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [AC], C'celui de [AB].Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1. Montrer que pour tout point M du plan,
2. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.
3. En calculant de deux façons $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$ établir que :
   $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$.
4. On suppose que les cercles de diamètres [AA'] et [BC] sont sécants. Montrer que leurs points d'intersection appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

Exercice 6

Dans le plan complexe (P) muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A(-1-i), B(-1+3i) et C(3-i) On désigne par I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

1. Déterminer l'ensemble E, des nombres réels α pour lesquels les points pondérés (A ; α+2), (B ;1) et (C ; α+1) admettent un barycentre G_α.
2. Soit $\alpha \in E$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OG_\alpha}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont colinéaires.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\alpha + 2)MA^2+MB^2+(\alpha + 1)MC^2 = 32$.