Nombres complexes compléments n°2

Exercice 1

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit M un point d'affixe z, z différent de 2-i et les points A(-3+4i), B(2-i) On considère le nombre complexe z' tel que : $z' = \frac{iz+4+3i}{z-2+i}$.

1. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'
2. En déduire puis construire l'ensemble des points M(z) tel que :

a. z' soit un réel négatif .

b. z' soit un imaginaire pur

c. $|z'| = 1$, d. $|z'| = 2$; e. $|z+3-4i| = 3$.

Exercice 2

On considère le nombre complexe :

$z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1)a)Déterminer le module et un argument de z^2 .

b)En déduire le module et un argument de z.

2)Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{19\pi}{12}$ et $\sin\frac{19\pi}{12}$.

3)Résoudre dans IR l'équation :

$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x - \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 3

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm). On considère les suites (U_n) et (V_n) définies respectivement par : $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $V_n = \frac{n\pi}{3}$. On désigne par M_n le pont d'affixe z_n où $z_n = U_n e^{iV_n}$.

1) a) Quelle est la nature des suites (U_n) et (V_n) ?

b) Pour quelles valeurs de n z_n est-il réel ?

2) a) Représenter les points M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 dans le repère.

b) Démontrer que le triangle $0M_nM_{n+1}$ est rectangle en M_{n+1}.

3) a) Soit (a_n) la suite définie par : $a_n = |z_{n+1} - z_n|, \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que a_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$$

Exercice 4

On définit les nombres complexes z_n de la manière suivante : $z_0=1$ et $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$

1)Pour tout entier naturel n ,on pose $u_n = z_n - i$.

a)Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

b)Montrer par récurrence que pour tout n, $u_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2)Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de u_n. Calculer les limites des suites (x_n) et (y_n)

3)On note A_n le point d'affixe u_n et B_n le point d'affixe z_n.

a)Calculer le module et un argument de u_n. Montrer que les points A_n sont alignés.

b)Montrer que les points B_n sont alignés.

Exercice 5

1°/ Montrer que : $1 + e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

$1 - e^{i\alpha} = -2i\sin(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$

2°/ Résoudre dans **C** :

a) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$ où $n \in \mathbf{N}^*$

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0$ (on pourra utiliser le 1°/ pour donner une écriture simple des solutions).

Exercice 6

On considère le polynôme P défini sur C par :

$P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$.

1°) Justifier que : $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

En déduire que si z_0 est une racine de P, alors son conjugué est aussi une racine de P.

2) a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.

b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.

3) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $-2i$, $2i$, $-1 + i$ et $-1 - i$.

a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.

b) Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.