Lycée BILLES
Bilingual Lycee of Excellence in Sciences
Lycée Bilingue d'Excellence pour les Sciences

Devoir de mathématiques N°4/ TS1/ Durée 4h **11 décembre 2021**

Exercice 1 (3,75 points)

Soit le polynôme de la variable complexe z : P(z) = $z^3-(3+2i)z^2+(3+5i)$z -2-6i.

1. a. Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0. **(1,5 pt)**

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u},\vec{v}$), on considère les points A($2i$) , B($2+i$) et C(1-i).

   a. Calculer le module et un argument de $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$. **(0,25 pt+0,25 pt)**

   b. En déduire la nature du triangle ABC. **(0,5 pt)**

   c. Soit le point D(-i). Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (3,5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2e^{i\alpha}z+2e^{i2\alpha}=0$, $\alpha\in[0,\pi]$. **(0,75 pt)**
2. Ecrire les solutions sous forme exponentielle. **(1 pt)**
3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u},\vec{v}$), soit A et B les points d'affixes respectives z_A= (1-i)$e^{i\alpha}$ et z_B= (1+i)$e^{i\alpha}$.

a. Montrer que A et B appartiennent à un cercle de centre O dont on précisera le rayon. **(0,5 pt)**

b. Montrer que $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\alpha+\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ **(0, 5 pt)**

c. Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite (Δ) d'équation y = x. **(0,75 pt)**

Exercice 3 (3,5 points)

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2};1\right]$ par : f(x) = $\frac{1}{\cos\pi x}$

1. Etudier la dérivabilité de f. **(0,5 pt)**
2. Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. **(0,75 pt+0,25 pt)**
3. Montrer que f est une bijection de $\left]\frac{1}{2};1\right]$ sur un intervalle J à préciser. **(0, 25 pt)**
4. a. Etudier la dérivabilité de f^{-1}, bijection réciproque de f. **(0, 5 pt)**

   b. Montrer que $\forall\in\,]-\infty,-1[$, $(f^{-1})'(x)=\frac{-1}{\pi x\sqrt{x^2-1}}$. **(0, 75 pt)**

   c. Dresser le tableau de variation de f^{-1}. **(0, 5 pt)**

Problème (09,25 points)

Partie A (3 points)

Soit g la fonction définie par $g(x) = -x^3 + 3x - 6$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. **(1 pt + 0, 25 pt)**
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. **(0,5 pt)**
3. Montrer que $\alpha \in]-3; -2[$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près. **(0,25pt +0,5 pt)**
4. Déterminer le signe de $g(x)$. **(0,5 pt)**

Partie B (6,25 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^3+3}{x^2-1}$.

1. Etudier la dérivabilité de f. **(0,5 pt)**

2. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble de dérivabilité de f. Montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. **(0,75 pt)**

3. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. **(0,5 pt + 0,25 pt)**

4. Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f). **(0,25 pt)**

   b. Préciser les autres asymptotes de (C_f). **(0,5 pt)**

   c. Étudier la position relative de (C_f) par rapport à (D). **(0,75 pt)**

   d. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse – 4. **(0,25 pt)**

   e. Construire (C_f), (D) et (T). **(1, 5 pt)**

4. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

   a. Montrer que h est une bijection de $]1 ; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer. **(0,5 pt)**

   b. Construire (C') la courbe représentative de h^{-1} dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5 pt)**