Devoir de mathématiques N°9/ TS1/ Durée 4h **21 mai 2022**

Exercice 1 (4 points)

Devoir de mathématiques N°9/ TS1/ Durée 4h **21 mai 2022**

Exercice 1 (4 points)

1. Pour n$\in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6} calculer le reste de la division euclidienne de la division de 3^n par 7. **(0,75 pt)**

2. a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. **(0,5 pt)**

   b. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste lorsqu'on les divise par 7. **(0,25 pt)**

   c. Déterminer le reste de la division de 3^{1000} par 7. **(0,75 pt)**

3. Déterminer les restes de la division de 3^n par 7. **(1 pt)**

4. Soit u_n =1+3+...+3^{n-1} ; n entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que si 7 divise u_n alors 7 divise $3^n - 1$. **(0,75 pt)**

Exercice 2 (5,5 points)

Dans le plan orienté (P) on considère un rectangle ABCD tel que AB =2 et BC = 4 cm et

$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

Soit M le milieu de [BC].Les droites (AB) et (DM) se coupent en I.

1. Faire la figure en considérant le côté [AB] horizontal.
   On complétera la figure au cours de l'exercice. **(0,75 pt)**
2. a)Montrer qu'il existe une unique similitude s telle que s(A) = M et s(B) = D. **(0,25 pt)**

   b) Déterminer le rapport et l'angle de s. **(0,5 pt +0,5 pt)**

3. Soit Ω le centre de s.

a. Démontrer que les points A, Ω, M et I sont cocycliques. **(0,5 pt)**

b. En déduire que BM =B Ω = BA. **(0,75 pt)**

c. Démontrer que DM = D Ω. **(0,5 pt)**

d. En déduire que Ω est le symétrique de M par rapport à la droite (BD). **(0,25 pt)**

3. Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormal direct $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD'}\right)$.

a) Déterminer l'écriture complexe de s et l'affixe de Ω. **(0,75 pt+ 0,25 pt)**

b) Vérifier que Ω est le symétrique de M par rapport à la droite (BD) en montrant que BM =B Ω et que les droites (Ω M) et (BD) sont perpendiculaires. **(0,5 pt)**

<u>Problème:</u> (10,5 points)

Pour tout entier naturel n non nul, soit la fonction f_n définie sur IR par : $f_n(x) = x^n e^{-x}$ et C_n sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

<u>Partie A :</u> (6,25 points)

1. Calculer $f_n'(x)$ pour tout réel x et préciser $f_n'(0)$ lorsque n =1 puis lorsque n ≥ 2. **(0,5 pt+0,5 pt)**
2. Dresser le tableau de variation de f_1 et de f_n pour n ≥ 2. **(0,75+1,25 pt)**
3. Montrer que pour tout n≥1, pour tout réel x de [0 ; +∞[: $f_n(x) \leq n^n e^{-n}$. **(0,25 pt)**
4. a) Etudier la position relative des courbes C_1 et C_2. **(0,5 pt)**

   b) Construire C_1 et C_2 sur la même figure. **(2,5 pts)**

Partie B (1,25 points)

Pour tout nombre réel x on pose $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

1. a. Déterminer les nombres réels a_0 , a_1 ,.., a_n tels que la fonction G définie par

$G(x) = e^{-x}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$, soit une primitive de f_n sur $[0 ; +\infty[$. **(0,5 pt)**

b. En déduire que : $F_n(x) = -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + n!\,x + n!) + n!$. **(0,5 pt)**

2. L'entier naturel n étant donné, montrer que $F_n(x)$ admet une limite I_n lorsque x tend vers $+\infty$ tel que $I_n = n!$ **(0,5 pt)**

Partie C (3 points)

On se propose d'encadrer I_n par une méthode directe indépendante des résultats du 1.

1. A l'aide du A) 3. ; montrer que $\int_0^{2n} f_n(x)dx \leq (2n)\, n^n e^{-n}$. **(0,25 pt)**

   Montrer que pour tout $x \geq 2n$, $\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-\frac{x}{2}} \leq n^n e^{-n}$ et que $f_n(x) \leq (2n)^n\, e^{-n} e^{-\frac{x}{2}}$. **(0,25 pt+0,25pt)**

2. En déduire que pour tout $x \geq 2n$, $\int_{2n}^{x} f_n(t)dt \leq 2\,(2n)^n e^{-2}$. **(0,5 pt)**
3. Déduire de 1) et 2) une majoration de $F_n(x)$ lorsque $x \geq 2n$. **(0,25 pt)**
4. Montrer que $I_n \leq 2n^n e^{-n}\left[n + \left(\frac{2}{e}\right)^n\right]$. **(0,25 pt)**
5. Montrer que : $(n+1)^n e^{-n-1} \leq \int_n^{n+1} x^n e^{-x}dx \leq I_n$. **(0,5 pt)**
6. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{\ln(I_n) - n\ln(n)}{n}$; n non nul.

Déterminer la limite de la suite (u_n). **(0,75 pt)**