Devoir de mathématiques N°6/ TS1/ Durée 3h **11 Février 2022**

Exercice 1 (5,5 points)
Exercice 4
Dans le plan, soit ABC un triangle tel que AB = AC = 4a et BC = 2a, a réel, a> 0.
1.a)Déterminer l'ensemble D des nombres réels θ tels que les points A, B, C affectés respectivement des coefficients θ, 1,1 admettent un barycentre noté G_θ. **(0,25 pt)**
b) Déterminer l'ensemble des barycentres G_θ obtenus lorsque θ décrit D ? **(0,75 pt)**
2. On pose θ = -1. On note G le barycentre des points pondérés (A ;-1), (B ;1) et (C ;1).
Détermine l'ensemble (E) des points M tels que : $\|\overrightarrow{MB}\|^2+\|\overrightarrow{MC}\|^2=\|\overrightarrow{MA}\|^2$ **(2 pt)**
3. On pose θ = -2.
a. Démontrer que pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}$ est constant que l'on déterminera. **(1 pt)**
b. Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MB}\|^2+\|\overrightarrow{MC}\|^2-2\|\overrightarrow{MA}\|^2=32a^2$. **(1,5 pt)**

<u>Problème:</u> (14,5points)

<u>Partie A :</u> (02,5 points)

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I= $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par : g(x) = ln(1+x) –x+ $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$.

1) a) Démontrer que pour tout t de I, on a : $g'(t)=\frac{-t^3}{1+t}$ **(<u>0, 75 pt</u>)**

b) Montrer que pour tout t de I, on a : $|g'(t)|\leq 2|t^3|$ **(<u>0,75 pt</u>)**

2) Démontrer que pour tout x de I, on a : $|g(x)|\leq\frac{x^4}{2}$. **(<u>1 pt</u>)**

(0n distinguera deux cas suivant le signe de x.)

<u>Partie B :</u> (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur]−1,+∞[par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}, & \text{si } x\neq 0\\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$

On note (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité : 2cm).

1)a) Vérifier, pour tout $x\geq-\frac{1}{2}$ et $x\neq 0$, que $f(x)=-\frac{g(x)}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$. **(<u>0,25 pt</u>)**

b) En utilisant les résultats trouvés en A.2) et B.1.a), étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

(<u>0,25 pt+0,5 pt</u>)

c) Préciser une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0. **(<u>0,25pt</u>)**

2) Soit h la fonction définie sur]−1,+∞[par : $h(x)=\frac{-x^2-2x}{1+X}+2\ln(1+x)$.

a) Etudier le sens de variations de h. **(0,75 pt)**

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $]-1,+\infty[$. **(0,5 pt)**

c) Démontrer que pour tout x ϵ $]-1, 0[\cup]0,+\infty[$, on : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$. **(0,5 pt)**

d) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis dresser le tableau de variation complet de f. **(0,5 pt+ 0,5 pt)**

3) Construire (C_f) et la tangente (T) (On précisera les asymptotes de (C_f)). **(1,5 pt)**

Partie C : (03,5 points)

1. a) Démontrer que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, on $-t^2 \leq h'(t) \leq 0$. **(0,5 pt)**

b) En déduire par intégration, pour tout x de $[0,+\infty[$ un encadrement de h(x). **(0,75 pt)**

c) Démontrer que pour tout x de $[0,+\infty[$; on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$. **(0,5 pt)**

2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(x) = f(x) - x$

a) Démontrer que φ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. **(0,5 pt)**

b) En déduire que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$. **(0,75 pt)**

c) Montrer que si $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ alors $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$. **(0, 5 pt)**

Partie D : (03 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; n ∈ IN

1. Démontrer que, $\forall$ n ∈ $\mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leq u_n \leq 1$. **(0,5 pt)**

2. Démontrer que $\forall$ n ∈ IN, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|$. **(0, 75 pt)**

3. a) Démontrer que $\forall$ n ∈ IN, $|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3^n}\right)$. **(0,75 pt)**

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. **(0,75 pt)**

c) Déterminer un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près. **(0,25pt)**