## IV. Notion de variable aléatoire :

### 1. Définition, Vocabulaire, Notation

**a. Activité**

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Un résultat est modélisé par (A, B, C) où A, B, C représente respectivement le résultat du premier, du deuxième et troisième lancé. On note face par F et pile par P. Soit X le nombre de piles obtenues à la fin de l'expérience.

Construire l'arbre représentant les résultats possibles.

Préciser les valeurs possibles de X.

Soit x une valeur prise par X. On note $(X=x_i)$ l'évènement « obtenir $x_i$ Piles ».

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en rangeant les $x_i$ dans un ordre croissant :

| x | … | … | … | … |
|---|---|---|---|---|
| P(X= x) | … | … | … | … |

**b. Définition**

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ; l'univers associé à une expérience aléatoire. Si à chaque éventualité $\{\omega_i\}$ , on associe un nombre réel, on dit qu'on définit une variable X aléatoire de $\Omega$ dans IR.

$$X: \Omega \to \mathrm{IR}$$
$$\{w\} \mapsto x$$

**Remarque**

Une variable aléatoire est une application de $\Omega$ dans IR.

**Notation**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant.

On note $X(\Omega) =\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$.

L'ensemble des éventualités pour lesquelles X prend la valeur $x_i$ est l'évènement noté $(X = x_i)$.

$(X = x_i)$ est l'ensemble des antécédents de $x_i$ par X.

### 2. Loi de probabilité

**Définition**

**Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs** $x_1, x_2, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant. Si à chaque valeur $x_i$, on associe la probabilité $p_i = P(X = x_i)$, on définit la loi de probabilité de X.

Généralement la loi de probabilité de X est présentée sous forme de tableau :

| x | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | $x_{i+1}$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P(X= x) | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_i$ | $p_{i+1}$ | … | $p_n$ |

**Remarque :**

$(X= x_1)\cup (X= x_2)\cup\dots \cup(X= x_n)$ est l'évènement certain.

Donc : $p_1+ p_2+ p_3+\dots + p_n = 1$

**Exemple**

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires indiscernables au toucher.

On tire simultanément 3 boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X.

**Résolution**

Soit $\Omega$ l'univers ; card $\Omega = C_{10}^3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

La variable aléatoire X prend les valeurs : 0, 1, 2 et 3.

P(X= 0) est la probabilité de tirer 3 boules rouges.

$P(X= 0) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{C_4^1}{120} = \frac{1}{30}$

P(X= 1) est la probabilité de tirer 1 boule noire et 2 boules rouges.

$P(X= 1) = \frac{C_6^1\times C_4^2}{120} = \frac{6\times4\times3}{2\times1} \times \frac{1}{120} = \frac{3}{10}$

P(X= 2) est la probabilité de tirer 2 boules noires et 1 boule rouge.

P(X= 2) = $\frac{C_6^2 \times C_4^1}{120} = \frac{6\times5\times4}{2\times1} \times \frac{1}{120} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

P(X= 3) est la probabilité de tirer 3 boules noires.

P(X= 3) = $\frac{C_6^3}{120} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{1}{120} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X= $x_i$) | $\frac{1}{30}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

**3. Espérance, variance, Ecart-type d'une variable aléatoire**

**a. Définitions**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2,\dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2,\dots, p_n$ .

- **L'espérance mathématique** de X, le nombre noté E(X) défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

- La **variance** de X est le nombre noté V(X) défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(X))^2.$$

- L'**écart-type** de X est la racine de la variance de X noté $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Exemple**

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-dessous :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X= $x_i$) | $\frac{1}{30}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

L'espérance mathématique de X :

E(X) = $0\times\frac{1}{30} + 1\times\frac{3}{10} + 2\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{1}{6} = 1{,}8$

La variance de X :

V(X) = $\frac{1}{30}\times(0-1{,}8)^2 + \frac{3}{10}\times(1-1{,}8)^2 + \frac{1}{2}\times(2-1{,}8)^2 + \frac{1}{6}\times(3-1{,}8)^2 \approx 0{,}56$

L'écart-type de X :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx \sqrt{0{,}56} = 0{,}75$

**b. Propriété**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2,\dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2,\dots, p_n$ et d'espérance mathématique E(X) alors

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,x_i^2 - (E(X))^2$$

**Preuve :**

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(\,x_i^2 - 2x_iE(X) + (E(X))^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_i\,x_i^2 - 2p_ix_iE(X) + p_i(E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + (E(X))^2\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2E(X) \times E(X) + (E(X))^2 \times 1$$
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$$

**Exemple**

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-dessous :

| $x_i$ | $-1$ | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X= x_i)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

L'espérance mathématique de X :

$E(X) = -1 \times \frac{1}{5} + 2\times \frac{7}{10} + 3\times \frac{1}{10} = 1{,}5$

La variance de X :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i\, x_i^2 - (E(X))^2 = (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{7}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} - 1{,}5^2$$

V(x) = 1,65

## 4. Loi binomiale

### a. Définition

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès. dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

### b. Propriétés

**Propriété 1**

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p alors :

- pour tout entier naturel k tel que $k \leq n$, $P(X= k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$.

**Exemple**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,15.

On a : n = 5 et p =0 ,15

L'espérance mathématique de X est :

$E(X) = 5\times 0{,}15 = 0{,}75$

La variance de X est :

$V(X) = 5\times 0{,}15 \times (1 - 0{,}15) = 0{,}6375$

## 5. Fonction de répartition

### a. Activité

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-dessous :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X= x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |

Soit x un nombre réel. On pose $F(x) = P(X \leq x)$.

Si $x < 0$, préciser exactement l'évènement $(X \leq x)$ (X prend des valeurs inférieures ou égales à x.) et en déduire F(x).

Si $0 \leq x < 1$, écrire l'évènement $(X \leq x)$ en fonction d'évènements élémentaires de X et en déduire F(x).
Si $1 \leq x < 2$ alors exprimer l'évènement $(X \leq x)$ en fonction d'évènements élémentaires de X et en déduire F(x).
Si $x \geq 2$ alors exprimer l'évènement $(X \leq x)$ en fonction d'évènements élémentaires de X et en déduire F(x).

**b. Définition**

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers. On appelle fonction de répartition de X l'application

$$F : IR \rightarrow [0\,;\,1]$$
$$x \mapsto P(X \leq x)$$

**c. Détermination et représentation graphique de F :**

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-dessous :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_i$ | $x_{i+1}$ | … | $x_n$ |
| P(X= x) | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_i$ | $p_{i+1}$ | … | $p_n$ |

$D_F$ = IR, pout réel x, F(x) =P(X$\leq$ x).
Si $x < x_1$ alors F(x) = 0
si $x_1 \leq x < x_2$ alors F(x) = $p_1$
si $x_2 \leq x < x_3$ alors F(x) = $p_1 + p_2$
……………………………………
si $x_i \leq x < x_{i+1}$ alors F(x) = $p_1 + p_2 + \ldots + p_i$
……………………………………
si $\geq x_n$ alors F(x) = $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Soit $(C_F)$ la courbe représentative de F dans un repère orthogonal.
F est une fonction constante par intervalle et $(C_F)$ est en forme « d'escalier ».

**Exemple**

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau ci-dessous.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P(X= $x_i$) | $\frac{1}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par F(x)= P(X$\leq$ x).
Si $x < 0$ alors F(x) = 0
si $0 \leq x < 1$ alors F(x) = $\frac{1}{7}$
si $1 \leq x < 2$ alors F(x) = $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$
si $2 \leq x < 3$ alors F(x) = $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$
si $\geq 3$ alors F(x) = $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = 1$.