DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°7 - MAI 2022
DUREE 04 HEURES

EXERCICE 1 : (10 points)

Partie 1

On considère les deux fonctions f et g définie par $g(x) = \frac{-4}{x}$ et $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = g(x+a) + b$
2) En déduire la transformation permettant de construire Cf à partir de Cg
3) Construire dans le même repère les courbes Cg et Cf
4) Montrer que le point $A(-1,3)$ est centre de symétrie de Cf.

Partie 2

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_o = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{U_n + 1} \end{cases}$

1°) a) Représenter graphiquement les termes U_1, U_2, U_3, sur l'axe (ox) d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ à l'aide de la courbe Cf d'une fonction f bien choisie en utilisant la courbe de la fonction f construite à la partie 1. .

b) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de (U_n) ?

c) Démontrer par récurrence que $U_n > 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

d) Démontrer par récurrence la conjecture faite sur le sens de variation de (U_n)

2°) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de U_n

b) Démontrer que V_{n+1}-V_n est constante et en déduire la nature de la suite (V_n)

c) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n.

d) On pose $S_n = V_o + V_1 + \ldots\ldots + V_{n-1}$; exprimer S_n en fonction de n

e) (Un) est-elle convergente ?

Exercice 2 (07 Pts)

Calculer la limite de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$, $x_0 = -\infty$ *puis* $x_0 = +\infty$

2) $f(x) = \frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}$, $x_0 = 1$ $puis$ $x_0 = -1$ (calculer la limite à gauche et la limite à droite en -1)

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$, $x_0 = 0$ $puis$ $x_0 = -\infty$

4) $f(x) = \frac{1-\sqrt{2}cosx}{1-\sqrt{2}sinx}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (Poser $t = x - \frac{\pi}{4}$)

<u>EXERCICE 3</u> : (03 points)

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1-\sqrt{|x^2-1|}} \; si\; x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1) A l'aide d'un tableau, écrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue suivant les valeurs x.
2) Etudier la continuité de f en 1.

Bonne inspiration !