TS1/ Arithmétique

Exercice 1

Soit n un entier naturel.

1) Vérifier que $n^3 - n = (n+2)(n^2 - 2n + 3) - 6$.

2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\frac{n^3 - n}{n+2}$ est un entier.

Exercice 2

1) Démontrer que $a \mid b$ si et seulement si pour tout k de $\mathbb{Z}$: $a \mid (b - ka)$.

2) Déterminer les entiers relatifs a, tels que $(a-5) \mid (a+7)$.

3) Déterminer les entiers relatifs b, tels que $(b+2) \mid (4b-6)$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations :

1) $x^2 - y^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 13$; 3) $x^2 - y^2 = p$, où p est un nombre premier.

Exercice 4

Déterminer le reste de la division euclidienne de :

a. 35^{27} par 7; b. 69^{35} par 11; c. 77^{20} par 13.

Exercice 5

1) Vérifier que $1000 \equiv 1\ [37]$ et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1\ [37]$.

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 6

1) Vérifier que $1000 \equiv -1\ [13]$

2) En déduire selon la parité de n les restes de la division de 10^{3n} par 13.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

Exercice 7

1) Vérifier que 999 est divisible par 27.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1\ [27]$.

3) $A = 10^{100} + 100^{10}$. Quel est le reste de la division euclidienne de A par 27 ?

Exercice 8

1) Montrer que $3^5 \equiv 1\ [11]$.

2)a)En déduire que, pour tous entiers naturels k et r, $3^{5k+r} \equiv 3^r\ [11]$.

b) Soit n un entier naturel. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^n par 11 ?

3) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3^n + 7$ soit divisible par 11.

Exercice 9

Déterminer les entiers n tels que $N = n^2 - 3n + 6$ soit divisible par 5.

Exercice 10

Pour quelles valeurs de n entier naturel :

1) $5^{2n} + 5^n + 1$ est un multiple de 3 ?
2) $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7 ?

Exercice 11

1) Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme $5n-1$ ou $5n$ ou $5n+1$.

2) Démontre que le cube de tout entier naturel est de la forme $7n-1$ ou $7n$ ou $7n+1$.

Exercice 12

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $7^{3n} \equiv 1\ [19]$.

2) Démontrer que, quels que soient les entiers naturels n et k , on a $7^{3n+k} \equiv 7^k\ [19]$.

Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 7^n par 19 ?

3) Démontrer que si a, b, c sont trois entiers naturels consécutifs, alors $7^a + 7^b + 7^c$ est un multiple de 19.

Exercice 13

1) Vérifier que 7 divise les nombres : 2^6-1 ; 3^6-1 ; 4^6-1 ; 5^6-1.
2) Soit n un entier naturel et A_n défini par :
   $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.

Montrer que $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7.

3) Soit n un entier naturel, q et r son quotient et son reste, dans la division euclidienne par 6.

Montrer que A_n et A_r ont même reste dans la division euclidienne par 7.

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7.

5) Soit $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

a) Montrer que $A_n \equiv B_n\ [7]$.

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7.

Exercice 14 :

Calculer le PGCD de :

a) 171 et 99 ; b) 924 et 336 ;
c) 480 et 57 ; d) 227 et 3325.

Exercice 15

Deux entiers a et b ont pour PGCD δ. Quel est le PGCD des entiers :

1) $x = 7a + 3b$ et $y = 2a + b$;
2) $x = 13a + 5b$ et $y = 5a + 2b$.

Exercice 16

Soit n un entier naturel non nul.

1) Démontre que les entiers n et n +1 sont premiers entre eux.

2) En déduire que la fraction $\frac{n}{2n+1}$ est irréductible.

Exercice 17

Soit n un entier naturel non nul.

On pose $a = 2n-1$ et $b = 9n + 4$).

1) Démontrer que le PGCD de a et b est un diviseur de 17.
2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers n pour lesquels le PGCD de a et b est 17.

Exercice 18

Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que les nombres suivants sont premiers entre eux :
a) n et n+1 ; b) 3n+1 et 9n+4 ; c) 3n+2 et 2n+1 ;
d) 2n+1 et n(n+1) ; e) 2n +5 et n^2+5n+6.

Exercice 19

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de chacune des équations suivantes :
a) $24x + 17y = 1$; b) $59x + 68y = 1$;
c) $137x - 191y = 1$; d) $1274x - 275y = 1$

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations :
a) $11x = 16y$; b) $65x + 25y = 0$; c) $9x + 21y = 0$.

Exercice 21

1)a)Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres 37 et 23.
b) En déduire une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $37x + 23y = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $37x + 23y = 1$.

Exercice 22

1)a)Déterminer une solution particulière dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $41x - 27y = 1$;
b) En déduire une solution particulière, dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $41x - 27y = 5$
2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $41x - 27y = 5$.

Exercice 23

On désigne par S l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{Z}$, de l'équation : $138x - 55y = 5$ (E).
1)a)Montrer que si (x ;y) est un élément de S, alors x est divisible par 5.
b) En déduire une solution (x_o,y_o) de (E).
2) Résoudre (E).
3) k est un entier naturel, on considère les nombres :
$a = 55k + 10$ et $b = 138k + 25$.
a) Montrer que, pour tout entier naturel k, (a ;b) appartient à S.
b) En déduire les valeurs possibles de PGCD(a ;b).
c) Déterminer pour quelles valeurs de k :
PGCD(a ;b) = 5.

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
a) $14x \equiv 3$ [4] ; b) $6x \equiv 3$ [4] ; c) $3x \equiv 1$ [5].

Exercice 25

1) Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 5 ; 13 ; 17 lorsqu'on le divise respectivement par : 15 ; 23 ; 27.
2) Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 8 ; 12 ; 18 lorsqu'on le divise respectivement par : 14 ; 18 ; 24.

Exercice 26

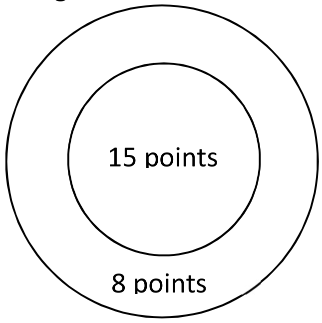
Une entreprise fabrique des savons de forme cubique et dispose de caisses de dimensions 48cm × 84cm × 60cm. Quelle est la plus grande dimension à donner à un savon afin de pouvoir remplir exactement une caisse ?

Exercice 27

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par
$u_o = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in \mathbb{N}$
1) Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. Quelle conjecture peut-on faire émettre concernant les derniers chiffres de u_n ?
2)a)Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].
b) En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_{2k} \equiv 2$ [4] et $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].
3)a)Montrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28$ [100].
4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 22

1) Trouver une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E_1) : $15x + 8y = 1$.
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_2) : $15x + 8y = 1000$;
3) De combien de façons peut-on obtenir exactement 1000 points en lançant des fléchettes sur la cible ci-dessous ? (le nombre de fléchettes n'est pas limité et on suppose qu'elles atteignent toutes les cibles.)



15 points pour une fléchette qui atteint le disque central et 8 points pour une fléchette qui atteint la couronne.

Exercice 28

Déterminer l'écriture en base cinq de :
a) 126 ; b) 221 ; c) 1000.

Exercice 29

Ecrire dans le système à base seize, à base deux, et à base cinq le nombre 1238.

Exercice 30

Un nombre s'écrit $\overline{11011}$ en base deux, l'écrire en base dix, en base cinq et en base seize.

Exercice 31

Un nombre s'écrit $\overline{3BD}$ en base seize, l'écrire en base dix, en base deux et en base cinq.