Индивидуальное домашнее задание №2 по дисциплине «Уравнения математической физике»

Вариант 6

Держапольский Юрий Витальевич

Задание 1

Найти собственные функции $y_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, оператора:

$$\begin{cases} y'' + 3y = \lambda y, \quad x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$y'' + (3 - \lambda)y = 0; \quad k^2 + (3 - \lambda) = 0; \quad k = \pm\sqrt{\lambda - 3}$$

$$\sqsupset \lambda - 3 = -\mu^2; \quad k_{1,2} = \pm\mu i$$

$$y(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x; \quad y'(x) = C_1\mu \cos \mu x - C_2\mu \sin \mu x$$

$$y(0) = C_2 = 0; \quad y'(1) = C_1\mu\cos\mu = 0 \Rightarrow \mu_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k = 0, 1, \ldots$$

$$y_k(x) = C_1 \sin\big((0.5 + k)\pi x\big)$$

Нормируем систему:

$$\overline{y_k}(x) = \frac{y_k}{||y_k||} = \frac{C_1 \sin\big((0.5+k)\pi x\big)}{\sqrt{C_1^2 \int_0^1 \Big(\sin^2\big((0.5+k)\pi x\big)\Big)\, dx}} = \star$$

$$\int_0^1 \sin^2\big((0.5+k)\pi x\big)\, dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos\big((1+2k)\pi\big)}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sin(\pi + 2\pi k)}{2(\pi + 2\pi k)} = \frac{1}{2}$$

$$\star = \frac{\sin\big((0.5+k)\pi x\big)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\sin\big((0.5+k)\pi x\big)$$

Задание 2

Разложить функцию $f(x) = x(1-x)^4$ в ряд Фурье по собственным функциям y_k. Построить графики функции и ряда Фурье для пяти гармоник.

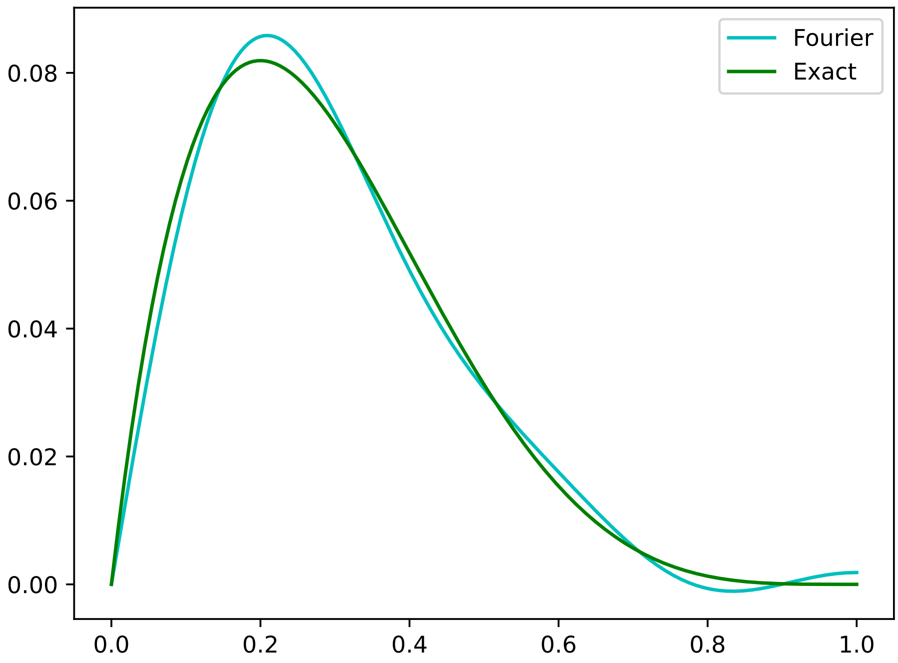
Поскольку система нормированная, то

$$C_k = \frac{(f, y_k)}{(y_k, y_k)} = (f, y_k) = \int_0^1 \left(x(1-x)^4 \cdot \sqrt{2} \sin\left((0.5+k)\pi x\right) \right) dx$$

Посчитаем первые 5 коэффициентов:

k	0	1	2	3	4
C_k	$0.01975\ldots$	$0.03419\ldots$	$0.01953\ldots$	$0.00756\ldots$	$0.00378\ldots$

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{4} \left(C_k \cdot \sqrt{2} \sin\left((0.5+k)\pi x\right) \right)$$



Задание 3

Проверить равенство Парсеваля: $||f||^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^2$ с точностью до 10^{-3}.

$$||f||^2 \approx 0.002020202\ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{4} C_k^2 \approx 0.002012635\ldots,$$

$$\left| ||f||^2 - \sum_{k=0}^{4} C_k^2 \right| \approx 7.566271 \cdot 10^{-6}$$