



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

Модели конкуренции в экологии и экономике

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор д.ф.-м. н.

Абакумов А. И.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 5 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1	Введение	3
2	Модель Лотки-Вольтерры	4
2.1	Математическая модель	4
2.2	Анализ модели	5
3	Модель Колмогорова	9
3.1	Математическая модель	9
3.2	Анализ модели	10
4	Вычислительные эксперименты	13
4.1	Модель Лотки-Вольтерры	13
4.1.1	При вымершей первой популяции	14
4.1.2	При вымершей второй популяции	15
4.1.3	При вымершей третьей популяции	16
4.1.4	Несколько изначально не вымерших популяций	17
4.2	Модель Колмогорова	18
4.2.1	При вымершей первой популяции	18
4.2.2	При вымершей второй популяции	18
4.2.3	При вымершей третьей популяции	19
4.2.4	Несколько изначально не вымерших популяций	19
5	Заключение	20

1. Введение

2. Модель Лотки-Вольтерры

2.1. Математическая модель

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_2(x_2) + k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x}_3 = -\varepsilon_3(x_3) + k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3. \end{cases}$$

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$, где $k_{ij} > 0$.

Примем функции в системе за линейные функции:

$$\varepsilon_i(x_j) = \varepsilon_i \cdot x_j, V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \varepsilon_i, \alpha_{ij} > 0$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_2 x_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = -\varepsilon_3 x_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 x_3. \end{cases}$$

2.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Т.е. нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3 = 0, \\ \varepsilon_2 x_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 x_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(\varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) = 0, \\ x_2(\varepsilon_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) = 0, \\ x_3(-\varepsilon_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 + k_{23} \alpha_{23} x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если две любых переменных равны нулю, то в оставшейся строчке остаётся уравнение $\varepsilon_i x_i = 0$, т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

2. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(0, \frac{\varepsilon_3}{k_{23} \alpha_{23}}, \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} \right)$$

3. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{\varepsilon_3}{k_{13} \alpha_{13}}, 0, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} \right)$$

4. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 = 0, \\ \varepsilon_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \left(-\frac{\varepsilon_2}{k_{12} \alpha_{12}}, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}}, 0 \right)$$

5. Если $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ \varepsilon_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 + k_{23} \alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение $x^{(4)}$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\varepsilon_1 \alpha_{23} k_{23} + \varepsilon_2 k_{23} \alpha_{13} + \varepsilon_3 \alpha_{12}}{\alpha_{12} \alpha_{13} (k_{13} - k_{12} k_{23})}, \\ x_2 = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}} x_3 = \frac{\varepsilon_1 \alpha_{23} k_{13} - \varepsilon_2 \alpha_{13} k_{13} - \varepsilon_3 \alpha_{12} k_{12}}{\alpha_{12} \alpha_{23} (k_{13} - k_{12} k_{23})}, \\ x_3 = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} + \frac{k_{12} \alpha_{12}}{\alpha_{23}} x_1 = \frac{-\varepsilon_1 \alpha_{23} k_{12} k_{23} + \varepsilon_2 \alpha_{13} k_{13} + \varepsilon_3 \alpha_{12} k_{12}}{\alpha_{13} \alpha_{23} (k_{13} - k_{12} k_{23})}. \end{cases}$$

Получили все точки. Для анализа устойчивости в этих точках воспользуемся методом первого приближения. Найдём матрицу Якоби:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3 & -\alpha_{12} x_1 & -\alpha_{13} x_1 \\ k_{12} \alpha_{12} x_2 & \varepsilon_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 & -\alpha_{23} x_2 \\ k_{13} \alpha_{13} x_3 & k_{23} \alpha_{23} x_3 & -\varepsilon_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 + k_{23} \alpha_{23} x_2 \end{pmatrix}$$

После чего подставляем значения точки равновесия и ищем собственные значения матрицы.

$$A = J \Big|_{x^*}, \quad \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы $\forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если $b_0 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Δ были положительны.

$$1. \quad J \Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0, \quad \lambda_2 = \varepsilon_2 > 0, \quad \lambda_3 = -\varepsilon_3 < 0.$$

Значит около начала координат решения будут расходиться по x_1, x_2 и сходиться по x_3 .

$$2. \quad A = J \Big|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} - \alpha_{13} \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & 0 & 0 \\ k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} & 0 & -\alpha_{23} \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} \\ k_{13}\alpha_{13} \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & k_{23}\alpha_{23} \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\varepsilon_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}} \right) \right) (\lambda^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\varepsilon_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}.$$

Точка $x^{(1)}$ – неустойчивая. В плоскости $x_1 = 0$ точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя циклы, а в некоторой близости от этой плоскости циклы будут двигаться в некотором направлении, в зависимости от констант.

$$3. \quad A = J \Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} \right) \right) (\lambda^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}.$$

Аналогично предыдущей точке, $x^{(2)}$ – неустойчивая и в плоскости $x_2 = 0$ является центром и будет создавать вокруг себя циклы.

$$4. A = J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} & -\alpha_{13}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} \\ k_{12}\alpha_{12}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} & 0 & -\alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(-\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} \right) \right) (\lambda^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Точка $x^{(3)}$ – неустойчивая, но в плоскости $x_3 = 0$ является седлом по некоторым двум направлениям.

$$5. A = J\Big|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3) + \\ &+ x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0 \end{aligned}$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \leq 0. \end{cases}$$

3. Модель Колмогорова

3.1. Математическая модель

В модели Колмогорова для начала мы отказываемся от явного выражения функциональных зависимостей, ограничиваясь некоторыми качественными предположениями.

Первое предположение состоит в том, что в популяциях хищников отсутствует внутривидовая конкуренция.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(x_1)x_1 - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x}_2 = K_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x}_3 = K_{13}(x_1)x_3 + K_{23}(x_2)x_3. \end{cases}$$

Сформулируем остальные предположения:

1. $\varepsilon' < 0$; $\varepsilon(0) > \varepsilon(\bar{x}_1) = 0 > \varepsilon(\infty)$. Здесь у жертв ограниченное количество ресурса и за него существует конкуренция. Поэтому без хищников прирост жертв с увеличением их количества в некоторый момент прекратится и стабилизируется на уровне \bar{x}_1 .
2. $K'_{ij} > 0$; $K_{ij}(0) < K_{ij}(x_i^*) = 0 < K_{ij}(\infty)$. Это значит, что при увеличении численности жертв коэффициент естественного прироста хищников возрастает. Коэффициент переходит от отрицательных значения при недостатке пищи к положительным.
3. $V_{ij}(0) = 0$; $V_{ij}(x_i) > 0, x_i > 0$. Этот коэффициент показывает количество жертв, поглощаемых одним хищником.

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$.

3.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения и исследуем их устойчивость.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \varepsilon'(x_1)x_1 + \varepsilon(x_1) - V'_{12}(x_1)x_2 - V'_{13}(x_1)x_3 & -V_{12}(x_1) & -V_{13}(x_1) \\ K'_{12}(x_1)x_2 & K_{12}(x_1) - V'_{23}(x_2)x_3 & -V_{23}(x_2) \\ K'_{13}(x_1)x_3 & K'_{23}(x_2)x_3 & K_{23}(x_2) \end{pmatrix}$$

Нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(x_1)x_1 - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3 = 0, \\ K_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3 = 0, \\ K_{13}(x_1)x_3 + K_{23}(x_2)x_3 = 0. \end{cases}$$

1. Если $x_2 = x_3 = 0$, то остаётся уравнение

$$\varepsilon(x_1)x_1 = 0.$$

Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ и $x^{(1)} = (\bar{x}_1, 0, 0)$.

$$(a) \quad J \Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon(0) & 0 & 0 \\ 0 & K_{12}(0) & 0 \\ 0 & 0 & K_{23}(0) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \varepsilon(0) > 0, \quad \lambda_2 = K_{12}(0) < 0, \quad \lambda_3 = K_{23}(0) < 0.$$

Значит, в плоскостях $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ начало координат является седлом и направление x_1 – неустойчивое. В плоскости $x_1 = 0$ точка является устойчивым узлом.

$$(b) \quad J \Big|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon'(\bar{x}_1)\bar{x}_1 & -V_{12}(\bar{x}_1) & -V_{13}(\bar{x}_1) \\ 0 & K_{12}(\bar{x}_1) & 0 \\ 0 & 0 & K_{23}(0) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \varepsilon'(\bar{x}_1)\bar{x}_1 < 0, \lambda_2 = K_{12}(\bar{x}_1), \lambda_3 = K_{23}(0) < 0.$$

В зависимости от нахождения корня функции K_{12} данная точка может быть:

- i. Устойчивым узлом, если $K_{12}(\bar{x}_1) \leq 0$,
- ii. Устойчивым узлом в плоскости $x_2 = 0$ и седлом в плоскости $x_3 = 0$, если $K_{12}(\bar{x}_1) > 0$,

2. Если $x_1 = x_2 = 0$, то в третьей строчке получим

$$K_{13}(0)x_3 + K_{23}(0)x_3 = 0.$$

Поскольку $x_3 > 0$, то данное равенство не может быть выполнено.

3. Если $x_1 = x_3 = 0$, то во второй строчке получим

$$K_{12}(0)x_2 = 0.$$

Поскольку $x_2 > 0$, то равенство не может быть выполнено.

4. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} K_{12}(0)x_2 - V_{23}(x_2)x_3 = 0, \\ K_{13}(0)x_3 + K_{23}(x_2)x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{K_{12}(0)x_2}{V_{23}(x_2)} < 0, \\ x_2 = K_{23}^{-1}(-K_{13}(0)). \end{cases}$$

Поскольку функции $K_{ij}(x_i)$ при $x_i > 0$ монотонно возрастающие, то можно найти обратные к ним. Однако, получили противоречие, т.к. $K_{12}(0) < 0, V_{ij} > 0$, значит эта точка будет находиться вне исследуемой области.

5. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1)x_1 - V_{13}(x_1)x_3 = 0, \\ K_{13}(x_1)x_3 + K_{23}(0)x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{\varepsilon(x_1)x_1}{V_{13}(x_1)}, \\ x_1 = K_{13}^{-1}(-K_{23}(0)). \end{cases}$$

Поскольку $K_{ij} : [0, \infty] \rightarrow [-a, \infty]$, то $K_{ij}^{-1} : [-a, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, значит $x_1 > 0$. В исследуемой области данная точка будет находиться, если $x_1 \leq \bar{x}_1$.

$$J\Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon'(x_1)x_1 + \varepsilon(x_1) - V'_{13}(x_1)x_3 & -V_{12}(x_1) & -V_{13}(x_1) \\ 0 & K_{12}(x_1) - V'_{23}(0)x_3 & 0 \\ K'_{13}(x_1)x_3 & K'_{23}(0)x_3 & K_{23}(0) \end{pmatrix}$$

6. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 > 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1)x_1 - V_{12}(x_1)x_2 = 0, \\ K_{12}(x_1)x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\varepsilon(x_1)x_1}{V_{12}(x_1)}, \\ x_1 = K_{12}^{-1}(0). \end{cases}$$

В исследуемой области данная точка будет находиться, если $x_1 \leq \bar{x}_1$.

$$J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon'(x_1)x_1 + \varepsilon(x_1) - V'_{12}(x_1)x_2 & -V_{12}(x_1) & -V_{13}(x_1) \\ K'_{12}(x_1)x_2 & 0 & -V_{23}(x_2) \\ 0 & 0 & K_{23}(x_2) \end{pmatrix}$$

7. Если $x_1, x_2, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon(x_1)x_1 - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3 = 0, \\ K_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3 = 0, \\ K_{13}(x_1)x_3 + K_{23}(x_2)x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Модель Лотки-Вольтерры

Возьмём параметры для модели:

$$\xi_1 = 10, \xi_2 = 8, \xi_3 = 6,$$

$$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$$

$$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$$

При этом точка равновесия $x^{(4)} = (-3.458 \dots, 46.66 \dots, -150)$. Откуда получаем $b_3 = -22040 \Rightarrow \Delta_2 = 22040 > 0$. Значит, что по какой-то оси она будет устойчивая, по второй неустойчива, а по третьей устойчивость неизвестна. Однако, вероятно, это точка не будет иметь влияния, поскольку находится на большом удалении в отрицательных координатах.

4.1.1. При вымершей первой популяции

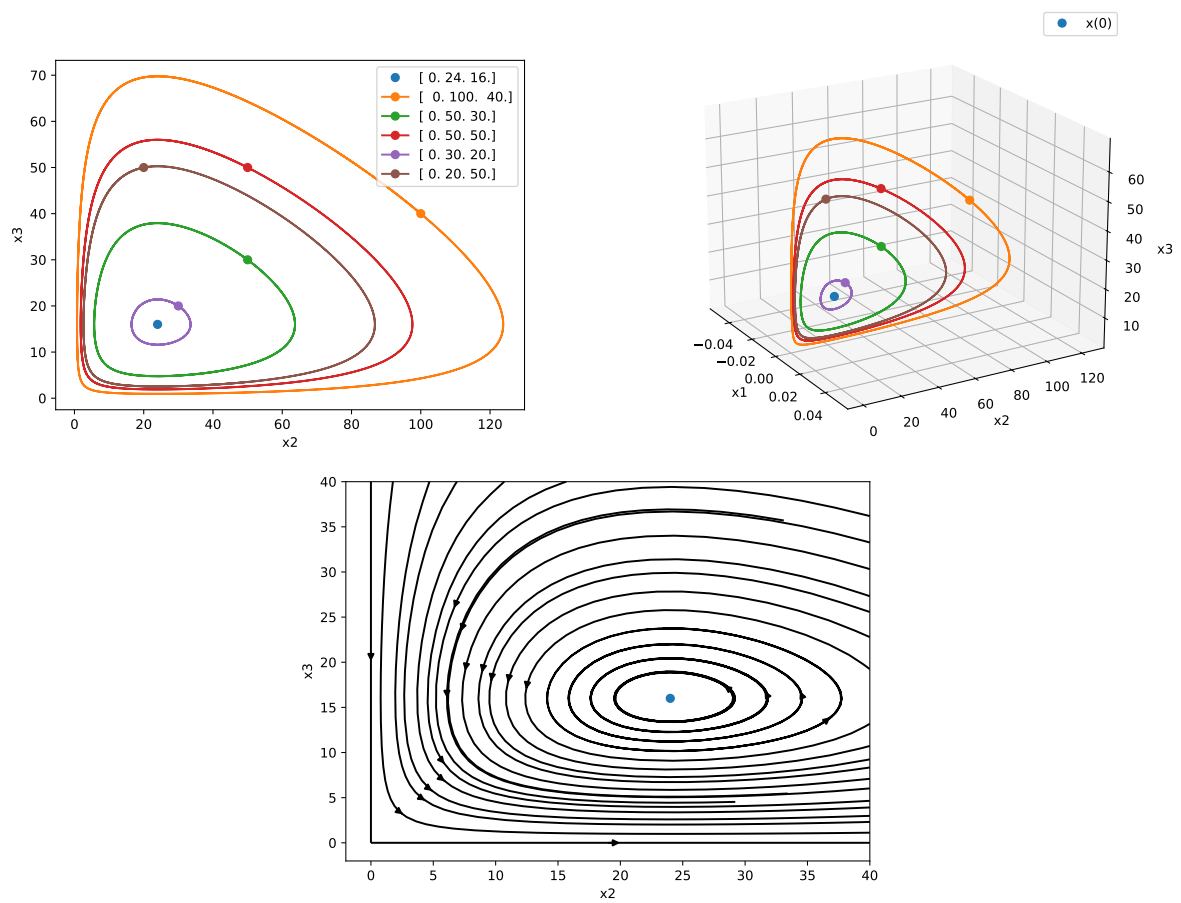


Рис. 1: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.1.2. При вымершей второй популяции

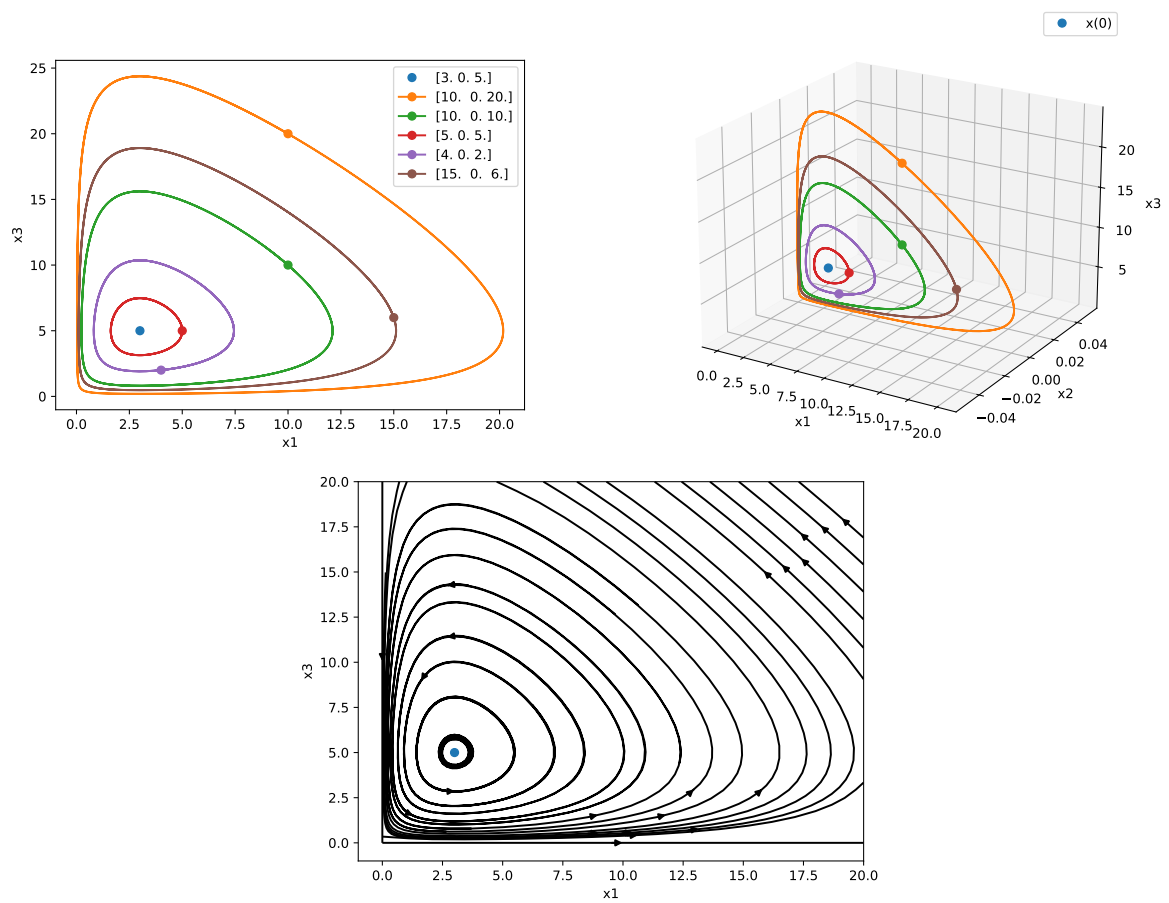


Рис. 2: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.1.3. При вымершей третьей популяции

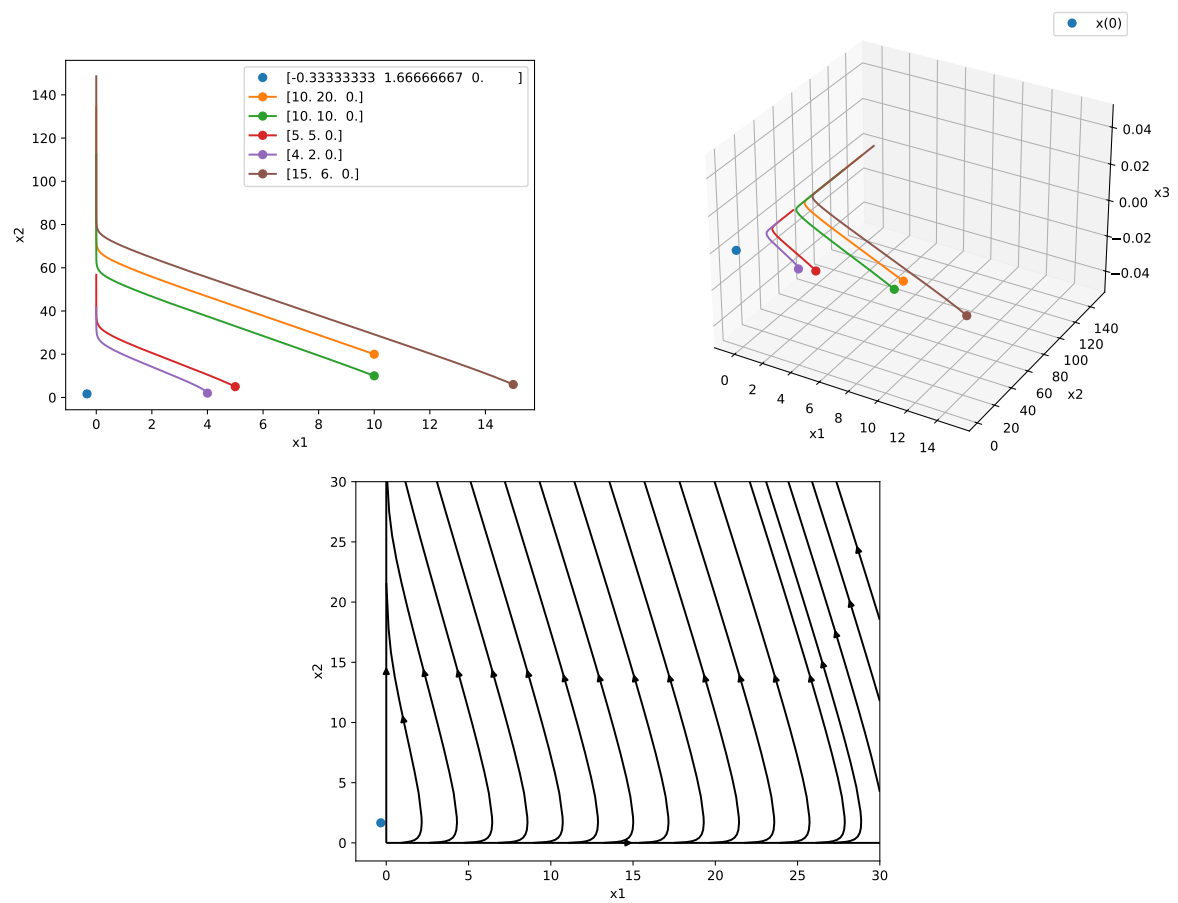


Рис. 3: На отрезке времени $[0, 0.1]$.

4.1.4. Несколько изначально не вымерших популяций

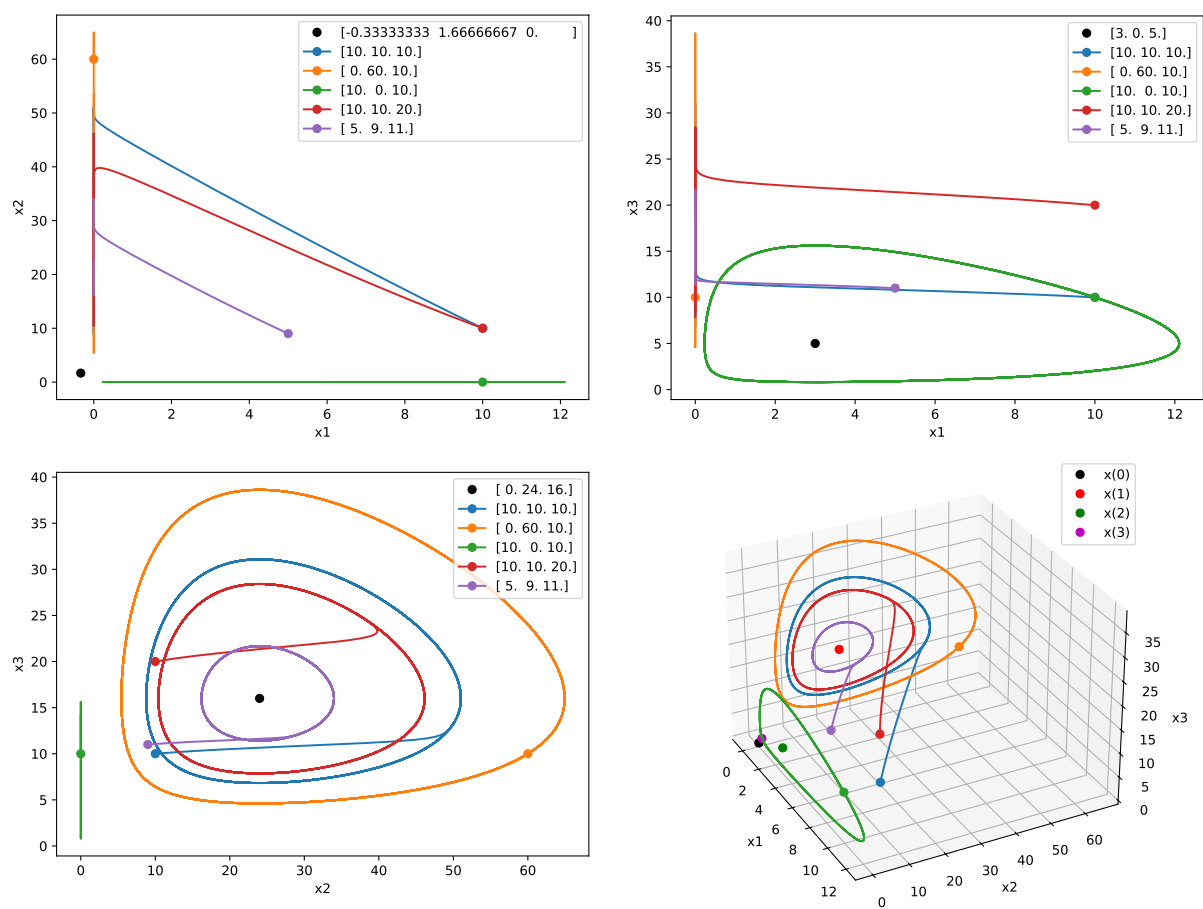


Рис. 4: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.2. Модель Колмогорова

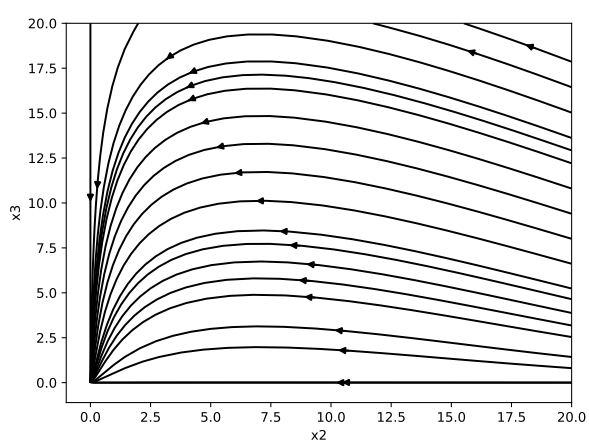
Возьмём такие функции для построения модели:

$$\varepsilon(x_1) = -x_1 + 10,$$

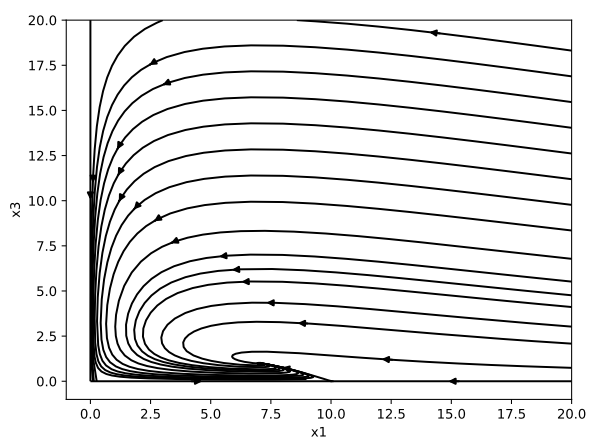
$$K_{12}(x_1) = x_1 - 5, \quad K_{13}(x_1) = x_1 - 3, \quad K_{23}(x_2) = x_2 - 4,$$

$$V_{12}(x_1) = 2x_1, \quad V_{13}(x_1) = 3x_1, \quad V_{23}(x_2) = x_2.$$

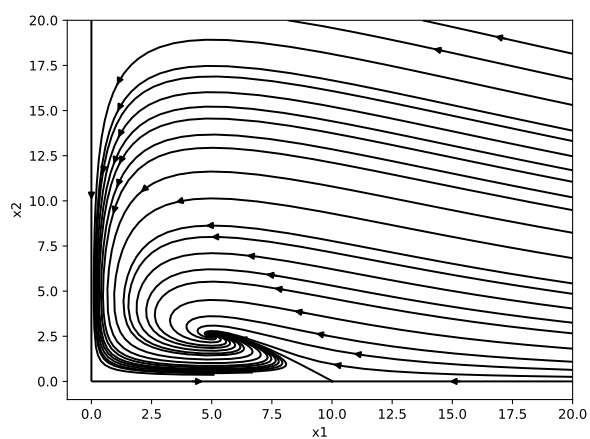
4.2.1. При вымершей первой популяции



4.2.2. При вымершей второй популяции



4.2.3. При вымершей третьей популяции



4.2.4. Несколько изначально не вымерших популяций

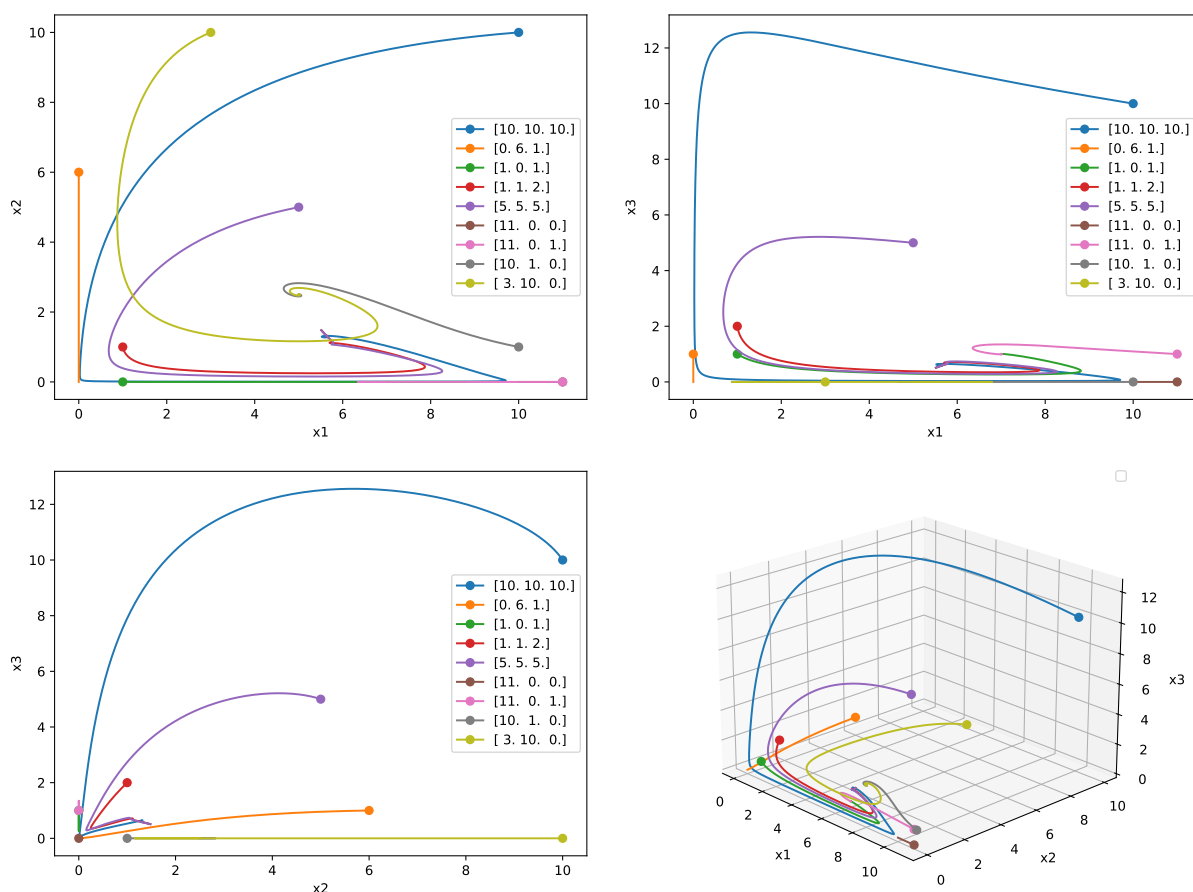


Рис. 5: На отрезке времени $[0, 3]$.

5. Заключение