



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №1 по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор к.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 16 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1	Введение	3
2	Построение математической модели	4
2.1	Модель с терморегулятором	5
3	Анализ модели	6
3.1	Вычисление точек покоя	6
4	Вычислительные эксперименты	8
4.1	Алгоритм	8
4.2	Программа	8
4.3	Модель без терморегулятора	10
4.4	Модель с терморегулятора	11
5	Заключение	14

1. Введение

В повседневном мире люди каждый день используют различные приборы нагревания. Например, микроволновка для разогревания еды, утюг для глажки вещей, радиатор для нагревания помещения и т. д.

Однако, таких приборов существует большое количество и все они имеют различные параметры, которые влияют на скорость нагрева. И в быту людей интересует как быстро нагреется тот или иной прибор. Для этого можно создать математическую модель, которая будет учитывать параметры нагревателей и показывать изменение температуры.

Будем рассматривать электрические нагреватели, которые могут иметь или не иметь терморегулятора.

2. Построение математической модели

Главной характеристикой любого нагревателя является его температура. При включении нагревателя со временем температура изменяется. Поэтому нужно найти зависимость температуры (К) от времени (с): $T(t)$.

Сделаем предположение, что нагревательный элемент состоит из одного материала и окружающая температура постоянная и равна T_0 .

Процесс нагревания описывается изменением внутренней энергии тела на ΔQ (Дж) от изменения температуры:

$$\Delta Q = cm\Delta T,$$

где c – удельная теплоёмкость тела $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right)$, m – масса тела (кг), ΔT – изменение температуры за промежуток времени Δt .

Поскольку наш нагревательный прибор использует электрический ток, он потребляет мощность во время работы, за счёт чего изменяет свою внутреннюю энергию:

$$\Delta Q_1 = P\Delta t,$$

где P – мощность (Вт).

На внутреннюю энергию также влияют входящие и исходящие тепловые потоки. На единицу площади за единицу времени исходящий поток изменяет энергию на $-kT$, а входящий на kT_0 , где $k > 0$ – коэффициент теплоотдачи, который зависит от конструкции $\left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}\right)$. Учитывая тепловые потоки, внутренняя энергия изменяется на

$$\Delta Q_2 = -kS(T - T_0)\Delta t,$$

где S – площадь нагревателя (м^2).

Также любое тело, нагретое выше абсолютного нуля, начинает уменьшать внутреннюю энергию за счёт излучения, что описывает закон Стефана-

Больцмана. На единицу площади за единицу времени нагреватель излучает энергию равную $-\sigma T^4$, а излучение из внешней среды изменяет энергию на σT_0^4 , где $\sigma \approx 5.68 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана–Больцмана. Значит, общее изменение энергии за счёт излучения:

$$\Delta Q_3 = -\sigma S(T^4 - T_0^4)\Delta t.$$

В итоге, применяя закон теплового баланса, получаем:

$$cm\Delta T = P\Delta t - kS(T - T_0)\Delta t - \sigma S(T^4 - T_0^4)\Delta t.$$

Делим обе части на $cm\Delta t$ и совершаем предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$

Получили дифференциальное уравнение, которое описывает поведение температуры нагревателя. Для получения единственного решения добавим начальное условие: $T(0) = T_0$.

2.1. Модель с терморегулятором

В быту, для того чтобы нагреватель не нагревался до опасных температур, целесообразно ограничить максимальную температуру. Для этого введём функцию «переключатель», которая по достижении максимальной температуры T_{max} отключит нагреватель, и после чего по достижении температуры включения T_{min} снова включит его.

$$H(T, T_{max}, T_{min}) = \begin{cases} 0, & T > T_{max}, \\ 1, & T < T_{min}. \end{cases}$$

Добавляя в уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P \cdot H(T, T_{max}, T_{min}) - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$

3. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm} = 0.$$

Заметим, что удельная теплоёмкость и масса находятся в знаменателе, а значит не влияют на точки равновесия, однако они влияют на скорость изменения температуры в самом дифференциальном уравнении.

В начальный момент времени уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P}{cm} > 0,$$

значит температура будет расти. С ростом температуры отрицательные слагаемые по модулю будут увеличиваться и со временем уравновесят мощность. Такая температура будет максимальной.

Другой максимальной температуры не будет, поскольку если бы случилось превышение температуры, производная была бы отрицательная и температура бы уменьшалась. А если бы температура уменьшилась, то производная больше нуля и поэтому температура снова повышалась.

3.1. Вычисление точек покоя

Вычислим теоретически точки покоя и сравним результаты полученные при анализе. Возьмём параметры:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$
$$P = 3000\text{Вт}, m = 0.5\text{кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.4\text{м}^2, k = 2, T_0 = 296\text{К}.$$

Найдём точки устойчивости уравнения с данными параметрами:

$$T_1 = -645.06 \dots, T_2 = 599.58 \dots, T_{3,4} = 22.73 \dots \pm i623.15 \dots$$

Только одна из температур положительная. Проверим её устойчивость по методу первого приближения. Обозначим правую часть дифференциального уравнения за R .

$$\left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_2} = -0.045 \dots$$

Получили отрицательное значение, значит данное положение равновесия действительно устойчивое.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для нахождения численного решения будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим массив значений, являющийся решением дифференциального уравнения с заданными параметрами.

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации была написана программа с использованием языка Python и библиотек numpy и matplotlib.

```
1  import numpy as np
2
3
4  def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
5      num = int((b - a) / h + 1)
6      x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
7      y_a = [y0] * num
8
9      for i in range(num - 1):
10         k0 = function(x_a[i], y_a[i])
11         k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
12         k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
13         k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
14         y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)
15
16     return x_a, np.array(y_a)
17
18
19 KC = 276
20 sigma = 5.67e-8
21
22 T_l = 190 + KC
23 T_u = 200 + KC
24
25
```



```

26 is_turned = True
27 def H1(T):
28     global is_turned
29
30     if T > T_u:
31         is_turned = False
32     elif T < T_l:
33         is_turned = True
34
35     return int(is_turned)
36
37 def H0(T):
38     return 1.
39
40 def utug(P, m, c, S, k, tp = 0, Tl=190 + KC, Tu=200 + KC):
41     global T_l, T_u
42     T_l = Tl
43     T_u = Tu
44     Hi = [H0, H1]
45
46     def dTdt(t, T):
47         return (P * Hi[tp](T) - k * S * (T - T0) - sigma * S * (T**4 - T0**4)) /
48             (c * m)
49
50     x = np.linspace(a, b, n)
51
52     return runge_kutta(dTdt, T0, a, b, (b-a)/n)
53
54 a, b = 0, 250
55 n = 10000
56
57 P = 3000
58 m = 0.5
59 c = 897 # Алюминий
60 S = 0.4
61 k = 2
62 T0 = 20 + KC

```

Итогом программы является массив со значениями численного решения

дифференциального уравнения с заданными параметрами на некотором отрезке времени $[0, t_0]$.

Проведём вычислительные эксперименты с помощью написанной программы и визуализируем результаты.

4.3. Модель без терморегулятора

Построим несколько решений уравнения для модели без терморегулятора с разными параметрами.

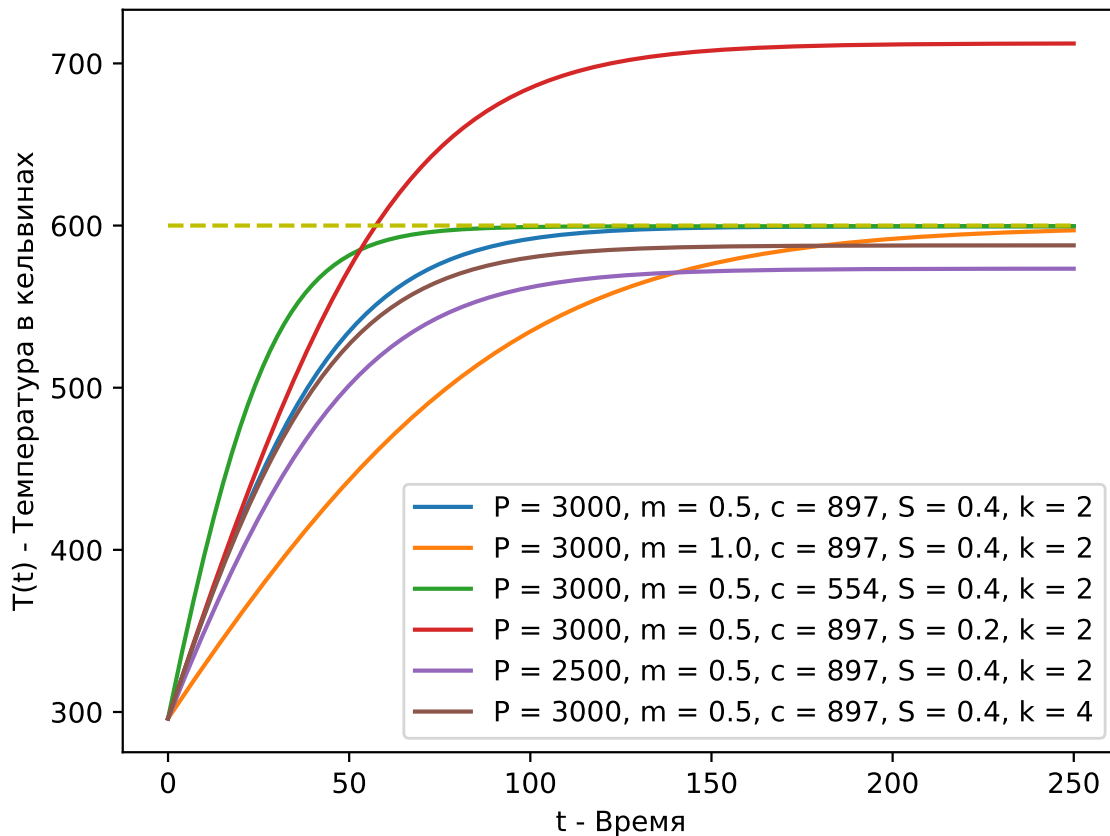


Рис. 1: Результаты при $T_0 = 296$.

На графике (Рис. 1) построены несколько решений с указанными параметрами, а также желтый пунктир на отметке $T = 600$ – округлённое значение точки равновесия, найденное при анализе.

Как можно увидеть, первые три решения, которые отличаются только массой и удельной теплоёмкостью, возрастают до определённого значения – точки равновесия.

Остальные различаются в параметрах, которые влияют на максимальное значение, что можно также увидеть.

4.4. Модель с терморегулятора

Построим несколько решений уравнения для модели с терморегулятором с разными параметрами. На каждом рисунке находятся решения дифференциального уравнения с одними и теми же параметрами, кроме максимальной и минимальной температуры терморегулятора. Серым пунктиром обозначены соответствующие максимальная и минимальная температуры

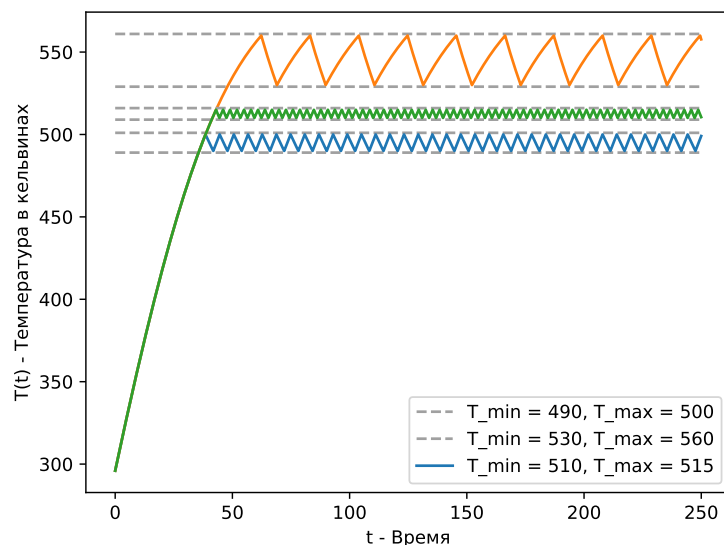


Рис. 2: Результаты при

$$P = 3000\text{Вт}, m = 0.5\text{кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.4\text{м}^2, k = 2, T_0 = 296\text{К}.$$

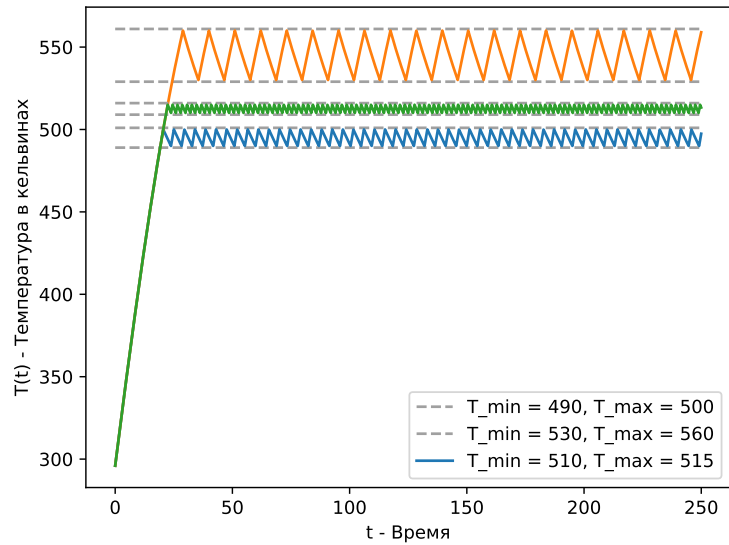


Рис. 3: Результаты при

$$P = 2500 \text{ Вт}, m = 0.4 \text{ кг}, c = 554 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.2 \text{ м}^2, k = 4, T_0 = 296 \text{ К}.$$

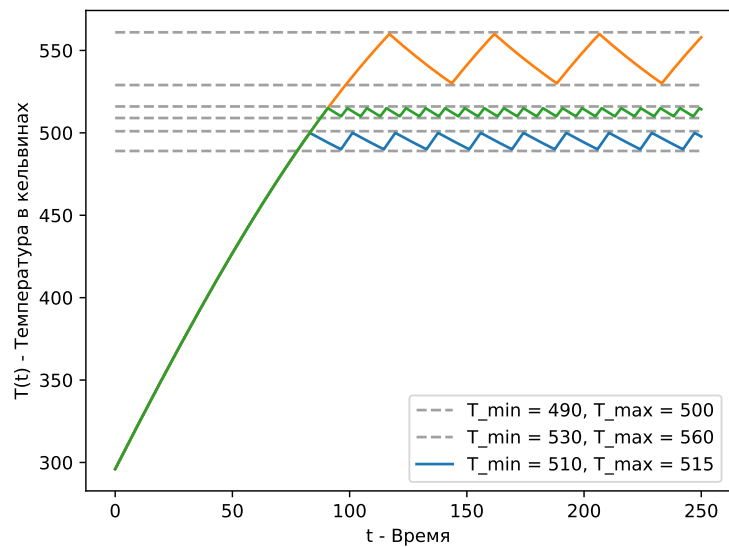


Рис. 4: Результаты при

$$P = 2500 \text{ Вт}, m = 1 \text{ кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.2 \text{ м}^2, k = 2, T_0 = 296 \text{ К}.$$

На графиках (Рис. 2-4) видно, что при достижении максимальной температуры регулятор отключает работу нагревателя и температура начинает падать (поскольку в правой части дифференциального уравнения остаются только от-

рицательные слагаемые). При достижении минимальной температуры регулятора нагреватель снова начинает работать и температура растёт.

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель электрического нагревателя с терморегулятором и без него. Модель представляет из себя дифференциальное уравнение. Данная модель была проанализирована и были найдены точки равновесия дифференциального уравнения. Написана программа для численного решения уравнения в зависимости от параметров. Проведены вычислительные эксперименты, которые соответствуют с результатам анализа.