МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ В ЭКОЛОГИИ И ЭКОНОМИКЕ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Регистрационный №___________

«___» ___________ 2024 г.

_____________________ ________
(И.О.Фамилия) *(подпись)*

Руководитель проф. д.ф.-м. н.
Абакумов А. И. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 13 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Оглавление

1. Введение

2. Инструменты анализа

Исследуемые далее модели конкуренции представляют собой автономные системы трёх дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Для данных систем будет проведён анализ точек равновесия:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Для каждой точки равновесия (x^* – решения данной однородной системы уравнений) будет проведён анализ по методу первого приближения.

В матрицу Якоби данной системы $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ нужно подставить точку равновесия. После чего нужно найти собственные значения этой матрицы:

$$\det\left(\lambda I - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*}\right) = 0 \;\Rightarrow\; b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы $\forall i\ \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$. Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если $b_0 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Δ были положительны.

3. Модель Лотки-Вольтерры

3.1. Математическая модель

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = \varepsilon_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\
\dot{x_2} = \varepsilon_2(x_2) + k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\
\dot{x_3} = -\varepsilon_3(x_3) + k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3.
\end{cases}
$$

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$, где $k_{ij} > 0$.

Примем функции в системе за линейные функции:

$$
\varepsilon_i(x_j) = \varepsilon_i \cdot x_j, V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \varepsilon_i, \alpha_{ij} > 0
$$

Тогда получим систему:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = \varepsilon_1 x_1 - \alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{13}x_1x_3, \\
\dot{x_2} = \varepsilon_2 x_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{23}x_2x_3, \\
\dot{x_3} = -\varepsilon_3 x_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}x_2x_3.
\end{cases}
$$

3.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Т.е. нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3 = 0, \\ \varepsilon_2 x_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 x_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23}\alpha_{23} x_2 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(\varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) = 0, \\ x_2(\varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) = 0, \\ x_3(-\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 + k_{23}\alpha_{23} x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если две любых переменных равны нулю, то в оставшейся строчке остаётся уравнение $\varepsilon_i x_i = 0$, т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

2. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{23}\alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(0, \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}}, \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}}\right)$$

3. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}}, 0, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}}\right)$$

4. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 = 0, \\ \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \left(-\frac{\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}}, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}}, 0\right)$$

5. Если $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 + k_{23}\alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение $x^{(4)}$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-\varepsilon_1\alpha_{23}k_{23} + \varepsilon_2 k_{23}\alpha_{13} + \varepsilon_3\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} - \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 = \dfrac{\varepsilon_1\alpha_{23}k_{13} - \varepsilon_2\alpha_{13}k_{13} - \varepsilon_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_3 = \dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} + \dfrac{k_{12}\alpha_{12}}{\alpha_{23}}x_1 = \dfrac{-\varepsilon_1\alpha_{23}k_{12}k_{23} + \varepsilon_2\alpha_{13}k_{13} + \varepsilon_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}. \end{cases}$$

Получили все точки. Для анализа устойчивости в этих точках воспользуемся методом первого приближения. Найдём матрицу Якоби:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 \end{pmatrix}$$

После чего подставляем значения точки равновесия и ищем собственные значения матрицы.

$$A = J\Big|_{x^*}, \quad \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы $\forall i$ $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если $b_0 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Δ были положительны.

1. $J\Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$

Откуда получаем собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0, \quad \lambda_2 = \varepsilon_2 > 0, \quad \lambda_1 = -\varepsilon_3 < 0.$$

Значит около начала координат решения будут расходиться по x_1, x_2 и сходиться по x_3.

2. $$A = J\Big|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{12}\dfrac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} - \alpha_{13}\dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & 0 & 0 \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\varepsilon_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}\right)\right)(\lambda^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\varepsilon_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}.$$

Точка $x^{(1)}$ – неустойчивая. В плоскости $x_1 = 0$ точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя циклы, а в некоторой близости от этой плоскости циклы будут двигаться в некотором направлении, в зависимости от констант.

3. $$A = J\Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13}\dfrac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}}\right)\right)(\lambda^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}.$$

Аналогично предыдущей точке, $x^{(2)}$ – неустойчивая и в плоскости $x_2 = 0$ является центром и будет создавать вокруг себя циклы.

4. $A = J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} & -\alpha_{13}\dfrac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}\dfrac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(-\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}}\right)\right)(\lambda^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Точка $x^{(3)}$ – неустойчивая, но в плоскости $x_3 = 0$ является седлом по некоторым двум направлениям.

5. $A = J\Big|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3) +$$

$$+x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \leq 0. \end{cases}$$

3.3. Вычислительные эксперименты

Возьмём параметры для модели:

$$\xi_1 = 10, \xi_2 = 8, \xi_3 = 6,$$

$$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$$

$$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$$

При этом точка равновесия $x^{(4)} = (-3.458\ldots, 46.66\ldots, -150)$. Откуда получаем $b_3 = -22040 \Rightarrow \Delta_2 = 22040 > 0$. Значит, что по какой-то оси она будет устойчивая, по второй неустойчива, а по третьей устойчивость неизвестна. Однако, вероятно, это точка не будет иметь влияния, поскольку находится на большом удалении в отрицательных координатах.

3.3.1. При вымершей первой популяции

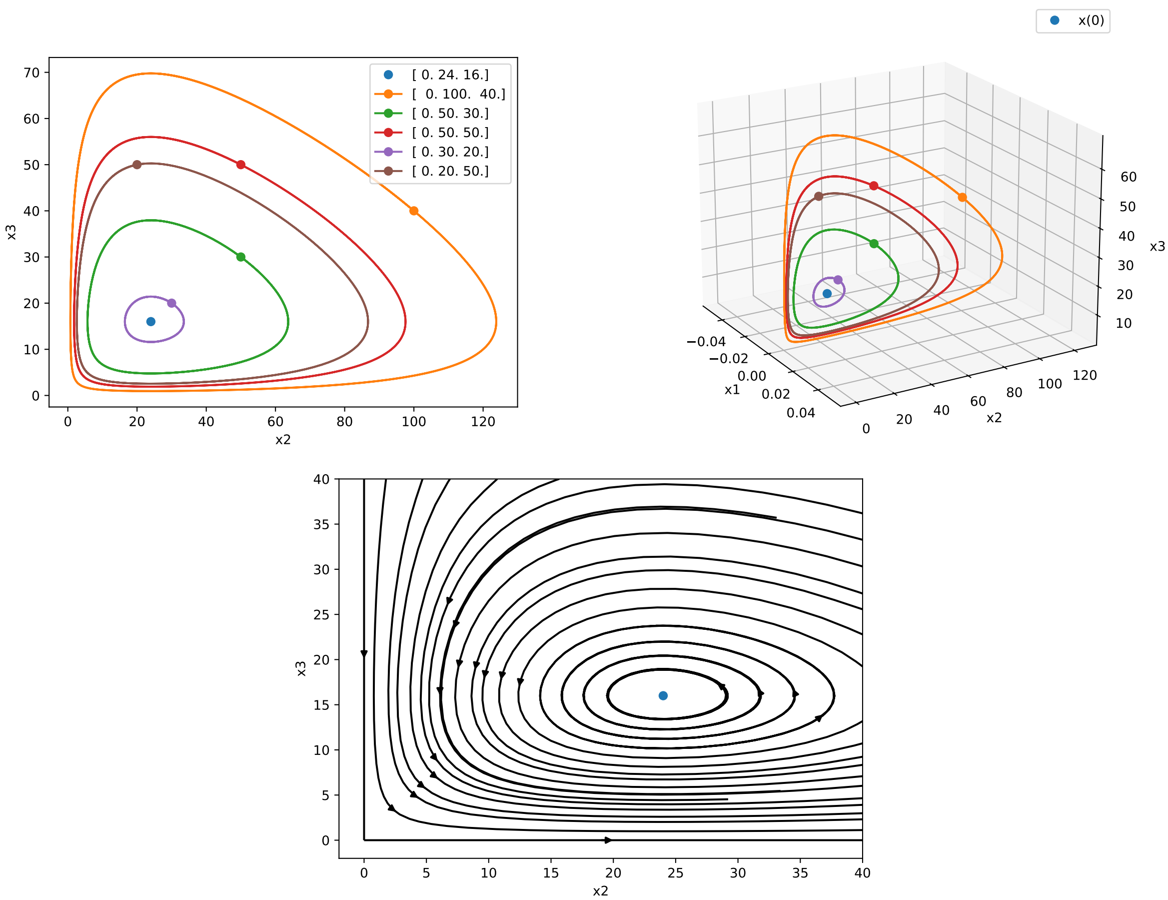

Рис. 1: На отрезке времени $[0, 3]$.

3.3.2. При вымершей второй популяции

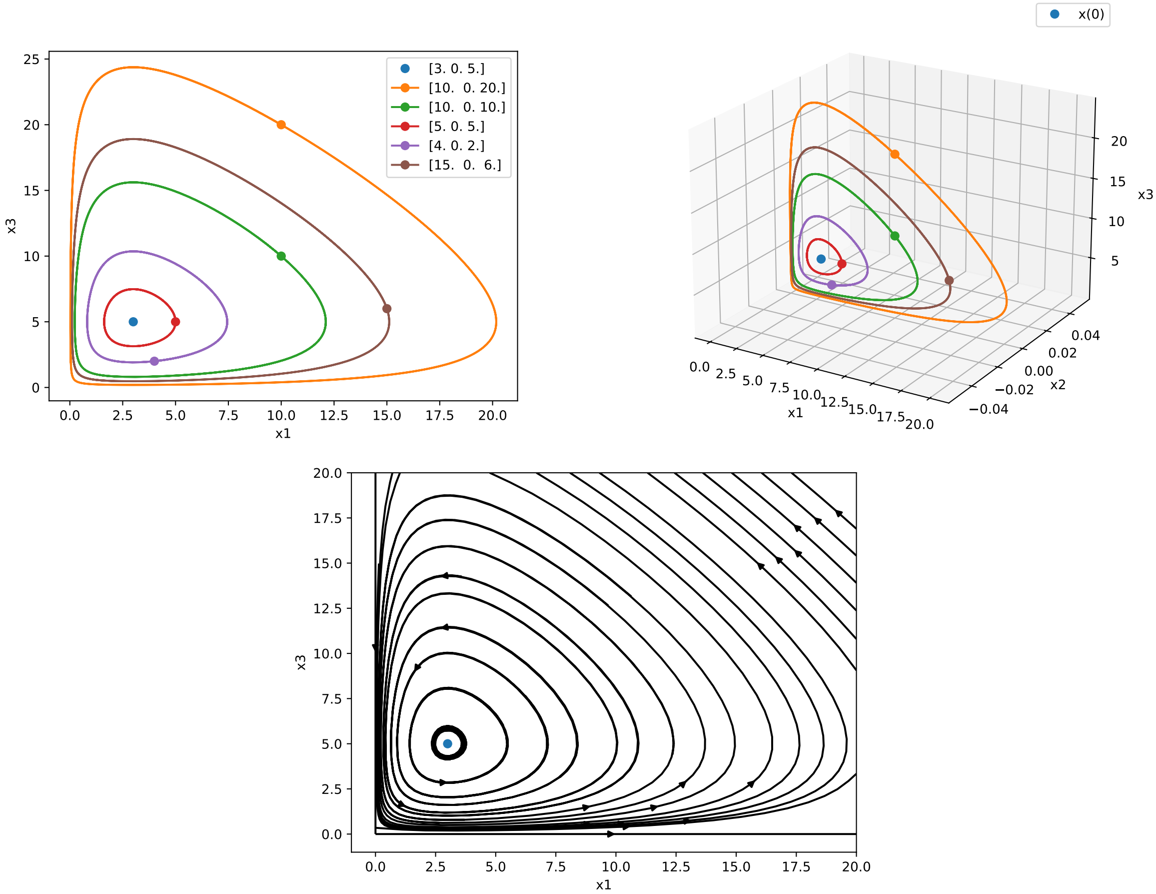

Рис. 2: На отрезке времени $[0, 3]$.

3.3.3. При вымершей третьей популяции

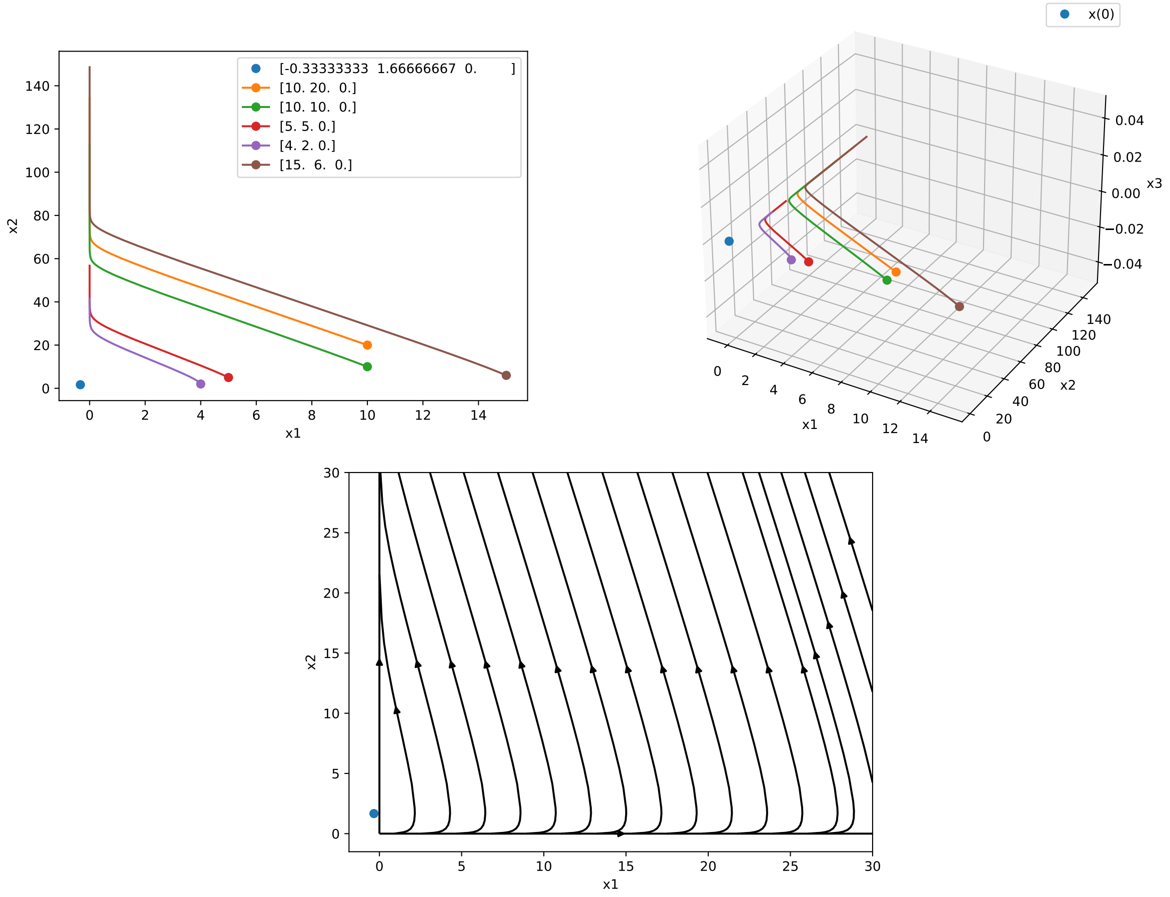

Рис. 3: На отрезке времени $[0, 0.1]$.

3.3.4. Несколько изначально не вымерших популяций

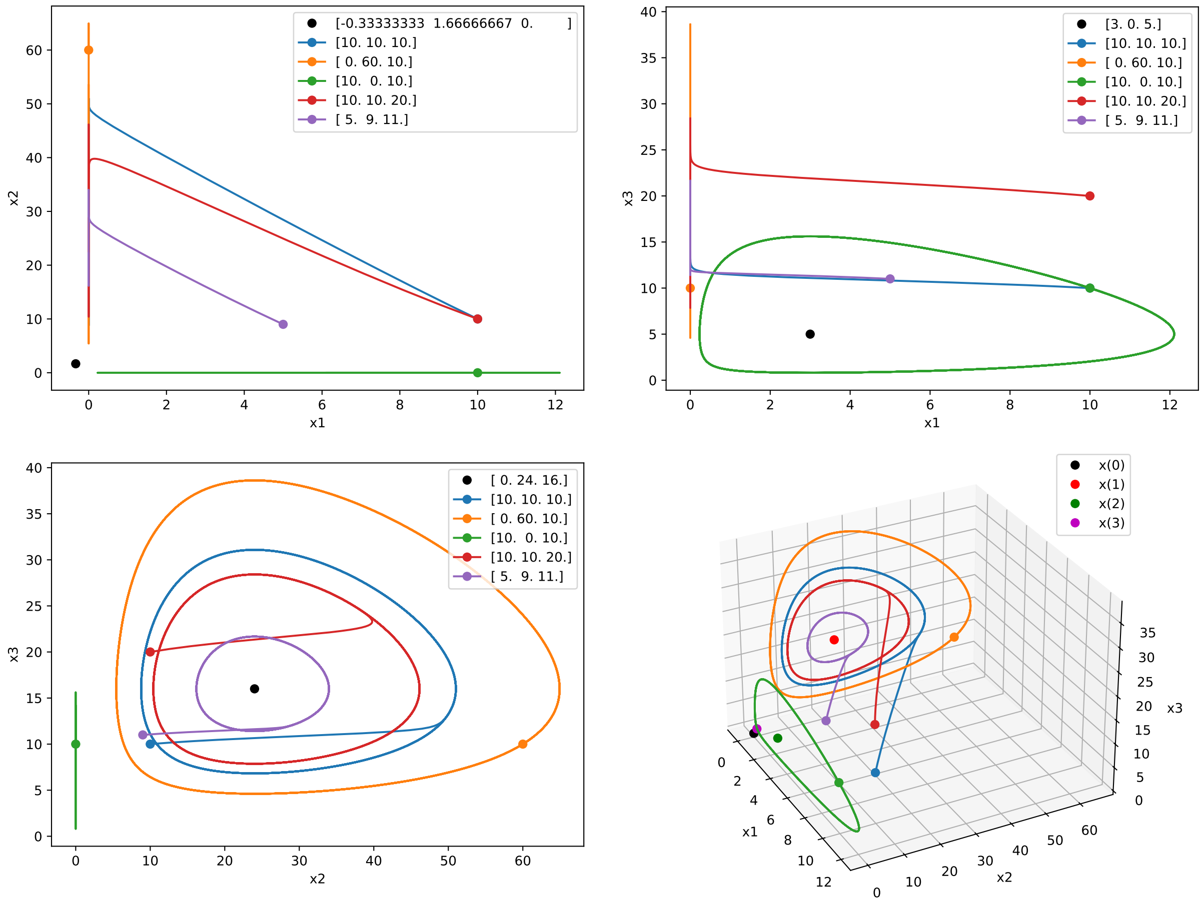

Рис. 4: На отрезке времени $[0, 3]$.

4. Модель Колмогорова

4.1. Математическая модель

Моделью Колмогорова при одной популяции жертвы (x) и одной хищника (y) называется такая модель [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x)x - V(x)y, \\ \dot{y} = K(x)y, \end{cases}$$

с такими предположениями:

1. В популяции хищников отсутствует внутривидовая конкуренция.
2. $\alpha' < 0;\ \alpha(0) > 0 > \alpha(\infty)$. В отсутствии хищников прирост жертв с увеличением популяции уменьшается до критического момента.
3. $K' > 0;\ K(0) < 0 < K(\infty)$. Коэффициент прироста хищников.
4. $V(x) > 0, x > 0;\ V(0) = 0$. Коэффициент поглощения жертв.

Адаптируем данную модель для нашей схемы взаимодеиствия популяций жертвы и хищников и подробнее опишем качественные предположения о функциях:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \varepsilon(x_1)x_1 - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x_2} = K_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x_3} = K_{13}(x_1)x_3 + K_{23}(x_2)x_3. \end{cases}$$

Сформулируем предположения:

1. $\varepsilon' < 0;\ \varepsilon(0) > \varepsilon(\bar{x}_1) = 0 > \varepsilon(\infty)$. Здесь у жертв ограниченное количество ресурса и за него существует конкуренция. Поэтому без хищников прирост жертв с увеличением их количества в некоторый момент прекратится и стабилизируется на уровне $\bar{x}_1$.

2. $K'_{ij} > 0$; $K_{ij}(0) < K_{ij}(x_i^*) = 0 < K_{ij}(\infty)$. Это значит, что при увеличении численности жертв коэффициент естественного прироста хищников возрастает. Коэффициент переходит от отрицательных значения при недостатке пищи к положительным.

3. $V_{ij}(0) = 0$; $V_{ij}(x_i) > 0, x_i > 0$. Этот коэффициент показывает количество жертв, поглощаемых одним хищником.

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$.

Будем систему исследовать с линейными функциями, которые удовлетворяют указанным предположениям.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(x) = -\varepsilon \cdot x + \delta, && \varepsilon, \delta > 0,\\
&K_{ij}(x) = k_{ij} \cdot x - m_{ij}, && k_{ij}, m_{ij} > 0,\\
&V_{ij}(x) = v_{ij} \cdot x, && v_{ij} > 0.
\end{aligned}
$$

Тогда система будет выглядеть так:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = \left(-\varepsilon x_1 + \delta\right) x_1 - v_{12}x_1x_2 - v_{13}x_1x_3,\\
\dot{x_2} = \left(k_{12}x_1 - m_{12}\right) x_2 - v_{23}x_2x_3,\\
\dot{x_3} = \left(k_{13}x_1 - m_{13}\right) x_3 + \left(k_{23}x_2 - m_{23}\right) x_3.
\end{cases}
$$

4.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения и исследуем их устойчивость.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -2\varepsilon x_1 + \delta - v_{12}x_2 - v_{13}x_3 & -v_{12}x_1 & -v_{13}x_1 \\ k_{12}x_2 & (k_{12}x_1 - m_{12}) - v_{23}x_3 & -v_{23}x_2 \\ k_{13}x_3 & k_{23}x_3 & k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23} \end{pmatrix}$$

Нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} (-\varepsilon x_1 + \delta)\, x_1 - v_{12}x_1x_2 - v_{13}x_1x_3 = 0, \\ (k_{12}x_1 - m_{12})\, x_2 - v_{23}x_2x_3 = 0, \\ (k_{13}x_1 - m_{13})\, x_3 + (k_{23}x_2 - m_{23})\, x_3 = 0. \end{cases}$$

Для удобства вынесем общие множители:

$$\begin{cases} (-\varepsilon x_1 + \delta - v_{12}x_2 - v_{13}x_3)\, x_1 = 0, \\ (k_{12}x_1 - m_{12} - v_{23}x_3)\, x_2 = 0, \\ (k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23})\, x_3 = 0. \end{cases}$$

1. Если $x_2 = x_3 = 0$, то остаётся уравнение

   $$(-\varepsilon x_1 + \delta)x_1 = 0.$$

   Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ и $x^{(1)} = \left(\dfrac{\delta}{\varepsilon}, 0, 0\right)$.

   (a) $J\Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & -m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -m_{23}(0) \end{pmatrix}$

   $$\lambda_1 = \delta > 0,\ \lambda_2 = -m_{12} < 0,\ \lambda_3 = -m_{23} < 0.$$

Значит, в плоскостях $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ начало координат является седлом и направление x_1 – неустойчивое. В плоскости $x_1 = 0$ точка является устойчивым узлом.

(b) $$J\Big|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} -\delta & -v_{12}\dfrac{\delta}{\varepsilon} & -v_{13}\dfrac{\delta}{\varepsilon} \\ 0 & k_{12}\dfrac{\delta}{\varepsilon} - m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{13}\dfrac{\delta}{\varepsilon} - m_{13} - m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\delta < 0,\ \lambda_2 = k_{12}\frac{\delta}{\varepsilon} - m_{12},\ \lambda_3 = k_{13}\frac{\delta}{\varepsilon} - m_{13} - m_{23}.$$

В зависимости от значений λ_2, λ_3 данная точка может быть:

i. Устойчивым узлом, если $\lambda_2, \lambda_3 < 0$,

ii. Устойчивым узлом в плоскости $x_2 = 0$ и седлом в плоскости $x_3 = 0$, если $\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$,

iii. Устойчивым узлом в плоскости $x_3 = 0$ и седлом в плоскости $x_2 = 0$, если $\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$,

iv. Седлом в плоскостях $x_2 = 0,\ x_3 = 0$, если $\lambda_2, \lambda_3 > 0$

2. Если $x_1 = x_2 = 0$, то в третьей строчке получем

$$(-m_{13} - m_{23})\, x_3 = 0.$$

Поскольку $x_3 > 0$, то данное равенство не может быть выполнено.

3. Если $x_1 = x_3 = 0$, то во второй строчке получем

$$-m_{12}x_2 = 0.$$

Поскольку $x_2 > 0$, то равенство не может быть выполнено.

4. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} (-m_{12} - v_{23}x_3)\, x_2 = 0, \\ (-m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23})\, x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{m_{12}}{-v_{23}} < 0, \\ x_2 = \dfrac{m_{13} + m_{23}}{k_{23}}. \end{cases}$$

Эта точка будет находиться вне исследуемой области.

5. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} \left(-\varepsilon x_1 + \delta - v_{13} x_3\right) x_1 = 0, \\ \left(k_{13} x_1 - m_{13} - m_{23}\right) x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \dfrac{\varepsilon x_1 - \delta}{-v_{13}}, \\ x_1 = \dfrac{m_{13} + m_{23}}{k_{13}}. \end{cases}$$

В исследуемой области данная точка будет находиться, если $x_1 \leq \dfrac{\delta}{\varepsilon}$. FFF

$$J\Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon'(x_1)x_1 + \varepsilon(x_1) - V'_{13}(x_1)x_3 & -V_{12}(x_1) & -V_{13}(x_1) \\ 0 & K_{12}(x_1) - V'_{23}(0)x_3 & 0 \\ K'_{13}(x_1)x_3 & K'_{23}(0)x_3 & K_{23}(0) \end{pmatrix}$$

6. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 > 0$:

$$\begin{cases} \left(-\varepsilon x_1 + \delta - v_{12} x_2\right) x_1 = 0, \\ (k_{12} x_1 - m_{12}) x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{\varepsilon x_1 - \delta}{-v_{12}}, \\ x_1 = \dfrac{m_{12}}{k_{12}}. \end{cases}$$

В исследуемой области данная точка будет находиться, если $x_1 \leq \dfrac{\delta}{\varepsilon}$. FFF

$$J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon'(x_1)x_1 + \varepsilon(x_1) - V'_{12}(x_1)x_2 & -V_{12}(x_1) & -V_{13}(x_1) \\ K'_{12}(x_1)x_2 & 0 & -V_{23}(x_2) \\ 0 & 0 & K_{23}(x_2) \end{pmatrix}$$

7. Если $x_1, x_2, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} -\varepsilon x_1 + \delta - v_{12} x_2 - v_{13} x_3 = 0, \\ k_{12} x_1 - m_{12} - v_{23} x_3 = 0, \\ k_{13} x_1 - m_{13} + k_{23} x_2 - m_{23} = 0. \end{cases}$$

4.3. Вычислительные эксперименты

Возьмём параметры для модели:

$$\xi_1 = 10, \xi_2 = 8, \xi_3 = 6,$$

$$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$$

$$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$$

При этом точка равновесия $x^{(4)} = (-3.458\ldots, 46.66\ldots, -150)$. Откуда получаем $b_3 = -22040 \Rightarrow \Delta_2 = 22040 > 0$. Значит, что по какой-то оси она будет устойчивая, по второй неустойчива, а по третьей устойчивость неизвестна. Однако, вероятно, это точка не будет иметь влияния, поскольку находится на большом удалении в отрицательных координатах.

4.3.1. При вымершей первой популяции

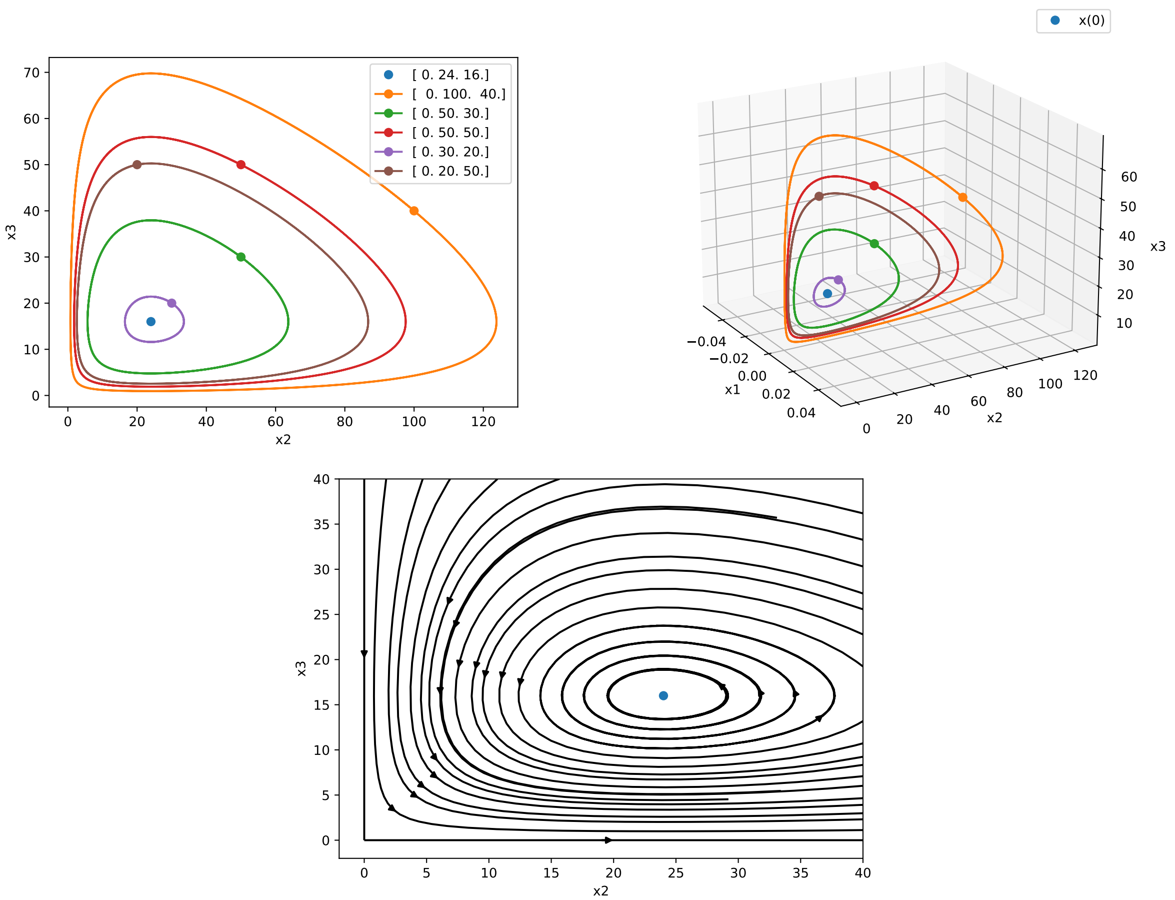

Рис. 5: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.3.2. При вымершей второй популяции

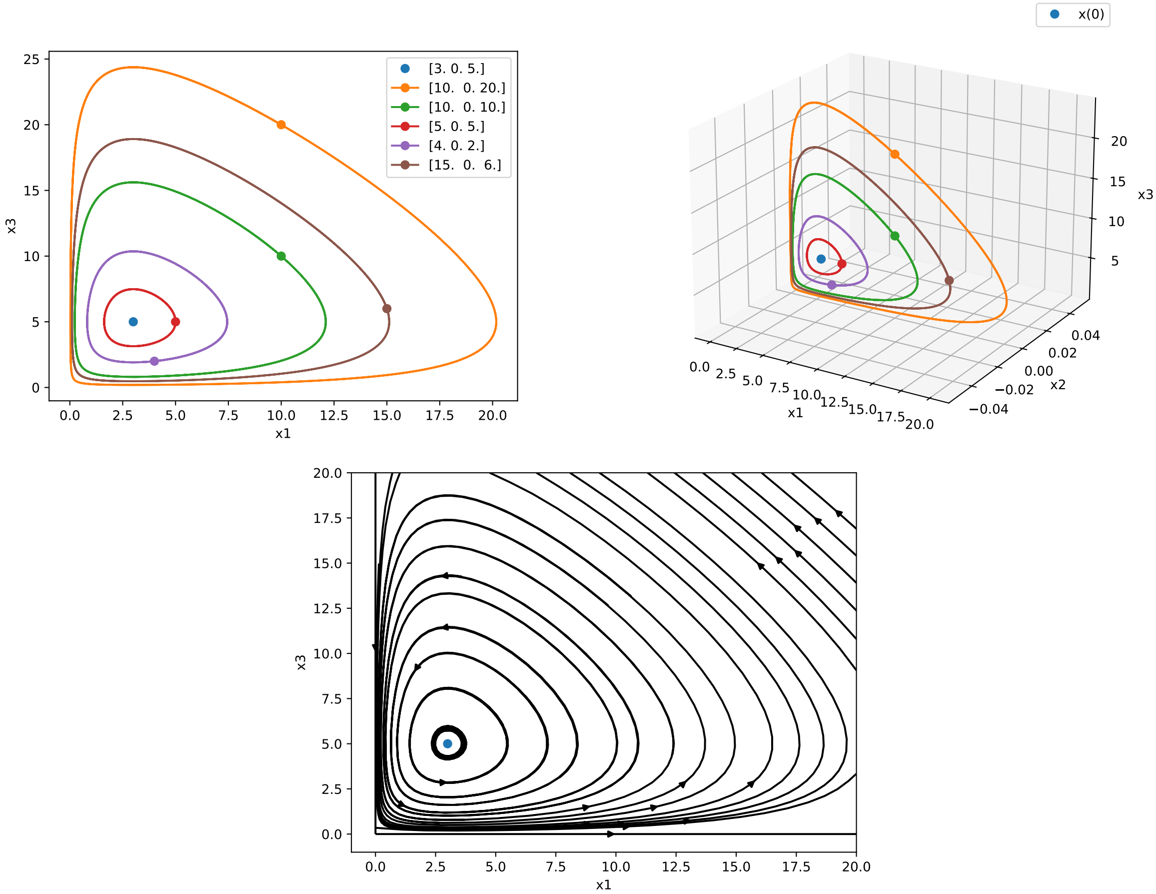

Рис. 6: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.3.3. При вымершей третьей популяции

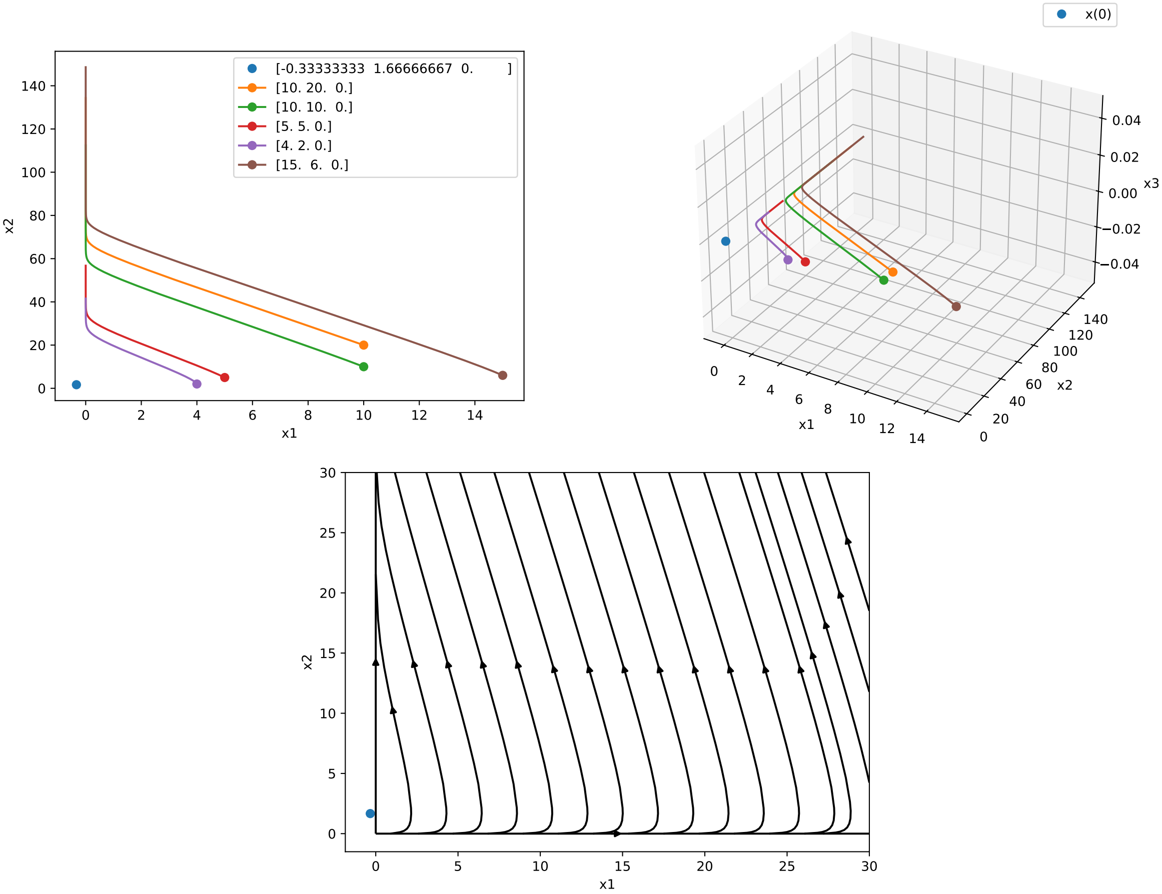

Рис. 7: На отрезке времени $[0, 0.1]$.

4.3.4. Несколько изначально не вымерших популяций

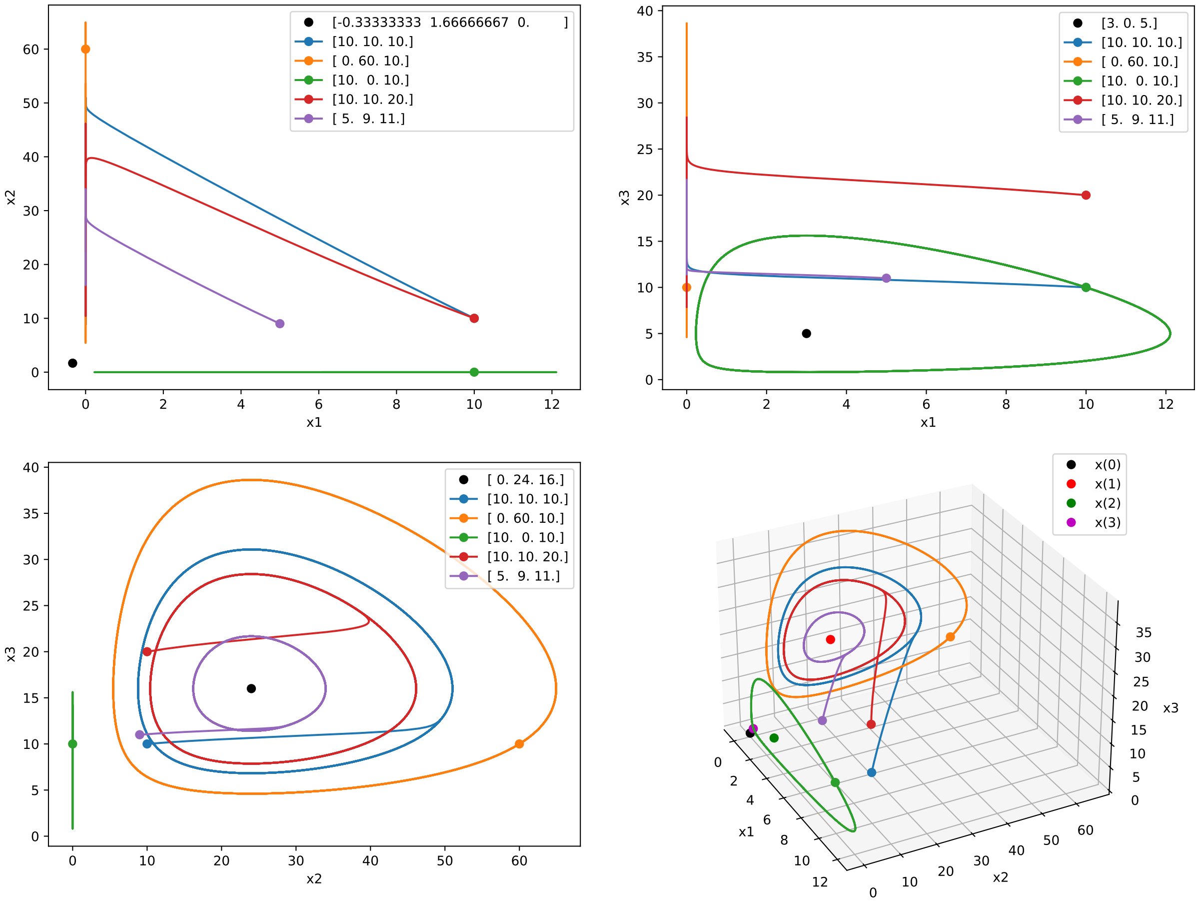

Рис. 8: На отрезке времени $[0, 3]$.

5. Заключение

6. Список литературы

[1] Свирежев, Ю. М. Устойчивость биологических сообществ // Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет – М.: Наука, 1978.