МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»
на тему «Сплайн-разностная схема метода сплайн-коллокации»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Проверил доцент, к.ф.-м. н.
Колобов А. Г. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 17 » декабря 2024 г.

г. Владивосток

2024

Оглавление

1. Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач математической физики, а также программное обеспечение, реализующее эти методы.

Цель работы – ознакомиться с численными методами решения задач математической физики, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;

- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

2. Основная часть

2.1. Постановка задачи

Найти решение обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка с краевыми условиями вида:

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y(x) = r(x), \\ a_1 y(a) + b_1 y'(a) = c_1, \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = c_2. \end{cases}$$

2.2. Описание алгоритма

Сплайн-разностная схема состоит в нахождении приближённого решения в виде кубического сплайна $S(x) \in C^2[a,b]$ на сетке
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ на этом отрезке.

Для нахождения сплайна используем метод коллокации. На отрезке выбираем $N+1$ узлов коллокации ξ_k, в которых будет удовлетворятся уравнение $S''(\xi_k) + q(\xi_k)S(\xi_k) = r(\xi_k)$, $k \in \overline{0,N}$. Вместе с краевыми условиями будем иметь размерность $N+3$, которая определяет сплайн.

Находить сплайн будем через моменты. На интервале $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид:

$$S(x) = y_i(1-t) + y_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1-t)\left[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right],$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad M_i = S''(x_i)$$

Для простоты возьмём узлы коллокации, совпадающие с узлами сетки $x_i = \xi_i$, тогда уравнение в узле $i = \overline{0,N}$ будет иметь вид $M_i + q_i y_i = r_i$. Зная вид трёхдиагональной системы уравнений для нахождения моментов через известные значения функции в узлах, подставив, получим систему:

$$(1-\mu_i)\left(1+\frac{h_{i-1}^2}{6}q_{i-1}\right)y_{i-1}-\left(1-\frac{h_ih_{i-1}}{3}\right)y_i+\mu_i\left(1+\frac{h_i^2}{6}q_{i+1}\right)y_{i+1}=$$
$$=\frac{h_{i-1}h_i}{6}(\mu_ir_{i+1}+2r_i+(1-\mu_i)r_{i+1}),\quad i=\overline{1,N-1},$$

где $\mu_i=\dfrac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$.

Для краевых условий имеем

$$y_0\left[a_1h_0-b_1\left(1-\frac{1}{3}q_0h_0^2\right)\right]+y_1b_1\left(1+\frac{1}{6}q_1h_0^2\right)=c_1h_0+\frac{1}{6}b_1h_0^2(2f_0+f_1),$$

$$y_{N-1}b_2\left(-1-\frac{1}{6}h_{N-1}^2q_{N-1}\right)+y_N\left[a_2h_{N-1}+b_2\left(1-\frac{1}{3}h_{N-1}^2q_N\right)\right]=$$
$$=c_2h_{N-1}-\frac{1}{6}b_2h_{N-1}^2(f_{N-1}+2f_N).$$

Из данной системы методом прогонки находим $y_i, i=\overline{0,N}$, затем M_i и получаем приближённое решение в виде кубического сплайна.

Для упрощения вычислений будем использовать равномерную сетку. Поскольку полученный кубический сплайн можно вычислить в любой точке отрезка, поэтому между узлами сетки будем использовать всегда 100 точек равномерной сетки.

2.2.1. Погрешность вычислений

При соблюдении условий диагонального преобладания

$$b_1\le 0,\quad b_2,a_j\ge 0,\quad |a_j|+|b_j|=0,\quad j\in\{1,2\};\quad q(x)\le q<0;$$

$$h_{i-1}^2\max(|q_{i-1}|,|q_i|)\le 6, i=\overline{1,N}$$

и если точное решение $y\in C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$, то $\left\|S(x)-y(x)\right\|_C=O\left(\overline{h}^2\right)$.

2.3. Вычислительные эксперименты

Для вычислительных экспериментов будут использованы дифференциальные уравнения, предложенные на практических занятиях по математическому и компьютерному моделированию. Данные примеры можно найти в Приложениях в секции «5.1 Примеры задач», а некоторые графики примеров в «5.2 Графики решений».

В таблице 1 приведены результаты численного решения задач при разном количестве узлов сетки и соответствующая максимальная погрешность по модулю.

№ задачи	N	$\max\limits_{x\in[a,b]} \lvert S(x) - y(x)\rvert$
1	10	1.19e-3
1	100	1.24e-5
1	1000	1.24e-7
2	10	1.45e-3
2	100	1.27e-5
2	1000	1.25e-7
3	10	4.92e-3
3	100	5.25e-5
3	1000	5.28e-7
3	5000	2.12e-8

Таблица 1: Таблица результатов

2.3.1. Анализ результатов

Как можно увидеть, при увеличении количества узлов сетки погрешность уменьшается, что достаточно соответствует теоретической погрешности.

3. Заключение

В ходе данной работы была исследована сплайн-разностная схема метода сплайн-коллокации для приближённого решения обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка с краевыми условиями.

Данный метод, как и аналогичные методы, использующие сплайны, хороши тем, что численное решение можно вычислить на всём отрезке задачи, в том числе и его первую производную с высокой точностью. Недостатком же данного метода является то, что его может быть достаточно непросто распространять на уравнения, у которых есть слагаемые с производной 1 порядка, из-за громоздкости получаемых выражений. Поэтому данная схема подходит только для определённых дифференциальных уравнений 2 порядка, в которых нет 1 производной.

В результате работы над курсовым проектом приобрел практические навыки владения:

- современными численными методами решения задач математической физики;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической физики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической физики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

4. Список литературы

[1] Амосов А.А. Вычислительные методы / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – СПб.: Лань, 2014. – 672с.

[2] Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – СПб: Лань, 2010. – 400с.

[3] Волков, Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – СПб.: Лань, 2008. – 256с.

[4] Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. – 240с.

[5] Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – СПб: Лань, 2011. – 672с.

[6] Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах, 2-е изд - Лань, 2009, 367 с.

[7] В. И. Киреев, А. В. Пантелеев Численные методы в примерах и задачах Изд.: Высшая школа, 2008 г. – 480 с.

[8] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980 г.

[9] Колобов А.Г. Метод сплайн-коллокации. Методические указания- Владивосток, 1998

5. Приложения

5.1. Примеры задач

- Задача 1:

$$\begin{cases} y'' + y = -x; \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0; \\ y(x) = \dfrac{\sin x}{\sin 1} - x \end{cases}$$

- Задача 2:

$$\begin{cases} y'' - y = -x; \\ y(0) = 1, \quad y(1) = e + 1; \\ y(x) = x + e^x \end{cases}$$

- Задача 3:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{2y}{(x+1)^2} = \dfrac{4.5}{(x+1)^{3/2}}; \\ y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \\ y(x) = -2\sqrt{x+1} \end{cases}$$

5.2. Графики решений

На левом графике показаны точное решение и полученное численное решение. На правом модуль разности точного решения и сплайна на всём отрезке.

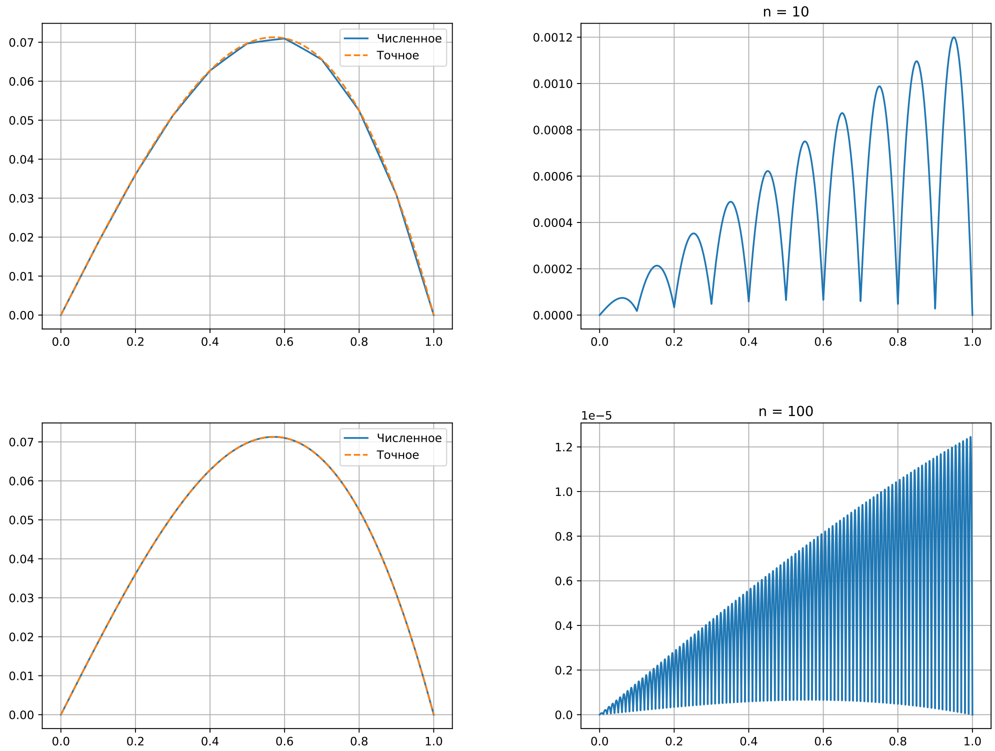

Рис. 1: Задача 1 при $N = 10$ и $N = 100$

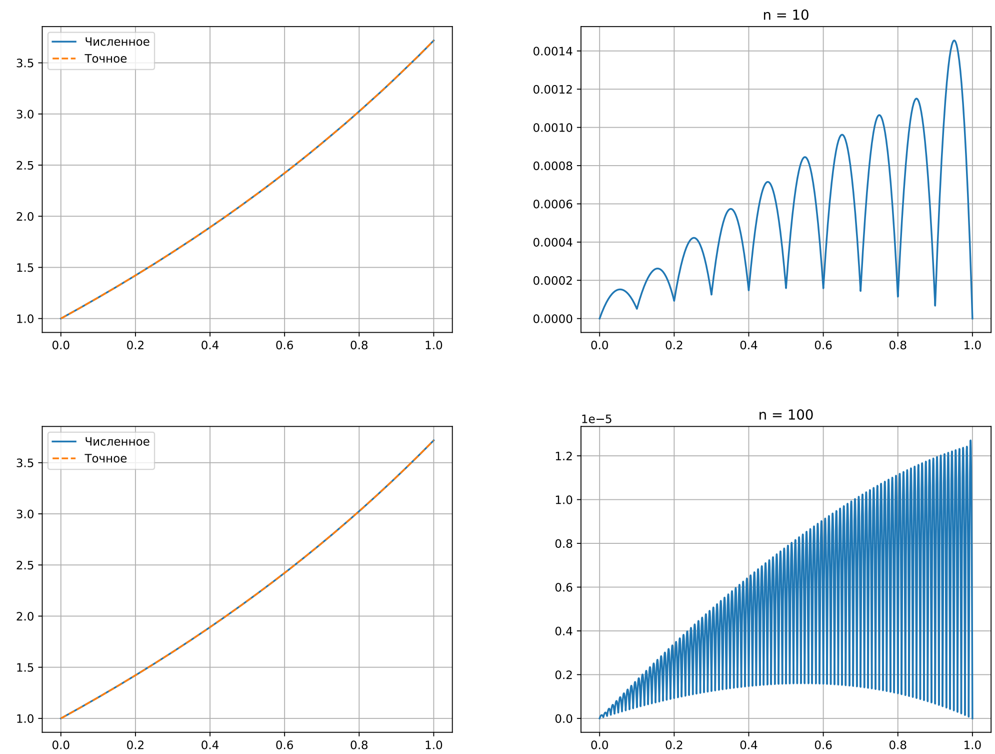

Рис. 2: Задача 2 при $N = 10$ и $N = 100$

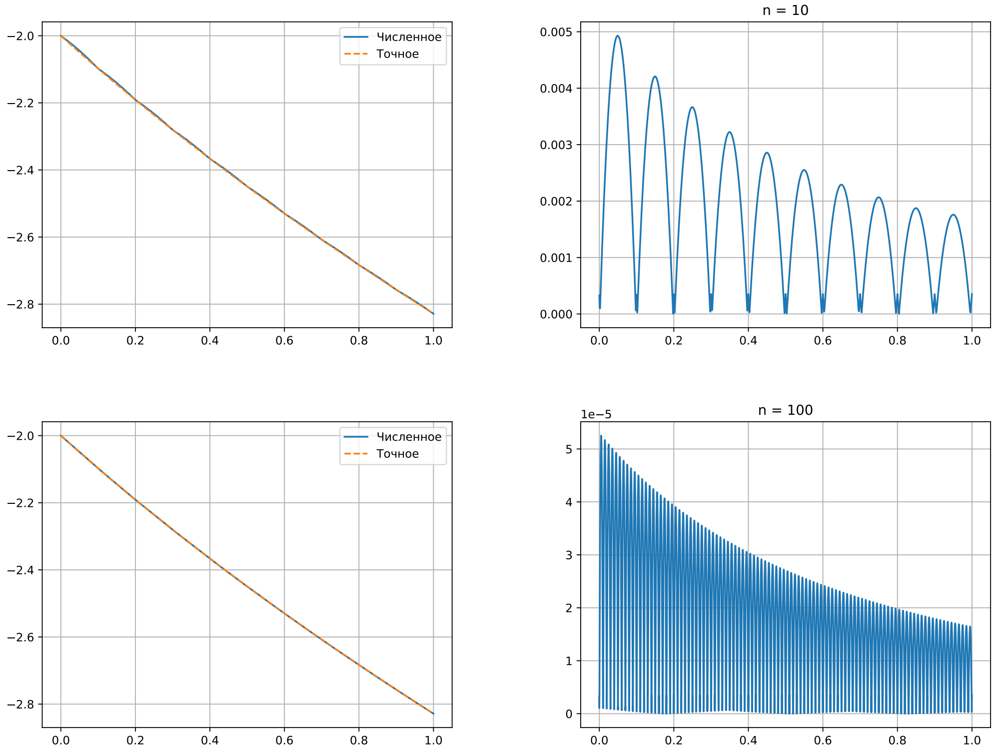

Рис. 3: Задача 3 при $N = 10$ и $N = 100$

5.3. Программа

Листинг 1: Метод сплайн-коллокации.

```python
# 3-spline collocation
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def exact(x):
    # return x + np.exp(x)
    # return np.sqrt(x+1) * np.log(x+1)
    # return np.sin(x)/np.sin(1) - x
    return -2 * np.sqrt(x+1)

def q(x):
    # return -1
    # return -1/(np.sqrt(x+1) * (x+1))
    # return 1
    return -2 / (x+1)**2

```

```
def f(x):
    # return -x
    # return (-1/(x+1) - 1/(4 * (x+1)**1.5)) * np.log(x+1)
    return 4.5 / (x+1)**(3/2)

a, b = 0, 1
# a0, b0, c0 = 1, 0, exact(a)
# a1, b1, c1 = 1, 0, exact(b)

a0, b0, c0 = 1, -2, 0
a1, b1, c1 = 0, 1, -1/np.sqrt(2)

n = 10
tl, h = np.linspace(a, b, n + 1, retstep=True)
mu = 0.5  # h/(h+h)

A = np.zeros(n + 1)
C = np.zeros(n + 1)
D = np.zeros(n + 1)
F = np.zeros(n + 1)

for k in range(1, n):
    A[k] = (1 - mu) * (1 + h ** 2 * q(tl[k - 1]) / 6)
    D[k] = mu * (1 + h ** 2 * q(tl[k + 1]) / 6)
    C[k] = -(1 - h ** 2 * q(tl[k]) / 3)
    F[k] = h ** 2 / 6 * (mu * f(tl[k - 1]) + 2 * f(tl[k]) + (1 - mu) * f(tl[k +
       1]))

C[0] = a0 * h - b0 * (1 - 1 / 3 * q(tl[0]) * h ** 2)
D[0] = b0 * (1 + 1 / 6 * q(tl[1]) * h ** 2)
F[0] = c0 * h + 1 / 6 * b0 * h ** 2 * (2 * f(tl[0]) + f(tl[1]))

A[-1] = b1 * (-1 - 1 / 6 * h ** 2 * q(tl[-2]))
C[-1] = a1 * h + b1 * (1 - 1 / 3 * h ** 2 * q(tl[-1]))
F[-1] = c1 * h - 1 / 6 * b1 * h ** 2 * (f(tl[-2]) + 2 * f(tl[-1]))

matrix = np.diag(A[1:], -1) + np.diag(C) + np.diag(D[:-1], 1)

v = np.linalg.solve(matrix, F)

```

```
M = F - q(tl) * v

n_in = 100

xl = np.zeros(0)
uu = np.zeros(0)

for i in range(n):
    xl_cur = np.linspace(tl[i], tl[i + 1], n_in)

    def S(x):
        t = (x - tl[i]) / h
        return v[i] * (1 - t) + v[i + 1] * t - h ** 2 / 6 * t * (1 - t) * ((2 - t) * M[i] + (1 + t) * M[i + 1])

    u_cur = S(xl_cur)

    xl = np.append(xl, xl_cur)
    uu = np.append(uu, u_cur)

ex = exact(xl)

plt.figure("Решения")
plt.plot(xl, uu)
plt.plot(xl, ex, "--")
plt.legend(["Численное", "Точное"])
plt.grid()

plt.figure("Ошибка")
plt.plot(xl, abs(uu - exact(xl)))
plt.title(f"{n = }")
plt.grid()

print(max( abs(uu - exact(xl))))

plt.show()
```

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование»

Ф.И.О. Держапольский Юрий Витальевич

ТЕМА курсового проекта:

«Сплайн-разностная схема метода сплайн-коллокации»

ФОРМУЛИРОВКА задания:

- Создать алгоритм решения поставленной задачи, реализовать его, протестировать программы;
- Оформить и представить итоги проделанной работы в виде отчета;
- Сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов.

РУКОВОДИТЕЛЬ проекта ______________ / Колобов А.Г./

ДАТА ВЫДАЧИ задания 1.10.2024

СРОК ВЫПОЛНЕНИЯ задания 7.10.2024 – 21.12.2024

Задание получил ____________________________