



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  
**(ШКОЛА)**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**ОТЧЁТ**

к лабораторной работе №6 по дисциплине  
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор д.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 15 » июня 2024 г.

**г. Владивосток**

**2024**

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Вычислительные эксперименты</b>	<b>6</b>
3.1	Алгоритм . . . . .	6
3.2	Численный анализ . . . . .	7
3.3	Результаты . . . . .	8
3.4	Турбулентность . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>13</b>

# 1. Введение

Одним из многих физических явлений в нашем мире являются течения в океанах и морях. Они переносят различные вещества и температуру из одной точки земли в другую.

Однако, будем исследовать движение веществ или каких-либо примесей на намного меньшем масштабе. Представим что в небольшом бассейне какой-либо механизм под водой создаёт постоянное течение на поверхности. На ней же находятся примеси или вода имеет различную температуру.

Построим модель, которая позволит узнать, как изменится концентрация через некоторое время.

## 2. Математическая модель

В общем случае для процессов распространения используется уравнение переноса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$

где  $t$  – время,  $x, y$  – координаты,  $C$  – концентрация вещества (или, например, температура) в каждой точке пространства,  $u, v$  – компоненты скорости течения по  $x$  и  $y$ .

При этом в начальный момент времени известна концентрация

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y).$$

Также задана функция тока  $\psi(x, y)$ , задающая перемещение примесей:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы найти концентрацию вещества в каждой точке области в каждый момент времени.

Однако, необязательно знать дифференциальное уравнение, которое задаёт процесс, достаточно знать функцию тока. В этом поможет метод частиц, также известный как метод Лагранжа.

Для этого метода нужно моделировать движение каждой точки отдельно. Рассмотрим это на примере одной частицы. Она имеет координаты  $x, y$  и концентрацию  $C$ , которая не меняется со временем  $\left(\frac{\partial C}{\partial t} = 0\right)$ . В данной точке на неё действует ток: на координату  $x$  действует  $u(x, y)$ , на  $y$  действует  $v(x, y)$ . Аппроксимируя, мы можем записать изменение координат точки от момента времени  $n$  до  $n + 1$  (через время  $\Delta t$ ):

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n + u(x^n, y^n) \Delta t, \\ y^{n+1} = y^n + v(x^n, y^n) \Delta t. \end{cases}$$

Совершая предельный переход при  $\Delta t \rightarrow 0$ , можем записать систему дифференциальных уравнений для частицы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y). \end{cases}$$

Применяя данную схему для большого количества частиц мы можем получить приближённую функцию концентрации в каждой точке, например, интерполированием.

### 3. Вычислительные эксперименты

Исследуемая область является квадратом, размером 1 на 1. В качестве функции тока возьмём:

$$\psi(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(\pi y),$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\pi \sin(2\pi x) \cos(\pi y), \\ v(x, y) = 2\pi \cos(2\pi x) \sin(\pi y). \end{cases}$$

Изобразим фазовые кривые этой функции тока (Рис. 1).

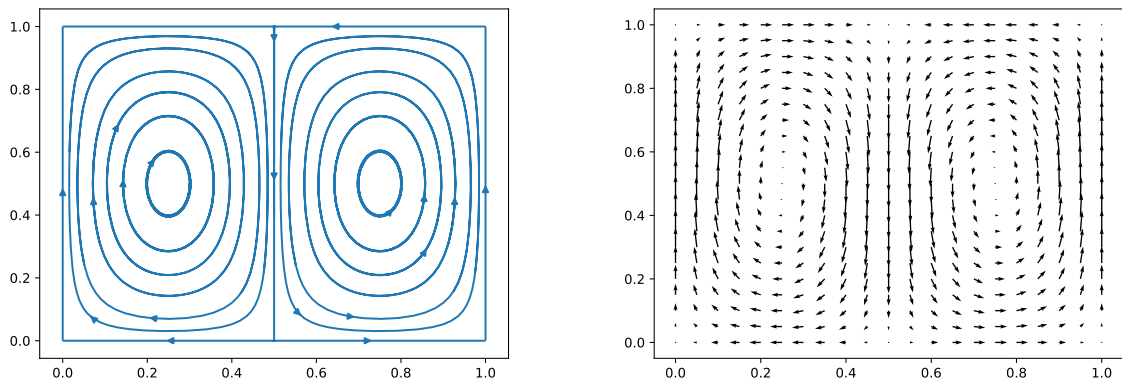


Рис. 1: Фазовые кривые функции тока  $\psi(x, y)$ .

В качестве начальной концентрации используем такую функцию:

$$C_0(x, y) = \arctan\left(\frac{y - 0.5}{0.1}\right)$$

#### 3.1. Алгоритм

Для реализации модели будем использовать конечно-разностный метод Рунге-Кутты 4 порядка. Для этого был использован язык Python с библиотеками numpy, matplotlib и scipy.

Создадим в исследуемой области большое количество точек и для каждой из них применим метод на промежутке времени  $[0, 0.4]$ . Выберем несколько моментов времени в которых построим все точки, а также интерполяционное изображение из этих точек.

Интерполяция будет производиться методом линейной триангуляции, который реализуется встроенной функцией `griddata`.

### 3.2. Численный анализ

Для начала построим изображение пути трёх точек в данной области (Рис. 2).

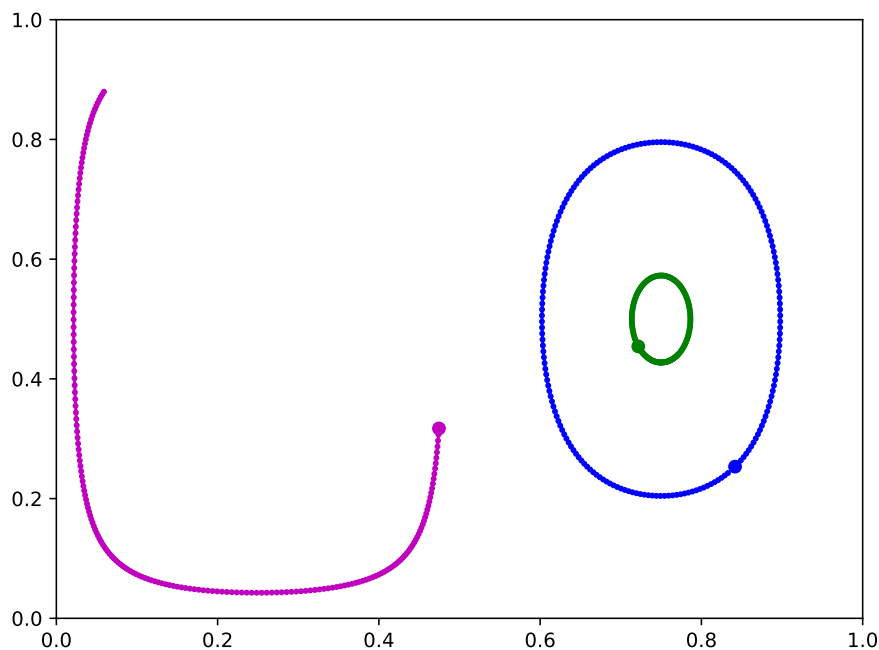


Рис. 2: Пример движения трёх случайных точек

Эти пути следуют фазовым кривым, чего и следовало ожидать.

Теперь рассмотрим поведение только одной центральной линии из 2000 точек на меньшем промежутке времени.

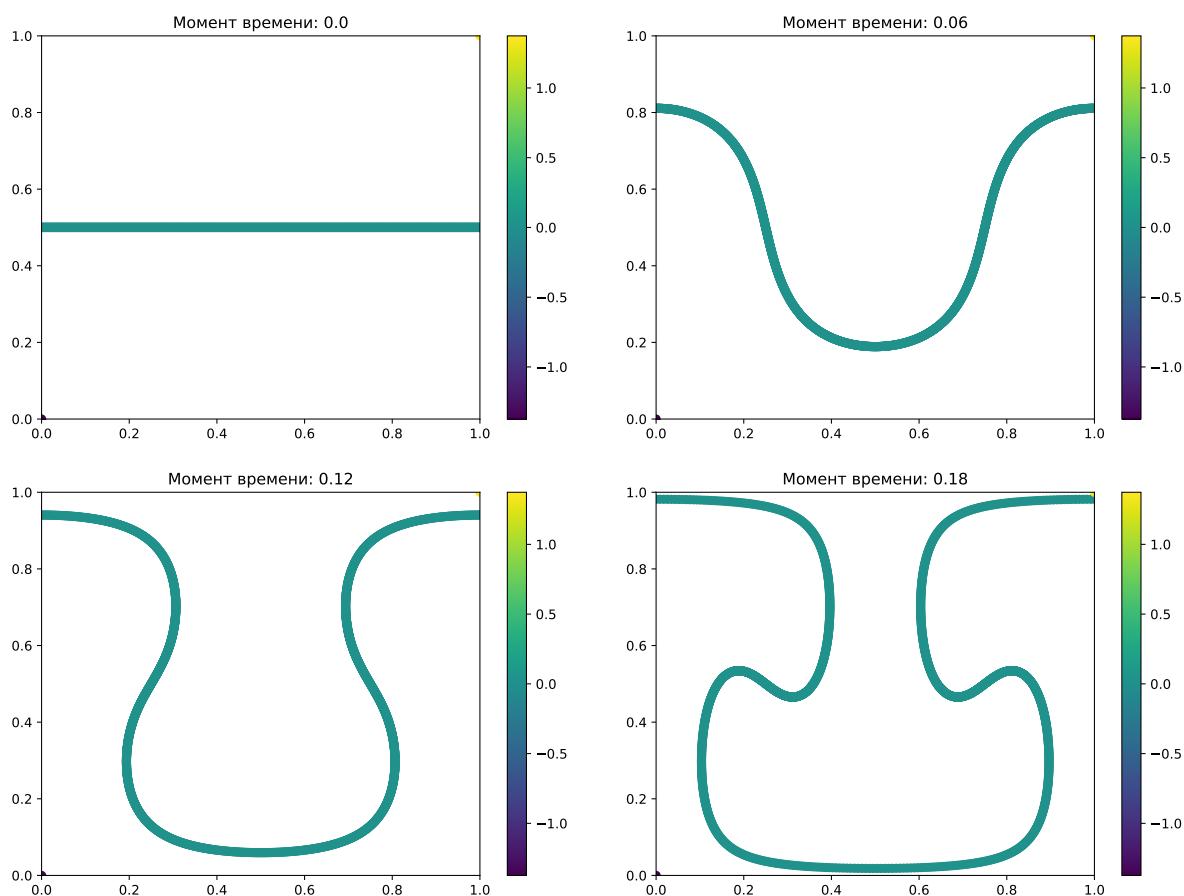


Рис. 3: Движение одной линии.

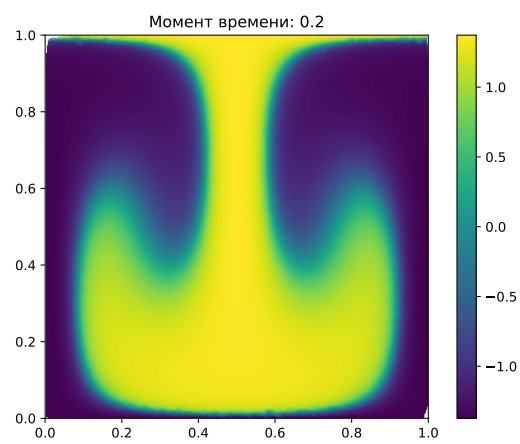
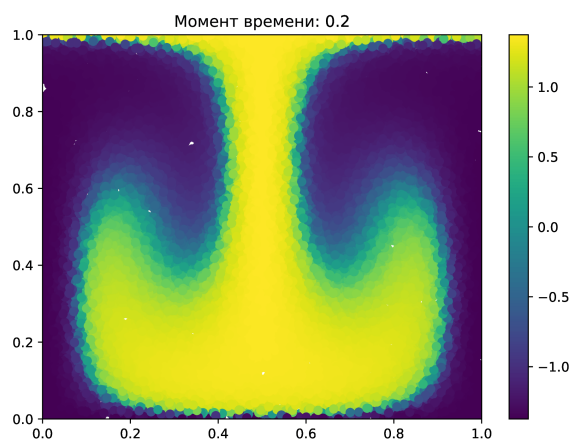
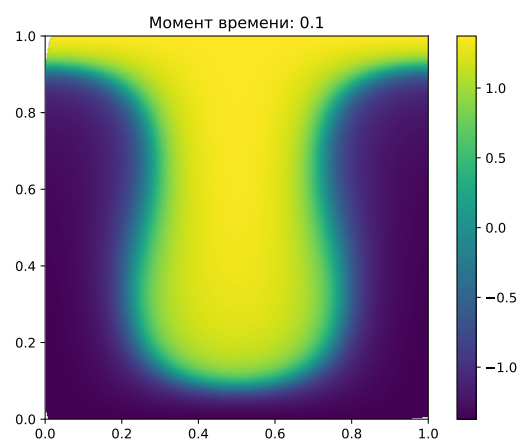
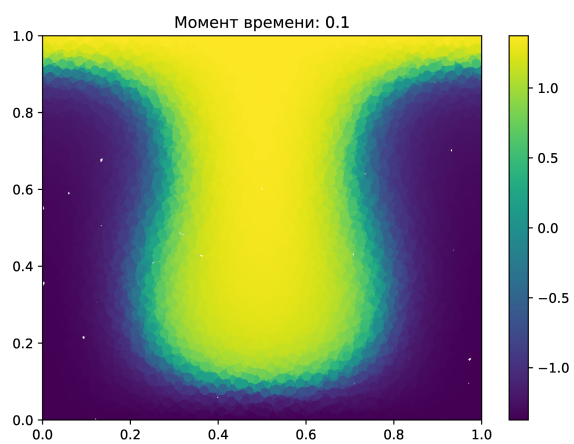
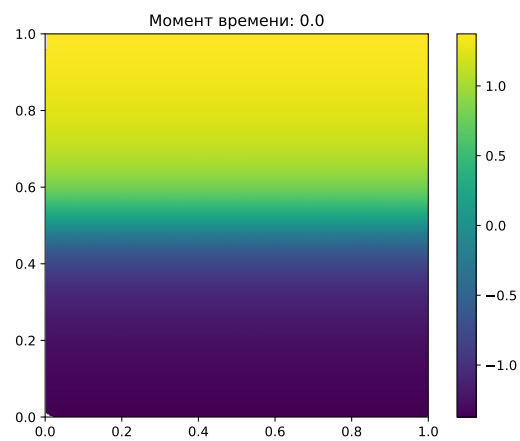
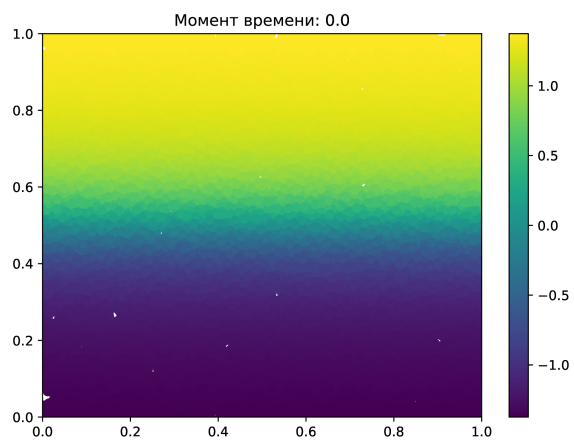
На этом примере (Рис. 3) можно сделать предположения о поведении большого множества точек в данной области, например, образование изображения, похожего на гриб.

### 3.3. Результаты

Для получения результата на всей области построим 20000 случайных точек, после чего смоделируем их движение. После чего интерполируем на сетке, состоящей из 500 делений по обоим направлениям.

Слева находится изображение со всеми точками, а справа интерполированное изображение в этот же момент времени.





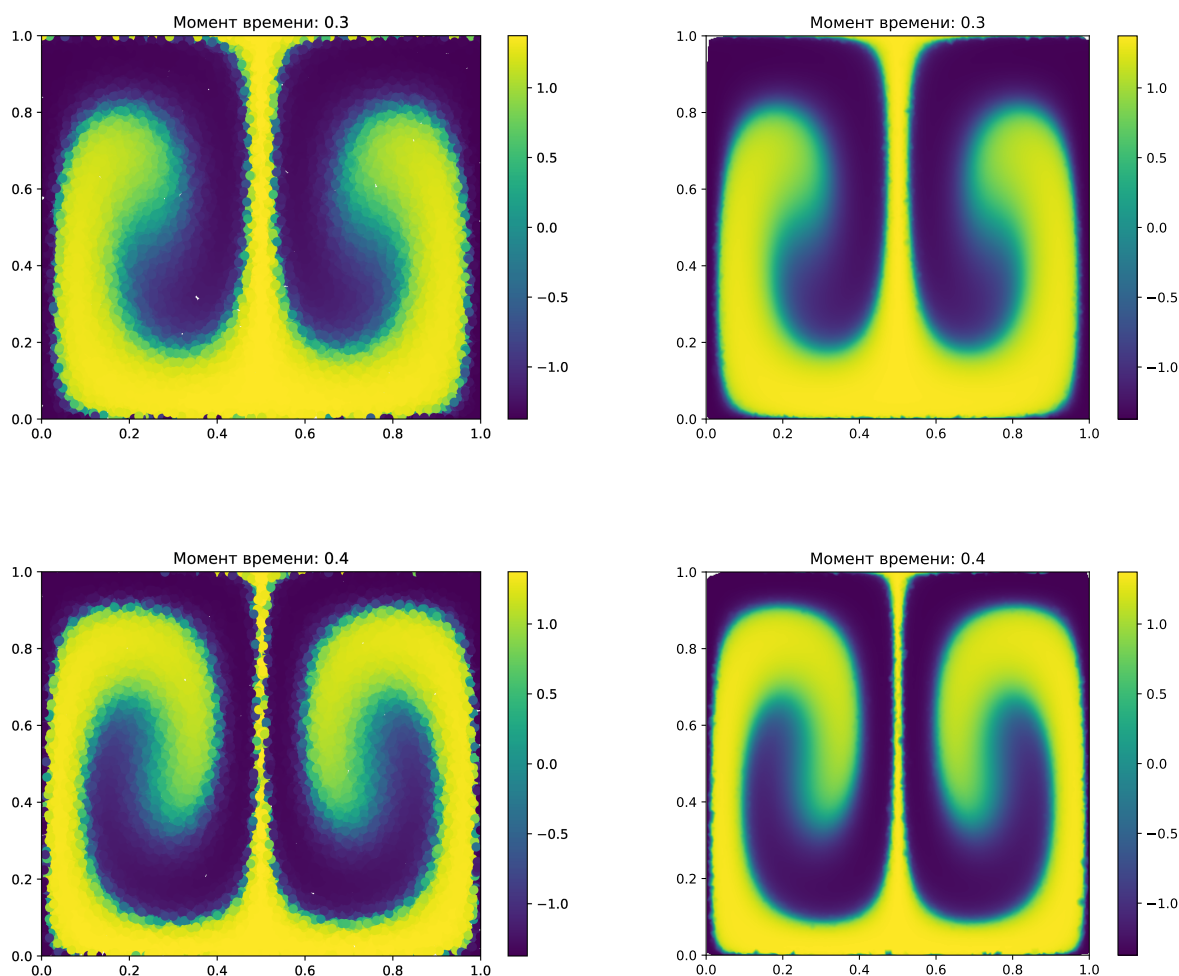


Рис. 4: Результаты вычисления для 20000 точек.

Численные результаты (Рис. 4) показывают образование чего-то похожего на гриб, как и было предположено в анализе.

В интерполированных результатах около границ можно заметить некоторые разрывы. Поскольку это модель «идеальная», то есть без какого-либо дополнительного влияния это не может быть турбулентность. Если посмотреть на результат, построенный из точек, то можно увидеть почему так происходит: близко к границам есть точки с совершенно разной концентраций. Метод линейной триангуляции выбирает 3 точки и интерполирует значение в области между ними, а поскольку точки расположены очень плотно, то области между ними маленькие, а значения меняются быстро.

### 3.4. Турбулентность

В реальном мире очень сложно добиться идеальных условий где-либо, и для жидкостей и газов это явление называется турбулентностью. Для приближённого моделирования мы можем добавить некоторую случайную величину в дифференциальное уравнение, которая заставит частицу немного отклониться от траектории, заданной током.

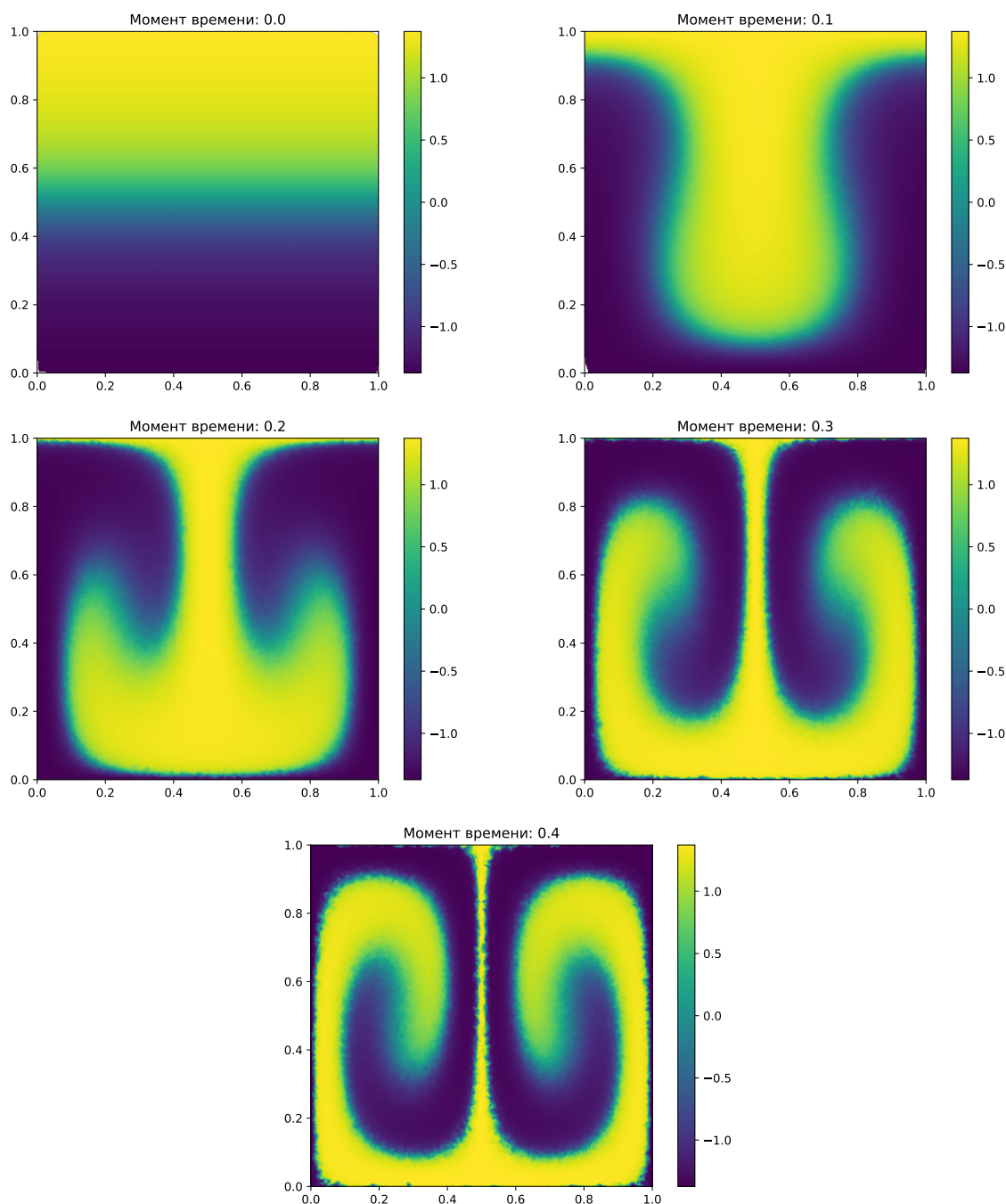


Рис. 5: Результаты при добавлении случайной величины.

В этом эксперименте добавлена слагаемым случайная величина из равномерного распределения на отрезке  $[-0.5, 0.5]$ . Видно (Рис. 5), что в отличие от гладкого изображения идеальной модели здесь наблюдаются искажения из-за турбулентности.

## 4. Заключение

Таким образом, был описан метод частиц для процесса переноса в стационарном поле скорости. Метод представляет собой систему двух дифференциальных уравнений первого порядка, которая описывает движение одной частицы. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. Результаты были визуализированы, а также интерполированы. Получено окончательное численное решение задачи. Был смоделирован эффект турбулентности и результаты сравнены с «идеальной» моделью.