



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  
**(ШКОЛА)**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

Модели конкуренции в экологии и экономике

Направление подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор д.ф.-м. н.

Абакумов А. И.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 21 » мая 2024 г.

**г. Владивосток**

**2024**

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математической модель</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Анализ модели</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Вычислительные эксперименты</b>	<b>9</b>
4.1	При вымирании первой популяции . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>10</b>

# **1. Введение**

## 2. Математической модель

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \xi_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x}_2 = \xi_2(x_2) + k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x}_3 = -\xi_3(x_3) + k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3. \end{cases}$$

Имеем автономную систему  $\dot{x} = f(x)$ , где  $k_{ij} > 0$ .

Примем функции в системе за линейные функции:

$$\xi_i(x_j) = \xi_i \cdot x_j, V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \xi_i, \alpha_{ij} > 0$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \xi_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 = \xi_2 x_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = -\xi_3 x_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 x_3. \end{cases}$$

### 3. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Т.е. нужно найти решения  $(x_1, x_2, x_3)$  системы уравнений:

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3 = 0, \\ \xi_2 x_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3 = 0, \\ -\xi_3 x_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (\xi_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) = 0, \\ x_2 (\xi_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) = 0, \\ x_3 (-\xi_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 + k_{23} \alpha_{23} x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если две любых переменных равны нулю, то в оставшейся строчке остаётся уравнение  $\xi_i x_i = 0$ , т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение  $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ .

2. Если  $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \xi_2 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left( 0, \frac{\xi_3}{k_{23} \alpha_{23}}, \frac{\xi_2}{\alpha_{23}} \right)$$

3. Если  $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left( \frac{\xi_3}{k_{13} \alpha_{13}}, 0, \frac{\xi_1}{\alpha_{13}} \right)$$

4. Если  $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{12} x_2 = 0, \\ \xi_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \left( -\frac{\xi_2}{k_{12} \alpha_{12}}, \frac{\xi_1}{\alpha_{12}}, 0 \right)$$

5. Если  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ \xi_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 + k_{23} \alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение  $x^{(4)}$ :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\xi_1\alpha_{23}k_{23} + \xi_2k_{23}\alpha_{13} + \xi_3\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_2 = \frac{\xi_1}{\alpha_{12}} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 = \frac{\xi_1\alpha_{23}k_{13} - \xi_2\alpha_{13}k_{13} - \xi_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_3 = \frac{\xi_2}{\alpha_{23}} + \frac{k_{12}\alpha_{12}}{\alpha_{23}}x_1 = \frac{-\xi_1\alpha_{23}k_{12}k_{23} + \xi_2\alpha_{13}k_{13} + \xi_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}. \end{cases}$$

Получили все точки. Для анализа устойчивости в этих точках воспользуемся методом первого приближения. Найдём матрицу Якоби:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 \end{pmatrix}$$

После чего подставляем значения точки равновесия и ищем собственные значения матрицы.

$$A = J|_{x^*}, \quad \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы  $\forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$ . Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если  $b_0 > 0$ , то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы  $\Delta$  были положительны.

$$1. \quad J|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = \xi_1 > 0, \quad \lambda_2 = \xi_2 > 0, \quad \lambda_3 = -\xi_3 < 0.$$

Значит около начала координат решения будут расходиться по  $x_1, x_2$  и сходиться по  $x_3$ .

$$2. \quad A = J|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_{12} \frac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} - \alpha_{13} \frac{\xi_2}{\alpha_{23}} & 0 & 0 \\ k_{12}\alpha_{12} \frac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} & 0 & -\alpha_{23} \frac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} \\ k_{13}\alpha_{13} \frac{\xi_2}{\alpha_{23}} & k_{23}\alpha_{23} \frac{\xi_2}{\alpha_{23}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left( \lambda - \left( \xi_1 - \frac{\xi_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\xi_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}} \right) \right) (\lambda^2 + \xi_2\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_1 - \frac{\xi_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\xi_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_2\xi_3}.$$

Точка  $x^{(1)}$  – неустойчивая. В плоскости  $x_1 = 0$  точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя циклы, а в некоторой близости от этой плоскости циклы будут двигаться в некотором направлении, в зависимости от констант.

$$3. \quad A = J|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} \frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13} \frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13} \frac{\xi_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left( \lambda - \left( \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{13}} \right) \right) (\lambda^2 + \xi_1\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_1\xi_3}.$$

Аналогично предыдущей точке,  $x^{(2)}$  – неустойчивая и в плоскости  $x_2 = 0$  является центром и будет создавать вокруг себя циклы.

$$4. A = J|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} \frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} & -\alpha_{13} \frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} \\ k_{12}\alpha_{12} \frac{\xi_1}{\alpha_{12}} & 0 & -\alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{12}} \\ 0 & 0 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} \frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{12}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left( \lambda - \left( -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} \frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{12}} \right) \right) (\lambda^2 - \xi_1 \xi_2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} \frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23} \frac{\xi_1}{\alpha_{12}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\xi_1 \xi_2}.$$

Точка  $x^{(3)}$  – неустойчивая, но в плоскости  $x_3 = 0$  является седлом по некоторым двум направлениям.

$$5. A = J|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3) +$$

$$+ x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \leq 0. \end{cases}$$



## 4. Вычислительные эксперименты

Возьмём параметры для модели:

$$\xi_1 = 10, \xi_2 = 8, \xi_3 = 6,$$

$$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$$

$$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$$

### 4.1. При вымирании первой популяции

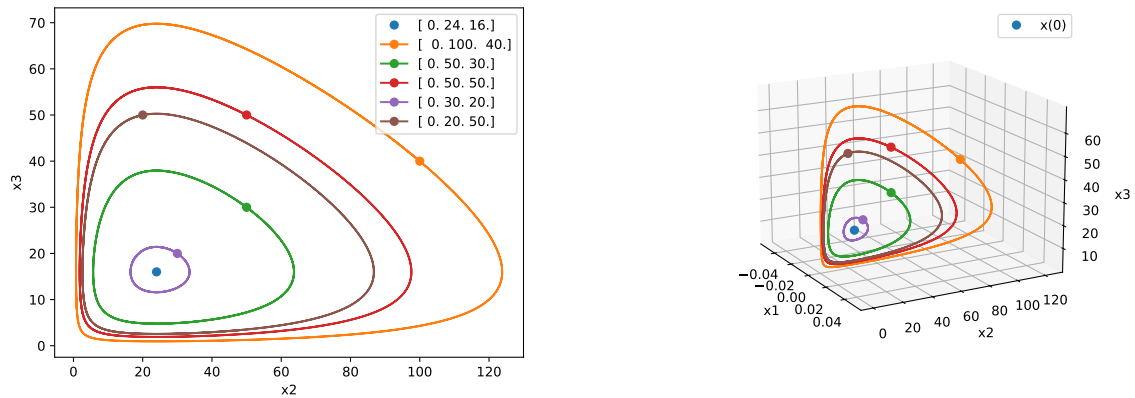


Рис. 1: На отрезке времени  $[0, 3]$ .

## **5. Заключение**