Индивидуальное домашнее задание №4 по дисциплине «Уравнения математической физике»

Вариант 5

Держапольский Юрий Витальевич

Задание 1

Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2} + 2.5u|_{r=2} = 2 - \sin\varphi + 3\sin^2(2\varphi), \quad 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(r,\varphi) = P(r)\cdot\Phi(\varphi)$.

$$\frac{1}{r}\left(rP'\Phi\right)' = -\frac{1}{r^2}P\Phi'' \quad \Rightarrow \quad \frac{r\left(rP'\right)'}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2$$

1. Решим задачу Штурма-Лиувилля для второго равенства.

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \Rightarrow \Phi(\varphi) = C_1\sin(\mu\varphi) + C_2\cos(\mu\varphi)$$

$$C_1\sin(\mu\varphi) + C_2\cos(\mu\varphi) = C_1\sin\left(\mu(\varphi+2\pi)\right) + C_2\cos\left(\mu(\varphi+2\pi)\right)$$

Такое происходит только когда $\mu_n = n, n \in \mathbb{N}_0$. ($n = 0, 1, 2, \dots$) Значит решение выглядит так: $\Phi_n = A_n\sin(\varphi n) + B_n\cos(\varphi n)$.

2. Найдём решение для первого равенства.

$$r\left(rP'\right)' - \mu_n^2 P = 0.$$

Если $n = 0$, то

$$P_0 = C_1\ln r + C_2.$$

Задача внутренняя, значит $\ln r \xrightarrow{r\to 0} -\infty$, значит $C_1 = 0, P_0 = const$.

$$P_n^{(1)}(r) = r^n, \quad P_n^{(2)}(r) = \frac{1}{r^n}.$$

Т.к. задача внутренняя, то выбираем $P_n(r) = r^n$.

Имеем

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\varphi)=B_0P_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(A_n\sin(\varphi n)+B_n\cos(\varphi n)\right).$$

Заменим константу $B_0P_0=P_0$. Подставим в граничные условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}+2.5u|_{r=2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 2^{n-1}\left(A_n\sin(\varphi n)+B_n\cos(\varphi n)\right)+$$
$$+\frac{5}{2}P_0+\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(A_n\sin(\varphi n)+B_n\cos(\varphi n)\right).$$

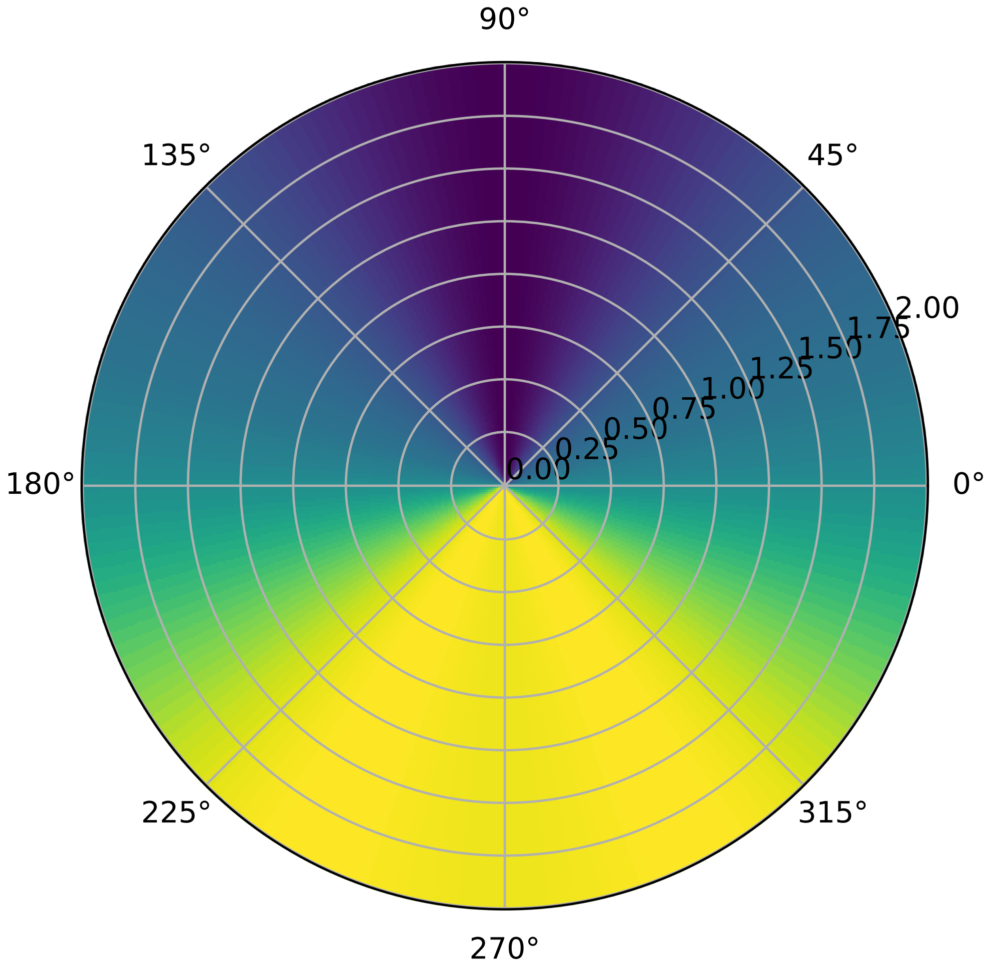
Распишем то, чему равны граничные условия

$$2-\sin\varphi+3\sin^2(2\varphi)=2-\sin\varphi+3\cdot\frac{1-\cos(2\cdot 2\varphi)}{2}=\frac{7}{2}-\sin\varphi-\frac{3}{2}\cos(4\varphi).$$

Сопоставим коэффициенты и найдём их.

1. $\frac{5}{2}P_0=\frac{7}{2}\Rightarrow P_0=\frac{7}{5}$
2. $1\cdot 2^{1-1}A_1+\frac{5}{2}\cdot 2^1A_1=-1\Rightarrow 6A_1=-1\Rightarrow A_1=-\frac{1}{6}$
3. $4\cdot 2^{4-1}B_4+\frac{5}{2}\cdot 2^4B_4=-\frac{3}{2}\Rightarrow 72B_4=-\frac{3}{2}\Rightarrow B_4=-\frac{1}{48}$
4. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Ответ: $u(r,\varphi)=\frac{7}{5}-\frac{1}{6}\sin\varphi-\frac{1}{48}\cos(4\varphi)$.


90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Задание 2

Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0, \quad 4<r<5, \quad 0<\varphi<2\pi, \\ 2u|_{r=4}=3, \quad 0<\varphi<2\pi, \\ u|_{r=5}=5-2.3\sin\varphi, \quad 0<\varphi<2\pi. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(r,\varphi)=P(r)\cdot\Phi(\varphi)$.

$$\frac{1}{r}\left(rP'\Phi\right)'=-\frac{1}{r^2}P\Phi'' \quad \Rightarrow \quad \frac{r\left(rP'\right)'}{P}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu^2$$

1. Решим задачу Штурма-Лиувилля для второго равенства.

$$\begin{cases} \Phi''+\mu^2\Phi=0, \\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \end{cases} \Rightarrow \Phi(\varphi)=C_1\sin(\mu\varphi)+C_2\cos(\mu\varphi)$$

$$C_1\sin(\mu\varphi)+C_2\cos(\mu\varphi)=C_1\sin\left(\mu(\varphi+2\pi)\right)+C_2\cos\left(\mu(\varphi+2\pi)\right)$$

Такое происходит только когда $\mu_n=n, n\in\mathbb{N}_0$. ($n=0,1,2,\dots$) Значит решение выглядит так: $\Phi_n=A_n\sin(\varphi n)+B_n\cos(\varphi n)$.

2. Найдём решение для первого равенства.

$$r\left(rP'\right)'-\mu_n^2P=0.$$

Если $n=0$, то

$$P_0=A_0+B_0\ln r.$$

Задача в кольце, поэтому P_0 остаётся в таком виде.

$$P_n^{(1)}(r)=r^n, \quad P_n^{(2)}(r)=\frac{1}{r^n}.$$

Задача в кольце, значит выбираем линейную комбинацию решений:

$$P_n(r)=C_n^{(1)}r^n+C_n^{(2)}\frac{1}{r^2}.$$

Заменяем коэффициенты $C_n^{(1)}A_n = A_n$, $C_n^{(1)}B_n = B_n$, $C_n^{(2)}A_n = C_n$, $C_n^{(2)}B_n = D_n$ и получаем:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \big(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \big(C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)\big)$$

Подставим в граничные условия:

$$\begin{cases} 2u|_{r=4} = 2A_0 + 2B_0 \ln 4 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n \big(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\big) + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n} \big(C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)\big) \equiv 3, \\ u|_{r=5} = A_0 + B_0 \ln 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n \big(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\big) + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n} \big(C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)\big) \equiv 5 - 2.3 \sin\varphi. \end{cases}$$

Сопоставим коэффициенты и найдём их.

1. При константах:

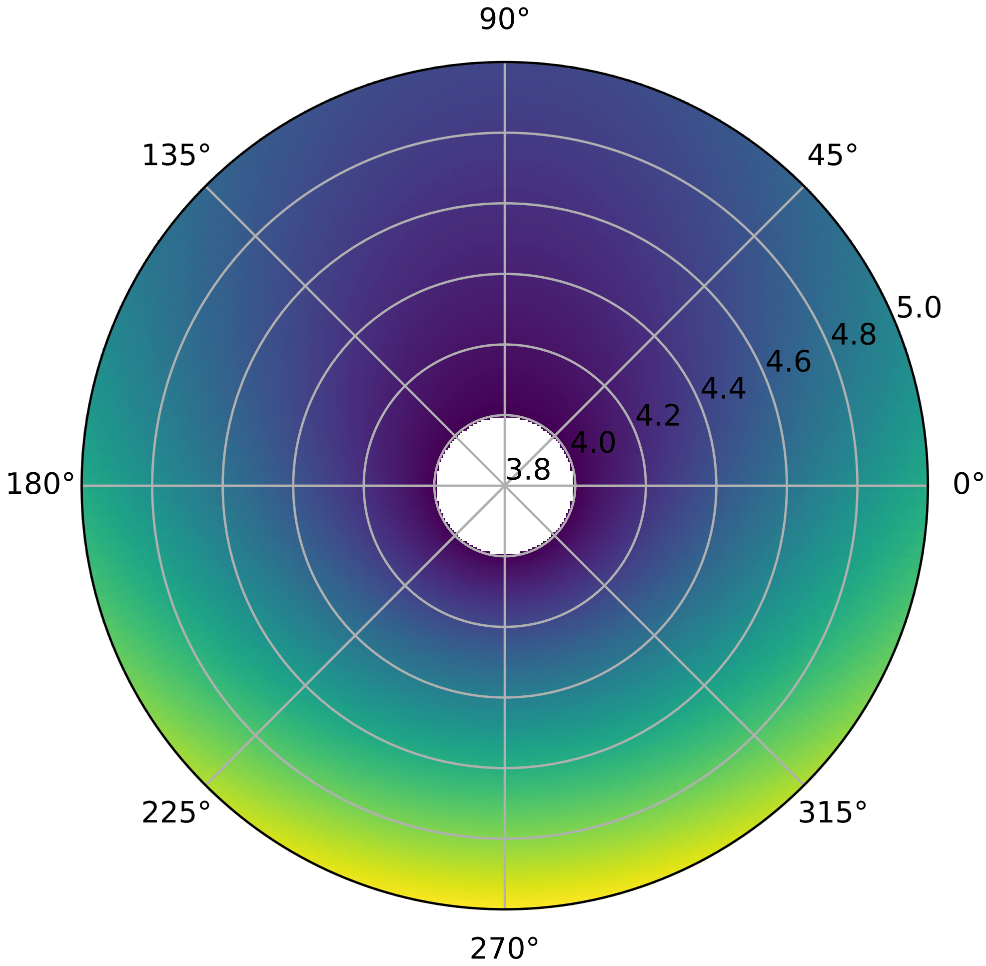
$$\begin{cases} 2A_0 + 2B_0 \ln 4 = 3, \\ A_0 + B_0 \ln 5 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = \dfrac{7}{2(\ln 5 - \ln 4)}, \\ A_0 = 5 - \dfrac{7 \ln 5}{2(\ln 5 - \ln 4)} = \dfrac{3\ln 5 - 10 \ln 4}{2(\ln 5 - \ln 4)} \end{cases}$$

2. При $n = 1$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 4A_1 + 2 \cdot \dfrac{1}{4} C_1 = 0, \\ 5A_1 + \dfrac{1}{5} C_1 = -2.3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{23}{18}, \\ C_1 = \dfrac{184}{9} \end{cases}$$

3. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Ответ: $u(r,\varphi) = \dfrac{3\ln 5 - 10\ln 4}{2(\ln 5 - \ln 4)} + \dfrac{7}{2(\ln 5 - \ln 4)} \ln r - \dfrac{23}{18} r \sin\varphi + \dfrac{184}{9} \dfrac{1}{r} \sin\varphi.$


90°
45°
135°
180°
0°
225°
315°
270°
3.8
4.0
4.2
4.4
4.6
4.8
5.0

Задание 3

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos x - e^x$ по системе собственных функций $\{1, \cos(\varphi n x), \sin(\varphi n x)\}, n = 1, \ldots, \infty$ задачи Штурма-Лиувилля.

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\big) .$$

Найдём коэффициенты:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x - e^x)\, dx = \frac{1}{2\pi}(\sin x - e^x)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1-e^{2\pi}}{2\pi},$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x - e^x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{n\sin(2\pi n)}{n^2-1} + \frac{1 - e^{2\pi}\big(n\sin(2\pi n) + \cos(2\pi n)\big)}{n^2+1}\right) = \frac{1-e^{2\pi}}{\pi(n^2+1)}, n > 1.$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x - e^x)\cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi + \frac{1-e^{2\pi}}{2}\right) = 1 + \frac{1-e^{2\pi}}{2\pi}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x - e^x)\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2n\sin^2(2\pi n)}{n^2-1} + \frac{e^{2\pi}\big(n\cos(2\pi n) - \sin(2\pi n)\big) - n}{n^2+1}\right) = \frac{n\left(e^{2\pi}-1\right)}{\pi(n^2+1)}, n > 1.$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos x - e^x)\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{2}\right) = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}$$

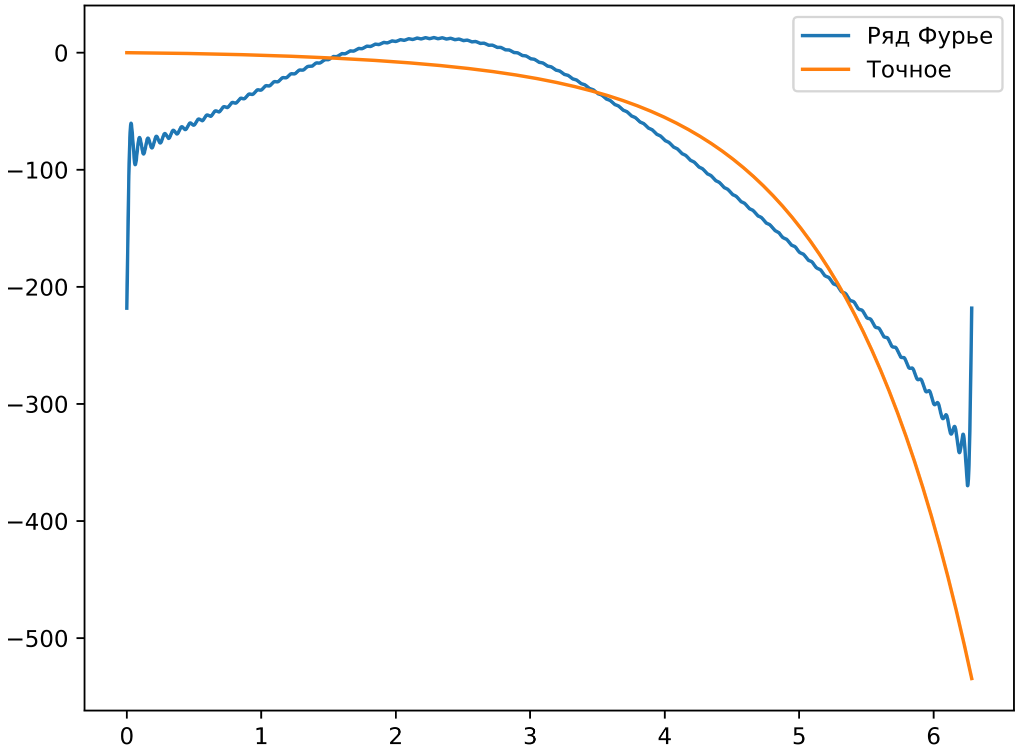


Рис. 1: При $n = 100$.

Разложим на интервале $[-\pi, \pi]$.

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2\pi},$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - e^x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2n\sin(\pi n)}{n^2-1} - 2\frac{\sinh(\pi)\cos(\pi n) + n\cosh(\pi)\sin(\pi n)}{n^2+1}\right) = \frac{2\sinh(\pi)(-1)^{n+1}}{\pi(n^2+1)}, n >$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - e^x)\cos(x)dx = 1 + \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x - e^x)\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}2\frac{n\sinh(\pi)\cos(\pi n) - \cosh(\pi)\sin(\pi n)}{n^2+1} = \frac{2n\sinh(\pi)(-1)^n}{\pi(n^2+1)}.$$

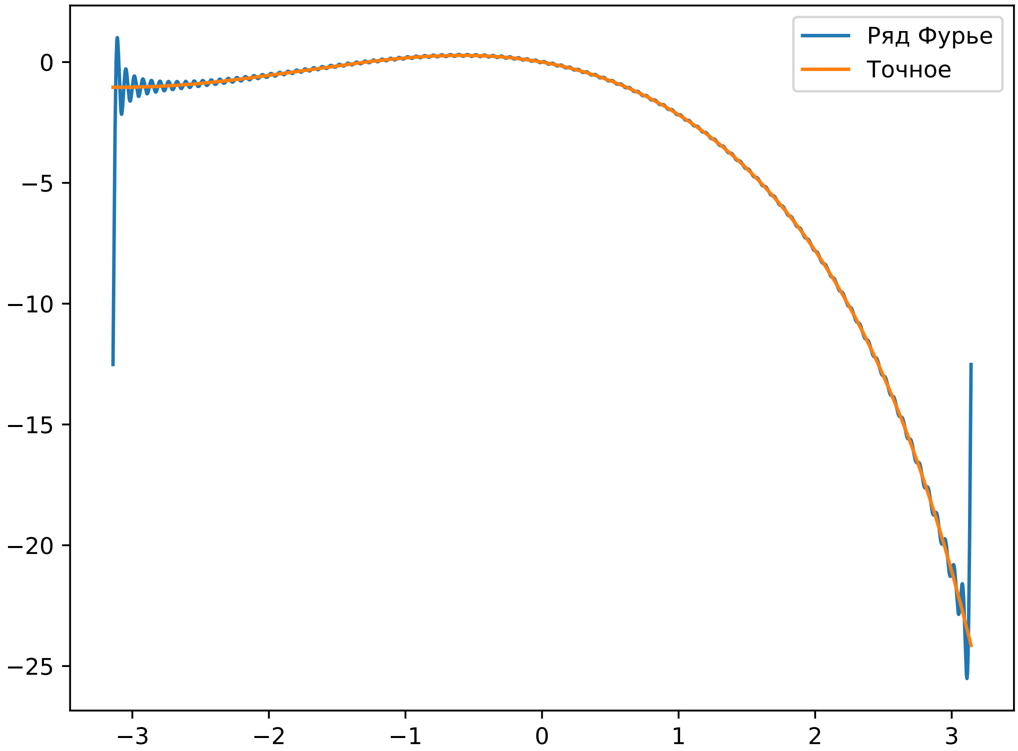


Рис. 2: При $n = 100$.