



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  
**(ШКОЛА)**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**ОТЧЁТ**

к лабораторной работе №1 по дисциплине  
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор к.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 17 » апреля 2024 г.

**г. Владивосток**

**2024**

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Построение математической модели</b>	<b>4</b>
2.1	Модель с терморегулятором . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Анализ модели</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Вычислительные эксперименты</b>	<b>8</b>
4.1	Вычисление точек покоя . . . . .	8
4.2	Алгоритм . . . . .	8
4.3	Программа . . . . .	8
4.4	Модель без терморегулятора . . . . .	12
4.5	Модель с терморегулятора . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>

# 1. Введение

В повседневном мире люди каждый день используют различные приборы нагревания. Например, микроволновка для разогревания еды, утюг для глажки вещей, радиатор для нагревания помещения и т. д.

Однако, таких приборов существует большое количество и все они имеют различные параметры, которые влияют на скорость нагрева. И в быту людей интересует как быстро нагреется тот или иной прибор. Для этого можно создать математическую модель, которая будет учитывать параметры нагревателей и показывать изменение температуры.

Будем рассматривать электрические нагреватели, которые могут иметь или не иметь терморегулятора.

## 2. Построение математической модели

Главной характеристикой любого нагревателя является его температура. При включении нагревателя со временем температура изменяется. Поэтому нужно найти зависимость температуры (К) от времени (с):  $T(t)$ .

Сделаем предположение, что нагревательный элемент состоит из одного материала и окружающая температура постоянная и равна  $T_0$ .

Процесс нагревания можно описать уравнением теплового баланса. Изменение внутренней энергии тела на  $\Delta Q$  (Дж) описывается формулой:

$$\Delta Q = cm\Delta T,$$

где  $c$  – удельная теплоёмкость тела  $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right)$ ,  $m$  – масса тела (кг),  $\Delta T$  – изменение температуры.

Поскольку наш нагревательный прибор работает от электричества, он потребляет мощность во время работы, за счёт чего изменяет свою внутреннюю энергию:

$$\Delta Q_1 = P\Delta t,$$

где  $P$  – мощность (Вт),  $\Delta t$  – изменение времени.

На внутреннюю энергию также влияют входящие и исходящие тепловые потоки. На единицу площади за единицу времени исходящий поток изменяет энергию на  $-kT$ , а входящий на  $kT_0$ , где  $k > 0$  – коэффициент, который зависит от конструкции. Учитывая тепловые потоки, внутренняя энергия изменяется на

$$\Delta Q_2 = -kS(T - T_0)\Delta t,$$

где  $S$  – площадь нагревателя ( $\text{м}^2$ ).

Также любое тело, нагретое выше абсолютного нуля, начинает излучать, что описывает закон Стефана-Больцмана. На единицу площади за единицу времени нагреватель излучает энергию равную  $-\sigma T^4$ , а излучение из внешней сре-

ды изменяет энергию на  $\sigma T_0^4$ , где  $\sigma \approx 5.68 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$  – постоянная Стефана–Больцмана. Значит, общее изменение энергии за счёт излучения:

$$\Delta Q_3 = -\sigma S(T^4 - T_0^4)\Delta t.$$

В итоге, применяя закон теплового баланса, получаем:

$$cm\Delta T = P\Delta t - kS(T - T_0)\Delta t - \sigma S(T^4 - T_0^4)\Delta t.$$

Делим обе части на  $cm\Delta t$  и совершаем предельный переход при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$

Получили дифференциальное уравнение, которое описывает поведение температуры нагревателя. Для получения единственного решения добавим начальное условие:  $T(0) = T_0$ .

## 2.1. Модель с терморегулятором

В быту, для того чтобы нагреватель не нагревался до опасных температур, целесообразно ограничить максимальную температуру. Для этого введём функцию «переключатель», которая по достижении максимальной температуры  $T_{max}$  отключит нагреватель, и после чего по достижении температуры включения  $T_{min}$  снова включит его.

$$H(T, T_{max}, T_{min}) = \begin{cases} 0, & T > T_{max}, \\ 1, & T < T_{min}. \end{cases}$$

Добавляя в уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P \cdot H(T, T_{max}, T_{min}) - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$

### 3. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm} = 0.$$

Заметим, что удельная теплоёмкость и масса находятся в знаменателе, а значит не влияют на нули, однако они влияют на скорость изменения температуры.

$$T^4 + \frac{k}{\sigma}T - \left(T_0^4 + \frac{kT_0 + \frac{P}{S}}{\sigma}\right) = 0.$$

Уравнение четвёртой степени, а значит оно имеет ровно 4 корня на  $\mathbb{C}$ . Поставим задачу определить тип этих корней: их положительность или комплексность.

Для удобства переобозначим:

$$a = \frac{k}{\sigma} > 0, \quad b = \left(T_0^4 + \frac{kT_0 + \frac{P}{S}}{\sigma}\right) > 0, \quad T^4 + aT - b = 0.$$

Воспользуемся теоремой Декарта: «Число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов или на чётное число меньше этого числа». Знак коэффициентов нашего уравнения меняется только раз – между последними двумя, значит существует ровно один положительный корень. Подставляя в уравнение  $T = -T$ , найдём количество отрицательных корней.

$$T^4 - aT - b = 0.$$

Знак меняется также один раз, значит существует ровно один отрицательный корень.

Из предыдущего следует, что остаётся два комплексных корня. Покажем это. Данное уравнения можно свести к кубическому уравнению разольвенты

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r)y + q^2 = 0,$$

корни которой связаны с корнями исходного уравнения

$$y_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad y_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad y_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).$$

Сведём наше уравнения к разольвенте

$$y^3 + 4by + a^2 = 0.$$

Данное уравнение представлено в виде  $(y^3 + py + q = 0)$ , к которому можно применить формулу Кардано, а более конкретно, найти величину  $Q$ , которая определит типы корней.

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{4b}{3}\right)^3 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2.$$

Поскольку  $Q > 0$ , то у уравнения один вещественный корень и два сопряжённых комплексных.

Из того, что среди  $y_i$  есть комплексный корень, следует, что и среди корней  $T_i$  тоже есть комплексный. Известно, что комплексные корни многочленов с вещественными коэффициентам всегда образуют комплексно-сопряжённые пары, значит, что среди  $T_i$  есть комплексно-сопряжённая пара.

В итоге получили, что уравнение имеет один положительный, один отрицательный и пару комплексно-сопряжённых корней.

Исследуем устойчивость. Воспользуемся методом первого приближения. Вычислим производную и найдём значения, при которых она отрицательная. Обозначим правую часть дифференциального уравнения за  $R$ .

$$\frac{dR}{dT} = \frac{-kS - 4\sigma ST^3}{cm} < 0 \Rightarrow T > -\sqrt[3]{\frac{k}{4\sigma}}$$

Значит любой положительный корень будет устойчивым, но не любой отрицательный будет неустойчивым.

## 4. Вычислительные эксперименты

### 4.1. Вычисление точек покоя

Вычислим теоретически точки покоя и проверим результаты полученные при анализе. Возьмём параметры:

$$P = 3000\text{Вт}, m = 0.5\text{кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.4\text{м}^2, k = 2, T_0 = 296\text{К}.$$

Найдём точки устойчивости уравнения с данными параметрами:

$$T_1 = -645.06 \dots, T_2 = 599.58 \dots, T_{3,4} = 22.73 \dots \pm i623.15 \dots$$

Данные точки согласуются с теоретическим анализом. Исследуем вещественные нули.

$$\left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_1} = 0.053 \dots, \quad \left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_2} = -0.045 \dots$$

Для  $T_1$  получили положительное значение, значит данное положение равновесия неустойчивое. Для  $T_2$  получили отрицательное, значит оно устойчивое.

### 4.2. Алгоритм

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение дифференциального уравнения с заданными параметрами.

### 4.3. Программа

Для расчётов и визуализации была написана программа с использованием языка Python и библиотек numpy и matplotlib.

---

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
```



```

4
5 def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
6     num = int((b - a) / h + 1)
7     x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
8     y_a = [y0] * num
9
10    for i in range(num - 1):
11        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
12        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
13        k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
14        k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
15        y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)
16
17    return x_a, np.array(y_a)
18
19
20 KC = 276
21 sigma = 5.67e-8
22
23 T_l = 190 + KC
24 T_u = 200 + KC
25
26
27 is_turned = True
28 def H1(T):
29     global is_turned
30
31     if T > T_u:
32         is_turned = False
33     elif T < T_l:
34         is_turned = True
35
36     return int(is_turned)
37
38 def H0(T):
39     return 1.
40
41 H = ()
42
43 leg = []

```

```

44 def utug(P, m, c, S, k):
45     def dTdt(t, T):
46         return (P * H(T) - k * S * (T - T0) - sigma * S * (T**4 - T0**4)) / (c *
47             m)
48
49     x = np.linspace(a, b, n)
50
51     x, y = runge_kutta(dTdt, T0, a, b, (b-a)/n)
52     # y == KC
53     leg.append(f"{P=} , {m=} , {c=} , {S=} , {k=}")
54     plt.plot(x, y)
55
56 a, b = 0, 250
57
58 n = 10000
59
60 P = 3000
61 m = 0.5
62 c = 897 # Алюминий
63 S = 0.4
64 k = 2
65 T0 = 20 + KC
66
67 def roots():
68     def diff(T):
69         return (-4 * sigma * S * T**3 - k * S) / (c*m)
70
71     coeff = np.zeros(5)
72     coeff[0] = sigma
73     coeff[3] = k
74     coeff[4] = -sigma*T0**4 - k*T0 - P/S
75
76     for root in np.roots(coeff):
77         print(root, diff(root))
78
79 def without_term():
80     global H
81     H = H0
82     utug(P, m, c, S, k)

```

```

83     utug(P, 1.0, c, S, k)
84     utug(P, m, 554, S, k) # Чугун
85     utug(P, m, c, S/2, k)
86     utug(2500, m, c, S, k)
87     utug(P, m, c, S, 4)
88
89     plt.legend(leg)
90
91     plt.plot([a, b], [600, 600], 'y--')
92     plt.savefig("./sem6-matmodelling/utug1.pdf")
93
94 def with_trem(P, m, c, S, k):
95     global H, T_l, T_u
96     H = H1
97     leg2 = []
98     def al2():
99         leg2.append(f"T_min={T_l}, T_max={T_u}")
100
101     T_l = 490
102     T_u = 500
103     al2()
104
105     utug(P, m, c, S, k)
106     T_l = 530
107     T_u = 560
108     al2()
109     utug(P, m, c, S, k)
110
111     T_l = 510
112     T_u = 515
113     al2()
114     utug(P, m, c, S, k)
115
116     plt.legend(leg2)
117     plt.savefig("./sem6-matmodelling/utug2.pdf")
118
119
120
121 plt.xlabel('t-Время')
122 plt.ylabel('T(t)-Температура в кельвинах')

```

```

123
124 # without_term()
125 with_trem(2500, 1, c, S/2, 2)
126
127 plt.xlabel('t-Время')
128 plt.ylabel('T(t)-Температура в кельвинах')
129 plt.xlim([a,b])
130 plt.show()

```

Итогом программы является график с одним или несколькими решениями дифференциального уравнения на некотором отрезке времени  $[0, t_0]$ .

## 4.4. Модель без терморегулятора

Построим несколько решений уравнения для модели без терморегулятора с разными параметрами.

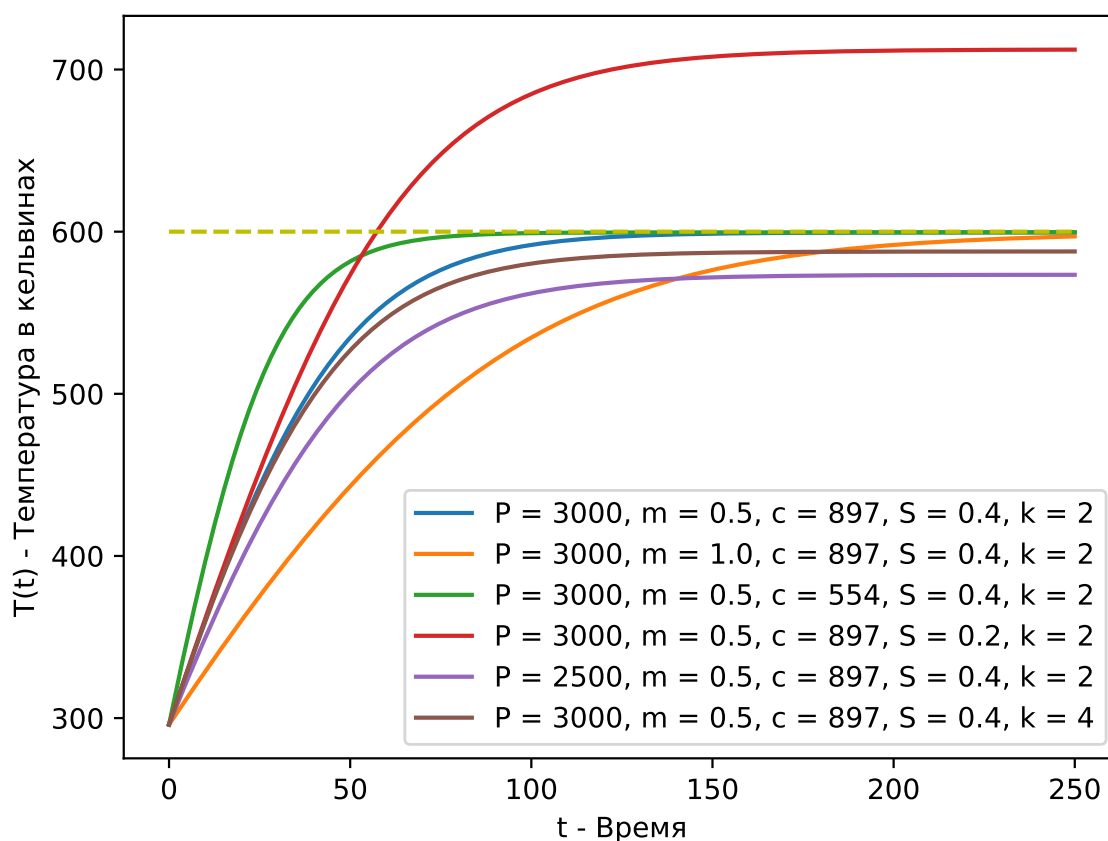


Рис. 1: Графики при  $T_0 = 296$ .

На графике (Рис. 1) построены несколько решений с указанными параметрами, а также жёлтый пунктир на отметке  $T = 600$  – округлённое значение точки равновесия, найденное при анализе.

Как можно увидеть, первые три решения, которые отличаются только массой и удельной теплоёмкостью, возрастают до определённого значения – точки равновесия.

Остальные различаются в параметрах, которые влияют на максимальное значение, что можно также увидеть.

## 4.5. Модель с терморегулятора

Построим несколько решений уравнения для модели с терморегулятором с разными параметрами. На каждом рисунке находятся решения дифференциального уравнения с одними и теми же параметрами, кроме максимальной и минимальной температуры терморегулятора.

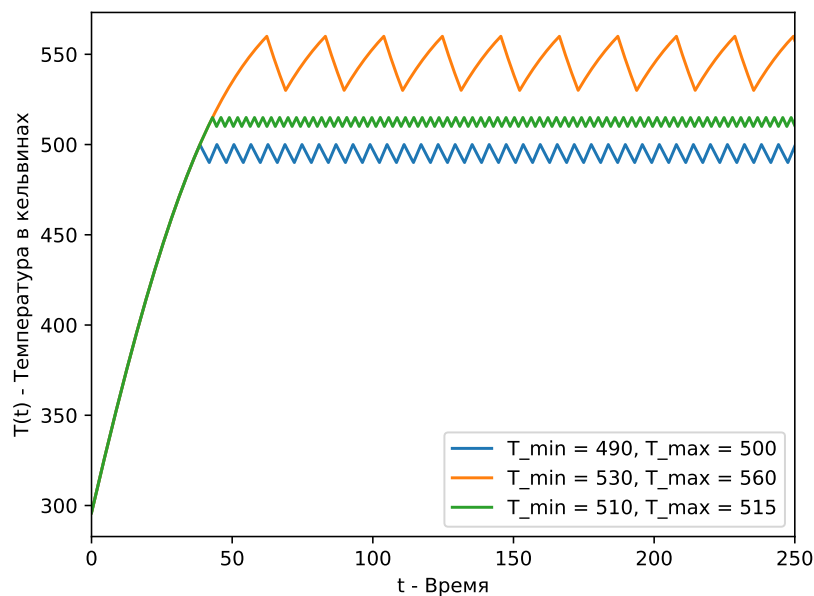


Рис. 2: Графики при

$$P = 3000 \text{ Вт}, m = 0.5 \text{ кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.4 \text{ м}^2, k = 2, T_0 = 296 \text{ К}.$$

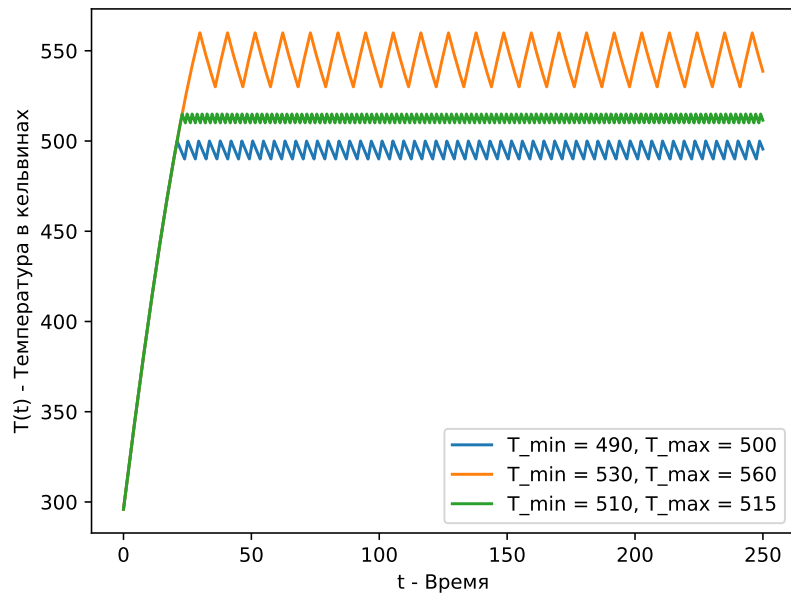


Рис. 3: Графики при  
 $P = 2500 \text{ Вт}$ ,  $m = 0.4 \text{ кг}$ ,  $c = 554 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ,  $S = 0.2 \text{ м}^2$ ,  $k = 4$ ,  $T_0 = 296 \text{ К}$ .

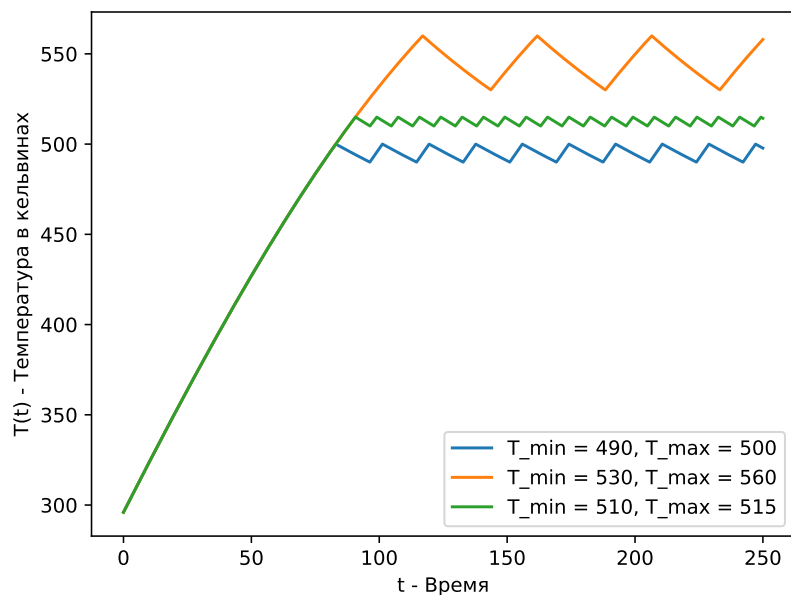


Рис. 4: Графики при  
 $P = 2500 \text{ Вт}$ ,  $m = 1 \text{ кг}$ ,  $c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ,  $S = 0.2 \text{ м}^2$ ,  $k = 2$ ,  $T_0 = 296 \text{ К}$ .

## **5. Заключение**

Таким образом, была построена математическая модель электрического нагревателя с терморегулятором и без него. Написанная программа позволяет построить графики изменения температуры в зависимости от времени, а также найти максимальную температуру модели с конкретными параметрами.