Индивидуальное домашнее задание №4 по дисциплине «Уравнения математической физике»

Вариант 5

Держапольский Юрий Витальевич

Задание 1

Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=2} + 2.5u|_{r=2} = 2 - \sin\varphi + 3\sin^2(2\varphi), \quad 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(r,\varphi) = P(r)\cdot\Phi(\varphi)$.

$$\frac{1}{r}\left(rP'\Phi\right)' = -\frac{1}{r^2}P\Phi'' \quad \Rightarrow \quad \frac{r\left(rP'\right)'}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2$$

1. Решим задачу Штурма-Лиувилля для второго равенства.

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \Rightarrow \Phi(\varphi) = C_1\sin(\mu\varphi) + C_2\cos(\mu\varphi)$$

$$C_1\sin(\mu\varphi) + C_2\cos(\mu\varphi) = C_1\sin\big(\mu(\varphi+2\pi)\big) + C_2\cos\big(\mu(\varphi+2\pi)\big)$$

Такое происходит только когда $\mu_n = n, n \in \mathbb{N}_0$. ($n = 0, 1, 2, \dots$) Значит решение выглядит так: $\Phi_n = A_n\sin(\varphi n) + B_n\cos(\varphi n)$.

2. Найдём решение для первого равенства.

$$r\left(rP'\right)' - \mu_n^2 P = 0.$$

Если $n = 0$, то

$$P_0 = C_1\ln r + C_2.$$

Задача внутренняя, значит $\ln r \xrightarrow{r\to 0} -\infty$, значит $C_1 = 0, P_0 = const$.

$$P_n^{(1)}(r) = r^n, \quad P_n^{(2)}(r) = \frac{1}{r^n}.$$

Т.к. задача внутренняя, то выбираем $P_n(r) = r^n$.

Имеем

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = B_0P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\right).$$

Заменим константу $B_0P_0 = P_0$. Подставим в граничные условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} + 2.5u|_{r=2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^{n-1}\left(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\right) +$$
$$+ \frac{5}{2}P_0 + \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\right).$$

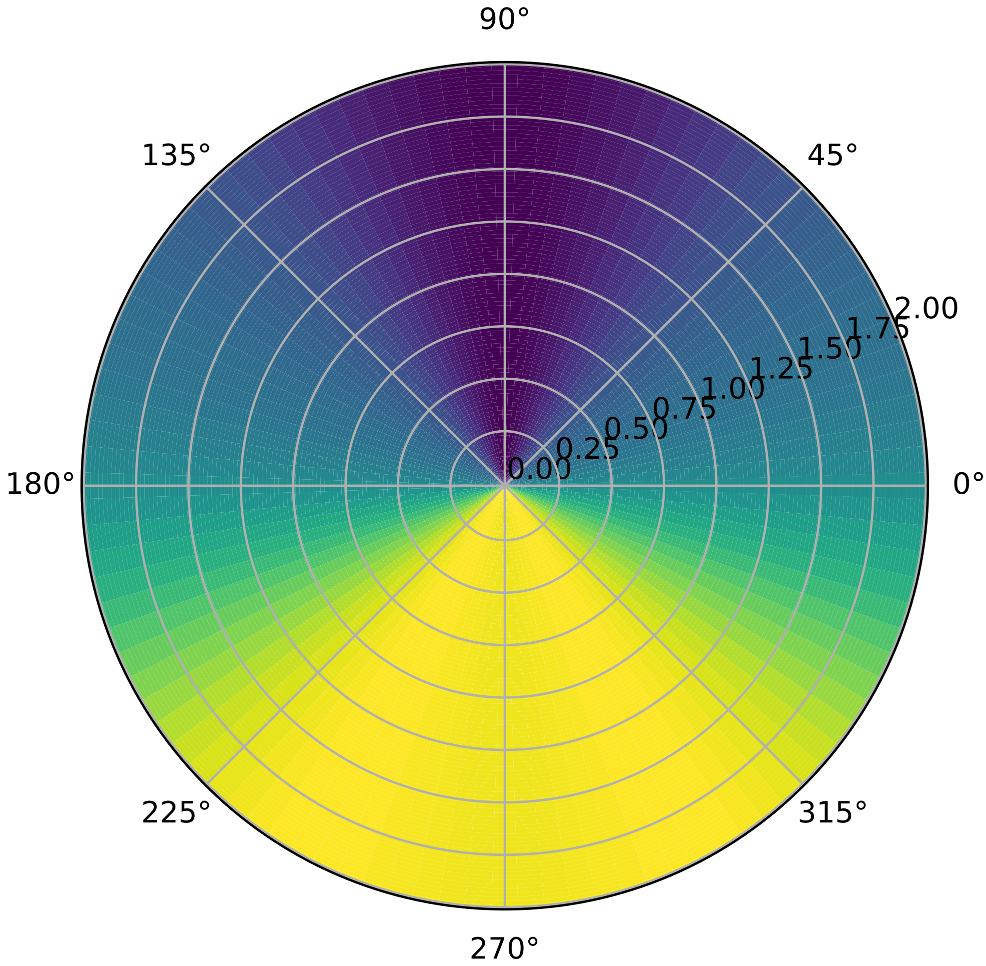
Распишем то, чему равны граничные условия

$$2 - \sin\varphi + 3\sin^2(2\varphi) = 2 - \sin\varphi + 3\cdot\frac{1-\cos(2\cdot 2\varphi)}{2} = \frac{7}{2} - \sin\varphi - \frac{3}{2}\cos(4\varphi).$$

Сопоставим коэффициенты и найдём их.

1. $\frac{5}{2}P_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow P_0 = \frac{7}{5}$
2. $1\cdot 2^{1-1}A_1 + \frac{5}{2}\cdot 2^1 A_1 = -1 \Rightarrow 6A_1 = -1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{6}$
3. $4\cdot 2^{4-1}B_4 + \frac{5}{2}\cdot 2^4 B_4 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 72B_4 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{48}$
4. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Ответ: $u(r,\varphi) = \frac{7}{5} - \frac{1}{6}\sin\varphi - \frac{1}{48}\cos(4\varphi)$.



90°
45°
135°
180°
0°
225°
315°
270°
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Задание 2

Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0, \quad 4<r<5, \quad 0<\varphi<2\pi, \\ 2u|_{r=4}=3, \quad 0<\varphi<2\pi, \\ u|_{r=5}=5-2.3\sin\varphi, \quad 0<\varphi<2\pi. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(r,\varphi)=P(r)\cdot\Phi(\varphi)$.

$$\frac{1}{r}\left(rP'\Phi\right)'=-\frac{1}{r^2}P\Phi'' \quad \Rightarrow \quad \frac{r\left(rP'\right)'}{P}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu^2$$

1. Решим задачу Штурма-Лиувилля для второго равенства.

$$\begin{cases} \Phi''+\mu^2\Phi=0, \\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \end{cases} \Rightarrow \Phi(\varphi)=C_1\sin(\mu\varphi)+C_2\cos(\mu\varphi)$$

$$C_1\sin(\mu\varphi)+C_2\cos(\mu\varphi)=C_1\sin\left(\mu(\varphi+2\pi)\right)+C_2\cos\left(\mu(\varphi+2\pi)\right)$$

Такое происходит только когда $\mu_n=n, n\in\mathbb{N}_0$. $(n=0,1,2,\dots)$ Значит решение выглядит так: $\Phi_n=A_n\sin(\varphi n)+B_n\cos(\varphi n)$.

2. Найдём решение для первого равенства.

$$r\left(rP'\right)'-\mu_n^2P=0.$$

Если $n=0$, то

$$P_0=A_0+B_0\ln r.$$

Задача в кольце, поэтому P_0 остаётся в таком виде.

$$P_n^{(1)}(r)=r^n, \quad P_n^{(2)}(r)=\frac{1}{r^n}.$$

Задача в кольце, значит выбираем линейную комбинацию решений:

$$P_n(r)=C_n^{(1)}r^n+C_n^{(2)}\frac{1}{r^2}.$$

Заменяем коэффициенты $C_n^{(1)}A_n = A_n$, $C_n^{(1)}B_n = B_n$, $C_n^{(2)}A_n = C_n$, $C_n^{(2)}B_n = D_n$ и получаем:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \big(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} \big(C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)\big)$$

Подставим в граничные условия:

$$\begin{cases} 3u|_{r=4} = A_0 + B_0 \ln 4 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n \big(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\big) + \\ \ + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n} \big(C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)\big) \equiv 3, \\ u|_{r=5} = A_0 + B_0 \ln 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n \big(A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)\big) + \\ \ + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n} \big(C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)\big) \equiv 5 - 2.3 \sin\varphi. \end{cases}$$

Сопоставим коэффициенты и найдём их.

1. При константах:

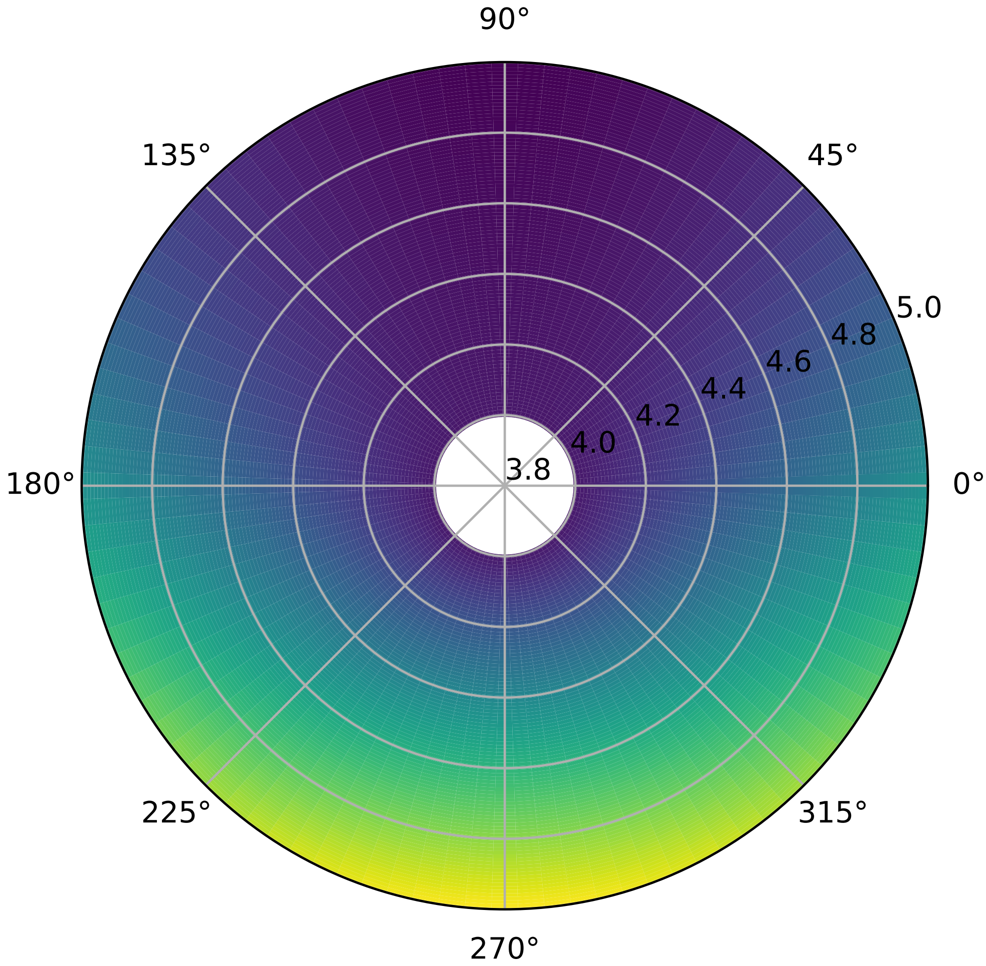
$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln 4 = 3, \\ A_0 + B_0 \ln 5 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = \dfrac{2}{\ln 5 - \ln 4}, \\ A_0 = 3 - \dfrac{2\ln 4}{\ln 5 - \ln 4} = \dfrac{3\ln 5 - 5\ln 4}{\ln 5 - \ln 4} \end{cases}$$

2. При $n = 1$:

$$\begin{cases} 4A_1 + \dfrac{1}{4}C_1 = 0, \\ 5A_1 + \dfrac{1}{5}C_1 = -2.3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\dfrac{23}{18}, \\ C_1 = \dfrac{184}{9} \end{cases}$$

3. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Ответ: $u(r,\varphi) = \dfrac{3\ln 5 - 5\ln 4}{\ln 5 - \ln 4} + \dfrac{2}{\ln 5 - \ln 4} \ln r - \dfrac{23}{18} r \sin\varphi + \dfrac{184}{9}\dfrac{1}{r} \sin\varphi.$


90°
45°
135°
5.0
4.8
4.6
4.4
4.2
4.0
3.8
180°
0°
225°
315°
270°

Задание 3

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos x - e^x$ по системе собственных функций $\{1, \cos(\varphi n x), \sin(\varphi n x)\}, n = 1, \ldots, \infty$ задачи Штурма-Лиувилля.

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \right).$$

Найдём коэффициенты:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos x - e^x\right) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\sin x - e^x\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{2\pi}}{2\pi},$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos x - e^x\right) \cos(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{n \sin(2\pi n)}{n^2 - 1} + \frac{1 - e^{2\pi} \left(n \sin(2\pi n) + \cos(2\pi n) \right)}{n^2 + 1} \right) = \frac{1 - e^{2\pi}}{\pi(n^2 + 1)}, n > 1.$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos x - e^x\right) \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi + \frac{1 - e^{2\pi}}{2} \right) = 1 + \frac{1 - e^{2\pi}}{2\pi}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos x - e^x\right) \sin(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2n \sin^2(2\pi n)}{n^2 - 1} + \frac{e^{2\pi} \left(n \cos(2\pi n) - \sin(2\pi n) \right) - n}{n^2 + 1} \right) = \frac{n \left(e^{2\pi} - 1 \right)}{\pi(n^2 + 1)}, n > 1.$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cos x - e^x\right) \sin(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{2} \right) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

Ответ: $f(x) = \dfrac{1 - e^{2\pi}}{2\pi} + \left(1 + \dfrac{1 - e^{2\pi}}{2\pi} \right) \cos(x) + \left(\dfrac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \right) \sin(x) +$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{2\pi}}{\pi(n^2 + 1)} \cos(nx) + \frac{n \left(e^{2\pi} - 1 \right)}{\pi(n^2 + 1)} \sin(nx) \right).$$