МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №6 по дисциплине
«Математическое и копмьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Профессор д.ф.-м. н.
Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 7 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1 Введение **3**

2 Математическая модель **4**

3 Анализ модели **6**

4 Вычислительные эксперименты **7**

4.1 Алгоритм 8

4.2 Программа 8

4.3 Результаты 8

5 Заключение **10**

1. Введение

ИЗ ДРУГОГО Как говорил Альберт Эйнштейн: «Всё в мире относительно». И действительно, есть много разных точек зрения на одно и то же явление, и физика не является исключением. Например, когда мы едем в автобусе, мы перемещаемся относительно земли, но находимся на месте в самом автобусе. На космическом уровне Земля перемещается одним путём относительно Солнца, и другим относительно центра галактики.

Интересным представляет собой перемещение во вращающемся объекте, например, человека на карусели, или перемещение около полюса земли.Изучим, как происходит перемещение со стороны человека вне вращающейся системы координат.

2. Математическая модель

В общем случае для процессов распространения используется уравнение переноса:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = 0,$$

где t – время, x, y – координаты, C – концентрация вещества (или, например, температура) в каждой точке пространства, u, v – компоненты скорости течения по x и y.

При этом в начальный момент времени известна концентрация

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y),$$

и она не будет меняться со временем $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$. Также задана функция тока $\psi(x, y)$, которая задаёт перемещение примесей:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v(x, y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Однако, необязательно знать дифференциальное уравнение, которое задаёт процесс, достаточно знать функцию тока. В этом поможет метод частиц, также известный как метод Лагранжа.

Для этого метода нужно моделировать движение каждой точки отдельно. Рассмотрим это на примере одной частицы. Она имеет координаты x, y. В данной точке на неё действует ток: на координату действует $u(x, y)$, на y действует $v(x, y)$. Поэтому можем составить систему дифференциальных уравнений для частицы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x, y). \end{cases}$$

Применяя данную схему для большого количества частиц мы можем получить приближённую функцию концентрации в каждой точке, например, интерполированием.

3. Анализ модели

4. Вычислительные эксперименты

В качестве функции тока возьмём:

$$\psi(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(\pi y),$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} u(x, y) = -\pi\sin(2\pi x)\cos(\pi y), \\ v(x, y) = 2\pi\cos(2\pi x)\sin(\pi y). \end{cases}$$

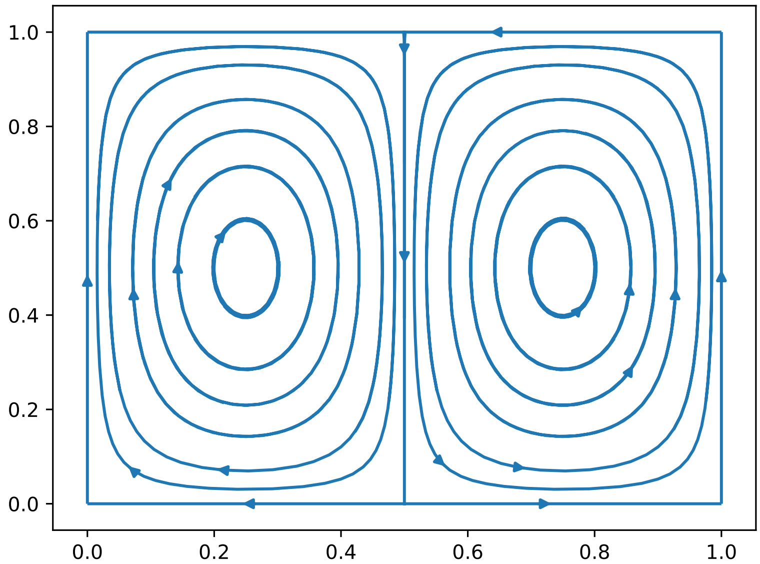


Рис. 1: Фазовые кривые функции тока $\psi(x, y)$.

$$C_0(x, y) = \arctan\left(\frac{y - 0.5}{0.1}\right)$$

4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных $u(t) = \dot{x}(t), \quad v(t) = \dot{y}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{y} = v, \\ \dot{u} = 2\Omega v, & \dot{v} = -2\Omega u, \\ x(0) = x_0, & y(0) = y_0, \\ u(0) = x_1, & v(0) = y_1. \end{cases}$$

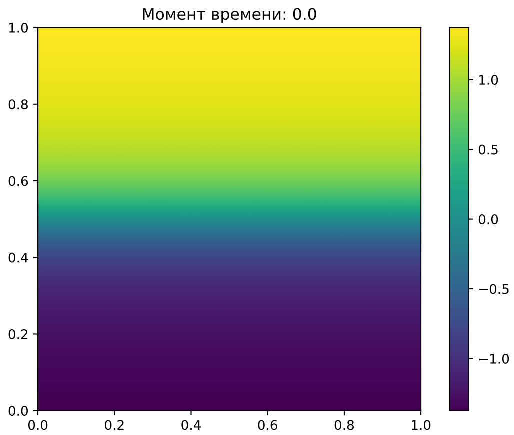
Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим их решения и фазовые плоскости.

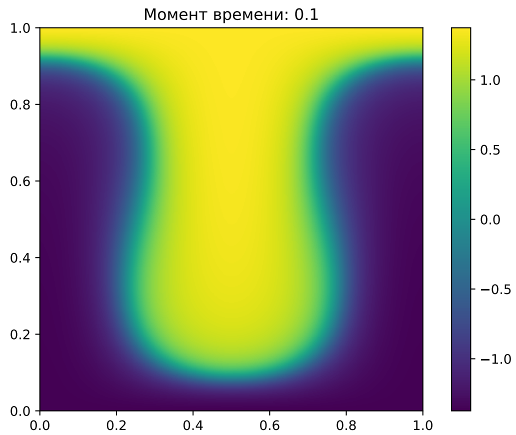
По полученному закону сохранения энергии можем вывести соотношение: $u^2 + v^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$. Также проверим его выполнение для численного решения.

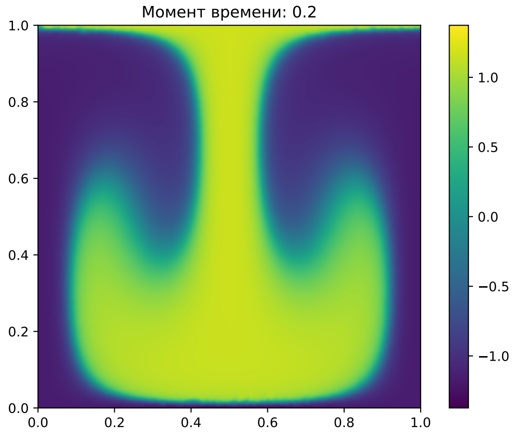
4.2. Программа

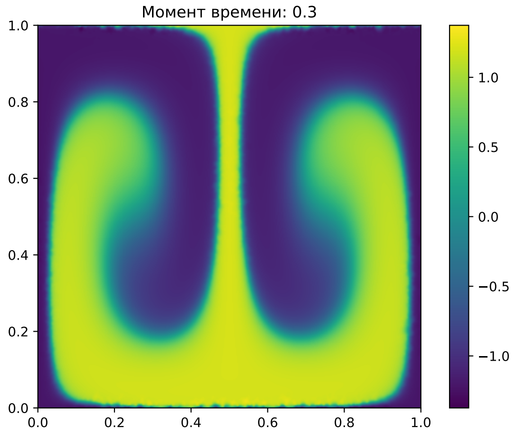
Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

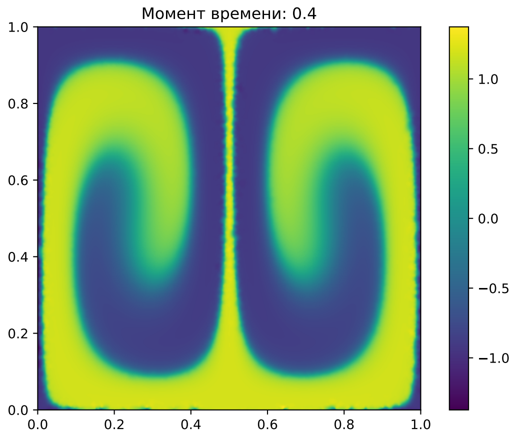
4.3. Результаты






Момент времени: 0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


Момент времени: 0.3
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


Момент времени: 0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0

5. Заключение

ИЗ ДРУГОГОsem6-matmodelling/4 move in rotation/4.pdf sem6-matmodelling/4 move in rotation/4.tex sem6-matmodelling/4 move in rotation/style sem6-matmodelling/4 move in rotation/src sem6-matmodelling/4 move in rotation/pictures sem6-matmodelling/4 move in rotation/parts Таким образом, была построена математическая перемещения во вращающейся системе координат, представляющая собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Она была проанализирована и был показан закон сохранения энергии. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. После чего построены графики численного решения уравнения в зависимости от параметров. Также был показано выполнение закона сохранения энергии.