МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

Модели конкуренции в экологии и экономике

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Профессор д.ф.-м. н.
Абакумов А. И. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 29 » мая 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

2. Модель Лотки-Вольтерры

2.1. Математическая модель

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \xi_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x_2} = \xi_2(x_2) + k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x_3} = -\xi_3(x_3) + k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3. \end{cases}$$

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$, где $k_{ij} > 0$.

Примем функции в системе за линейные функции:

$$\xi_i(x_j) = \xi_i \cdot x_j, V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \xi_i, \alpha_{ij} > 0$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \xi_1 x_1 - \alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{13}x_1x_3, \\ \dot{x_2} = \xi_2 x_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{23}x_2x_3, \\ \dot{x_3} = -\xi_3 x_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}x_2x_3. \end{cases}$$

2.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Т.е. нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3 = 0, \\ \xi_2 x_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3 = 0, \\ -\xi_3 x_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23}\alpha_{23} x_2 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(\xi_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) = 0, \\ x_2(\xi_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) = 0, \\ x_3(-\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 + k_{23}\alpha_{23} x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если две любых переменных равны нулю, то в оставшейся строчке остаётся уравнение $\xi_i x_i = 0$, т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

2. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_2 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{23}\alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(0, \frac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}}, \frac{\xi_2}{\alpha_{23}}\right)$$

3. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}}, 0, \frac{\xi_1}{\alpha_{13}}\right)$$

4. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{12} x_2 = 0, \\ \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \left(-\frac{\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}}, \frac{\xi_1}{\alpha_{12}}, 0\right)$$

5. Если $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 + k_{23}\alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение $x^{(4)}$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-\xi_1\alpha_{23}k_{23} + \xi_2 k_{23}\alpha_{13} + \xi_3\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_2 = \dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} - \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 = \dfrac{\xi_1\alpha_{23}k_{13} - \xi_2\alpha_{13}k_{13} - \xi_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_3 = \dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} + \dfrac{k_{12}\alpha_{12}}{\alpha_{23}}x_1 = \dfrac{-\xi_1\alpha_{23}k_{12}k_{23} + \xi_2\alpha_{13}k_{13} + \xi_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}. \end{cases}$$

Получили все точки. Для анализа устойчивости в этих точках воспользуемся методом первого приближения. Найдём матрицу Якоби:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 \end{pmatrix}$$

После чего подставляем значения точки равновесия и ищем собственные значения матрицы.

$$A = J\Big|_{x^*}, \quad \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы $\forall i \ \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$. Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если $b_0 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Δ были положительны.

1. $J\Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$

Откуда получаем собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = \xi_1 > 0, \quad \lambda_2 = \xi_2 > 0, \quad \lambda_1 = -\xi_3 < 0.$$

Значит около начала координат решения будут расходиться по x_1, x_2 и сходиться по x_3.

2. $$A = J\Big|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} - \alpha_{13}\dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} & 0 & 0 \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\xi_1 - \frac{\xi_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\xi_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}\right)\right)(\lambda^2 + \xi_2\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_1 - \frac{\xi_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\xi_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_2\xi_3}.$$

Точка $x^{(1)}$ – неустойчивая. В плоскости $x_1 = 0$ точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя циклы, а в некоторой близости от этой плоскости циклы будут двигаться в некотором направлении, в зависимости от констант.

3. $$A = J\Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{13}}\right)\right)(\lambda^2 + \xi_1\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_1\xi_3}.$$

Аналогично предыдущей точке, $x^{(2)}$ – неустойчивая и в плоскости $x_2 = 0$ является центром и будет создавать вокруг себя циклы.

4. $$A = J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} & -\alpha_{13}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} \\ 0 & 0 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(-\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{12}}\right)\right)(\lambda^2 - \xi_1\xi_2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{12}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\xi_1\xi_2}.$$

Точка $x^{(3)}$ – неустойчивая, но в плоскости $x_3 = 0$ является седлом по некоторым двум направлениям.

5. $$A = J\Big|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2 x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2 x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2 x_2x_3) +$$

$$+x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2 x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2 x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2 x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \le 0. \end{cases}$$

3. Модель Колмогорова

3.1. Математическая модель

Модель Колмогорова получается, если у хищников нет внутривидовой борьбы, то есть функции $\xi_2 = \xi_3 \equiv 0$.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \xi_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x_2} = k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x_3} = k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3. \end{cases}$$

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$, где $k_{ij} > 0$.

Аналогично линеаризуем систему:

$$\xi_1(x_j) = \xi \cdot x_j, V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \xi, \alpha_{ij} > 0$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \xi x_1 - \alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{13}x_1x_3, \\ \dot{x_2} = k_{12}\alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{23}x_2x_3, \\ \dot{x_3} = k_{13}\alpha_{13}x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}x_2x_3. \end{cases}$$

3.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Т.е. нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} \xi x_1 - \alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{13}x_1x_3 = 0, \\ k_{12}\alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{23}x_2x_3 = 0, \\ k_{13}\alpha_{13}x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}x_2x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(\xi - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3) = 0, \\ x_2(k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3) = 0, \\ x_3(k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если $x_2 = x_3 = 0$, то в оставшейся строчке остаётся уравнение $\xi x_1 = 0$, т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

2. Если $x_1 = x_2 = 0$, то в третьей строчке получем $x_3 \cdot 0 = 0, x_3 \in \mathbb{R}$. Получаем всю ось $\overrightarrow{Ox_3}$.

3. Если $x_1 = x_3 = 0$, то во второй строчке получем $x_2 \cdot 0 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$. Получаем всю ось $\overrightarrow{Ox_2}$.

4. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \alpha_{23}x_3 = 0, \\ k_{23}\alpha_{23}x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

5. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi - \alpha_{13}x_3 = 0, \\ k_{13}\alpha_{13}x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(0, 0, \frac{\xi}{\alpha_{13}}\right) \in \overrightarrow{Ox_3}$$

6. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi - \alpha_{12}x_2 = 0, \\ k_{12}\alpha_{12}x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left(0, \frac{\xi}{\alpha_{12}}, 0\right) \in \overrightarrow{Ox_2}$$

7. Если $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 = 0, \\ k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 = 0, \\ k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-\xi\alpha_{23}k_{23}}{\alpha_{12}\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_2 = \dfrac{\xi k_{13}}{\alpha_{12}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_3 = \dfrac{-\xi k_{12}k_{23}}{\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}. \end{cases}$$

Можем видеть, что вне зависимости от выбора параметров, хотя бы одна из координат данной точки будет отрицательная. Значит такую точку можно не исследовать далее.

Получили все точки. Проведём аналогичный прошлой модели анализ устойчивости в этих точках. Матрица Якоби:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \xi - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 \end{pmatrix}$$

1. $J\Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Откуда получаем собственные значения матрицы:

   $$\lambda_1 = \xi > 0, \quad \lambda_{2,3} = 0.$$

   Значит около начала координат решения будут расходиться по x_1 ???

2. $A = J\Big|_{\overrightarrow{Ox_3}} = \begin{pmatrix} \xi - \alpha_{13}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{23}x_3 & 0 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = -\alpha_{23}x_3 < 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \xi - \alpha_{13}x_3.$$

(a) При $x_3 \in \left[0, \dfrac{\xi}{\alpha_{13}}\right) \quad \lambda_3 > 0$

Прямая $x^{(1)}$ – неустойчивая. В плоскости $x_1 = 0$ точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя циклы, а в некоторой близости от этой плоскости циклы будут двигаться в некотором направлении, в зависимости от констант.

3. $A = J\Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{13}}\right)\right)(\lambda^2 + \xi_1\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_1\xi_3}.$$

Аналогично предыдущей точке, $x^{(2)}$ – неустойчивая и в плоскости $x_2 = 0$ является центром и будет создавать вокруг себя циклы.

4. $A = J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} & -\alpha_{13}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} \\ 0 & 0 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(-\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{12}}\right)\right)(\lambda^2 - \xi_1\xi_2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{12}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\xi_1\xi_2}.$$

Точка $x^{(3)}$ – неустойчивая, но в плоскости $x_3 = 0$ является седлом по некоторым двум направлениям.

5. $A = J\Big|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3) +$$

$$+ x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \le 0. \end{cases}$$

4. Вычислительные эксперименты

Возьмём параметры для модели:

$\xi_1 = 10, \xi_2 = 8, \xi_3 = 6,$

$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$

$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$

При этом точка равновесия $x^{(4)} = (-3.458\ldots, 46.66\ldots, -150)$. Откуда получаем $b_3 = -22040 \Rightarrow \Delta_2 = 22040 > 0$. Значит, что по какой-то оси она будет устойчивая, по второй неустойчива, а по третьей устойчивость неизвестна. Однако, вероятно, это точка не будет иметь влияния, поскольку находится на большом удалении в отрицательных координатах.

4.1. При вымершей первой популяции

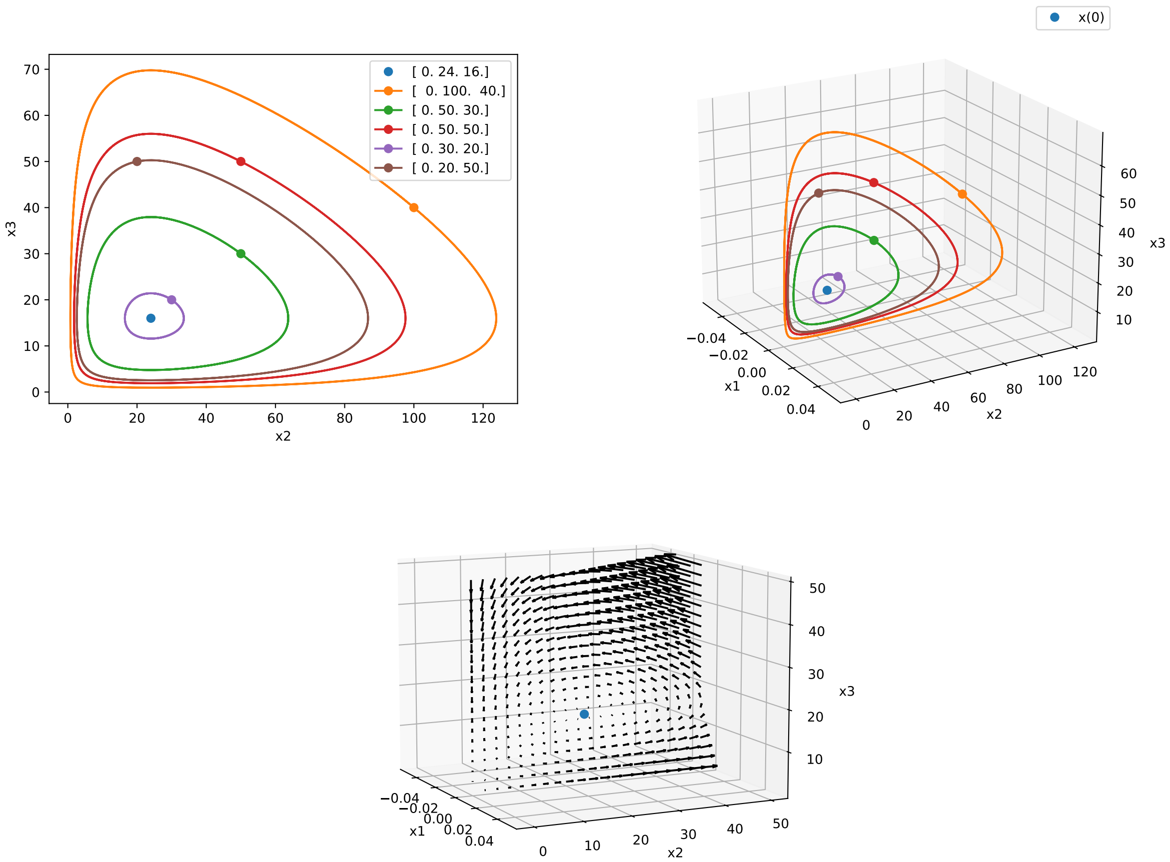

Рис. 1: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.2. При вымершей второй популяции

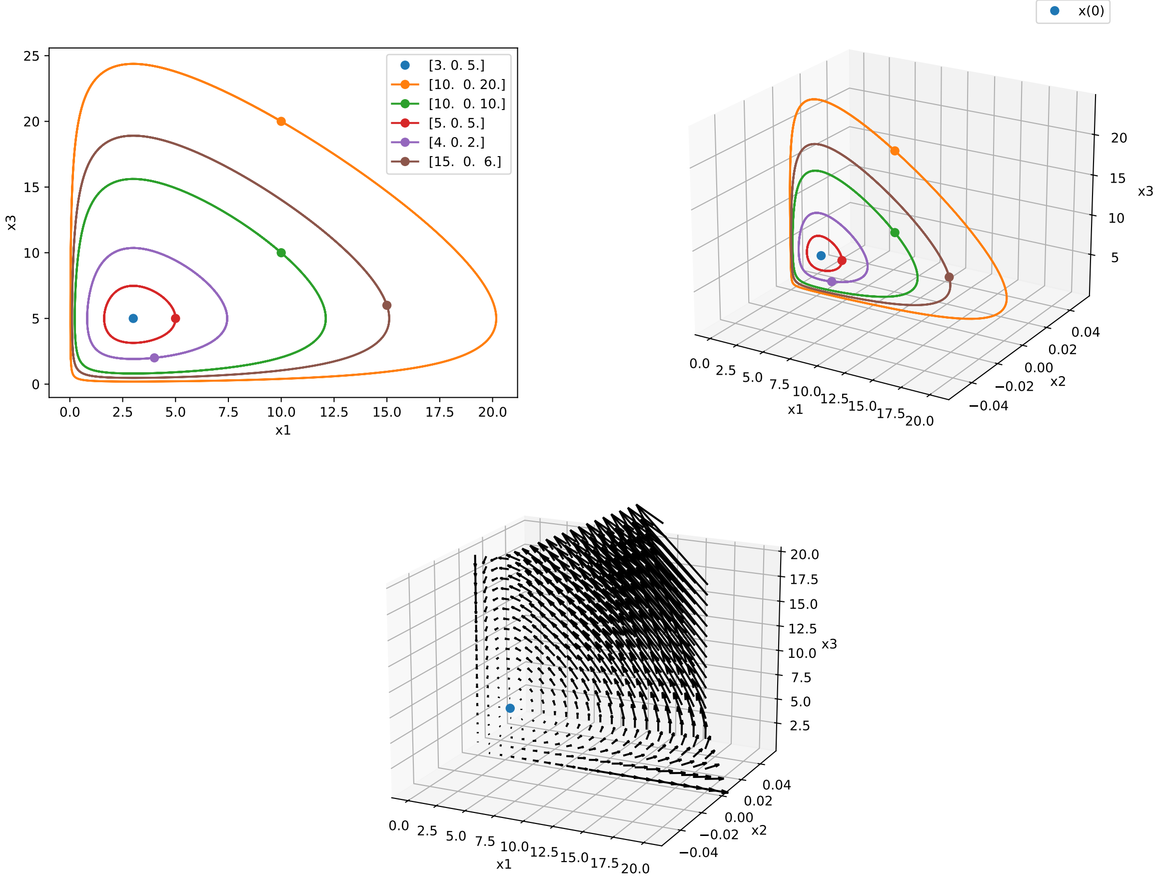

Рис. 2: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.3. При вымершей третьей популяции

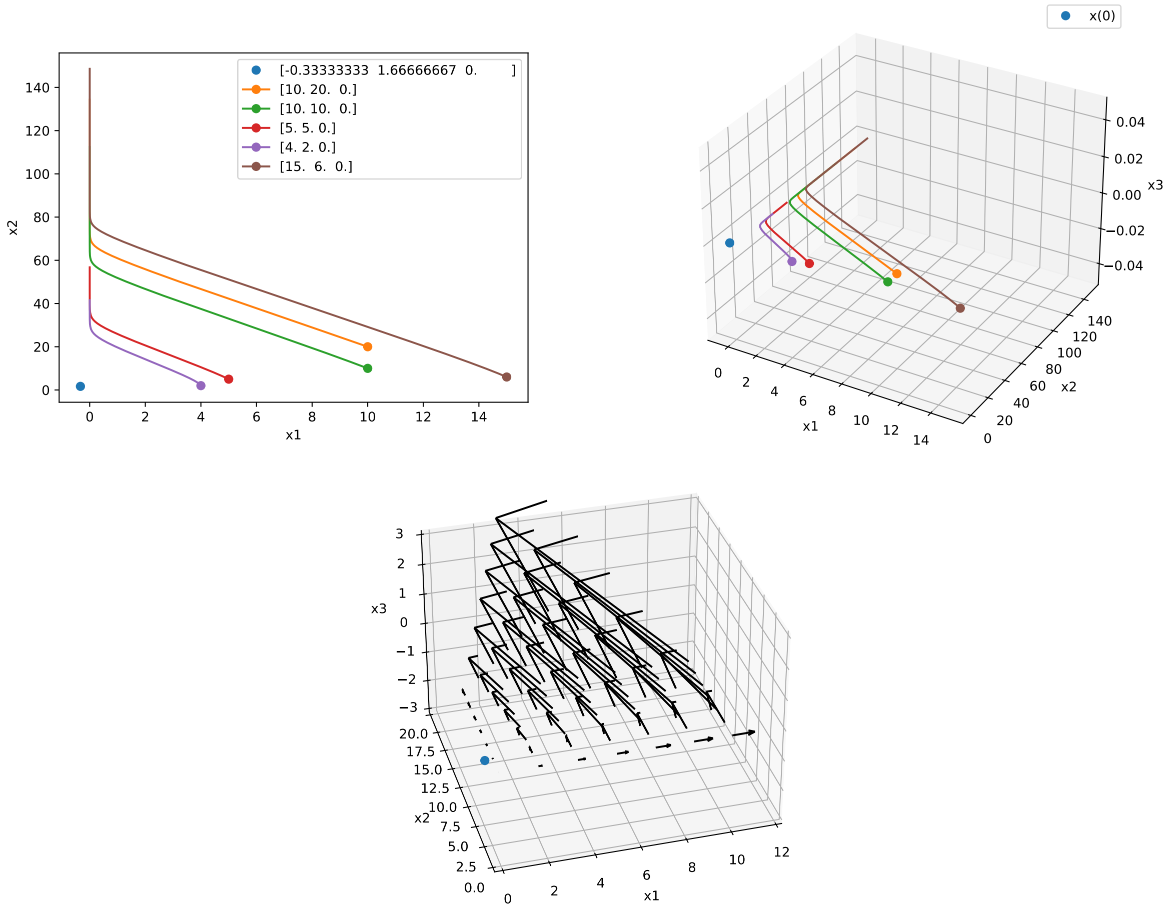

Рис. 3: На отрезке времени $[0, 0.1]$.

4.4. Несколько изначально не вымерших популяций

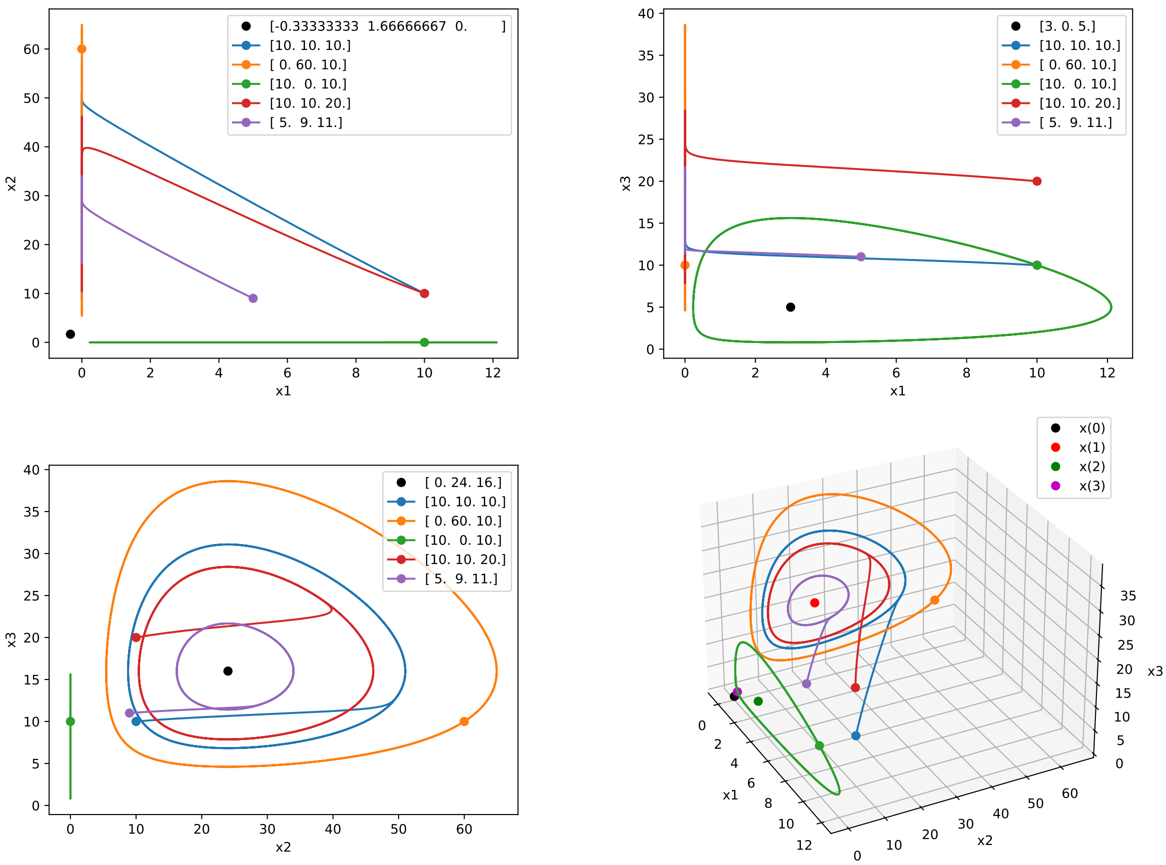

Рис. 4: На отрезке времени $[0, 3]$.

5. Заключение