



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №2 по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор к.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 3 » мая 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель	4
3	Анализ модели	6
4	Вычислительные эксперименты	8
4.1	Алгоритм	8
4.2	Программа	8
4.3	Результаты	9
4.3.1	Эксперимент 1	9
4.3.2	Эксперимент 2	12
5	Заключение	15

1. Введение

В мире существует множество разных видов животных и все они взаимодействуют друг с другом. Среди этих животных можно выделить две большие группы: плотоядные и травоядные. Мы можем их соответственно назвать хищники и жертвы. Интересным будет изучить как эти популяции взаимодействуют друг с другом. Однако, на них могут действовать и внешние факторы среды из-за чего взаимодействие может получиться очень сложным. Поэтому мы будем изучать взаимодействие одной популяции хищников и жертв без каких-либо внешних факторов.

2. Математическая модель

Мы будем строить модель для двух популяций и рассматривать их взаимодействие во времени. Пусть $N(t)$ – популяция жертв, $M(t)$ – популяция хищников в зависимости от времени. Единицы измерения выберем безразмерные и скажем, что это некоторый «объём» популяции за некоторый промежуток времени. Модель будет иметь физический смысл при $N(t), M(t) > 0$.

В отсутствии взаимодействия между ними, популяция жертв будет размножаться. Чем больше популяция будет, тем больше она будет расти, а значит скорость роста зависит от объёма самой популяции. Популяция хищников, наоборот, будет умирать и убывать со временем. Чем меньше будет хищников, тем реже они будут умирать, и поэтому скорость изменения будет тоже зависеть от объёма этой популяции:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a \cdot N, \\ \frac{dM}{dt} = -b \cdot M, \end{cases}$$

где $a, b > 0$ – коэффициенты, обозначающие скорость изменения популяции.

При взаимодействии популяции будут влиять друг на друга. Скорость изменения будет зависеть уже от объёма обеих популяций, потому что чем больше хищников, тем быстрее они будут поглощать жертв, и чем больше жертв, тем больше их могут находить и поглощать хищники. Соответственно объём популяции жертв будет уменьшаться, а хищников увеличиваться пропорционально обоим популяциям.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (a - c \cdot M)N, \\ \frac{dM}{dt} = (-b + d \cdot N)M, \end{cases}$$

где $c, d > 0$ – коэффициенты, обозначающие скорость изменения популяции в зависимости от второй популяции.

Таким образом, построили модель конкуренции, которая является системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Для получения единственного решения добавим начальные условия:

$$\begin{cases} N(0) = N_0, \\ M(0) = M_0. \end{cases}$$

3. Анализ модели

Найдём точки равновесия системы.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = 0, \\ \frac{dM}{dt} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - c \cdot M)N = 0, \\ (-b + d \cdot N)M = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_e = \frac{a}{c}, \\ N_e = \frac{b}{d}. \end{cases}$$

Также есть тривиальное решение $(0, 0)$.

Применим метод первого приближения. Найдём матрицу Якоби, подставим точки равновесия и найдём собственные значения матрицы, после чего по ним укажем тип устойчивости. Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} a - c \cdot M & -c \cdot N \\ d \cdot M & -b + d \cdot N \end{pmatrix}.$$

Подставим точки равновесия в матрицу и найдём собственные значения.

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 = a > 0.$$

Нулевая точка является седловой точкой, поскольку оба собственных значения вещественны и разных знаков.

$$J|_{(N_e, M_e)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c \cdot b}{d} \\ \frac{d \cdot a}{c} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}.$$

Точка (N_e, M_e) является неасимптотически устойчивой, поскольку собственные значения полностью мнимые. Это значит, что в самой точке не будет происходить изменения величин, но на удалении от неё будут находиться циклы.

Теперь найдём первый интеграл системы. Для этого поделим первое уравнение на второе и разделим переменные:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(a - c \cdot M)N}{(-b + d \cdot N)M} \Rightarrow \left(\frac{a}{M} - c \right) dM + \left(\frac{b}{N} - d \right) dN = 0.$$

Из чего интегрированием получаем:

$$a \ln(M) - c \cdot M + b \ln(N) - d \cdot N = \text{const.}$$

Значит данное соотношение величин не будет изменяться с течением времени.

Но мы знаем, что объёмы популяций будут меняться, а значит в какой-то момент времени вернутся к начальным значениям.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим графики решений на координатной и фазовой плоскостях.

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4
5
6 def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
7     num = math.ceil((b - a) / h)
8     x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
9     y_a = [y0] * num
10
11     for i in range(num - 1):
12         k0 = function(x_a[i], y_a[i])
13         k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
14         k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
15         k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
16         y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)
17
18     return x_a, np.array(y_a)
19
20
21
22 def model(a, b, c, d, y0):
23     def diff(t, NM):
```



```

24         return np.array([
25             (a - c * NM[1]) * NM[0],
26             (-b + d * NM[0]) * NM[1]
27         ])
28
29
30     x_ = np.linspace(t0, tn, n)
31     x_, y_ = runge_kutta(diff, y0, t0, tn, (tn-t0)/n)
32     y_ = y_.T
33
34     return x_, y_
35
36 t0, tn = 0, 10
37 n = 1000
38
39 a, c = 2, 2
40 b, d = 1, 4
41
42 t, x = model(a,b,c,d, [2,2])

```

4.3. Результаты

Построим несколько решений системы с одинаковыми параметрами, но разными начальными условиями, в том числе и точку равновесия.

4.3.1. Эксперимент 1

Возьмём параметры $a = 2, c = 0.5, b = 1, d = 0.5$ и покажем графически результаты.

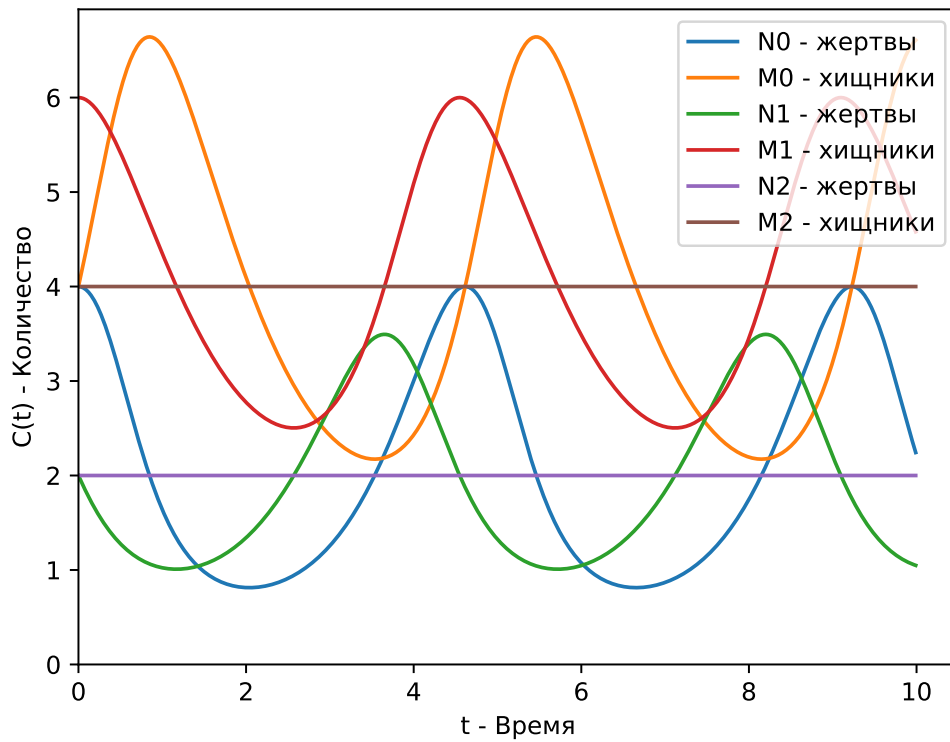


Рис. 1: Решения с начальными условиями

$$x_0 = (4, 4), x_1 = (2, 6), x_2 = (N_e, M_e)$$

Как можем увидеть, объёмы популяций изменяются с некоторым периодом. Эти популяции взаимодействуют таким образом, который мы описывали при построении модели. Также заметим, что объём популяций, заданный точкой равновесия x_2 , не изменяется.

Теперь построим решения на фазовой плоскости (N, M) .

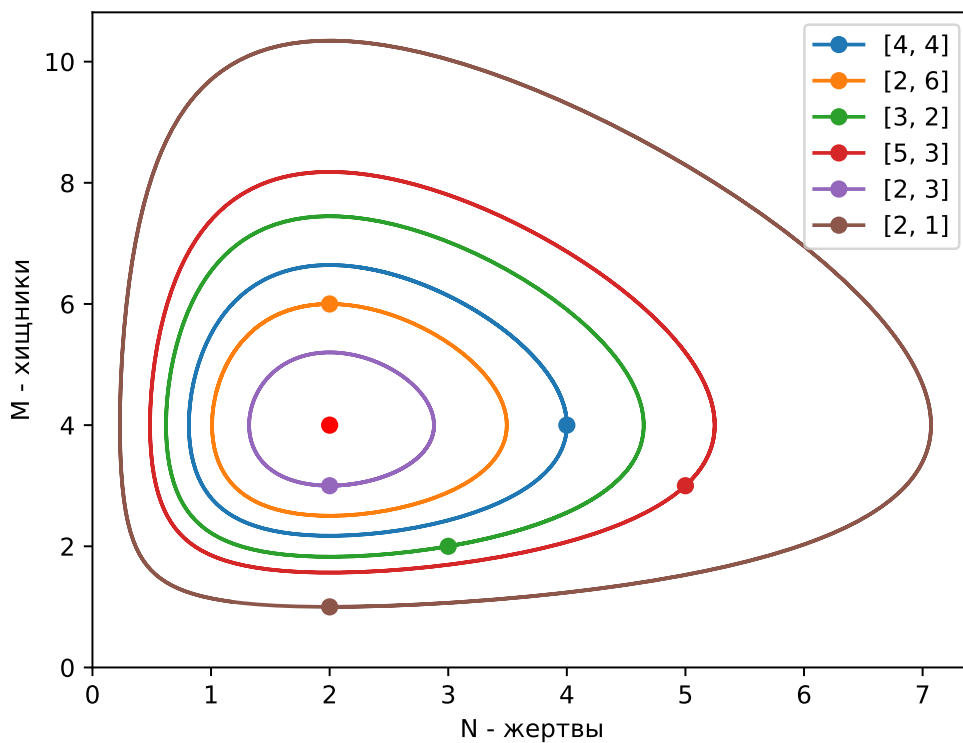


Рис. 2: Решения с указанными начальными условиями на интервале времени $[0, 10]$.

Точками на рисунке 2 указаны начальные условия, а центральная красная точка – положение равновесия. При анализе мы выяснили, что точка равновесия является неасимптотически устойчивой, из-за чего мы можем видеть циклы на фазовой плоскости. Это также описывается соотношением переменных из первого интеграла системы уравнений.

Однако, мы построили на таком интервале времени, когда все циклы замкнулись. Уменьшим интервал.

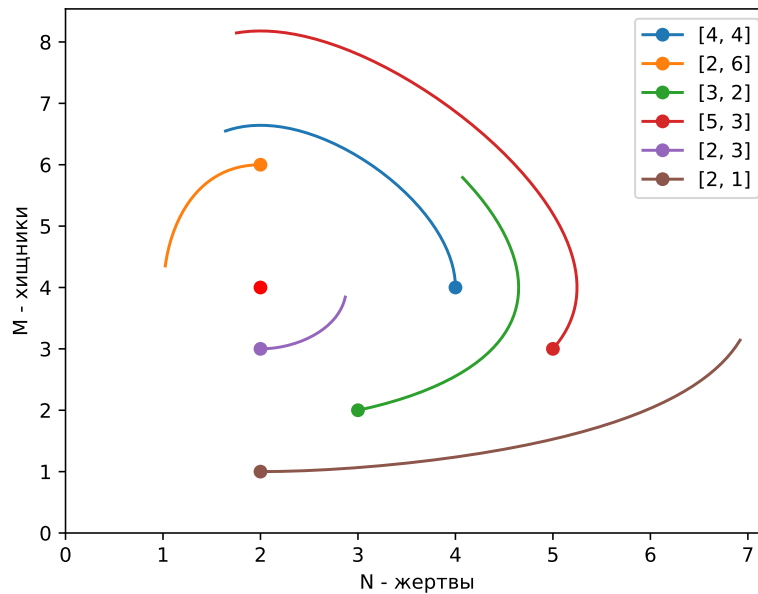


Рис. 3: Решения с указанными начальными условиями на интервале времени $[0, 1]$.

На рисунке 3 на меньшем интервале времени все циклы остались незамкнуты и мы можем увидеть, что они изменяются по направлению против часовой стрелки на данной фазовой плоскости.

На данном примере мы отчётливо увидели действие ненулевой точки равновесия на систему. Подберём такие параметры, чтобы увидеть действие нулевой точки равновесия.

4.3.2. Эксперимент 2

Возьмём параметры $a = 2, c = 2, b = 1, d = 4$.

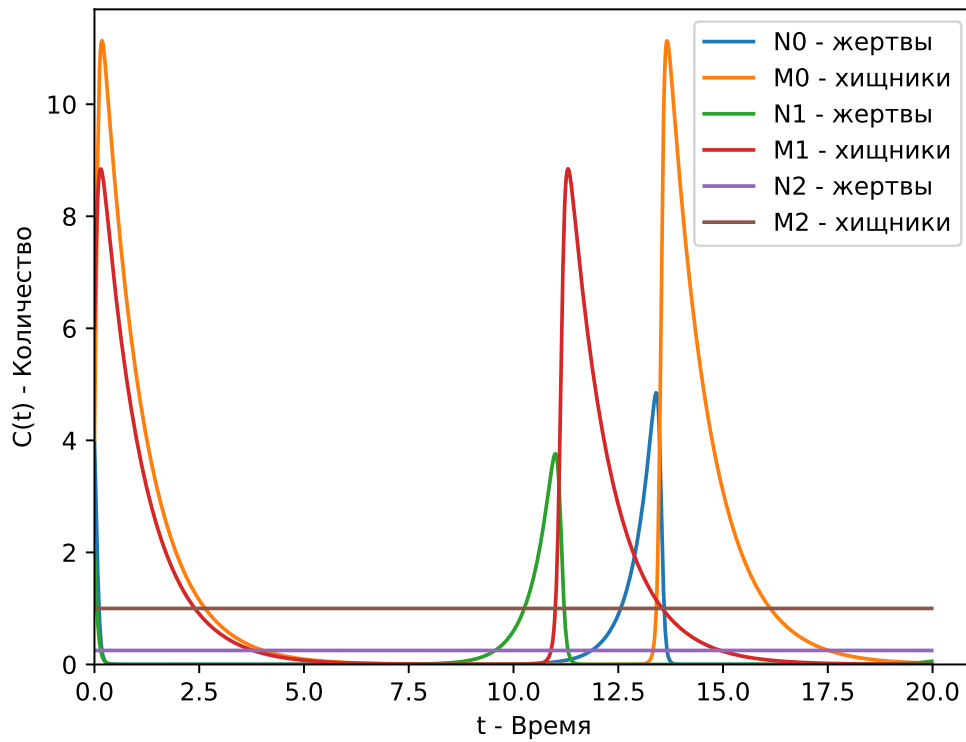


Рис. 4: Решения с начальными условиями

$$x_0 = (4, 4), \quad x_1 = (2, 6), \quad x_2 = (N_e, M_e)$$

Как можно увидеть, реализация модели с данными параметрами получилась более «резкой». Уменьшение популяции жертв и увеличение популяции хищников происходит намного быстрее, по сравнению с предыдущим экспериментом.

Обе популяции сильно приближаются к вымиранию. Небольшая погрешность в вычислениях или какое-либо внешнее взаимодействие в реальном мире может довести популяцию до полного вымирания.

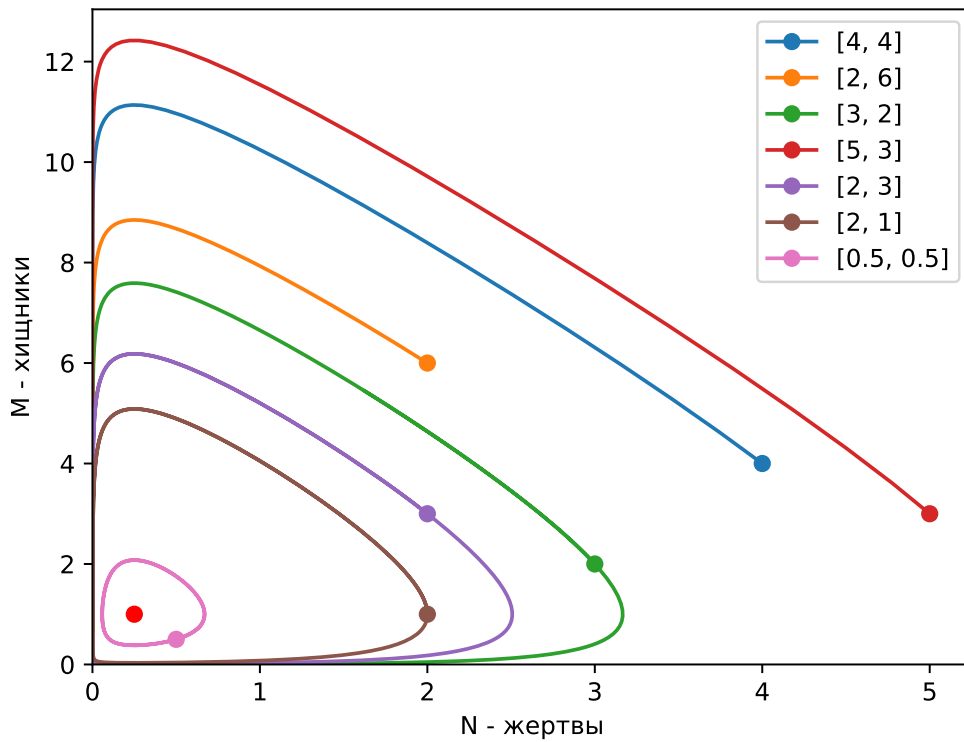


Рис. 5: Решения с указанными начальными условиями на интервале времени $[0, 10]$.

На фазовой плоскости на данном интервале времени замкнулись не все циклы. Это связано с тем, что популяции уменьшаются до очень маленьких значений, «выбраться» из которых займёт большой промежуток времени. Но в этот раз можем увидеть действие нулевой точки равновесия – седла. Поскольку движение на плоскости происходит против часовой стрелки, то по оси M , как и было получено при анализе ($\lambda_2 < 0$), движение происходит к началу координат, никогда не пересекая ось M . Аналогично движение по оси N будет происходить, но от начала координат ($\lambda_1 > 0$).

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель конкуренции: взаимодействия популяций жертв и хищников. Модель представляет из себя систему дифференциальных уравнений. Она была проанализирована и были найдены точки равновесия. Написана программа для построения графиков решения системы уравнений в зависимости от параметров на плоскости времени и фазовой плоскости.