МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Проверил профессор д.ф.-м. н.
Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 21 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

В нашем мире большое количество явлений это колебания, например, звук – это колебания воздуха, свет – колебания электромагнитных волн. И математический маятник – это фундаментальная модель идеальных колебаний. В отличие от физического маятника, мы не учитываем внешние факторы и представляем маятник наиболее просто – как материальную точку, движущуюся в одной плоскости. Однако, также представляет интерес и взаимодействие каких-либо внешних сил на маятник.

2. Математическая модель

Движение математического маятника во времени можно описать на Декартовой плоскости (x, y) в зависимости от времени t. Предположим, что сам маятник является материальной точкой, длина невесомой нити L (м) и ускорение свободного падения $\left(g \approx 9.8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$ постоянны. Тогда движение маятника вместо пары (x, y) можно описать углом отклонения от вертикальной оси α.

Воспользуемся уравнением моментов для материальной точки:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M,$$

где J – момент инерции относительно оси, M – момент сил. Для материальной точки: $J = mL^2$, где m – масса маятника.

На маятник влияет сила тяжести, равная $F = mg$, но на движение будет влиять только её составляющая, касательная к движению, поэтому $F = -mg\sin\alpha$. Эта сила перпендикулярна к нити, поэтому момент силы равен:

$$M = FL = -mgL\sin\alpha.$$

Подставляя в уравнение моментов, и приводя слагаемые:

$$mL^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL\sin\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает угол отклонения маятника в зависимости от времени.

Обозначим $w^2 = \frac{g}{L}$ и добавим начальные условия для получения единственного решения:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w^2\sin\alpha = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Известно, что при небольших значениях углов $\sin x \approx x$, поэтому из нелинейной модели сделаем линейную: $\ddot{\alpha} + w^2\alpha = 0$.

2.1. Модели с внешними силами

Одной из внешних сил является трение. Оно зависит от скорости с некоторым коэффициентом $k > 0$. Получим модель с трением: $\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + w^2\alpha = 0$.

Также внешними силами могут быть вынуждающие колебания: $A_f \sin\left(w_f t\right)$ с амплитудой A_f и частотой w_f. Модель с вынуждающими колебаниями:
$\ddot{\alpha} + w^2\alpha = A_f \sin\left(w_f t\right)$.

Если на маятник будут действовать сразу обе предыдущие силы, то уравнение будет выглядеть так: $\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + w^2\alpha = A_f \sin\left(w_f t\right)$.

3. Анализ модели

Проанализируем линейную модель:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w^2\alpha = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Известен вид аналитического решения: $\alpha(t) = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)$. Находим частное решение: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(wt) + \dfrac{a_1}{w} \sin(wt)$. Можно найти такой угол φ и константу ρ, что $\rho \sin\varphi = \alpha_0$ и $\rho \cos\varphi = \dfrac{a_1}{w}$, поэтому по формуле синуса суммы: $\alpha(t) = \rho \sin(wt + \varphi)$.

Значит результатом решения будет синусоида с некоторым смещением в зависимости от начальных параметров.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных $\beta(t) = \dot{\alpha}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\beta} + w^2 \sin\alpha = 0, \\ \beta = \dot{\alpha}, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta} = -w^2 \sin\alpha, \\ \dot{\alpha} = \beta, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Для системы данного вида можно применять различные численные методы. Уравнения с дополнительными силами аналогично приводятся к такому виду.

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим результаты и фазовые плоскости колебаний.

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

```
import numpy as np
import math


def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
    num = math.ceil((b - a) / h)
    x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
    y_a = [y0] * num

    for i in range(num - 1):
        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
```

```
        k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
        k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
        y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)

    return x_a, np.array(y_a)

def right(t, ab):
    return np.array([
        ab[1],
        -w**2 * ab[0]
    ])

def model(y0, right):
    x_, y_ = runge_kutta(right, y0, t0, tn, (tn-t0)/n)
    y_ = y_.T

    return x_, y_

t0, tn = 0, 15
n = 10000

g = 9.8
L = 1
w = np.sqrt( g / L )

init = [np.pi/100, 0]
x_, y_ = model(init, right)
```

4.3. Результаты

Будем строить изменение угла во времени и фазовый портрет системы. Для всех следующих экспериментов длина маятника $L = 1, g = 9.8$, из чего следует, что собственная частота $w = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \approx 3.13\ldots$

4.3.1. Модель без дополнительных сил

Сравним линейное и нелинейное дифференциальное уравнение при различных начальных углах наклона и нулевой начальной скорости.

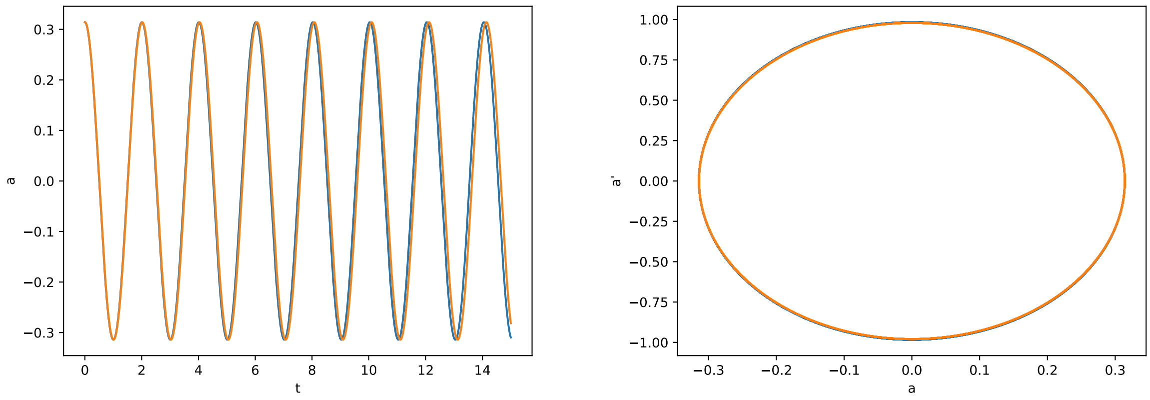

Рис. 1: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}$.

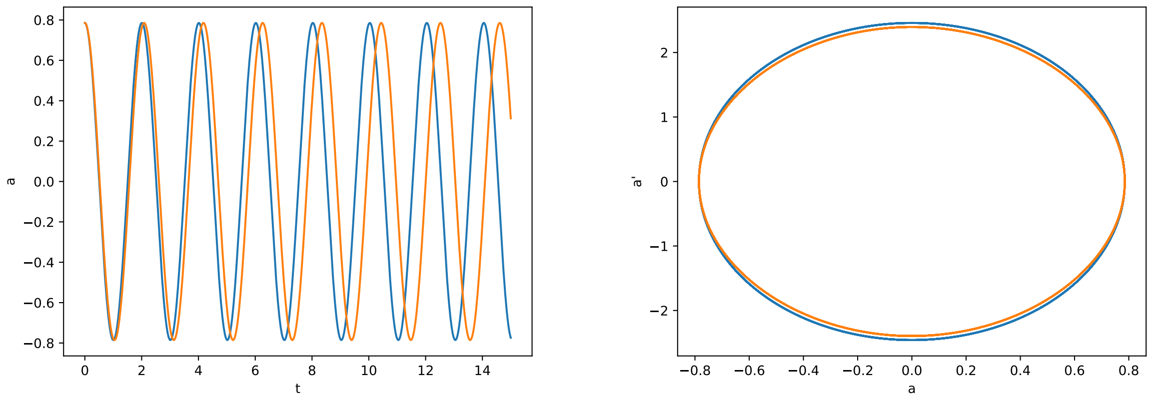

Рис. 2: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Синей кривой визуализирована линейная модель, оранжевой – нелинейная.

На данных результатах (Рис. 1, 2) видно, что при небольшом угле наклона разница небольшая, а при большем – увеличивается период и вместе с этим растёт и погрешность линейной модели. На фазовой плоскости можно увидеть более суженный эллипс у нелинейной модели, что означает меньшую скорость.

4.3.2. Модель с трением

Рассмотрим результаты влияния трения на маятник. При начальных условиях $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10},\ \dot{\alpha}(0) = 0.$

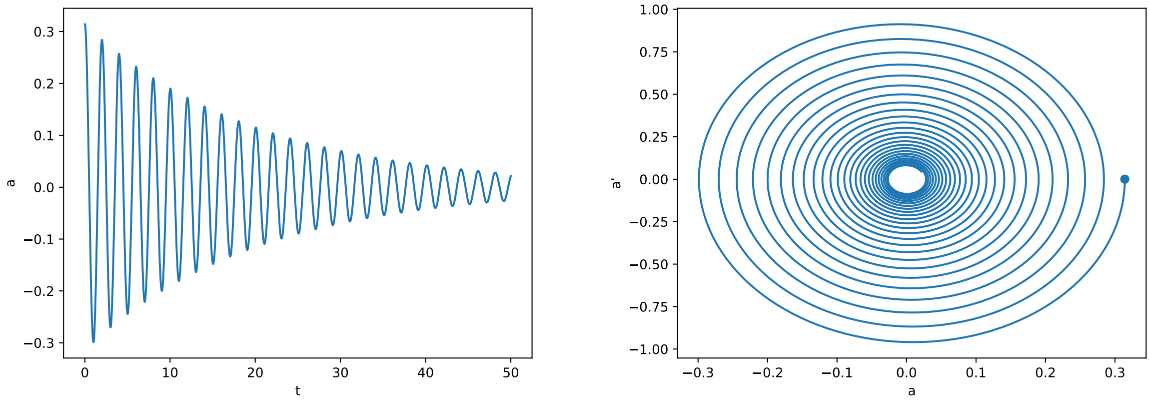

Рис. 3: $k = 0.1$.

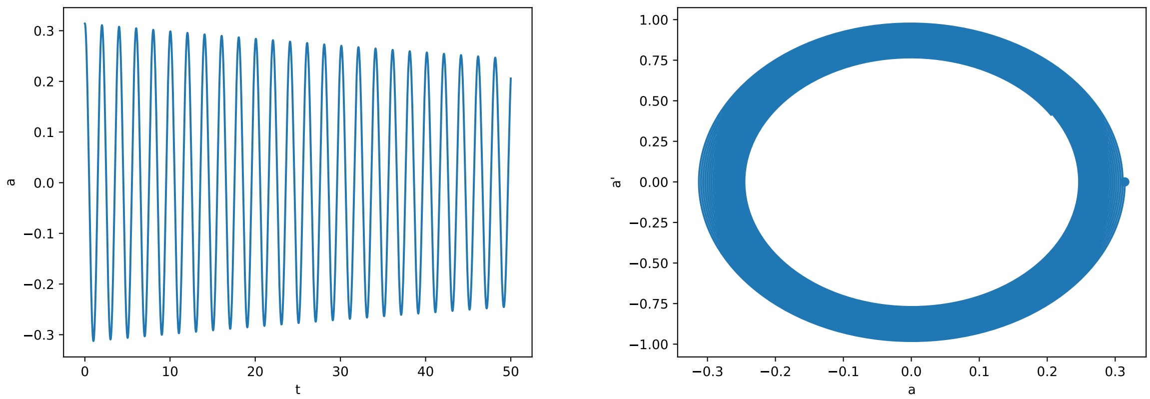

Рис. 4: $k = 0.01$.

Видно (Рис. 3,4), что амплитуда колебаний из-за трения со временем уменьшается, поэтому колебания являются затухающими. Кривая на фазовой плоскости из-за затухания постепенно приближается к нулю. Чем меньше коэффициент трения, тем медленнее происходит затухание.

4.3.3. Модель с вынуждающими колебаниями

Рассмотрим результаты при действии вынуждающих колебаний на маятник с начальными условиями $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}$, $\dot{\alpha}(0) = 0$.

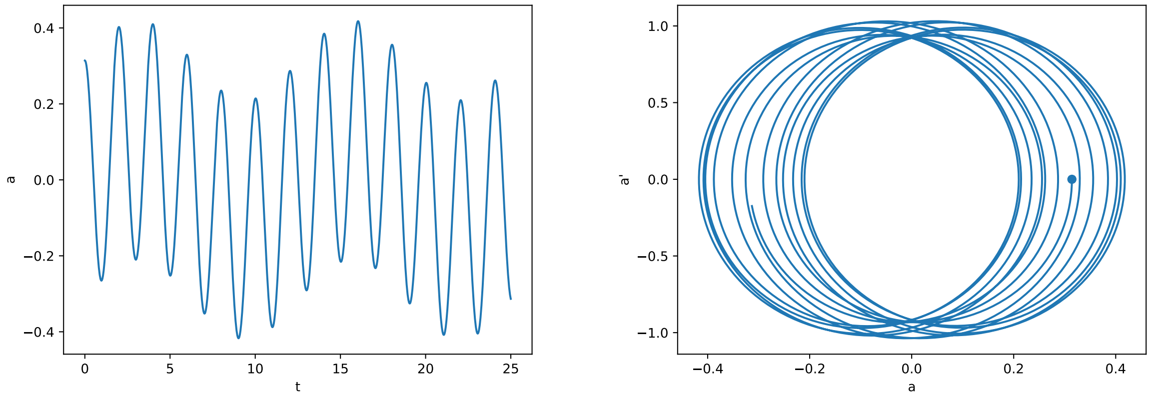

Рис. 5: $A_f = 1,\ w_f = 0.5.$

Из-за вынуждающих колебаний (Рис. 5) происходит смещение значений угла наклона маятника, что также отражается и на фазовой плоскости.

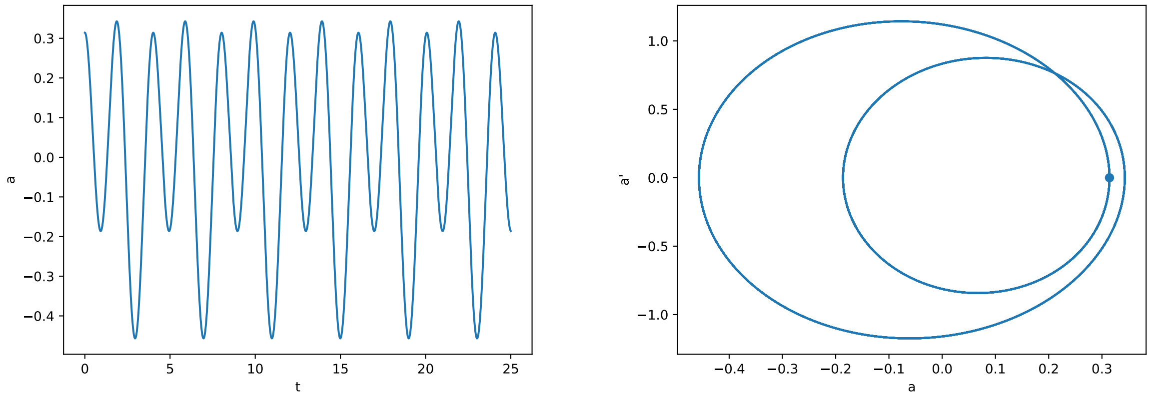

Рис. 6: $A_f = 1,\ w_f = \dfrac{w}{2}.$

При частоте вынуждающих колебаний, равной целой доли собственной частоты маятника (Рис. 6), видно смещение угла, но с некоторым периодом это смещение повторяется. На фазовой плоскости видно замкнутую кривую, что и подтверждает существование некоторого периода колебаний.

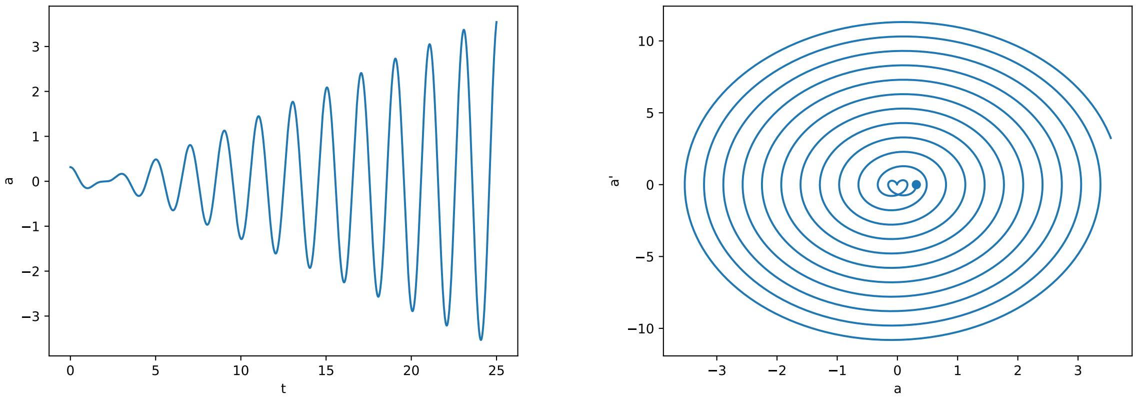

Рис. 7: $A_f = 1,\ w_f = w$.

При совпадении частоты вынуждающих колебаний с собственной частотой маятника (Рис. 7) происходит эффект резонанса – амплитуда колебаний неограниченно растёт.

4.3.4. Модель с трением и вынуждающими колебаниями

Рассмотрим модель, в которой присутствуют обе внешние силы, с начальными условиями: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10},\ \dot{\alpha}(0) = 0$. Далее синим визуализированы первая четверть данных, а оранжевым – оставшиеся три четверти.

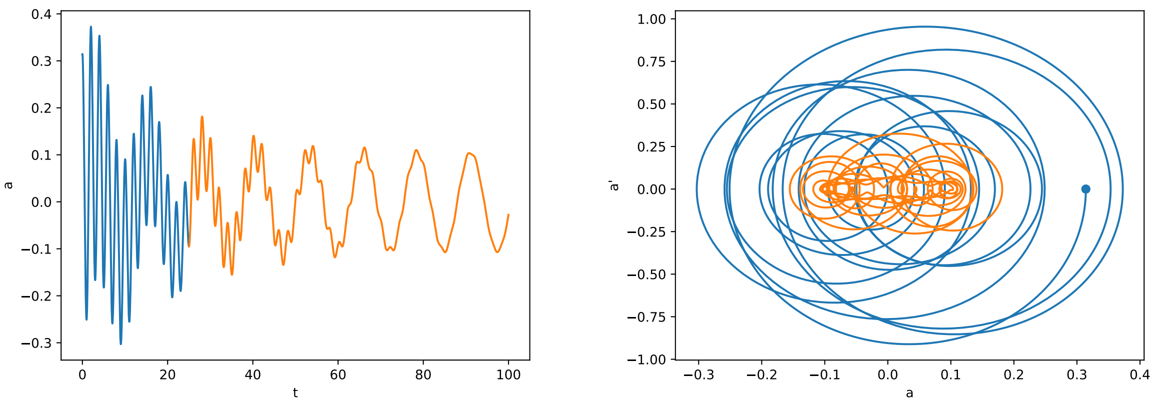

Рис. 8: $A_f = 1,\ w_f = 0.5$.

Изначально хаотическое движение маятника постепенно сглаживается и получается колебание с другим периодом и амплитудой (Рис. 8).

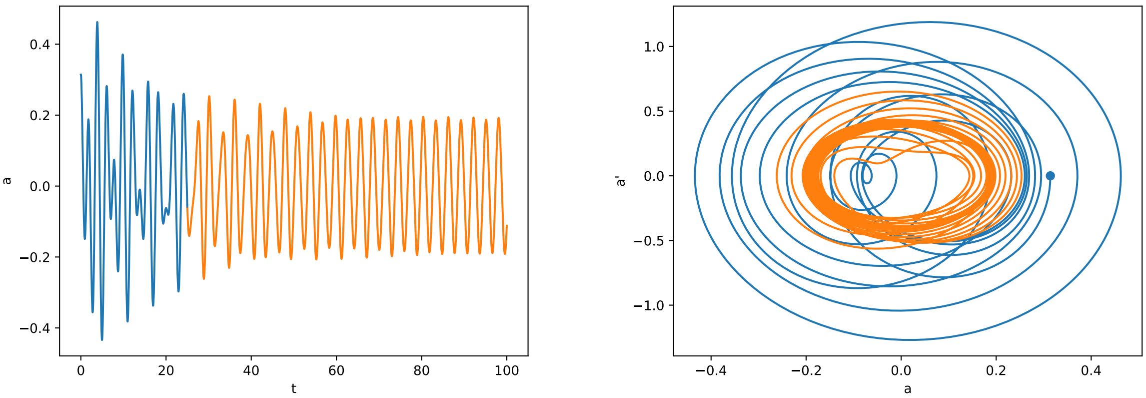

Рис. 9: $A_f = 1,\ w_f = w - 1.$

При приближении к собственной частоте (Рис. 9) период и амплитуда установившихся колебаний увеличиваются.

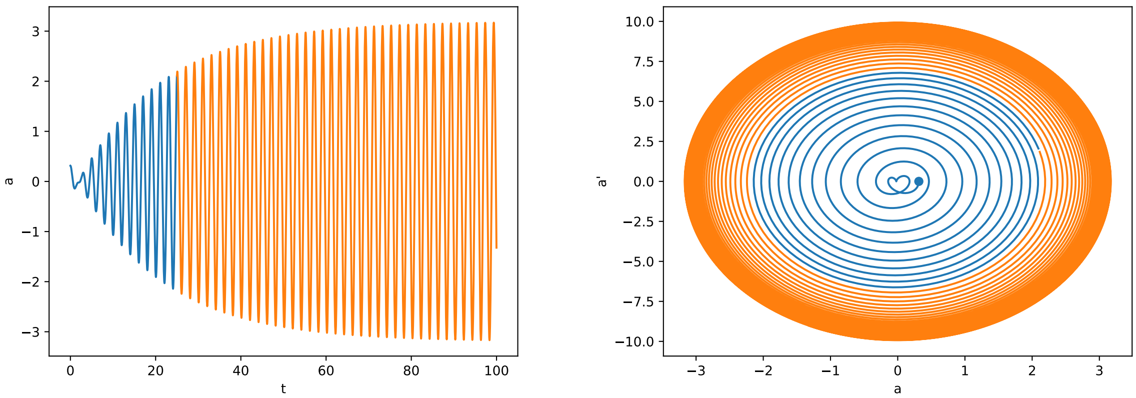

Рис. 10: $A_f = 1,\ w_f = w.$

Самая большая амплитуда достигается при резонансной частоте. В отличие от модели без силы трения, данные резонансные колебания не будут неограниченно увеличиваться. Однако, нельзя делать вывод, что с силой трения резонансная частота является собственной (Рис. 10).

4.3.5. Резонанс

Для того, чтобы исследовать эффект резонанса подробнее построим резонансные кривые. Поскольку этот эффект связан с собственной частотой, будем выбирать несколько значений частоты вынуждающих колебаний около неё. Для каждой такой частоты получим численное решение и найдём из последней четверти значений максимальное по модулю. Получим зависимость $A = \alpha(w_f)$. Для сравнения с численным решением используем известное аналитическое решение:

$$\alpha(w_f) = \frac{A_f}{m\sqrt{\left(2w_f w\zeta\right)^2 + \left(w^2 - w_f^2\right)^2}}, \qquad \zeta = \frac{k}{2mw}.$$

В функции используется масса (m), примем её равной 1.

По оси w будем откладывать значения $\frac{w_f}{w}$ (т.е. резонансная частота находится на отметке 1). Построим кривые для различных значений коэффициента трения на отрезках $[0.5w, 2w]$ и $[0.9w, 1.1w]$. Для выборки значений частоты вынуждающих колебаний используем равномерную сетку из 60 точек.

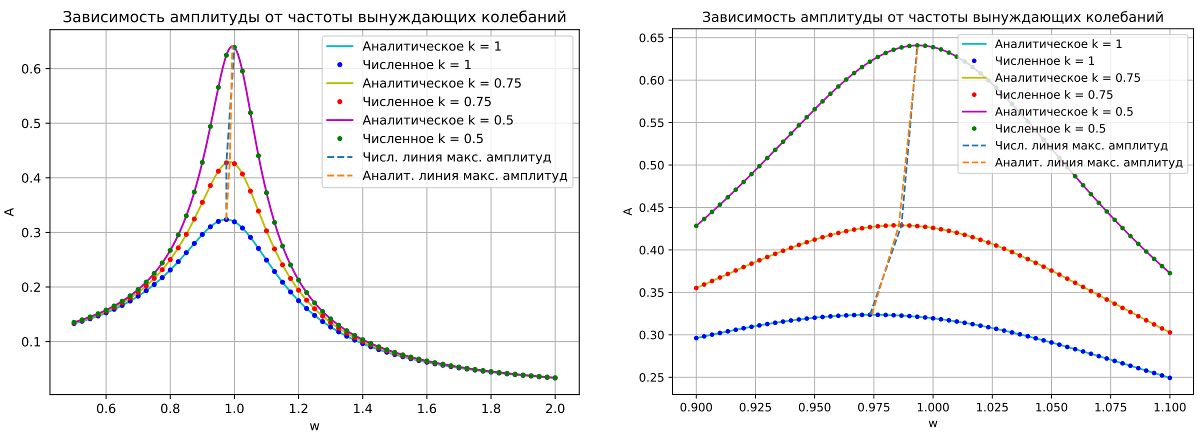

Рис. 11: Кривая амплитуд.

Видно (Рис. 11), что для разных коэффициентов трения резонансная частота достигается в разных местах. При этом, с уменьшением трения амплитуда резонанса становится всё больше, а резонансная частота стремится к собственной.

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель маятника, а именно: линейная, нелинейная, с трением, с вынуждающей силой, и с трением и вынуждающей силой. Модель представляет из себя дифференциальное уравнение второго порядка. Она была проанализирована и был найден аналитический вид решения. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. После чего построены графики решения уравнения в зависимости от параметров: в зависимости от времени и на фазовой плоскости. Был показан эффект резонанса вынуждающей силы с маятником.