МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Проверил профессор д.ф.-м. н.
Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 21 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

Как говорил Альберт Эйнштейн: «Всё в мире относительно». И действительно, есть много разных точек зрения на одно и то же явление, и физика не является исключением. Например, когда мы едем в автобусе, мы перемещаемся относительно земли, но находимся на месте в самом автобусе. На космическом уровне Земля перемещается одним путём относительно Солнца, и другим относительно центра галактики.

Интересным представляет собой перемещение во вращающемся объекте, например, человека на карусели, или перемещение около полюса земли.Изучим, как происходит перемещение со стороны человека вне вращающейся системы координат.

2. Математическая модель

Приблизим движение в какой-либо вращающейся системе координат вращением на диске. Примем за тело материальную точку с массой m, а угловую скорость диска – Ω. Трением будем пренебрегать.

Поскольку система является неинерциальной, то на тело действует сила инерции:

$$\overrightarrow{F_i} = m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt},$$

где $\overrightarrow{V}$ – вектор скорости.

Во вращающейся системе отсчёта наблюдателю кажется, что тела движутся по изогнутой траектории. Такой эффект называется эффектом Кориолиса. Сила Кориолиса равна:

$$\overrightarrow{F_k} = m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt},$$

но в общем случае сила Кориолиса $\overrightarrow{F_k} \perp \overrightarrow{V}$ и равна:

$$\overrightarrow{F_k} = -2m\left[\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V}\right].$$

Приравнивая формулы имеем:

$$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = -2m\left[\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V}\right].$$

Преобразовывая, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}. \end{cases}$$

Уравнения второго порядка, значит нужно 2 начальных условия для каждого – положение и скорость:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1. \end{cases}$$

3. Анализ модели

Найдём первый интеграл системы.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} = const.$$

Это сумма проекций кинетической энергии системы. Поскольку наша система замкнутая, то и закон сохранения энергии является справедливым. Это и подтверждает данное соотношение.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных $u(t) = \dot{x}(t), \quad v(t) = \dot{y}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{y} = v, \\ \dot{u} = 2\Omega v, & \dot{v} = -2\Omega u, \\ x(0) = x_0, & y(0) = y_0, \\ u(0) = x_1, & v(0) = y_1. \end{cases}$$

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим их решения и фазовые плоскости.

По полученному закону сохранения энергии можем вывести соотношение: $u^2 + v^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$. Также проверим его выполнение для численного решения. Для этого будем строить относительную погрешность на всём отрезке времени:

$$\frac{u^2 + v^2 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}.$$

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
    num = int(np.ceil((b - a) / h))
```

```python
    x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
    y_a = [y0] * num

    for i in range(num - 1):
        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
        k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
        k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
        y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)

    return x_a, np.array(y_a)


def right(t, x):
    return np.array([
        x[2], # u, dx
        x[3], # v, dy
        2 * w * x[3], # du, ddx
        -2* w * x[2], # dv, ddy
    ])


t0, tn = 0, 5
n = 100000

w = 10
x0 = [5,3,0,6]

t, x = runge_kutta(right, x0, t0, tn, (tn-t0)/n)
```

4.3. Результаты

Построим траектории, выходящие из точки $(5, 3)$ и имеющие начальные скорости: $(0, 6), (5, 5), (1, 1), (-3, 3), (-4, -2), (1, -3)$ на отрезке времени $[0, 5]$. Также покажем закон сохранения энергии.

Для начала возьмём $\Omega = 1$.

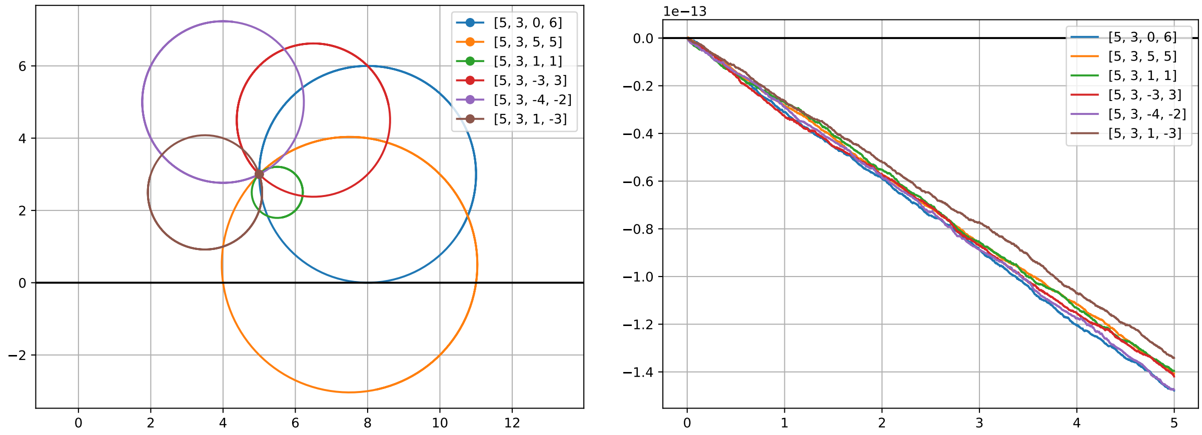

Рис. 1: Результат при количестве разбиений отрезка $n = 2500$.

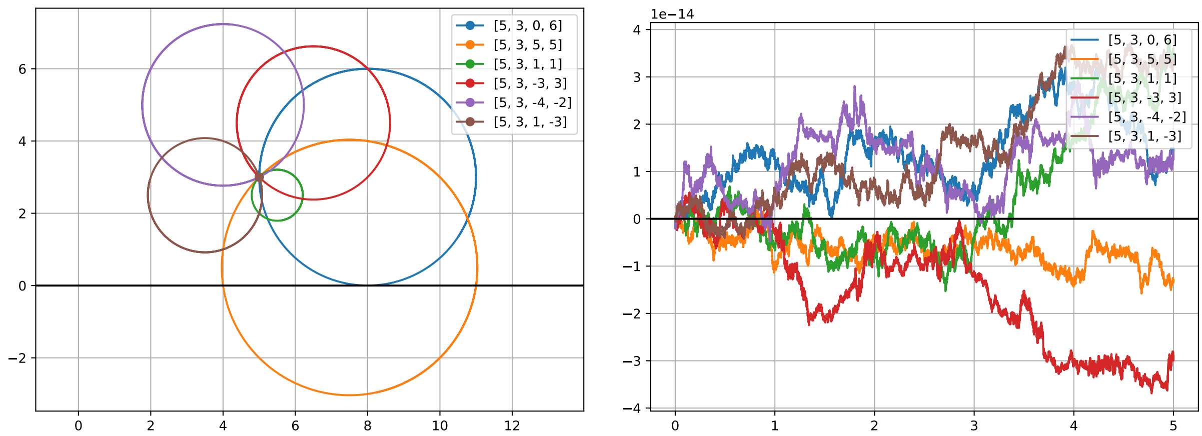

Рис. 2: Результат при количестве разбиений отрезка $n = 100000$.

Из графиков движения видно (Рис. 1, 2), что траекторией тела, которое находится во вращающейся системе координат, является окружность. Чем больше начальная энергия $(u^2 + v^2)$, тем больше радиус окружности у траектории.

У первого эксперимента с малым количеством разбиений отрезка времени погрешность увеличивается, из-за чего закон сохранения энергии не выполняется, хоть и сама погрешность по модулю небольшая. Это, вероятно, связанно с много большей погрешностью самого численного метода при меньшем количестве разбиений отрезка времени. У второго же, точностью больше и можно сказать, что соотношение выполняется с некоторой погрешностью.

Теперь возьмём $\Omega = 10$.

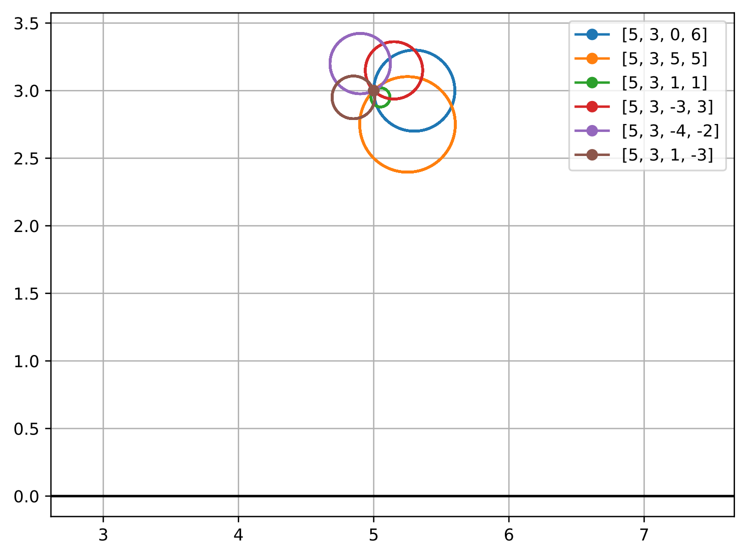

Рис. 3: Траектории при $\Omega = 10$.

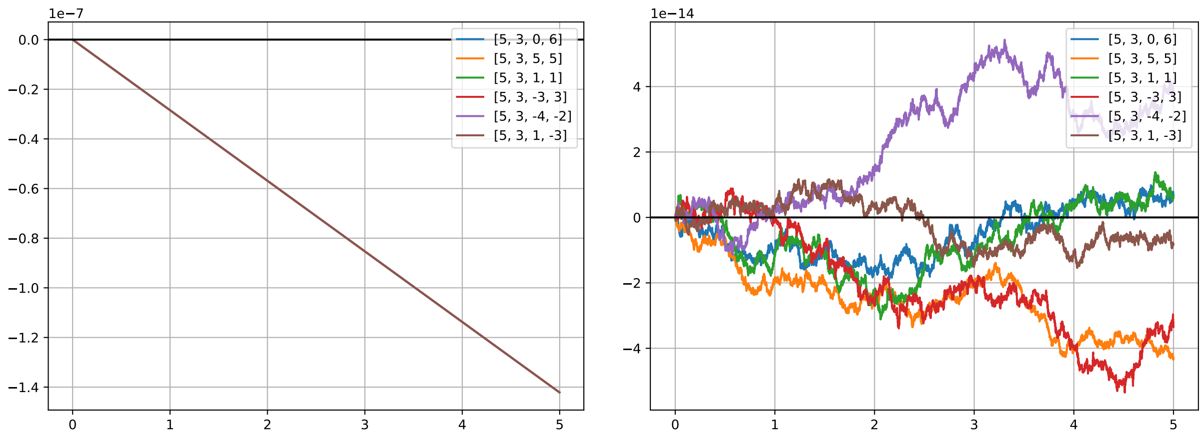

Рис. 4: Закон сохранения при количестве $n = 2500$ и $n = 100000$.

При большей угловой скорости вращения получаем окружности меньшего радиуса (Рис. 3). Аналогично ведут себя результаты, показывающие закон сохранения энергии (Рис. 4). При меньшем разбиении отрезка времени в данном эксперименте относительные погрешности становятся одинаковыми. При большем количестве разбиений закон аналогично выполняется с аналогичной погрешностью.

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая перемещения во вращающейся системе координат, представляющая собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Она была проанализирована и был показан закон сохранения энергии. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. После чего построены графики численного решения уравнения в зависимости от параметров.