МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

РЕФЕРАТ

по дисциплине «Уравнения математической физики»
на тему «Теоремы о единственности и устойчивости решений краевых задачи для уравнения Пуассона»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Проверил проф. д.ф.-м. н.
Алексеев Г.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 9 » июля 2024 г.

г. Владивосток

2024

Оглавление

1. Уравнение Пуассона

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^1$, Ω_e – её внешность, $f \in C(\Omega)$ либо $f \in C(\Omega_e)$, $g \in C(\Gamma)$, n – единичный вектор внешней нормали к границе Γ, $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma$. Тогда уравнение Пуассона выглядит так:

$$\Delta u = f, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Комментарий. *Оператор Лапласа определяется так:*

$$\Delta u \equiv \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u).$$

В прямоугольных координатах в $\mathbb{R}^3$ *его можно записать так:*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Краевые задачи для уравнения Пуассона имеют вид:

1.1 *Внутренняя задача Дирихле*. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω и граничному условию

$$u|_\Gamma = g. \tag{2}$$

1.2 *Внешняя задача Дирихле*. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω_e, граничному условию (2) и условию регулярности на бесконечности

$$u(\mathrm{x}) = o(1) \text{ при } |\mathrm{x}| \to \infty. \tag{3}$$

2.1 *Внутренняя задача Неймана*. Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω и граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = g. \tag{4}$$

Комментарий. *Здесь* $\dfrac{\partial u}{\partial n} \equiv \mathrm{n} \cdot \nabla u \equiv \mathrm{n} \cdot \mathrm{grad}\, u$ *– производная по внешней нормали к границе* Γ.

2.2 *Внешняя задача Неймана*. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω_e, граничному условию (4), и условию регулярности (3).

3.1 *Внутренняя задача.* Найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω и граничному условию

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + au\right)\right|_{\Gamma} = g. \tag{5}$$

Здесь $a : \Gamma \to \mathbb{R}, a \in C(\Gamma)$.

3.2 *Внешняя задача*. Найти функцию $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Ω_e, граничному условию (5) и условию регулярности (3).

2. Теоремы единственности и устойчивости решений краевых задач

Комментарий. *Далее для доказательств будут использоваться свойства гармонических функций – удовлетворяющих уравнению Лапласа* $\Delta u = 0$.

1. *(Принцип максимума). Для функции* $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u \neq \mathrm{const} \Rightarrow$
$\min\limits_{x\in\Gamma} u(\mathrm{x}) < u(\mathrm{x}) < \max\limits_{x\in\Gamma} u(\mathrm{x})\ \forall \mathrm{x} \in \Omega$.
2. $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_\Gamma = 0 \Rightarrow u|_\Omega \equiv 0$.
3. $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u|_\Gamma \geq 0 \Rightarrow u|_\Omega \geq 0$.
4. $u, v \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ u \leq v$ *на* $\Gamma \Rightarrow u \leq v$ *на* Ω.

5. $u, v \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ v \geq 0,\ |u| \leq v$ *на* $\Gamma \Rightarrow |u| \leq v$ *на* Ω.

Для гармонических функций внешней области справедливы аналогичные свойства, при условии регулярности (3).

Теорема 1 (Единственность задач Дирихле)**.** *Решение* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *внутренней задачи Дирихле либо решение* $u \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega_e})$ *внешней задачи Дирихле единственно.*

Доказательство. Предположим, что задача Дирихле имеет два различных решения u_1, u_2. Рассмотрим их разность $u = u_2 - u_1$.

$$\Delta u = \Delta u_2 - \Delta u_1 = f - f = 0. \tag{j}$$

$$u|_\Gamma = (u_2 - u_1)|_\Gamma = g - g = 0 \tag{b}$$

Значит функция u – гармоническая, на границе равная нулю. По свойству 2 во всей области Ω $u = u_2 - u_1 = 0$. Значит $u_2 = u_1$. ■

Теорема 2 (Устойчивость задач Дирихле)**.** *Для решений* $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *внутренней задачи Дирихле либо решений* $u_1, u_2 \in C^2(\Omega_e) \cap C(\overline{\Omega_e})$ *внешней задачи Дирихле при граничных условиях*

$$u_1|_\Gamma = g_1, \quad u_2|_\Gamma = g_2,$$

и условии

$$|g_1(x) - g_2(x)|\big|_\Gamma \leq \varepsilon$$

Выполняется неравенство

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon \text{ на } \overline{\Omega}\ (\overline{\Omega}_e \text{ – для внешней задачи}).$$

Доказательство. Разность $u = u_1 - u_2$ – гармоническая функция (j), на границе Γ удовлетворяющая условию

$$|u| = |u_1 - u_2| = |g_1 - g_2| \leq \varepsilon.$$

Поэтому по свойству 5 на всей области Ω $|u_1 - u_2| = |u| \leq \varepsilon$. ■

Комментарий. *Далее используется первая формула Грина*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v d\mathrm{x} = -\int_\Omega v \Delta u d\mathrm{x} + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \tag{6}$$

Теорема 3 (Единственность внутренней задачи Неймана)**.** *Решение* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *внутренней задачи Неймана* (1)*,* (4) *определяется с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство. Предположим, что задача имеет два решения u_1, u_2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ является гармонической функцией (j), а на границе Γ выполняется условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} = g - g = 0. \tag{bb}$$

Положим в формуле Грина (6) $v = u$, тогда

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = -\int_\Omega u \Delta u d\mathrm{x} + \int_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \tag{7}$$

Учитывая условия (j), (bb) выводим

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = 0. \tag{8}$$

Поскольку подынтегральная функция является неотрицательной, значит

$$\nabla u = 0 \text{ в } \Omega \Rightarrow u = \mathrm{const}.$$

■

Теорема 4 (Единственность внешней задачи Неймана)**.** *Решение* $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ *внутренней задачи Неймана* (1)*,* (3)*,* (4) *единственно, если* Ω_e *– связное множество.*

Доказательство. Предположим, что задача (1), (3), (4) имеет два решения: u_1 и u_2. Возьмём шар достаточно большого радиуса B_R с границей Γ_R, что $\Omega_R \supset \Omega$, которым ограничим область Ω_e, получая $\Omega_R = \Omega_e \cap B_R$. Имеем границу $\partial\Omega_R =$

$\Gamma \cup \Gamma_R$. Применим формулу Грина (6), полагая $u = u_2 - u_1, v = u$, и учитывая $\Delta u = 0$ в Ω_R (j), будем иметь

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = \int_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int_{\Gamma_R} u\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \tag{9}$$

В силу поведения функции $|\nabla u| = O(|\mathrm{x}|^{-2})$ при $|\mathrm{x}| \to \infty$, имеем $|\nabla u|^2 = O(|\mathrm{x}|^{-4})$, в то время как объём Ω_R растёт как $O(R^3)$, $R = |x|$. Отсюда следует, что при $R \to \infty$ собственный интеграл в правой части стремится к сходящемуся несобственному интегралу $\displaystyle\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathrm{x}$. Также величина $\left(u\dfrac{\partial u}{\partial n} \right)\Big|_{\Gamma_R}$ убывает как $O(R^{-3})$, тогда как площадь поверхности Γ_R растёт как $O(R^2)$, значит интеграл $\displaystyle\int_{\Gamma_R} u\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ стремится к нулю. Поэтому, переходя к пределу при $R \to \infty$ и учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на Γ (bb), получим

$$\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = 0. \tag{10}$$

С учётом связности Ω_e получаем, что $|\nabla u| = 0$ в $\Omega_e \Rightarrow u = u_0 = \mathrm{const}$. Из условия регулярности (3) следует, что $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. ■

Комментарий. *Для гармонической функции* $u \in C^2(\Omega_e)$ *во внешней области* $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}$, *удовлетворяющей условию регулярности* (3)*, существуют константы* $R > 0, C = C_R(u)$*, что выполняются условия*

$$|u(\mathrm{x})| \leq \frac{C_R}{|\mathrm{x}|}, \; |\nabla u| \leq \frac{C_R}{|\mathrm{x}|^2}, \quad |\mathrm{x}| \geq R$$

то есть при стремлении к бесконечности убывают как $O(|\mathrm{x}|^{-1})$ *и* $O(|\mathrm{x}|^{-2})$*. Из этого также следует, что* $\left|\dfrac{\partial u}{\partial n}\right| = |\mathrm{n} \cdot \nabla u| = O(|\mathrm{x}|^{-2})$

Теорема 5 (Единственность внутренней третьей кравеой задачи)**.** *Решение* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *внутренней третьей краевой задачи* (1)*,* (5) *единственно при*

$$a \in C(\Gamma), \; a \geq 0 \text{ на } \Gamma, \; \int_{\Gamma} a d\sigma > 0. \tag{i}$$

Доказательство. Предположим, что задача имеет два решения: u_1 и u_2. Тогда их разность $u = u_2 - u_1$ – гармоническая функция, с краевым условием на Γ

$$\frac{\partial u}{\partial n} + au = \frac{\partial u_2}{\partial n} + au_2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + au_1\right) = g - g = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = -au. \qquad (bbb)$$

Пологая в формуле (6) $v = u$, получим

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = -\int_\Omega u\Delta u d\mathrm{x} + \int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma. \qquad (11)$$

Учитывая условия (j), (bbb) имеем

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathrm{x} + \int_\Gamma au^2 d\sigma = 0. \qquad (12)$$

Поскольку по условию (i) $a \geq 0$, то для того, чтобы сумма положительных величин была равна нулю необходимо, что эти величины были равны нулю. Значит $\int_\Omega |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = 0$, откуда $|\nabla u| = 0$ в $\Omega \Rightarrow u = u_0 = \mathrm{const}$. Подставляя $u = u_0$ в (12), будем иметь

$$\int_\Gamma au_0^2\, d\sigma = u_0^2 \int_\Gamma ad\sigma = 0. \qquad (13)$$

Из третьего условия в (i) получаем, что $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. ■

Теорема 6 (Единственность внешней третьей краевой задачи)**.** *Решение* $u \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega}_e)$ *внутренней третьей краевой задачи* (1)*,* (3)*,* (5) *единственно, если* Ω_e *– связное множество и* $a \in C(\Gamma),\ a \geq 0$ *на* Γ.

Доказательство. Аналогично доказательству единственности решения внешней задачи Неймана, предположим, что задача (1), (3), (5) имеет два решения: u_1 и u_2. Возьмём шар достаточно большого радиуса B_R с границей Γ_R, что $\Omega_R \supset \Omega$, которым ограничим область Ω, получая $\Omega_R = \Omega \cap B_R$. Имеем границу $\partial\Omega_R = \Gamma \cup \Gamma_R$. Применим формулу Грина (6), полагая $u = u_2 - u_1, v = u$, и учитывая $\Delta u = 0$ в Ω_R (j), будем иметь

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\mathrm{x} = \int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma + \int_{\Gamma_R} u\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma. \qquad (14)$$

В силу поведения функции $|\nabla u| = O(|\mathrm{x}|^{-2})$ при $|\mathrm{x}| \to \infty$, имеем $|\nabla u|^2 = O(|\mathrm{x}|^{-4})$, в то время как объём Ω_R растёт как $O(R^3)$, $R = |x|$. Отсюда следует, что при $R \to \infty$ собственный интеграл в правой части стремится к сходящемуся несобственному интегралу $\displaystyle\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathrm{x}$. Также величина $\left(u \dfrac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_R}$ убывает как $O(R^{-3})$, тогда как площадь поверхности Γ_R растёт как $O(R^2)$, значит интеграл $\displaystyle\int_{\Gamma_R} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ стремится к нулю. Поэтому, переходя к пределу при $R \to \infty$ и учитывая, что $\dfrac{\partial u}{\partial n} = -au$ на Γ (bbb), получим

$$\int_{\Omega_e} |\nabla u|^2 d\mathrm{x} + \int_{\Gamma} a u^2 d\sigma = 0. \tag{15}$$

Поскольку $a \geq 0$ на Γ и с учётом связности Ω_e, то получаем, что $|\nabla u| = 0$ в $\Omega_e \Rightarrow u = u_0 = \mathrm{const}$. Из условия (3) следует, что $u_0 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. ■

3. Список литературы

[1] Алексеев Г.В. Классические модели и методы математической физики. Изд.: Владивосток: Дальнаука, 2011. стр. 318-323, стр. 340-345.