МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине

«Математическое и копмьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Профессор д.ф.-м. н.
Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 30 » мая 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

2. Математическая модель

Мы изучаем перемещение тела по по вращающемуся диску. Примем за тело материальную точку с массой m, а угловую скорость диска – Ω. Трением будем пренебрегать.

Поскольку система является неинерциальной, то на тело действует сила инерции:

$$\overrightarrow{F_i} = m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt},$$

где $\overrightarrow{V}$ – вектор скорости.

Во вращающейся системе отсчёта наблюдателю кажется, что тела движутся по изогнутой траектории. Такой эффект называется эффектом Кориолиса. Сила Кориолиса равна:

$$\overrightarrow{F_k} = m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt},$$

но в общем случае сила Кориолиса $\overrightarrow{F_k} \perp \overrightarrow{V}$ и равна:

$$\overrightarrow{F_k} = -2m\left[\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V}\right].$$

Приравнивая формулы имеем:

$$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = -2m\left[\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V}\right].$$

Преобразовывая, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}. \end{cases}$$

Уравнения второго порядка, значит нужно 2 начальных условия для каждого – положение и скорость:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1, \\ y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1. \end{cases}$$

3. Анализ модели

Найдём первый интеграл системы.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} = const.$$

Это сумма проекций кинетической энергии системы. Поскольку наша система замкнутая, то и закон сохранения энергии является справедливым. Это и подтверждает данное соотношение.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных $u(t) = \dot{x}(t), \quad v(t) = \dot{y}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{y} = v, \\ \dot{u} = 2\Omega v, & \dot{v} = -2\Omega u, \\ x(0) = x_0, & y(0) = y_0, \\ u(0) = x_1, & v(0) = y_1. \end{cases}$$

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим их решения и фазовые плоскости.

По полученному закону сохранения энергии можем вывести соотношение: $u^2 + v^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$. Также проверим его выполнение для численного решения.

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

4.3. Результаты

Построим траектории, выходящие из точки $(5, 3)$ и имеющие начальные скорости: $(4, 4), (5, 5), (1, 1), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ на отрезке времени $[0, 5]$. Также покажем закон сохранения энергии.

Для начала возьмём $\Omega = 1$.

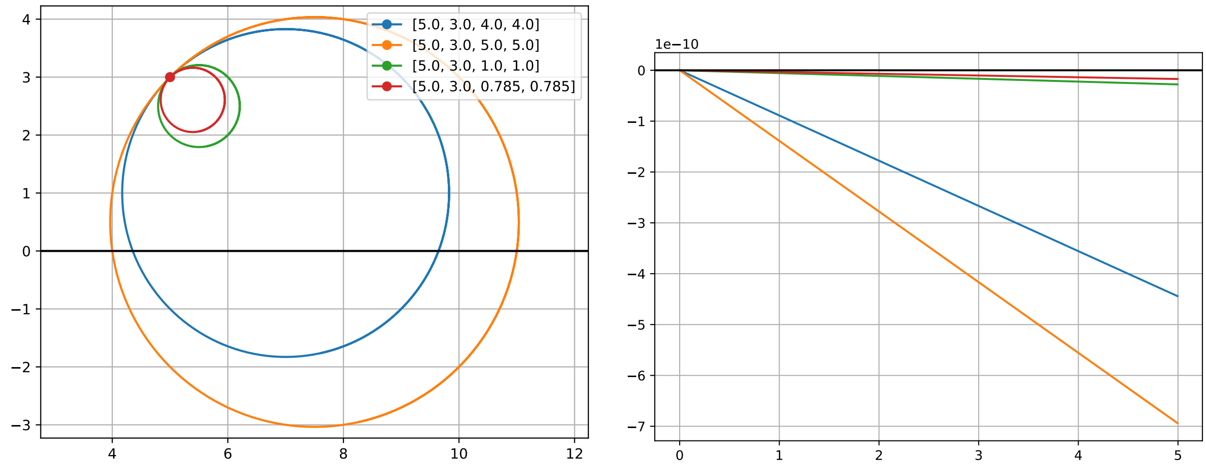

Рис. 1: Результат при количестве разбиений отрезка $n = 1000$.

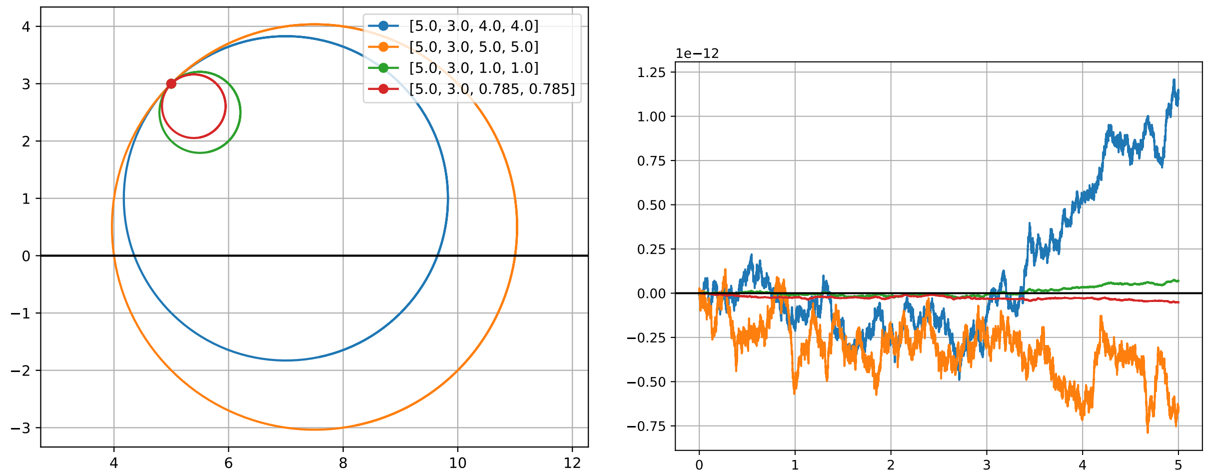

Рис. 2: Результат при количестве разбиений отрезка $n = 100000$.

Из графиков движения видно, что траекторией тела, которое находится во вращающейся системе координат, является окружность. Видно, что чем больше начальная скорость, тем больше радиус окружности у траектории.

У первого эксперимента с малым количеством разбиений отрезка времени погрешность относительно большая, из-за чего закон сохранения энергии не выполняется. У второго же, точно больше и можно сказать, что соотношение выполняется с некоторой погрешностью. Также из обоих экспериментов видно, что чем меньше радиус, тем меньше и погрешность в сохранении энергии.

Теперь возьмём $\Omega = 10$.

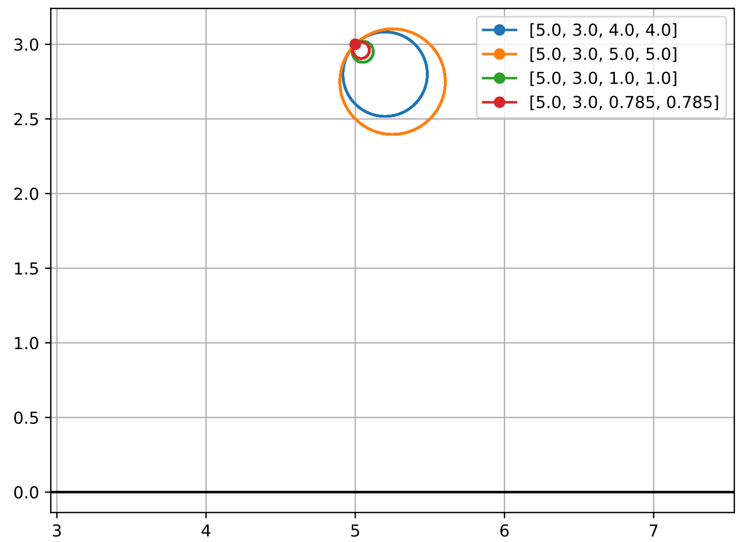

Рис. 3: Траектории при $\Omega = 10$.

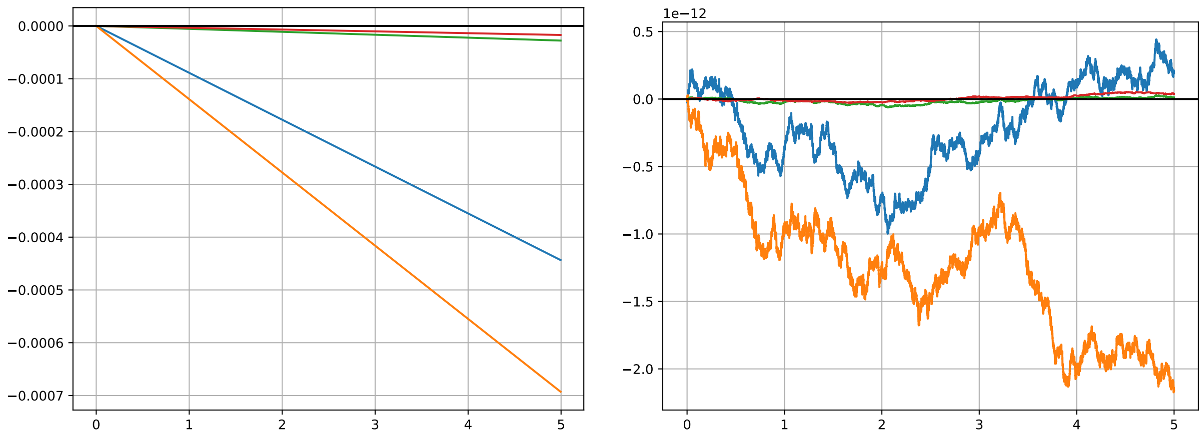

Рис. 4: Закон сохранения при количестве $n = 1000$ и $n = 100000$.

При большей угловой скорости вращения получаем окружности меньшего радиуса. Аналогично ведут себя результаты, показывающие закон сохранения энергии.

5. Заключение