

Индивидуальное домашнее задание №4 по
дисциплине «Уравнения математической
физике»

Вариант 5

Держапольский Юрий Витальевич

Задание 1

Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, & 0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=2} + 2.5u|_{r=2} = 2 - \sin \varphi + 3 \sin^2(2\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(r, \varphi) = P(r) \cdot \Phi(\varphi)$.

$$\frac{1}{r} (rP'\Phi)' = -\frac{1}{r^2} P\Phi'' \Rightarrow \frac{r(rP')'}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2$$

1. Решим задачу Штурма-Лиувилля для второго равенства.

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \Rightarrow \Phi(\varphi) = C_1 \sin(\mu\varphi) + C_2 \cos(\mu\varphi)$$

$$C_1 \sin(\mu\varphi) + C_2 \cos(\mu\varphi) = C_1 \sin(\mu(\varphi + 2\pi)) + C_2 \cos(\mu(\varphi + 2\pi))$$

Такое происходит только когда $\mu_n = n, n \in \mathbb{N}_0$. ($n = 0, 1, 2, \dots$) Значит решение выглядит так: $\Phi_n = A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)$.

2. Найдём решение для первого равенства.

$$r(rP')' - \mu_n^2 P = 0.$$

Если $n = 0$, то

$$P_0 = C_1 \ln r + C_2.$$

Задача внутренняя, значит $\ln r \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\infty$, значит $C_1 = 0, P_0 = \text{const}$.

$$P_n^{(1)}(r) = r^n, \quad P_n^{(2)}(r) = \frac{1}{r^n}.$$

Т.к. задача внутренняя, то выбираем $P_n(r) = r^n$.

Имеем

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = B_0 P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)) .$$

Заменим константу $B_0 P_0 = P_0$. Подставим в граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=2} + 2.5u|_{r=2} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{n-1} (A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)) + \\ &+ \frac{5}{2} P_0 + \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)) . \end{aligned}$$

Распишем то, чему равны граничные условия

$$2 - \sin \varphi + 3 \sin^2(2\varphi) = 2 - \sin \varphi + 3 \cdot \frac{1 - \cos(2 \cdot 2\varphi)}{2} = \frac{7}{2} - \sin \varphi - \frac{3}{2} \cos(4\varphi) .$$

Сопоставим коэффициенты и найдём их.

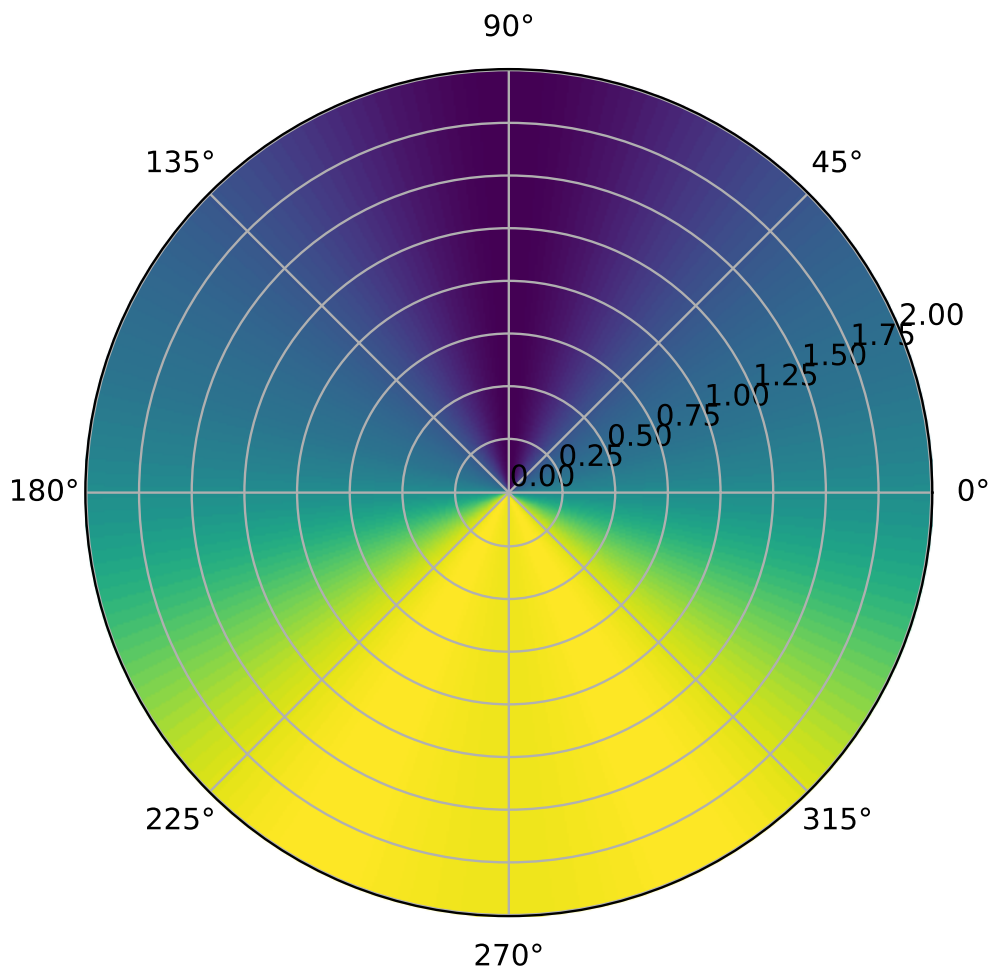
$$1. \quad \frac{5}{2} P_0 = \frac{7}{2} \Rightarrow P_0 = \frac{7}{5}$$

$$2. \quad 1 \cdot 2^{1-1} A_1 + \frac{5}{2} \cdot 2^1 A_1 = -1 \Rightarrow 6A_1 = -1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{6}$$

$$3. \quad 4 \cdot 2^{4-1} B_4 + \frac{5}{2} \cdot 2^4 B_4 = -\frac{3}{2} \Rightarrow 72B_4 = -\frac{3}{2} \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{48}$$

4. Все остальные коэффициенты равны нулю.

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi) = \frac{7}{5} - \frac{1}{6} \sin \varphi - \frac{1}{48} \cos(4\varphi) .$$



Задание 2

Найти решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, & 4 < r < 5, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ 2u|_{r=4} = 3, & 0 < \varphi < 2\pi, \\ u|_{r=5} = 5 - 2.3 \sin \varphi, & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u(r, \varphi) = P(r) \cdot \Phi(\varphi)$.

$$\frac{1}{r} (rP'\Phi)' = -\frac{1}{r^2} P\Phi'' \Rightarrow \frac{r(rP')'}{P} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2$$

1. Решим задачу Штурма-Лиувилля для второго равенства.

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \Rightarrow \Phi(\varphi) = C_1 \sin(\mu\varphi) + C_2 \cos(\mu\varphi)$$

$$C_1 \sin(\mu\varphi) + C_2 \cos(\mu\varphi) = C_1 \sin(\mu(\varphi + 2\pi)) + C_2 \cos(\mu(\varphi + 2\pi))$$

Такое происходит только когда $\mu_n = n, n \in \mathbb{N}_0$. ($n = 0, 1, 2, \dots$) Значит решение выглядит так: $\Phi_n = A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)$.

2. Найдём решение для первого равенства.

$$r(rP')' - \mu_n^2 P = 0.$$

Если $n = 0$, то

$$P_0 = A_0 + B_0 \ln r.$$

Задача в кольце, поэтому P_0 остаётся в таком виде.

$$P_n^{(1)}(r) = r^n, \quad P_n^{(2)}(r) = \frac{1}{r^n}.$$

Задача в кольце, значит выбираем линейную комбинацию решений:

$$P_n(r) = C_n^{(1)} r^n + C_n^{(2)} \frac{1}{r^n}.$$

Заменяем коэффициенты $C_n^{(1)} A_n = A_n$, $C_n^{(1)} B_n = B_n$, $C_n^{(2)} A_n = C_n$, $C_n^{(2)} B_n = D_n$ и получаем:

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} (C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n))$$

Подставим в граничные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2u|_{r=4} = 2A_0 + 2B_0 \ln 4 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 4^n (A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} (C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)) \equiv 3, \\ u|_{r=5} = A_0 + B_0 \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} 5^n (A_n \sin(\varphi n) + B_n \cos(\varphi n)) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} (C_n \sin(\varphi n) + D_n \cos(\varphi n)) \equiv 5 - 2.3 \sin \varphi. \end{array} \right.$$

Сопоставим коэффициенты и найдём их.

1. При константах:

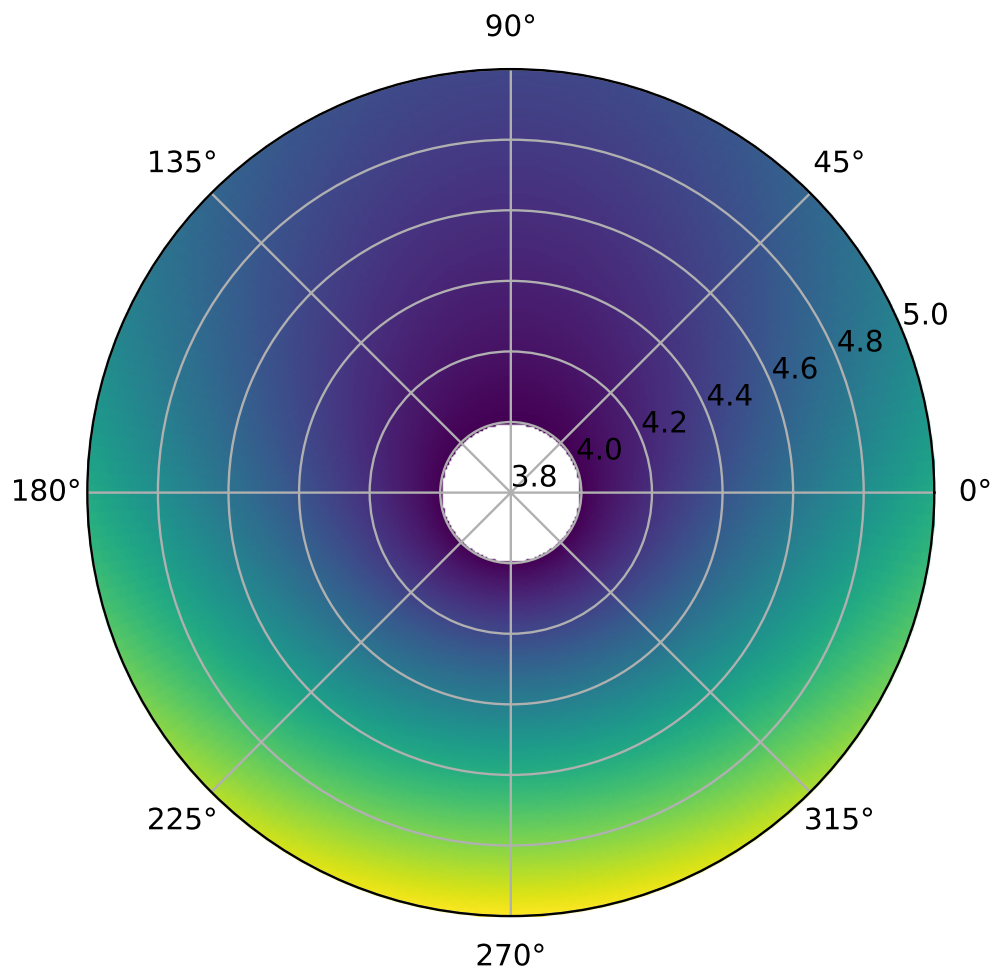
$$\left\{ \begin{array}{l} 2A_0 + 2B_0 \ln 4 = 3, \\ A_0 + B_0 \ln 5 = 5. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_0 = \frac{7}{2(\ln 5 - \ln 4)}, \\ A_0 = 5 - \frac{7 \ln 5}{2(\ln 5 - \ln 4)} = \frac{3 \ln 5 - 10 \ln 4}{2(\ln 5 - \ln 4)} \end{array} \right.$$

2. При $n = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 4A_1 + 2 \cdot \frac{1}{4}C_1 = 0, \\ 5A_1 + \frac{1}{5}C_1 = -2.3. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{23}{18}, \\ C_1 = \frac{184}{9} \end{array} \right.$$

3. Все остальные коэффициенты равны нулю.

Ответ: $u(r, \varphi) = \frac{3 \ln 5 - 10 \ln 4}{2(\ln 5 - \ln 4)} + \frac{7}{2(\ln 5 - \ln 4)} \ln r - \frac{23}{18} r \sin \varphi + \frac{184}{9} \frac{1}{r} \sin \varphi.$



Задание 3

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos x - e^x$ по системе собственных функций $\{1, \cos(\varphi nx), \sin(\varphi nx)\}, n = 1, \dots, \infty$ задачи Штурма-Лиувилля.

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)).$$

Найдём коэффициенты:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x - e^x) dx = \frac{1}{2\pi} (\sin x - e^x) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{2\pi}}{2\pi},$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x - e^x) \cos(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{n \sin(2\pi n)}{n^2 - 1} + \frac{1 - e^{2\pi} (n \sin(2\pi n) + \cos(2\pi n))}{n^2 + 1} \right) = \frac{1 - e^{2\pi}}{\pi(n^2 + 1)}, n > 1. \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x - e^x) \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi + \frac{1 - e^{2\pi}}{2} \right) = 1 + \frac{1 - e^{2\pi}}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x - e^x) \sin(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2n \sin^2(2\pi n)}{n^2 - 1} + \frac{e^{2\pi} (n \cos(2\pi n) - \sin(2\pi n)) - n}{n^2 + 1} \right) = \frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(n^2 + 1)}, n > 1. \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x - e^x) \sin(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{2} \right) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } f(x) &= \frac{1 - e^{2\pi}}{2\pi} + \left(1 + \frac{1 - e^{2\pi}}{2\pi} \right) \cos(x) + \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \right) \sin(x) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{2\pi}}{\pi(n^2 + 1)} \cos(nx) + \frac{n(e^{2\pi} - 1)}{\pi(n^2 + 1)} \sin(nx) \right). \end{aligned}$$