



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №1 по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор к.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 19 » апреля 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1	Введение	3
2	Построение математической модели	4
2.1	Модель с терморегулятором	5
3	Анализ модели	6
4	Вычислительные эксперименты	9
4.1	Вычисление точек покоя	9
4.2	Алгоритм	9
4.3	Программа	9
4.4	Модель без терморегулятора	13
4.5	Модель с терморегулятора	14
5	Заключение	17

1. Введение

В повседневном мире люди каждый день используют различные приборы нагревания. Например, микроволновка для разогревания еды, утюг для глажки вещей, радиатор для нагревания помещения и т. д.

Однако, таких приборов существует большое количество и все они имеют различные параметры, которые влияют на скорость нагрева. И в быту людей интересует как быстро нагреется тот или иной прибор. Для этого можно создать математическую модель, которая будет учитывать параметры нагревателей и показывать изменение температуры.

Будем рассматривать электрические нагреватели, которые могут иметь или не иметь терморегулятора.

2. Построение математической модели

Главной характеристикой любого нагревателя является его температура. При включении нагревателя со временем температура изменяется. Поэтому нужно найти зависимость температуры (К) от времени (с): $T(t)$.

Сделаем предположение, что нагревательный элемент состоит из одного материала и окружающая температура постоянная и равна T_0 .

Процесс нагревания можно описать уравнением теплового баланса. Изменение внутренней энергии тела на ΔQ (Дж) описывается формулой:

$$\Delta Q = cm\Delta T,$$

где c – удельная теплоёмкость тела $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}\right)$, m – масса тела (кг), ΔT – изменение температуры.

Поскольку наш нагревательный прибор работает от электричества, он потребляет мощность во время работы, за счёт чего изменяет свою внутреннюю энергию:

$$\Delta Q_1 = P\Delta t,$$

где P – мощность (Вт), Δt – изменение времени.

На внутреннюю энергию также влияют входящие и исходящие тепловые потоки. На единицу площади за единицу времени исходящий поток изменяет энергию на $-kT$, а входящий на kT_0 , где $k > 0$ – коэффициент, который зависит от конструкции. Учитывая тепловые потоки, внутренняя энергия изменяется на

$$\Delta Q_2 = -kS(T - T_0)\Delta t,$$

где S – площадь нагревателя (м^2).

Также любое тело, нагретое выше абсолютного нуля, начинает излучать, что описывает закон Стефана-Больцмана. На единицу площади за единицу времени нагреватель излучает энергию равную $-\sigma T^4$, а излучение из внешней сре-

ды изменяет энергию на σT_0^4 , где $\sigma \approx 5.68 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана–Больцмана. Значит, общее изменение энергии за счёт излучения:

$$\Delta Q_3 = -\sigma S(T^4 - T_0^4)\Delta t.$$

В итоге, применяя закон теплового баланса, получаем:

$$cm\Delta T = P\Delta t - kS(T - T_0)\Delta t - \sigma S(T^4 - T_0^4)\Delta t.$$

Делим обе части на $cm\Delta t$ и совершаем предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$

Получили дифференциальное уравнение, которое описывает поведение температуры нагревателя. Для получения единственного решения добавим начальное условие: $T(0) = T_0$.

2.1. Модель с терморегулятором

В быту, для того чтобы нагреватель не нагревался до опасных температур, целесообразно ограничить максимальную температуру. Для этого введём функцию «переключатель», которая по достижении максимальной температуры T_{max} отключит нагреватель, и после чего по достижении температуры включения T_{min} снова включит его.

$$H(T, T_{max}, T_{min}) = \begin{cases} 0, & T > T_{max}, \\ 1, & T < T_{min}. \end{cases}$$

Добавляя в уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P \cdot H(T, T_{max}, T_{min}) - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm}.$$

3. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4)}{cm} = 0.$$

Заметим, что удельная теплоёмкость и масса находятся в знаменателе, а значит не влияют на нули, однако они влияют на скорость изменения температуры.

$$T^4 + \frac{k}{\sigma}T - \left(T_0^4 + \frac{kT_0 + \frac{P}{S}}{\sigma}\right) = 0.$$

Уравнение четвёртой степени, а значит оно имеет ровно 4 корня на \mathbb{C} . Поставим задачу определить тип этих корней: их положительность или комплексность.

Для удобства переобозначим:

$$a = \frac{k}{\sigma} > 0, \quad b = \left(T_0^4 + \frac{kT_0 + \frac{P}{S}}{\sigma}\right) > 0, \quad T^4 + aT - b = 0.$$

Воспользуемся теоремой Декарта: «Число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов или на чётное число меньше этого числа». Знак коэффициентов нашего уравнения меняется только раз – между последними двумя, значит существует ровно один положительный корень. Подставляя в уравнение $T = -T$, найдём количество отрицательных корней.

$$T^4 - aT - b = 0.$$

Знак меняется также один раз, значит существует ровно один отрицательный корень.

Из предыдущего следует, что остаётся два комплексных корня. Покажем это. Данное уравнения можно свести к кубическому уравнению разольвенты

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Rightarrow y^3 - 2py^2 + (p^2 - 4r)y + q^2 = 0,$$

корни которой связаны с корнями исходного уравнения

$$y_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad y_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad y_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3).$$

Сведём наше уравнения к разольвенте

$$y^3 + 4by + a^2 = 0.$$

Данное уравнение представлено в виде $(y^3 + py + q = 0)$, к которому можно применить формулу Кардано, а более конкретно, найти величину Q , которая определит типы корней.

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{4b}{3}\right)^3 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2.$$

Поскольку $Q > 0$, то у уравнения один вещественный корень и два сопряжённых комплексных.

Из того, что среди y_i есть комплексный корень, следует, что и среди корней T_i тоже есть комплексный. Известно, что комплексные корни многочленов с вещественными коэффициентами всегда образуют комплексно-сопряжённые пары, значит, что среди T_i есть комплексно-сопряжённая пара.

В итоге получили, что уравнение имеет один положительный, один отрицательный и пару комплексно-сопряжённых корней.

Исследуем устойчивость. Обозначим правую часть дифференциального уравнения за R .

$$\frac{dR}{dT} = \frac{-kS - 4\sigma ST^3}{cm} = 0 \Rightarrow T_e = -\sqrt[3]{\frac{k}{4\sigma}},$$

В точке T_e функция достигает экстремума, при этом меньше этой точки всегда возрастает, а больше – убывает. Отсюда следует, что это максимум. Но мы уже знаем, что многочлен всегда имеет два вещественных корня, соответственно, отрицательный находится левее T_e , а значит производная положительная, а положительный корень правее T_e с отрицательной производной. Из чего, методом первого приближения, мы находим, что отрицательный корень неустойчивый, а положительный устойчивый.

В итоге получаем, что данное дифференциальное уравнение имеет пару комплексно-сопряжённых точек равновесия и пару вещественных, одно из ко-

торых всегда положительное и устойчивое, а второе отрицательное и неустойчивое.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Вычисление точек покоя

Вычислим теоретически точки покоя и проверим результаты полученные при анализе. Возьмём параметры:

$$P = 3000\text{Вт}, m = 0.5\text{кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.4\text{м}^2, k = 2, T_0 = 296\text{К}.$$

Найдём точки устойчивости уравнения с данными параметрами:

$$T_1 = -645.06 \dots, T_2 = 599.58 \dots, T_{3,4} = 22.73 \dots \pm i623.15 \dots$$

Данные точки согласуются с теоретическим анализом. Исследуем вещественные нули.

$$\left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_1} = 0.053 \dots, \quad \left. \frac{dR}{dT} \right|_{T_2} = -0.045 \dots$$

Для T_1 получили положительное значение, значит данное положение равновесия неустойчивое. Для T_2 получили отрицательное, значит оно устойчивое.

4.2. Алгоритм

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение дифференциального уравнения с заданными параметрами.

4.3. Программа

Для расчётов и визуализации была написана программа с использованием языка Python и библиотек numpy и matplotlib.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
```

```

4
5 def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
6     num = int((b - a) / h + 1)
7     x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
8     y_a = [y0] * num
9
10    for i in range(num - 1):
11        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
12        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
13        k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
14        k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
15        y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)
16
17    return x_a, np.array(y_a)
18
19
20 KC = 276
21 sigma = 5.67e-8
22
23 T_l = 190 + KC
24 T_u = 200 + KC
25
26
27 is_turned = True
28 def H1(T):
29     global is_turned
30
31     if T > T_u:
32         is_turned = False
33     elif T < T_l:
34         is_turned = True
35
36     return int(is_turned)
37
38 def H0(T):
39     return 1.
40
41 H = ()
42
43 leg = []

```

```

44 def utug(P, m, c, S, k):
45     def dTdt(t, T):
46         return (P * H(T) - k * S * (T - T0) - sigma * S * (T**4 - T0**4)) / (c *
47             m)
48
49     x = np.linspace(a, b, n)
50
51     x, y = runge_kutta(dTdt, T0, a, b, (b-a)/n)
52     # y == KC
53     leg.append(f"{P=} , {m=} , {c=} , {S=} , {k=}")
54     plt.plot(x, y)
55
56 a, b = 0, 250
57
58 n = 10000
59
60 P = 3000
61 m = 0.5
62 c = 897 # Алюминий
63 S = 0.4
64 k = 2
65 T0 = 20 + KC
66
67 def roots():
68     def diff(T):
69         return (-4 * sigma * S * T**3 - k * S) / (c*m)
70
71     coeff = np.zeros(5)
72     coeff[0] = sigma
73     coeff[3] = k
74     coeff[4] = -sigma*T0**4 - k*T0 - P/S
75
76     for root in np.roots(coeff):
77         print(root, diff(root))
78
79 def without_term():
80     global H
81     H = H0
82     utug(P, m, c, S, k)

```

```

83     utug(P, 1.0, c, S, k)
84     utug(P, m, 554, S, k) # Чугун
85     utug(P, m, c, S/2, k)
86     utug(2500, m, c, S, k)
87     utug(P, m, c, S, 4)
88
89     plt.legend(leg)
90
91     plt.plot([a, b], [600, 600], 'y--')
92     plt.savefig("./sem6-matmodelling/utug1.pdf")
93
94 def with_trem(P, m, c, S, k):
95     global H, T_l, T_u
96     H = H1
97     leg2 = []
98     def al2():
99         leg2.append(f"T_min={T_l}, T_max={T_u}")
100         plt.plot([a, b], [T_l-1]*2, '--', color='#A0A0A0')
101         plt.plot([a, b], [T_u+1]*2, '--', color='#A0A0A0')
102
103     T_l = 490
104     T_u = 500
105     al2()
106
107     utug(P, m, c, S, k)
108     T_l = 530
109     T_u = 560
110     al2()
111     utug(P, m, c, S, k)
112
113     T_l = 510
114     T_u = 515
115     al2()
116     utug(P, m, c, S, k)
117
118     plt.legend(leg2)
119     plt.savefig("./sem6-matmodelling/utug2.pdf")
120
121
122

```

```

123 plt.xlabel('t-Время')
124 plt.ylabel('T(t)-Температура в кельвинах')
125
126 # without_term()
127 # with_trem(3000, 0.5, c, S, 2)
128 # with_trem(2500, 0.4, 554, S/2, 2)
129 with_trem(2500, 1, c, S/2, 2)
130
131 plt.xlabel('t-Время')
132 plt.ylabel('T(t)-Температура в кельвинах')
133 plt.xlim([a,b])
134 plt.show()

```

Итогом программы является график с одним или несколькими решениями дифференциального уравнения на некотором отрезке времени $[0, t_0]$.

4.4. Модель без терморегулятора

Построим несколько решений уравнения для модели без терморегулятора с разными параметрами.

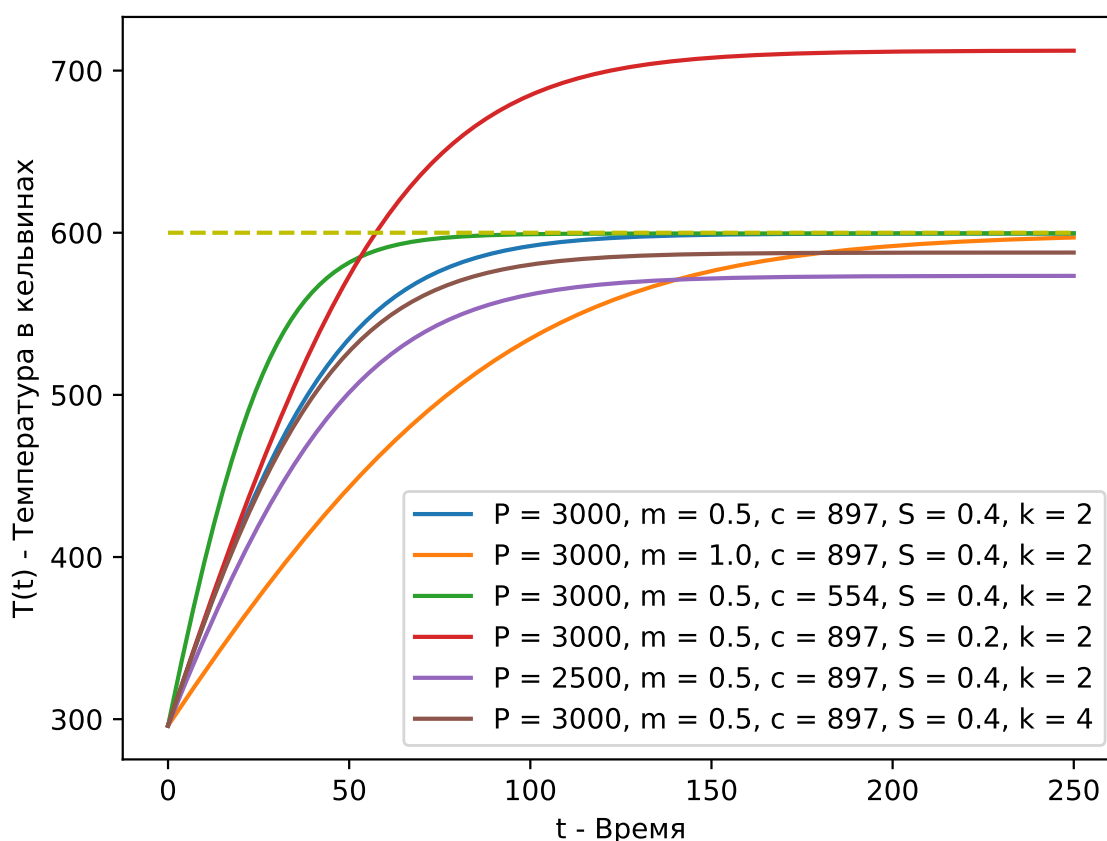


Рис. 1: Графики при $T_0 = 296$.

На графике (Рис. 1) построены несколько решений с указанными параметрами, а также жёлтый пунктир на отметке $T = 600$ – округлённое значение точки равновесия, найденное при анализе.

Как можно увидеть, первые три решения, которые отличаются только массой и удельной теплоёмкостью, возрастают до определённого значения – точки равновесия.

Остальные различаются в параметрах, которые влияют на максимальное значение, что можно также увидеть.

4.5. Модель с терморегулятором

Построим несколько решений уравнения для модели с терморегулятором с разными параметрами. На каждом рисунке находятся решения дифференци-

ального уравнения с одними и теми же параметрами, кроме максимальной и минимальной температуры терморегулятора. Серым пунктиром обозначены соответствующие максимальная и минимальная температуры

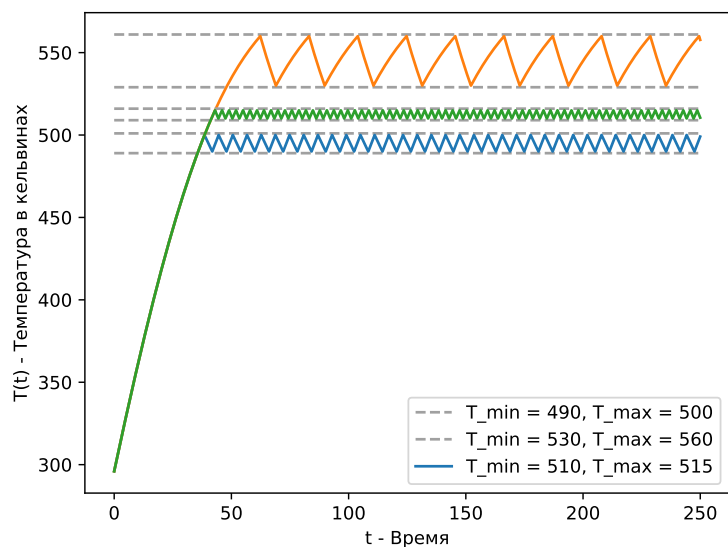


Рис. 2: Графики при

$$P = 3000\text{Вт}, m = 0.5\text{кг}, c = 897 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.4\text{м}^2, k = 2, T_0 = 296\text{К}.$$

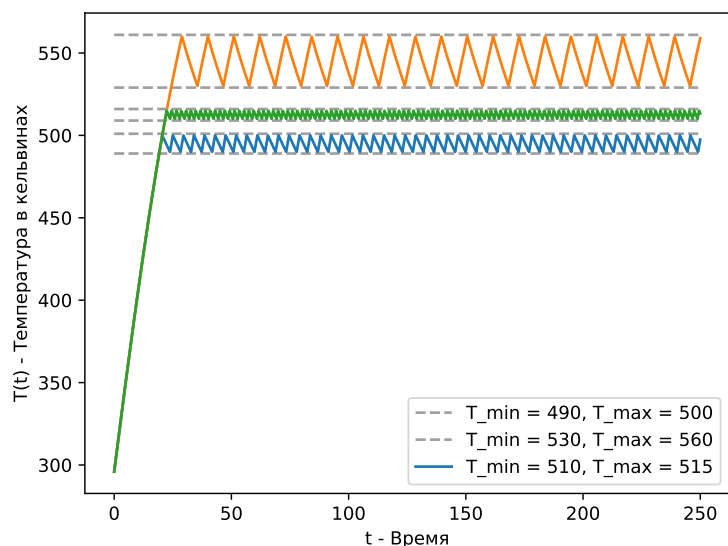


Рис. 3: Графики при

$$P = 2500\text{Вт}, m = 0.4\text{кг}, c = 554 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, S = 0.2\text{м}^2, k = 4, T_0 = 296\text{К}.$$

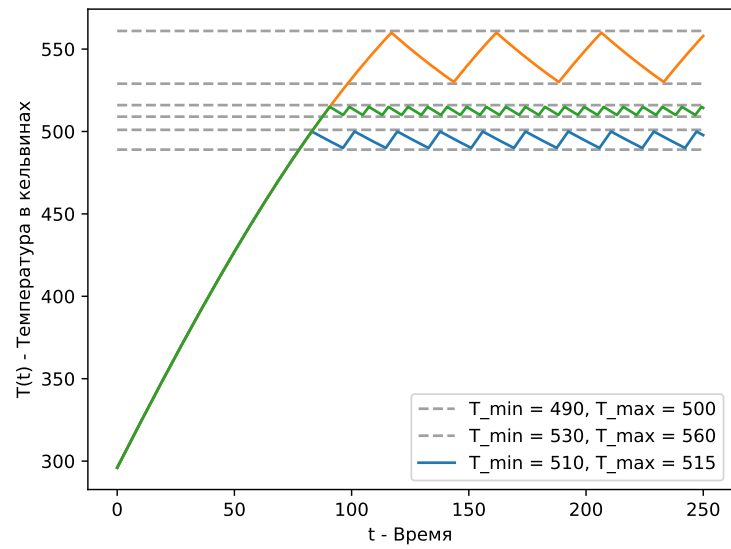


Рис. 4: Графики при
 $P = 2500\text{Вт}$, $m = 1\text{кг}$, $c = 897\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $S = 0.2\text{м}^2$, $k = 2$, $T_0 = 296\text{К}$.

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель электрического нагревателя с терморегулятором и без него. Модель представляет из себя дифференциальное уравнение. Данная модель была проанализирована и были найдены точки равновесия дифференциального уравнения. Проведены вычислительные эксперименты, которые сходятся с результатами анализа. Написана программа для построение графика решения уравнения в зависимости от параметров. С помощью графиков было показано влияние параметров на решение.