МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

Модели конкуренции в экологии и экономике

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Профессор д.ф.-м. н.
Абакумов А. И. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 21 » мая 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

2. Математическая модель

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = \xi_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\
\dot{x_2} = \xi_2(x_2) + k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\
\dot{x_3} = -\xi_3(x_3) + k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3.
\end{cases}
$$

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$, где $k_{ij} > 0$.

Примем функции в системе за линейные функции:

$$
\xi_i(x_j) = \xi_i \cdot x_j, V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \xi_i, \alpha_{ij} > 0
$$

Тогда получим систему:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1} = \xi_1 x_1 - \alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{13}x_1x_3, \\
\dot{x_2} = \xi_2 x_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1x_2 - \alpha_{23}x_2x_3, \\
\dot{x_3} = -\xi_3 x_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}x_2x_3.
\end{cases}
$$

3. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения.

$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Т.е. нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} \xi_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3 = 0, \\ \xi_2 x_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3 = 0, \\ -\xi_3 x_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23}\alpha_{23} x_2 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(\xi_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) = 0, \\ x_2(\xi_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) = 0, \\ x_3(-\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 + k_{23}\alpha_{23} x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если две любых переменных равны нулю, то в оставшейся строчке остаётся уравнение $\xi_i x_i = 0$, т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

2. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_2 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{23}\alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(0,\ \frac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}},\ \frac{\xi_2}{\alpha_{23}}\right)$$

3. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}},\ 0,\ \frac{\xi_1}{\alpha_{13}}\right)$$

4. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{12} x_2 = 0, \\ \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(3)} = \left(-\frac{\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}},\ \frac{\xi_1}{\alpha_{12}},\ 0\right)$$

5. Если $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \xi_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3 = 0, \\ \xi_2 + k_{12}\alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13} x_1 + k_{23}\alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение $x^{(4)}$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-\xi_1\alpha_{23}k_{23} + \xi_2 k_{23}\alpha_{13} + \xi_3\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_2 = \dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} - \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 = \dfrac{\xi_1\alpha_{23}k_{13} - \xi_2\alpha_{13}k_{13} - \xi_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_3 = \dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} + \dfrac{k_{12}\alpha_{12}}{\alpha_{23}}x_1 = \dfrac{-\xi_1\alpha_{23}k_{12}k_{23} + \xi_2\alpha_{13}k_{13} + \xi_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}. \end{cases}$$

Получили все точки. Для анализа устойчивости в этих точках воспользуемся методом первого приближения. Найдём матрицу Якоби:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 \end{pmatrix}$$

После чего подставляем значения точки равновесия и ищем собственные значения матрицы.

$$A = J\Big|_{x^*}, \quad \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы $\forall i \ \operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если $b_0 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Δ были положительны.

1. $J\Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_3 \end{pmatrix}$

Откуда получаем собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = \xi_1 > 0, \quad \lambda_2 = \xi_2 > 0, \quad \lambda_1 = -\xi_3 < 0.$$

Значит около начала координат решения будут расходиться по x_1, x_2 и сходиться по x_3.

2. $$A = J\Big|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \xi_1 - \alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} - \alpha_{13}\dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} & 0 & 0 \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\xi_3}{k_{23}\alpha_{23}} \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_2}{\alpha_{23}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\xi_1 - \frac{\xi_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\xi_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}\right)\right)(\lambda^2 + \xi_2\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_1 - \frac{\xi_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\xi_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_2\xi_3}.$$

Точка $x^{(1)}$ – неустойчивая. В плоскости $x_1 = 0$ точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя циклы, а в некоторой близости от этой плоскости циклы будут двигаться в некотором направлении, в зависимости от констант.

3. $$A = J\Big|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{13}}\right)\right)(\lambda^2 + \xi_1\xi_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \xi_2 + k_{12}\alpha_{12}\frac{\xi_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\xi_1\xi_3}.$$

Аналогично предыдущей точке, $x^{(2)}$ – неустойчивая и в плоскости $x_2 = 0$ является центром и будет создавать вокруг себя циклы.

4. $$A = J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} & -\alpha_{13}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} \\ k_{12}\alpha_{12}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} & 0 & -\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} \\ 0 & 0 & -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\dfrac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\dfrac{\xi_1}{\alpha_{12}} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(-\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{12}}\right)\right)(\lambda^2 - \xi_1\xi_2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -\xi_3 + k_{13}\alpha_{13}\frac{-\xi_2}{k_{12}\alpha_{12}} + k_{23}\alpha_{23}\frac{\xi_1}{\alpha_{12}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\xi_1\xi_2}.$$

Точка $x^{(3)}$ – неустойчивая, но в плоскости $x_3 = 0$ является седлом по некоторым двум направлениям.

5. $$A = J\Big|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2 x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2 x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2 x_2x_3) +$$

$$+ x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2 x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2 x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2 x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \le 0. \end{cases}$$

4. Вычислительные эксперименты

Возьмём параметры для модели:

$\xi_1 = 10, \xi_2 = 8, \xi_3 = 6,$

$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$

$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$

При этом точка равновесия $x^{(4)} = (-3.458\ldots, 46.66\ldots, -150)$. Откуда получаем $b_3 = -22040 \Rightarrow \Delta_2 = 22040 > 0$. Значит, что по какой-то оси она будет устойчивая, по второй неустойчива, а по третьей устойчивость неизвестна. Однако, вероятно, это точка не будет иметь влияния, поскольку находится на большом удалении в отрицательных координатах.

4.1. При вымершей первой популяции

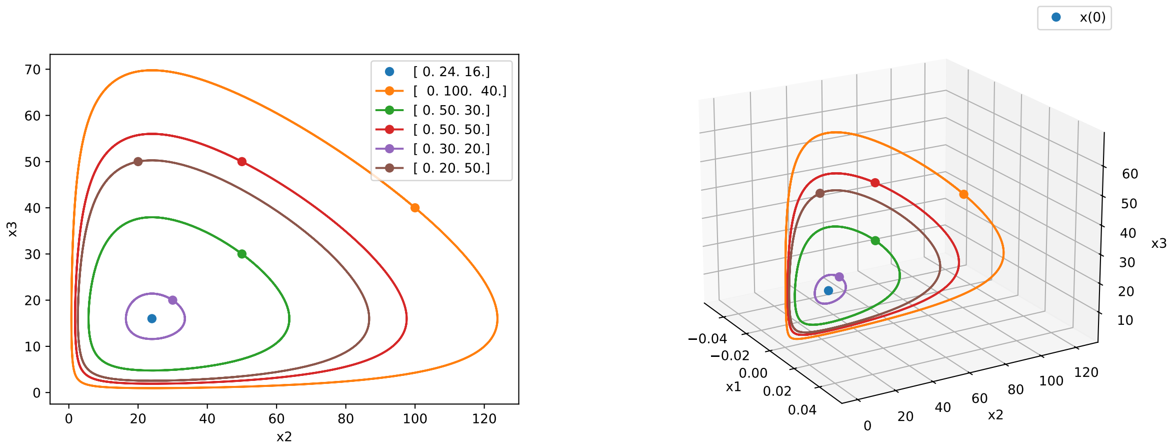

Рис. 1: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.2. При вымершей второй популяции

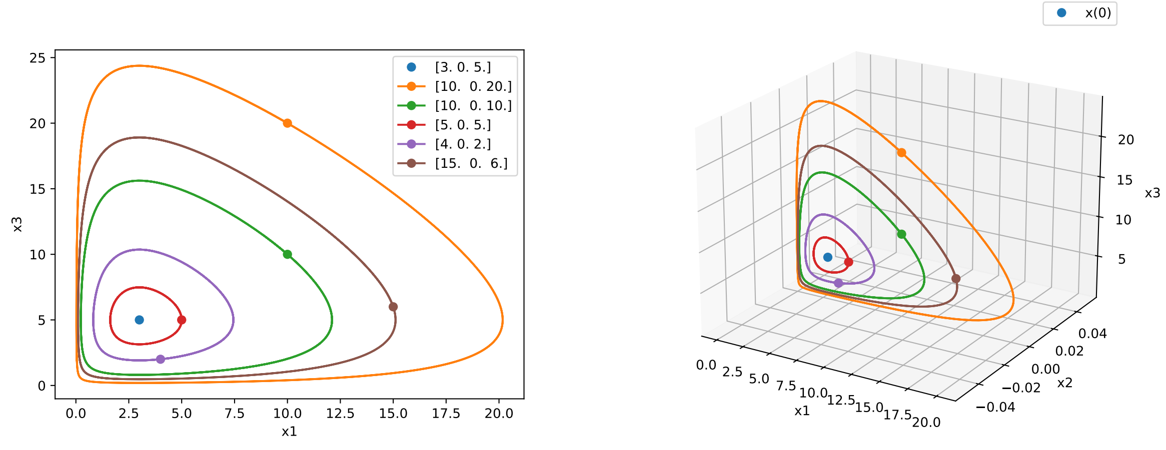

Рис. 2: На отрезке времени $[0, 3]$.

4.3. При вымершей третьей популяции

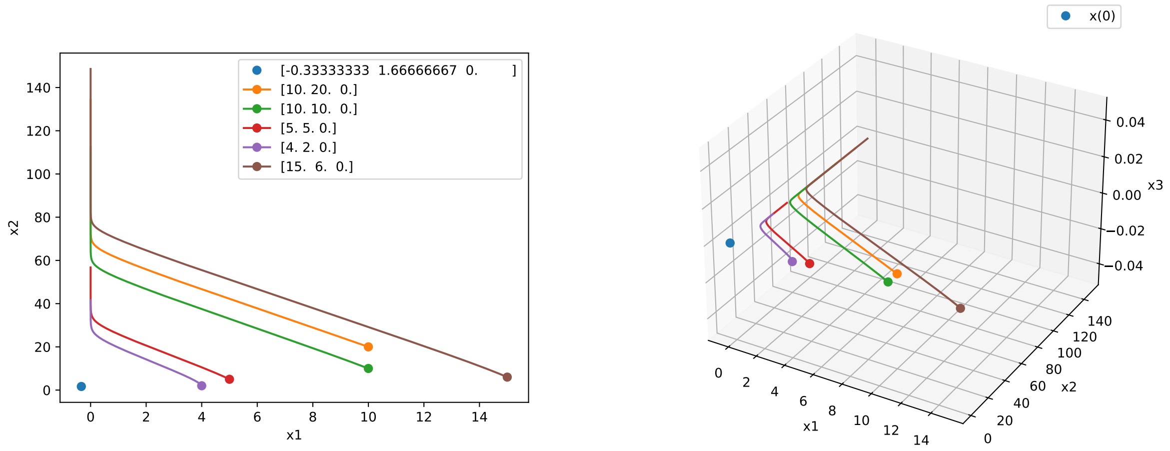

Рис. 3: На отрезке времени $[0, 0.1]$.

4.4. Несколько изначально не вымерших популяций

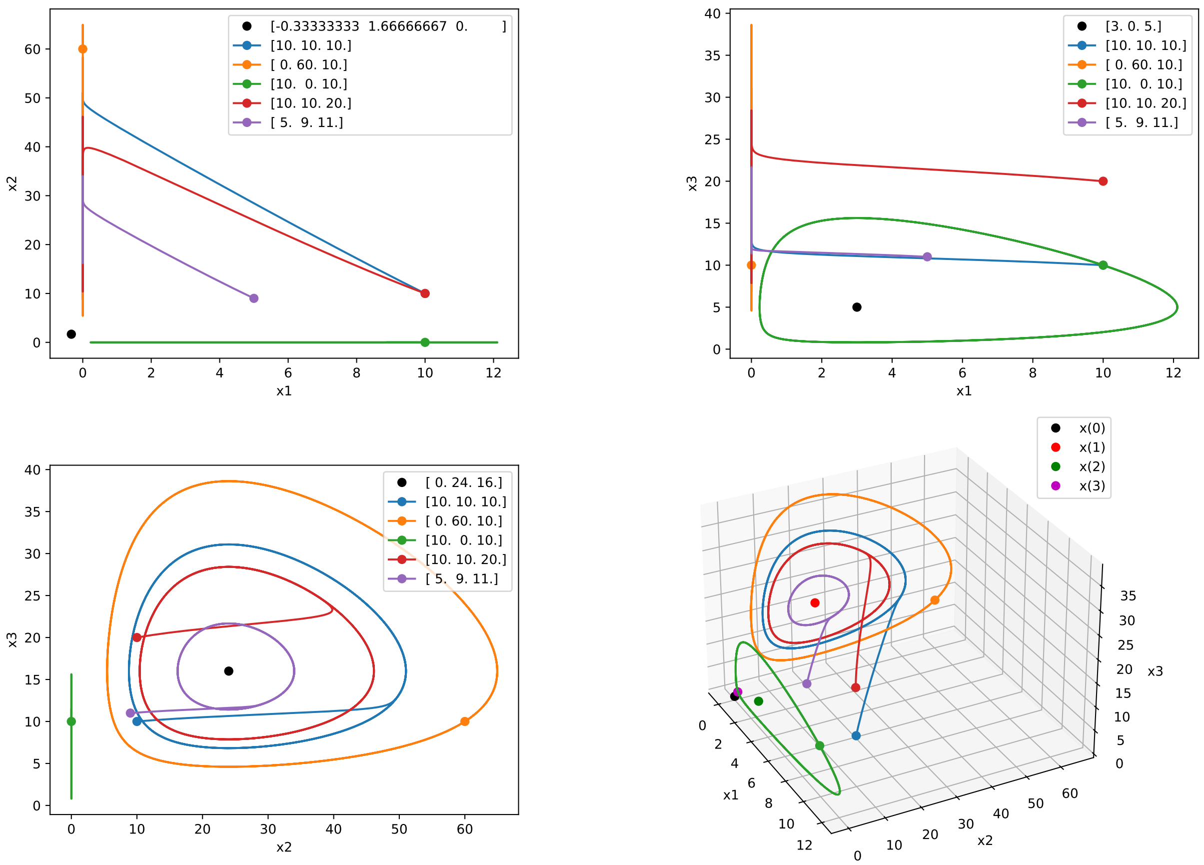

Рис. 4: На отрезке времени $[0, 3]$.

5. Заключение