



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

на тему «Сплайн-разностная схема метода сплайн-коллокации»

Направление подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Проверил доцент, к.ф.-м. н.

Колобов А. Г.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 17 » декабря 2024 г.

г. Владивосток

2024

Оглавление

1	Введение	3
2	Основная часть	5
2.1	Постановка задачи	5
2.2	Описание алгоритма	5
2.2.1	Погрешность вычислений	6
2.3	Вычислительные эксперименты	6
2.3.1	Анализ результатов	7
3	Заключение	8
4	Список литературы	9
5	Приложения	10
5.1	Примеры задач	10
5.2	Графики решений	10
5.3	Программа	12

1. Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач математической физики, а также программное обеспечение, реализующее эти методы.

Цель работы – ознакомиться с численными методами решения задач математической физики, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;

- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

2. Основная часть

2.1. Постановка задачи

Найти решение обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка с краевыми условиями вида:

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y(x) = r(x), \\ a_1y(a) + b_1y'(a) = c_1, \\ a_2y(b) + b_2y'(b) = c_2. \end{cases}$$

2.2. Описание алгоритма

Сплайн-разностная схема состоит в нахождении приближённого решения в виде кубического сплайна $S(x) \in C^2[a, b]$ на сетке

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ на этом отрезке.

Для нахождения сплайна используем метод коллокации. На отрезке выбираем $N + 1$ узлов коллокации ξ_k , в которых будет удовлетворяться уравнение $S''(\xi_k) + q(\xi_k)S(\xi_k) = r(\xi_k)$, $k \in \overline{0, N}$. Вместе с краевыми условиями будем иметь размерность $N + 3$, которая определяет сплайн.

Находить сплайн будем через моменты. На интервале $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид:

$$S(x) = y_i(1 - t) + y_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1 - t) [(2 - t)M_i + (1 + t)M_{i+1}],$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}, \quad M_i = S''(x_i)$$

Для простоты возьмём узлы коллокации, совпадающие с узлами сетки $x_i = \xi_i$, тогда уравнение в узле $i \in \overline{0, N}$ будет иметь вид $M_i + q_i y_i = r_i$. Зная вид трёхдиагональной системы уравнений для нахождения моментов через известные значения функции в узлах, подставив, получим систему:

$$\begin{aligned} (1 - \mu_i) \left(1 + \frac{h_{i-1}^2}{6} q_{i-1} \right) y_{i-1} - \left(1 - \frac{h_i h_{i-1}}{3} \right) y_i + \mu_i \left(1 + \frac{h_i^2}{6} q_{i+1} \right) y_{i+1} = \\ = \frac{h_{i-1} h_i}{6} (\mu_i r_{i+1} + 2r_i + (1 - \mu_i) r_{i+1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

где $\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}$.

Для краевых условий имеем

$$y_0 \left[a_1 h_0 - b_1 \left(1 - \frac{1}{3} q_0 h_0^2 \right) \right] + y_1 b_1 \left(1 + \frac{1}{6} q_1 h_0^2 \right) = c_1 h_0 + \frac{1}{6} b_1 h_0^2 (2f_0 + f_1),$$

$$\begin{aligned} y_{N-1} b_2 \left(-1 - \frac{1}{6} h_{N-1}^2 q_{N-1} \right) + y_N \left[a_2 h_{N-1} + b_2 \left(1 - \frac{1}{3} h_{N-1}^2 q_N \right) \right] = \\ = c_2 h_{N-1} - \frac{1}{6} b_2 h_{N-1}^2 (f_{N-1} + 2f_N). \end{aligned}$$

Из данной системы методом прогонки находим $y_i, i = \overline{0, N}$, затем M_i и получаем приближённое решение в виде кубического сплайна.

Для упрощения вычислений будем использовать равномерную сетку. Поскольку полученный кубический сплайн можно вычислить в любой точке отрезка, поэтому между узлами сетки будем использовать всегда 100 точек равномерной сетки.

2.2.1. Погрешность вычислений

При соблюдении условий диагонального преобладания

$$b_1 \leq 0, \quad b_2, a_j \geq 0, \quad |a_j| + |b_j| = 0, \quad j \in \{1, 2\}; \quad q(x) \leq q < 0$$

и если точное решение $y \in C^2 W_{\Delta, \infty}^4[a, b]$, то $\|S(x) - y(x)\|_C = O(\bar{h}^2)$.

2.3. Вычислительные эксперименты

Для вычислительных экспериментов будут использованы дифференциальные уравнения, предложенные на практических занятиях по математическо-

му и компьютерному моделированию. Данные примеры можно найти в Приложениях в секции «5.1 Примеры задач», а некоторые графики примеров в «5.2 Графики решений».

В таблице 1 приведены результаты численного решения задач при разном количестве узлов сетки и соответствующая максимальная погрешность по модулю.

№ задачи	N	$\max_{x \in [a,b]} S(x) - y(x) $
1	10	1.19e-3
1	100	1.24e-5
1	1000	1.24e-7
2	10	1.45e-3
2	100	1.27e-5
2	1000	1.25e-7
3	10	4.92e-3
3	100	5.25e-5
3	1000	5.28e-7
3	5000	2.12e-8

Таблица 1: Таблица результатов

2.3.1. Анализ результатов

Как можно увидеть, при увеличении количества узлов сетки погрешность уменьшается, что достаточно соответствует теоретической погрешности.

3. Заключение

В ходе данной работы была исследована сплайн-разностная схема метода сплайн-коллокации для приближённого решения обыкновенного дифференциального уравнения 2 порядка с краевыми условиями.

В результате работы над курсовым проектом приобрел практические навыки владения:

- современными численными методами решения задач математической физики;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической физики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической физики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

4. Список литературы

- [1] Амосов А.А. Вычислительные методы / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченко. – СПб.: Лань, 2014. – 672с.
- [2] Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – СПб: Лань, 2010. – 400с.
- [3] Волков, Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – СПб.: Лань, 2008. – 256с.
- [4] Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. – 240с.
- [5] Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – СПб: Лань, 2011. – 672с.
- [6] Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах, 2-е изд - Лань, 2009, 367 с.
- [7] В. И. Киреев, А. В. Пантелеев Численные методы в примерах и задачах Изд.: Высшая школа, 2008 г. – 480 с.

5. Приложения

5.1. Примеры задач

- Задача 1:

$$\begin{cases} y'' + y = -x; \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0; \\ y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x \end{cases}$$

- Задача 2:

$$\begin{cases} y'' - y = -x; \\ y(0) = 1, \quad y(1) = e + 1; \\ y(x) = x + e^x \end{cases}$$

- Задача 3:

$$\begin{cases} y'' - \frac{2y}{(x+1)^2} = \frac{4.5}{(x+1)^{3/2}}; \\ y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ y(x) = -2\sqrt{x+1} \end{cases}$$

5.2. Графики решений

На левом графике показаны точное решение и полученное численное решение. На правом модуль разности решений на всём отрезке.

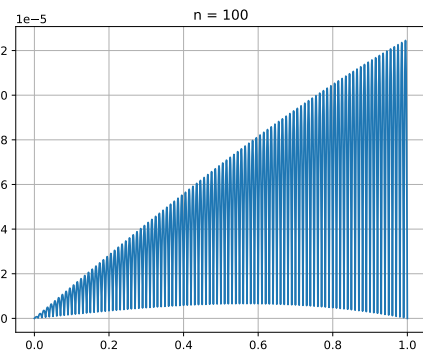
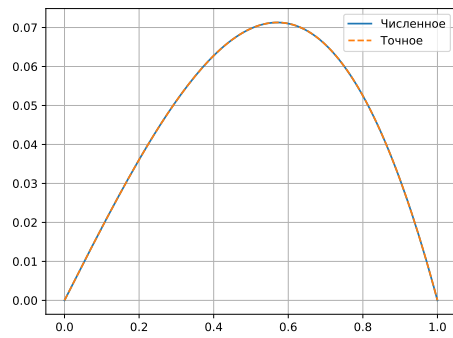
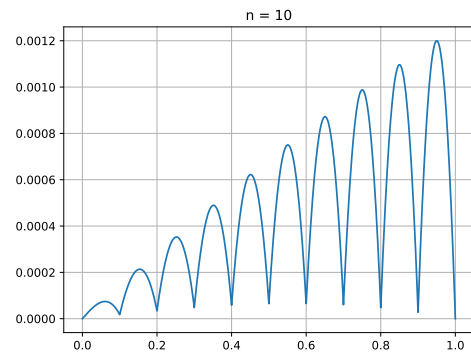
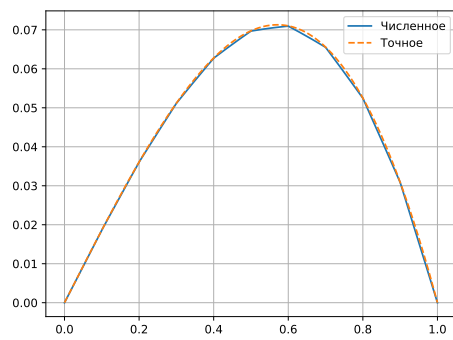


Рис. 1: Задача 1 при $N = 10$ и $N = 100$

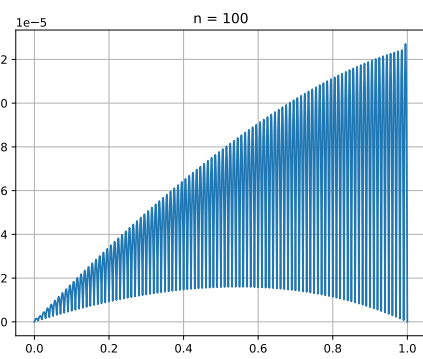
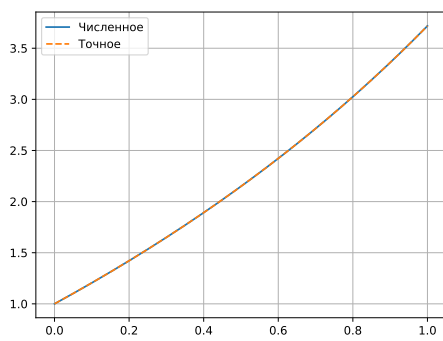
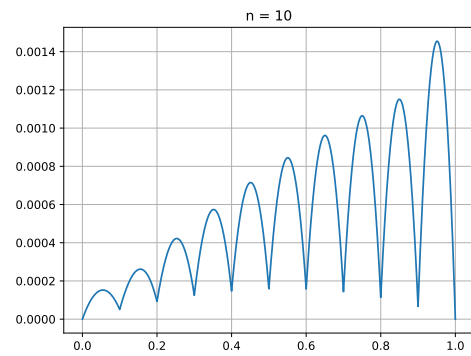
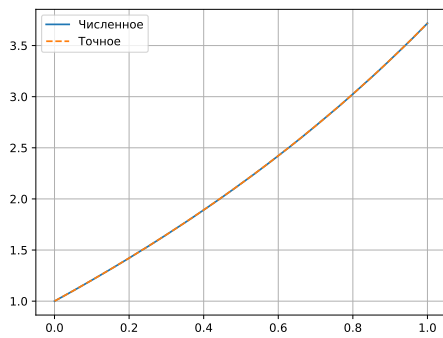


Рис. 2: Задача 2 при $N = 10$ и $N = 100$

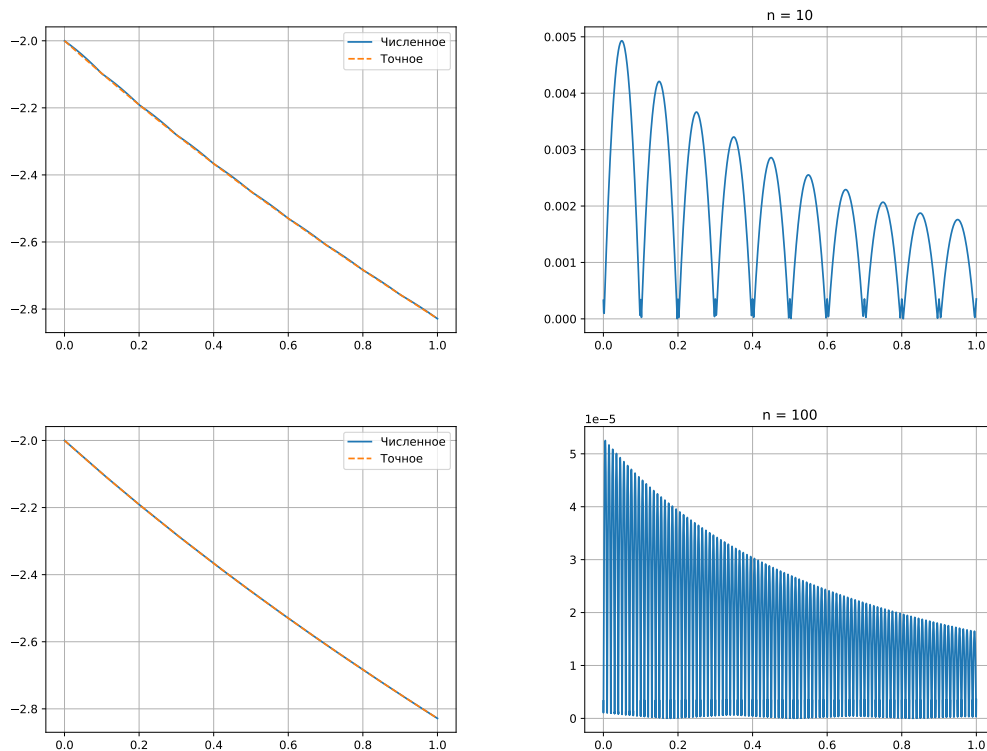


Рис. 3: Задача 3 при $N = 10$ и $N = 100$

5.3. Программа

Листинг 1: Метод сплайн-коллокации.

```

1  # 3-spline collocation
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt
4
5  def exact(x):
6      # return  $x + \exp(x)$ 
7      # return  $\sqrt{x+1} * \log(x+1)$ 
8      # return  $\sin(x)/\sin(1) - x$ 
9      return -2 * np.sqrt(x+1)
10
11 def q(x):
12     # return -1
13     # return  $-1/(\sqrt{x+1} * (x+1))$ 
14     # return 1
15     return -2 / (x+1)**2
16

```

```

17 def f(x):
18     # return -x
19     # return (-1/(x+1) - 1/(4 * (x+1)**1.5)) * np.log(x+1)
20     return 4.5 / (x+1)**(3/2)
21
22 a, b = 0, 1
23 # a0, b0, c0 = 1, 0, exact(a)
24 # a1, b1, c1 = 1, 0, exact(b)
25
26 a0, b0, c0 = 1, -2, 0
27 a1, b1, c1 = 0, 1, -1/np.sqrt(2)
28
29 n = 10
30 tl, h = np.linspace(a, b, n + 1, retstep=True)
31 mu = 0.5 # h/(h+h)
32
33 A = np.zeros(n + 1)
34 C = np.zeros(n + 1)
35 D = np.zeros(n + 1)
36 F = np.zeros(n + 1)
37
38 for k in range(1, n):
39     A[k] = (1 - mu) * (1 + h ** 2 * q(tl[k - 1])) / 6)
40     D[k] = mu * (1 + h ** 2 * q(tl[k + 1])) / 6)
41     C[k] = -(1 - h ** 2 * q(tl[k])) / 3)
42     F[k] = h ** 2 / 6 * (mu * f(tl[k - 1]) + 2 * f(tl[k]) + (1 - mu) * f(tl[k +
        1])))
43
44 C[0] = a0 * h - b0 * (1 - 1 / 3 * q(tl[0])) * h ** 2)
45 D[0] = b0 * (1 + 1 / 6 * q(tl[1])) * h ** 2)
46 F[0] = c0 * h + 1 / 6 * b0 * h ** 2 * (2 * f(tl[0]) + f(tl[1]))
47
48 A[-1] = b1 * (-1 - 1 / 6 * h ** 2 * q(tl[-2]))
49 C[-1] = a1 * h + b1 * (1 - 1 / 3 * h ** 2 * q(tl[-1]))
50 F[-1] = c1 * h - 1 / 6 * b1 * h ** 2 * (f(tl[-2]) + 2 * f(tl[-1]))
51
52 matrix = np.diag(A[1:], -1) + np.diag(C) + np.diag(D[:-1], 1)
53
54 v = np.linalg.solve(matrix, F)
55

```

```

56 M = F - q(tl) * v
57
58 n_in = 100
59
60 xl = np.zeros(0)
61 uu = np.zeros(0)
62
63 for i in range(n):
64     xl_cur = np.linspace(tl[i], tl[i + 1], n_in)
65
66     def S(x):
67         t = (x - tl[i]) / h
68         return v[i] * (1 - t) + v[i + 1] * t - h ** 2 / 6 * t * (1 - t) * ((2 -
69             t) * M[i] + (1 + t) * M[i + 1])
70
71     u_cur = S(xl_cur)
72
73     xl = np.append(xl, xl_cur)
74     uu = np.append(uu, u_cur)
75
76 ex = exact(xl)
77
78 plt.figure("Решения")
79 plt.plot(xl, uu)
80 plt.plot(xl, ex, "--")
81 plt.legend(["Численное", "Точное"])
82 plt.grid()
83
84 plt.figure("Ошибка")
85 plt.plot(xl, abs(uu - exact(xl)))
86 plt.title(f"n={n}")
87 plt.grid()
88
89 print(max(abs(uu - exact(xl))))
90
91 plt.show()

```

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

по дисциплине «Математическое и компьютерное моделирование»

Ф.И.О. Держапольский Юрий Витальевич

ТЕМА курсового проекта:

«Сплайн-разностная схема метода сплайн-коллокации»

ФОРМУЛИРОВКА задания:

- Создать алгоритм решения поставленной задачи, реализовать его, протестировать программы;
- Оформить и представить итоги проделанной работы в виде отчета;
- Сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов.

РУКОВОДИТЕЛЬ проекта _____ / Колобов А.Г./

ДАТА ВЫДАЧИ задания 1.10.2024

СРОК ВЫПОЛНЕНИЯ задания 7.10.2024 – 21.12.2024

Задание получил _____