



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ В ЭКОЛОГИИ И ЭКОНОМИКЕ

(Модель с двумя хищниками)

КУРСОВАЯ РАБОТА

Направление подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Регистрационный № _____

« ____ » _____ 2024 г.

Руководитель проф. д.ф.-м. н.

Абакумов А. И.

(Ф.И.О.)

(подпись)

(И.О.Фамилия)

(подпись)

« 22 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Оглавление

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Введение | 3 |
| 2 | Математический аппарат | 5 |
| 2.1 | Методы анализа | 5 |
| 2.2 | Численные методы | 6 |
| 3 | Модель Лотки-Вольтерры | 7 |
| 3.1 | Математическая модель | 7 |
| 3.2 | Анализ модели | 9 |
| 3.3 | Вычислительные эксперименты | 13 |
| 3.3.1 | При вымершей первой популяции | 14 |
| 3.3.2 | При вымершей второй популяции | 15 |
| 3.3.3 | При вымершей третьей популяции | 16 |
| 3.3.4 | Несколько изначально не вымерших популяций | 16 |
| 4 | Модель Колмогорова | 18 |
| 4.1 | Математическая модель | 18 |
| 4.2 | Анализ модели | 20 |
| 4.3 | Вычислительные эксперименты | 24 |
| 4.3.1 | При вымершей первой популяции | 24 |
| 4.3.2 | При вымершей второй популяции | 25 |
| 4.3.3 | При вымершей третьей популяции | 25 |
| 4.3.4 | Несколько изначально не вымерших популяций | 26 |
| 5 | Заключение | 29 |
| 6 | Список литературы | 30 |

1. Введение

Конкуренция представляет собой один из способов взаимодействия между чем-либо. Например, в окружающей среде – это обычное явление – хищники охотятся за травоядными, более приспособленные и сильные популяции вытесняют слабых. Также конкуренция имеет не последнее место в экономике. Фирмы конкурируют за покупателей, компании за создание более хорошего продукта. Некоторые субъекты имеют большее влияние на рынок, чем другие. Однако, практически в любой среде существует ограниченное количество тех или иных ресурсов. Поэтому в разных ситуациях конкуренция может как и способствовать развитию и улучшать вещи, так и, например, неблагоприятно сказываться на популяциях живых существ и приводить их к вымиранию.

Основное деление животных в природе – это хищники и жертвы. Многие популяции обитают в одной среде и используют один ресурс, поэтому возникает конкуренция. Но обычно количество популяций в этих средах немаленькое, и поэтому взаимодействие между ними представляет собой очень сложный процесс. К этому также добавляются многие внешние факторы, которые влияют на эту среду обитания.

Моделирование любого явления обычно начинают с наиболее простых моделей, поэтому исследуемая схема взаимодействия будет включать в себя только три популяции без какого-либо внешнего взаимодействия.

Пусть среди трёх популяций существует одна популяция жертв и две популяции хищников. Энергия, которой обладают популяции, переходят между ними таким образом (Рис. 1):

- В популяции жертв в отсутствии взаимодействия рождаемость больше смертности.
- Вторая популяция хищников без взаимодействия имеет смертность больше рождаемости.

- Обе популяции хищников забирают энергию у жертв.
- Вторая популяция хищников также забирает энергию у первой популяции хищников.

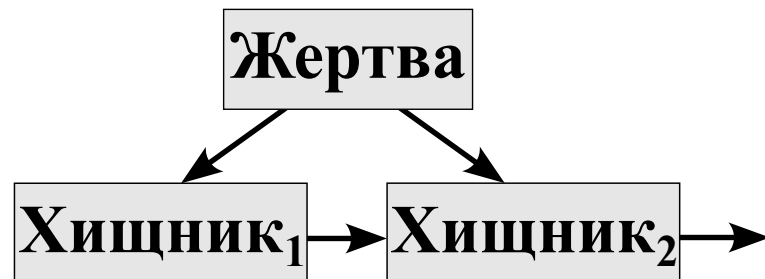


Рис. 1: Схема взаимодействия популяций.

Целью курсовой работы является исследование схемы взаимодействия популяций. Для этого нужно построить математическую, соответствующую схеме, после чего исследовать её и провести с ними вычислительные эксперименты.

2. Математический аппарат

2.1. Методы анализа

Исследуемые далее модели конкуренции представляют собой автономные системы трёх дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Для данных систем будет проведён анализ точек равновесия:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Для каждой точки равновесия (x^* – решение данной однородной системы уравнений) будет проведён анализ по методу первого приближения[1].

В матрицу Якоби данной системы $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ нужно подставить точку равновесия. После чего нужно найти собственные значения этой матрицы:

$$\det \left(\lambda I - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*} \right) = 0 \Rightarrow b_0 \lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0.$$

Для того, чтобы точка была устойчивой, необходимо, чтобы $\forall i \operatorname{Re} \lambda_i < 0$. Однако, напрямую решать кубическое уравнение может быть непросто, поэтому можно воспользоваться критерием Рауса-Гурвица[2]. Для этого построим матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}$$

Если $b_0 > 0$, то для устойчивости необходимо, чтобы все главные миноры матрицы Δ были положительны:

$$\Delta_1 = b_1,$$

$$\Delta_2 = b_1 b_2 - b_3 b_0,$$

$$\Delta_3 = b_3 \Delta_2.$$

2.2. Численные методы

Для получения численных решений системы дифференциальных уравнений будет использоваться метод Рунге-Кутты 4 порядка[3].

Для программной реализации используется язык Python с библиотеками `numpy` и `matplotlib`.

3. Модель Лотки-Вольтерры

3.1. Математическая модель

Классическая модель хищник-жертва для одной популяции жертвы $x(t)$ и хищника $y(t)$ называется такая модель[4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x) - V(x)y, \\ \dot{y} = kV(x)y - \beta(y), \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты α, β – функции естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно. Также их можно называть коэффициентом, обозначающим разность рождаемости и смертности в популяциях. Без взаимодействия жертвы беспрепятственно питаются и поэтому их рождается больше чем умирает, а у хищников – из-за отсутствия питания – наоборот, умирают больше, чем рождаются.

Функция $V(x)$ показывает количество жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причём k -тая часть полученной с этой биомассой энергией расходуется хищником на воспроизводство.

При малых значениях x , когда почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден и насыщения не наступает, тогда функцию $V(x)$ можно считать линейной функцией численности жертв: $V = vx$. Беря функции прироста линейными, получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - vxy, \\ \dot{y} = kvxy - \beta y, \end{cases} \quad (2)$$

Эта линейная система (2) совпадает с моделью В. Вольтерра, который показал, что такая система имеет неасимптотическую точку равновесия (центр) и поэтому эти популяции живут на замкнутых кривых на фазовой плоскости[4].

Аналогичными предположениями приведём исследуемую схему (Рис. 1)

к подобной системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon_1(x_1) - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_2(x_2) + k_{12}V_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x}_3 = -\varepsilon_3(x_3) + k_{13}V_{13}(x_1)x_3 + k_{23}V_{23}(x_2)x_3, \end{cases} \quad (3)$$

где:

1. $\varepsilon_i(x_i)$ – функции прироста соответствующих популяций без взаимодействия с другими. Предполагаем, что жертва и первый хищник (x_1, x_2) имеют положительный прирост, а второй хищник (x_3) – отрицательный.
2. $V_{ij}(x_i)$ – функции, показывающие какое количество из популяции x_i поглощается одним хищником популяции x_j за единицу времени. k_{ij} – соответствующие части полученной при поглощении энергии, которые идут на воспроизводство популяции x_j .

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$, где $k_{ij} > 0$. Аналогично примем функции в системе (3) за линейные функции:

$$\varepsilon_i(x_j) = \varepsilon_i \cdot x_j, \quad V_{ij}(x_k) = \alpha_{ij} \cdot x_k, \quad \varepsilon_i, \alpha_{ij} > 0$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_2 x_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = -\varepsilon_3 x_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 x_3. \end{cases} \quad (4)$$

Проанализируем, какое поведение популяций будет в этой модели.

3.2. Анализ модели

Матрица Якоби для данной системы:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 \end{pmatrix}$$

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения, т.е. решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x_1 - \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{13} x_1 x_3 = 0, \\ \varepsilon_2 x_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 x_2 - \alpha_{23} x_2 x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 x_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 x_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 (\varepsilon_1 - \alpha_{12} x_2 - \alpha_{13} x_3) = 0, \\ x_2 (\varepsilon_2 + k_{12} \alpha_{12} x_1 - \alpha_{23} x_3) = 0, \\ x_3 (-\varepsilon_3 + k_{13} \alpha_{13} x_1 + k_{23} \alpha_{23} x_2) = 0. \end{cases}$$

1. Если две любых переменных равны нулю, то в оставшейся строчке остаётся уравнение $\varepsilon_i x_i = 0$, т.е. все переменные равны нулю. Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

$$J|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Откуда получаем собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 > 0, \quad \lambda_2 = \varepsilon_2 > 0, \quad \lambda_3 = -\varepsilon_3 < 0.$$

Значит около начала координат в плоскостях $x_1 = 0, x_2 = 0$ эта точка является седлом, а в $x_3 = 0$ — неустойчивым узлом.

2. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_2 - \alpha_{23} x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{23} \alpha_{23} x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \left(0, \frac{\varepsilon_3}{k_{23} \alpha_{23}}, \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} \right)$$

$$A = J|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} - \alpha_{13} \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & 0 & 0 \\ k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} & 0 & -\alpha_{23} \frac{\varepsilon_3}{k_{23}\alpha_{23}} \\ k_{13}\alpha_{13} \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & k_{23}\alpha_{23} \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\varepsilon_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}} \right) \right) (\lambda^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_3\alpha_{12}}{k_{23}\alpha_{23}} - \frac{\varepsilon_2\alpha_{13}}{\alpha_{23}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}.$$

Точка $x^{(1)}$ – неустойчивая. В плоскости $x_1 = 0$ точка будет являться центром (асимптотически неустойчивая точка), т.е. создавать вокруг себя замкнутые кривые.

3. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{13}x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \left(\frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}}, 0, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} \right)$$

$$A = J|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} & -\alpha_{13} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} \\ 0 & \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & 0 \\ k_{13}\alpha_{13} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & k_{23}\alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - \left(\varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}} \right) \right) (\lambda^2 + \varepsilon_1\varepsilon_3) = 0.$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12} \frac{\varepsilon_3}{k_{13}\alpha_{13}} - \alpha_{23} \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{13}}, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}.$$

Аналогично предыдущей точке, $x^{(2)}$ – неустойчивая и в плоскости $x_2 = 0$ является центром и будет создавать вокруг себя замкнутые кривые.

4. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{12}x_2 = 0, \\ \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow x^{(*)} = \left(-\frac{\varepsilon_2}{k_{12}\alpha_{12}}, \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}}, 0 \right)$$

Данная точка всегда будет находиться вне исследуемой области.

5. Если $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 = 0, \\ \varepsilon_2 + k_{12}\alpha_{12}x_1 - \alpha_{23}x_3 = 0, \\ -\varepsilon_3 + k_{13}\alpha_{13}x_1 + k_{23}\alpha_{23}x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда решение $x^{(3)}$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\varepsilon_1\alpha_{23}k_{23} + \varepsilon_2k_{23}\alpha_{13} + \varepsilon_3\alpha_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{13}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_2 = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_{12}} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{12}}x_3 = \frac{\varepsilon_1\alpha_{23}k_{13} - \varepsilon_2\alpha_{13}k_{13} - \varepsilon_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{12}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}, \\ x_3 = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_{23}} + \frac{k_{12}\alpha_{12}}{\alpha_{23}}x_1 = \frac{-\varepsilon_1\alpha_{23}k_{12}k_{23} + \varepsilon_2\alpha_{13}k_{13} + \varepsilon_3\alpha_{12}k_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{13} - k_{12}k_{23})}. \end{cases}$$

$$A = J\Big|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{12}x_1 & -\alpha_{13}x_1 \\ k_{12}\alpha_{12}x_2 & 0 & -\alpha_{23}x_2 \\ k_{13}\alpha_{13}x_3 & k_{23}\alpha_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^3 - \lambda(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3) + \\ &+ x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}) = 0 \end{aligned}$$

Явное решение данного уравнения будет непростым, поэтому воспользуемся критерием Рауса-Гурвица.

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -(k_{12}\alpha_{12}^2x_1x_2 + k_{13}\alpha_{13}^2x_1x_3 + k_{23}\alpha_{23}^2x_2x_3),$$

$$b_3 = x_1x_2x_3\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}(k_{12}k_{23} - k_{13}).$$

Матрица Гурвица и главные миноры:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = -b_3, \\ \Delta_3 = b_3 \cdot \Delta_2 = -b_3^2 \leq 0. \end{cases}$$

Это значит, что данная точка вне зависимости от положения будет неустойчивой.

3.3. Вычислительные эксперименты

Возьмём параметры для модели:

$$\varepsilon_1 = 10, \varepsilon_2 = 8, \varepsilon_3 = 6,$$

$$\alpha_{12} = 6, \alpha_{13} = 2, \alpha_{23} = 0.5,$$

$$k_{12} = 4, k_{13} = 1, k_{23} = 0.5.$$

Тогда точки равновесия и их собственные значения равны:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0), \lambda_i = (10, 8, -6),$$

$$x^{(1)} = (0, 24, 16), \lambda_i = (-166, \pm i \cdot 6.93 \dots),$$

$$x^{(2)} = (3, 0, 5), \lambda_i = (77.5, \pm i \cdot 7.74 \dots),$$

$$x^{(3)} = (-3.458 \dots, 46.66 \dots, -150), \lambda_i = (-160 \dots, 153.5 \dots, 6.54 \dots),$$

При этом точка равновесия $x^{(3)}$ не будет иметь влияния, поскольку находится на большом удалении в отрицательных координатах.

3.3.1. При вымершей первой популяции

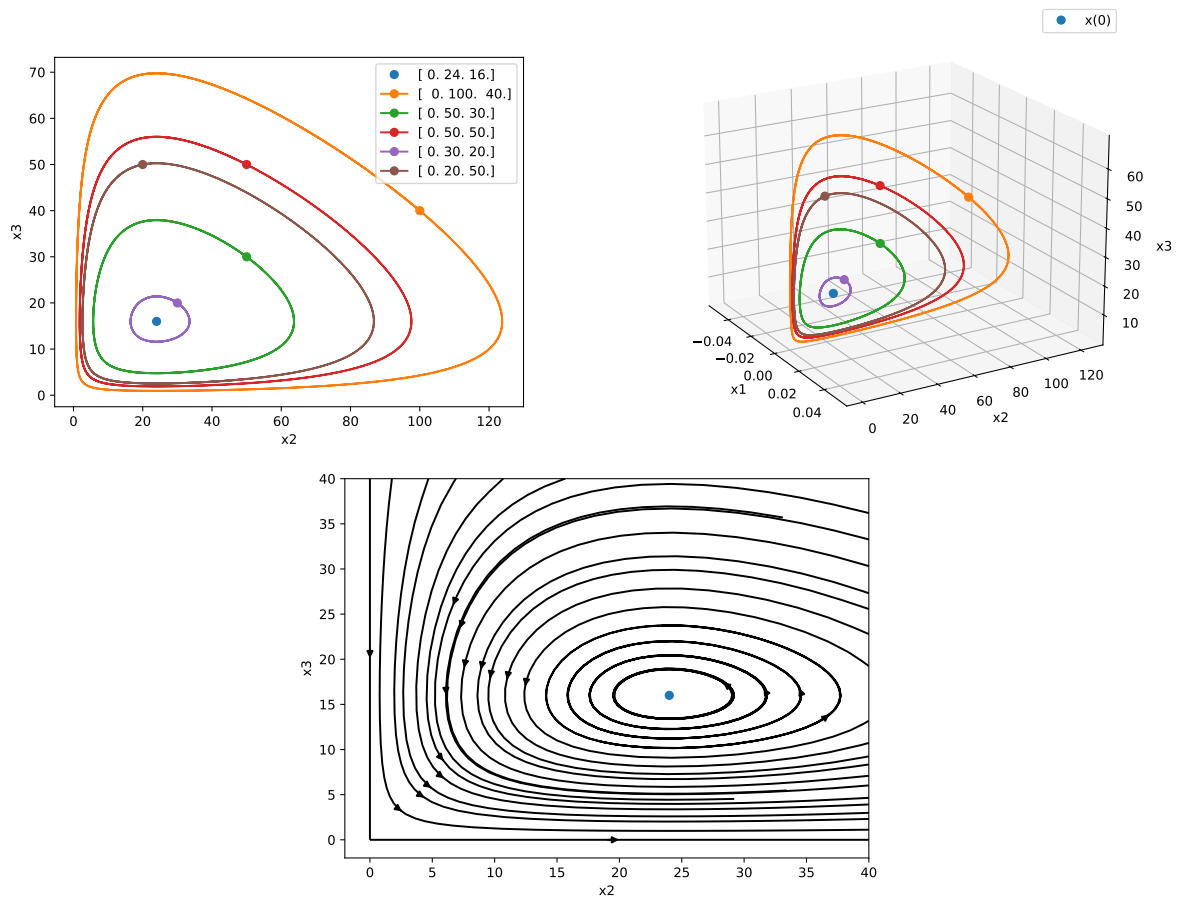


Рис. 2: На отрезке времени $[0, 3]$.

При $x_1 = 0$ (Рис. 2) обе популяции хищников никогда не вымрут и будут двигаться по замкнутым кривым.

3.3.2. При вымершей второй популяции

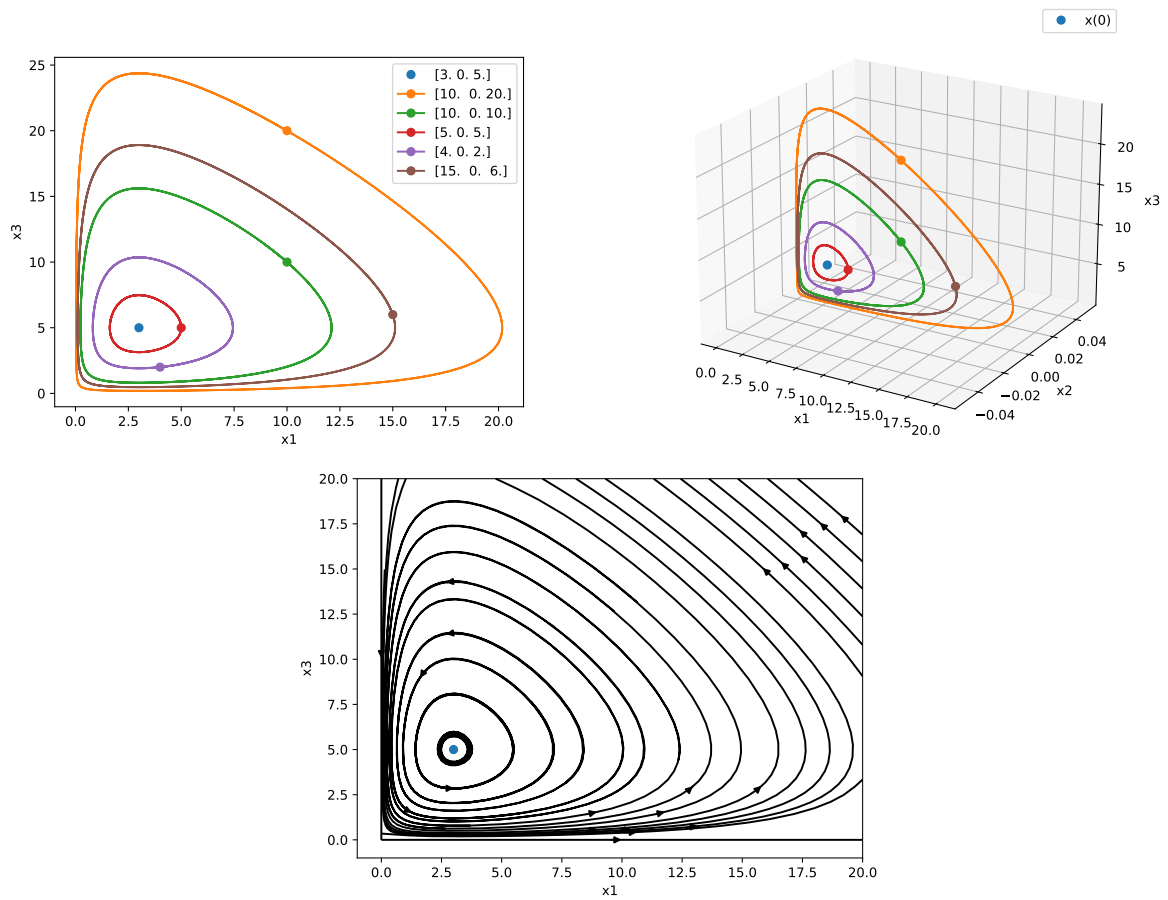


Рис. 3: На отрезке времени $[0, 3]$.

При $x_2 = 0$ (Рис. 3) популяция жертв и вторая популяция хищников не вымрут и тоже будут двигаться по замкнутым кривым.

3.3.3. При вымершей третьей популяции

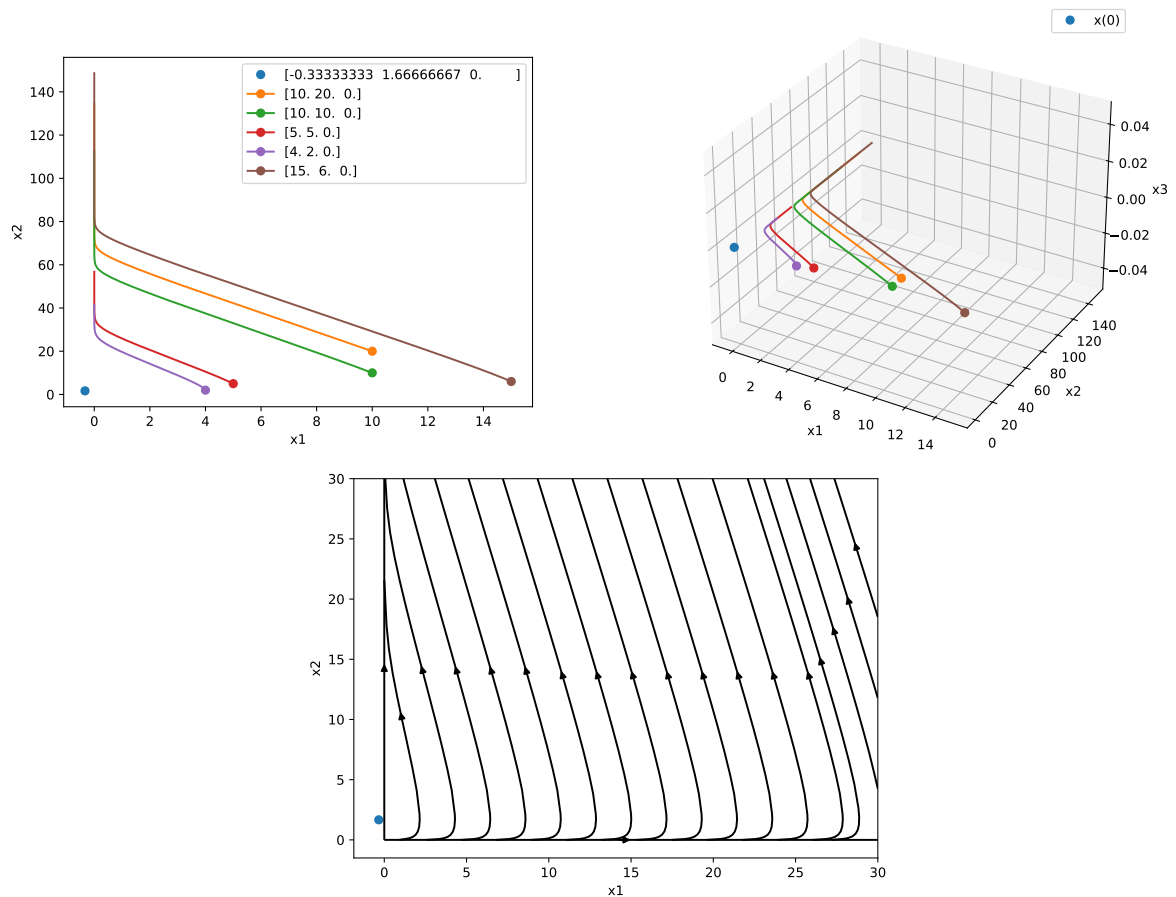


Рис. 4: На отрезке времени $[0, 0.1]$.

При $x_3 = 0$ (Рис. 4) нулевая точка является неустойчивым узлом, при этом популяция жертв со временем вымрет, а первая популяция хищников безгранично будет увеличиваться.

3.3.4. Несколько изначально не вымерших популяций

Рассмотрим поведение решений во всей исследуемой области.

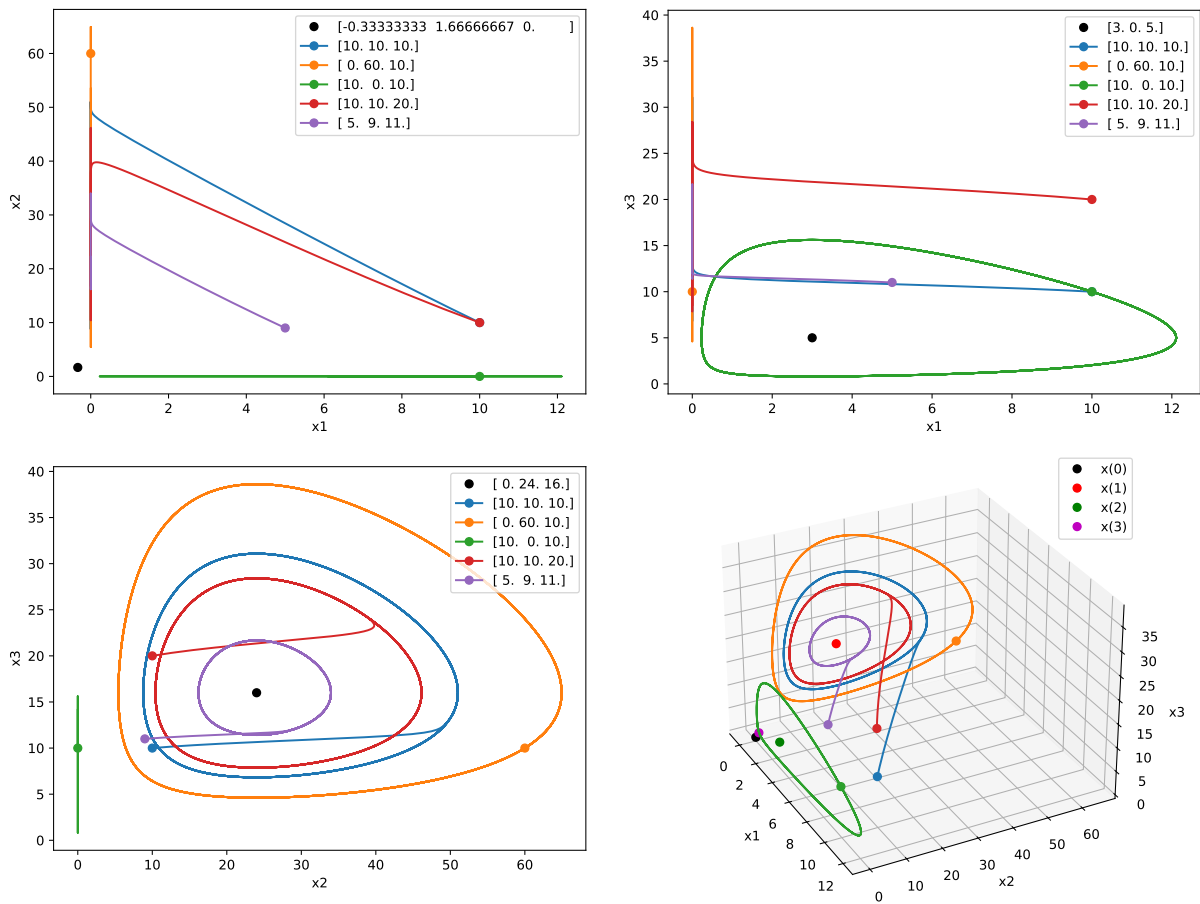


Рис. 5: На отрезке времени $[0, 3]$.

На рисунке 5 видно, что если присутствует вторая популяция хищников, то популяция жертв вымрет, а хищники останутся конкурировать друг с другом и никогда не вымрут.

4. Модель Колмогорова

4.1. Математическая модель

Моделью Колмогорова при одной популяции жертвы $x(t)$ и одной хищника $y(t)$ называется такая модель [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x)x - V(x)y, \\ \dot{y} = K(x)y, \end{cases} \quad (5)$$

с такими предположениями:

1. В популяции хищников отсутствует внутривидовая конкуренция.
2. $\alpha' < 0$; $\alpha(0) > 0 > \alpha(\infty)$. В отсутствии хищников прирост жертв с увеличением популяции уменьшается до критического момента.
3. $K' > 0$; $K(0) < 0 < K(\infty)$. Коэффициент прироста хищников.
4. $V(x) > 0, x > 0$; $V(0) = 0$. Коэффициент поглощения жертв.

Адаптируем данную модель (5) для нашей схемы (Рис. 1) взаимодействия популяций жертвы и хищников и подробнее опишем качественные предположения о функциях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(x_1)x_1 - V_{12}(x_1)x_2 - V_{13}(x_1)x_3, \\ \dot{x}_2 = K_{12}(x_1)x_2 - V_{23}(x_2)x_3, \\ \dot{x}_3 = K_{13}(x_1)x_3 + K_{23}(x_2)x_3. \end{cases} \quad (6)$$

Предположения:

1. $\varepsilon' < 0$; $\varepsilon(0) > \varepsilon(\bar{x}_1) = 0 > \varepsilon(\infty)$. Здесь у жертв ограниченное количество ресурса и за него существует конкуренция. Поэтому без хищников прирост жертв с увеличением их количества в некоторый момент прекратится и стабилизируется на уровне \bar{x}_1 .

2. $K'_{ij} > 0$; $K_{ij}(0) < K_{ij}(x_i^*) = 0 < K_{ij}(\infty)$. Это значит, что при увеличении численности жертв коэффициент естественного прироста хищников возрастает. Коэффициент переходит от отрицательных значения при недостатке пищи к положительным.
3. $V_{ij}(0) = 0$; $V_{ij}(x_i) > 0, x_i > 0$. Этот коэффициент показывает количество жертв, поглощаемых одним хищником.

Имеем автономную систему $\dot{x} = f(x)$.

Будем исследовать систему с линейными функциями, которые удовлетворяют указанным предположениям.

$$\varepsilon(x) = -\varepsilon \cdot x + \delta, \quad \varepsilon, \delta > 0,$$

$$K_{ij}(x) = k_{ij} \cdot x - m_{ij}, \quad k_{ij}, m_{ij} > 0,$$

$$V_{ij}(x) = v_{ij} \cdot x, \quad v_{ij} > 0.$$

Тогда система (6) будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (-\varepsilon x_1 + \delta) x_1 - v_{12} x_1 x_2 - v_{13} x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 = (k_{12} x_1 - m_{12}) x_2 - v_{23} x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 = (k_{13} x_1 - m_{13}) x_3 + (k_{23} x_2 - m_{23}) x_3. \end{cases} \quad (7)$$

4.2. Анализ модели

Найдём точки равновесия дифференциального уравнения и исследуем их устойчивость.

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -2\varepsilon x_1 + \delta - v_{12}x_2 - v_{13}x_3 & -v_{12}x_1 & -v_{13}x_1 \\ k_{12}x_2 & (k_{12}x_1 - m_{12}) - v_{23}x_3 & -v_{23}x_2 \\ k_{13}x_3 & k_{23}x_3 & k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23} \end{pmatrix}$$

Нужно найти решения (x_1, x_2, x_3) системы уравнений:

$$\begin{cases} (-\varepsilon x_1 + \delta) x_1 - v_{12}x_1x_2 - v_{13}x_1x_3 = 0, \\ (k_{12}x_1 - m_{12}) x_2 - v_{23}x_2x_3 = 0, \\ (k_{13}x_1 - m_{13}) x_3 + (k_{23}x_2 - m_{23}) x_3 = 0. \end{cases}$$

Для удобства вынесем общие множители:

$$\begin{cases} (-\varepsilon x_1 + \delta - v_{12}x_2 - v_{13}x_3) x_1 = 0, \\ (k_{12}x_1 - m_{12} - v_{23}x_3) x_2 = 0, \\ (k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23}) x_3 = 0. \end{cases}$$

1. Если $x_2 = x_3 = 0$, то остаётся уравнение

$$(-\varepsilon x_1 + \delta)x_1 = 0.$$

Получаем тривиальное решение $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ и $x^{(1)} = \left(\frac{\delta}{\varepsilon}, 0, 0\right)$.

$$(a) \quad J \Big|_{x^{(0)}} = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & -m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -m_{13} - m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \delta > 0, \quad \lambda_2 = -m_{12} < 0, \quad \lambda_3 = -m_{13} - m_{23} < 0.$$

Значит, в плоскостях $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ начало координат является седлом и направление x_1 – неустойчивое. В плоскости $x_1 = 0$ точка является устойчивым узлом.

$$(b) \quad J|_{x^{(1)}} = \begin{pmatrix} -\delta & -v_{12}\frac{\delta}{\varepsilon} & -v_{13}\frac{\delta}{\varepsilon} \\ 0 & k_{12}\frac{\delta}{\varepsilon} - m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{13}\frac{\delta}{\varepsilon} - m_{13} - m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\delta < 0, \quad \lambda_2 = k_{12}\frac{\delta}{\varepsilon} - m_{12}, \quad \lambda_3 = k_{13}\frac{\delta}{\varepsilon} - m_{13} - m_{23}.$$

Откуда имеем:

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\varepsilon} < \frac{m_{12}}{k_{12}}, \quad \lambda_3 < 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\varepsilon} < \frac{m_{13} + m_{23}}{k_{13}}$$

В зависимости от значений λ_2, λ_3 данная точка может быть:

- i. Устойчивым узлом, если $\lambda_2, \lambda_3 < 0$,
- ii. Устойчивым узлом в плоскости $x_2 = 0$ и седлом в плоскости $x_3 = 0$, если $\lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$,
- iii. Устойчивым узлом в плоскости $x_3 = 0$ и седлом в плоскости $x_2 = 0$, если $\lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$,
- iv. Седлом в плоскостях $x_2 = 0, x_3 = 0$, если $\lambda_2, \lambda_3 > 0$

2. Если $x_1 = x_2 = 0$, то в третьей строчке получем

$$(-m_{13} - m_{23})x_3 = 0.$$

Поскольку $x_3 > 0$, то данное равенство не может быть выполнено.

3. Если $x_1 = x_3 = 0$, то во второй строчке получем

$$-m_{12}x_2 = 0.$$

Поскольку $x_2 > 0$, то равенство не может быть выполнено.

4. Если $x_1 = 0; x_2, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} (-m_{12} - v_{23}x_3)x_2 = 0, \\ (-m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23})x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{m_{12}}{-v_{23}} < 0, \\ x_2 = \frac{m_{13} + m_{23}}{k_{23}}. \end{cases}$$

Эта точка будет находиться вне исследуемой области.

5. Если $x_2 = 0; x_1, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} (-\varepsilon x_1 + \delta - v_{13}x_3)x_1 = 0, \\ (k_{13}x_1 - m_{13} - m_{23})x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{\varepsilon x_1 - \delta}{-v_{13}}, \\ x_1 = \frac{m_{13} + m_{23}}{k_{13}}. \end{cases}$$

В исследуемой области данная точка будет находиться, если $x_1 \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$.

$$A = J|_{x^{(2)}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon x_1 & -v_{12}x_1 & -v_{13}x_1 \\ 0 & (k_{12}x_1 - m_{12}) - v_{23}x_3 & 0 \\ k_{13}x_3 & k_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \left(\lambda - ((k_{12}x_1 - m_{12}) - v_{23}x_3) \right) ((\lambda + \varepsilon x_1)\lambda + v_{13}x_1 k_{13}x_3) = 0$$

$$\lambda_{1,3} = \frac{-\varepsilon x_1 \pm \sqrt{(\varepsilon x_1)^2 - 4v_{13}k_{13}x_1x_3}}{2}, \quad \lambda_2 = (k_{12}x_1 - m_{12}) - v_{23}x_3$$

При разных параметрах могут быть разные комбинации устойчивости этой точки. Существуют параметры, которые сделают эту точку устойчивым фокусом.

6. Если $x_3 = 0; x_1, x_2 > 0$:

$$\begin{cases} (-\varepsilon x_1 + \delta - v_{12}x_2)x_1 = 0, \\ (k_{12}x_1 - m_{12})x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\varepsilon x_1 - \delta}{-v_{12}}, \\ x_1 = \frac{m_{12}}{k_{12}}. \end{cases}$$

В исследуемой области данная точка будет находиться, если $x_1 \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$.

$$A = J|_{x^{(3)}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon x_1 & -v_{12}x_1 & -v_{13}x_1 \\ k_{12}x_2 & 0 & -v_{23}x_2 \\ 0 & 0 & k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23} \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - (k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23})) ((\lambda + \varepsilon x_1)\lambda + v_{12}x_1 k_{12}x_2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\varepsilon x_1 \pm \sqrt{(\varepsilon x_1)^2 - 4v_{12}k_{12}x_1x_2}}{2}, \quad \lambda_3 = k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23}$$

Аналогично предыдущей точки, существуют такие параметры, чтобы точка была устойчивой.

7. Если $x_1, x_2, x_3 > 0$:

$$\begin{cases} -\varepsilon x_1 + \delta - v_{12}x_2 - v_{13}x_3 = 0, \\ k_{12}x_1 - m_{12} - v_{23}x_3 = 0, \\ k_{13}x_1 - m_{13} + k_{23}x_2 - m_{23} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\delta k_{23}v_{23} - k_{23}m_{12}v_{13} + m_{13}v_{12}v_{23} + m_{23}v_{12}v_{23}}{-\varepsilon k_{23}v_{23} - k_{12}k_{23}v_{13} + k_{13}v_{12}v_{23}}, \\ x_2 = \frac{\delta k_{13}v_{23} - \varepsilon m_{13}v_{23} - \varepsilon m_{23}v_{23} - k_{12}m_{13}v_{13} - k_{12}m_{23}v_{13} + k_{13}m_{12}v_{13}}{-\varepsilon k_{23}v_{23} - k_{12}k_{23}v_{13} + k_{13}v_{12}v_{23}}, \\ x_3 = \frac{-\delta k_{12}k_{23} + \varepsilon k_{23}m_{12} + k_{12}m_{13}v_{12} + k_{12}m_{23}v_{12} - k_{13}m_{12}v_{12}}{-\varepsilon k_{23}v_{23} - k_{12}k_{23}v_{13} + k_{13}v_{12}v_{23}} \end{cases}$$

$$A = J|_{x^{(4)}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon x_1 & -v_{12}x_1 & -v_{13}x_1 \\ k_{12}x_2 & 0 & -v_{23}x_2 \\ k_{13}x_3 & k_{23}x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для вычислительного эксперимента будем численно находить собственные значения данной точки равновесия.

4.3. Вычислительные эксперименты

Возьмём такие функции для реализации модели:

$$\varepsilon(x_1) = -x_1 + 10,$$

$$K_{12}(x_1) = x_1 - 5, \quad K_{13}(x_1) = x_1 - 3, \quad K_{23}(x_2) = x_2 - 4,$$

$$V_{12}(x_1) = 2x_1, \quad V_{13}(x_1) = 3x_1, \quad V_{23}(x_2) = x_2.$$

Тогда точки равновесия и их собственные значения равны:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0), \quad \lambda_i = (10, -5, -7),$$

$$x^{(1)} = (10, 0, 0), \quad \lambda_i = (5, 3, -10),$$

$$x^{(2)} = (7, 0, 1), \quad \lambda_i = (1, -3.5 \pm i \cdot 2.96 \dots),$$

$$x^{(3)} = (5, 2.5, 0), \quad \lambda_i = (0.5, -2.5 \pm i \cdot 4.33 \dots),$$

$$x^{(4)} = (5.5, 1.5, 0.5), \quad \lambda_i = (-0.348 \dots, -2.57 \dots \pm i \cdot 4.13 \dots),$$

4.3.1. При вымершей первой популяции

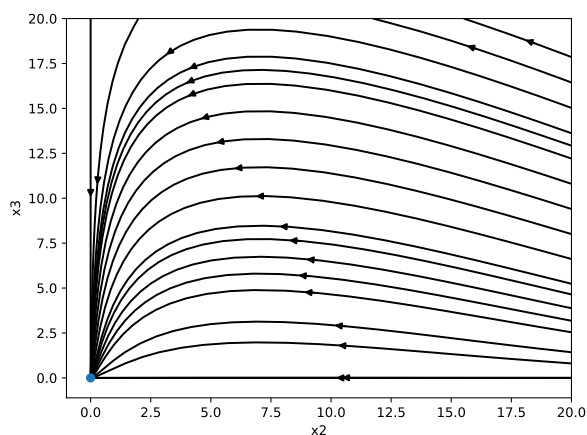


Рис. 6

При $x_1 = 0$ (Рис. 6) нулевая точка является устойчивым узлом. Обе популяции хищников в итоге вымрут.

4.3.2. При вымершей второй популяции

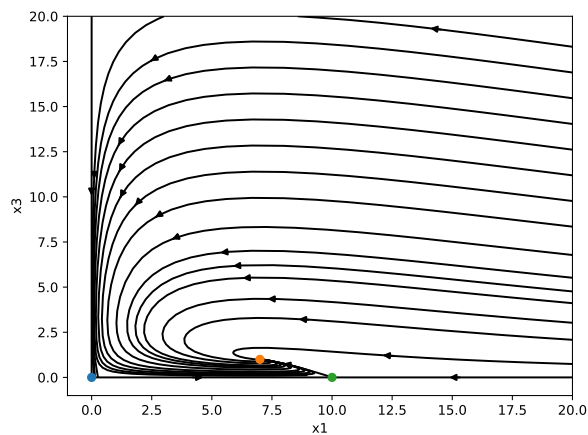


Рис. 7

При $x_2 = 0$ (Рис. 7) нулевая точка является седлом, точка $(10, 0)$ седлом, а $(7, 1)$ – устойчивым фокусом. Обе популяции со временем придут к точке баланса и их биомасса перестанет меняться.

4.3.3. При вымершей третьей популяции

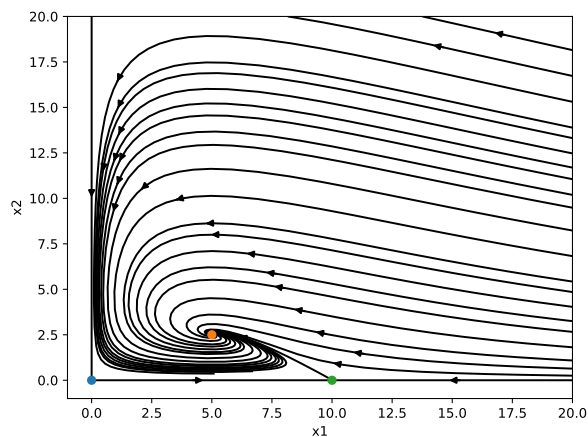


Рис. 8

При $x_3 = 0$ (Рис. 8) нулевая точка является седлом, точка $(10, 0)$ седлом, а $(5, 2.5)$ – устойчивым фокусом. Обе популяции со временем придут к точке баланса и их биомасса перестанет меняться.

4.3.4. Несколько изначально не вымерших популяций

Рассмотрим поведение решений во всей исследуемой области.

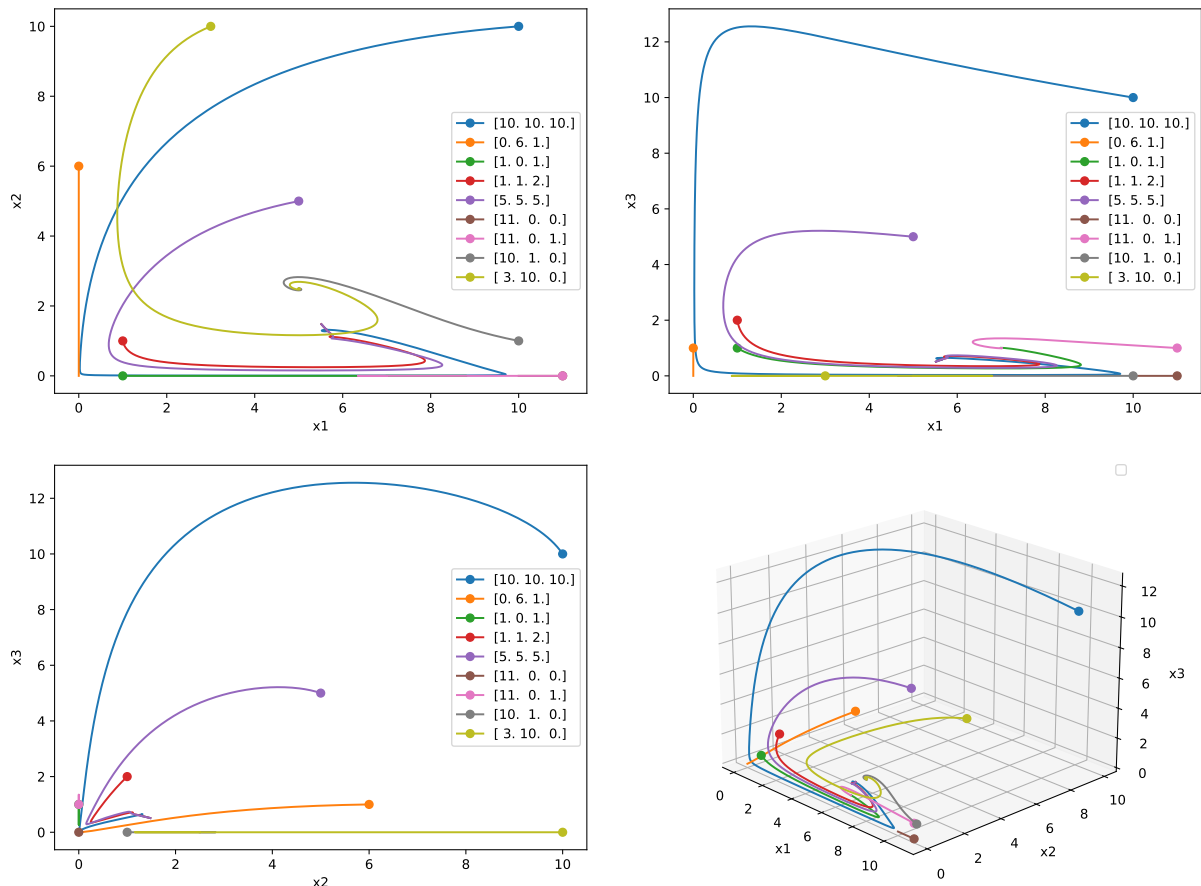


Рис. 9: На отрезке времени $[0, 3]$.

На рисунке 9 изображены проекции на плоскости и 3-х мерная область с решениями. В отличие от исследованной модели Лотки-Вольтерры, начальные объёмы популяций, расположенные вне «нулевых» плоскостей, не способствуют вымиранию ни одной популяции. Рассмотрим как ведут себя решения вблизи ненулевой устойчивой точки равновесия.

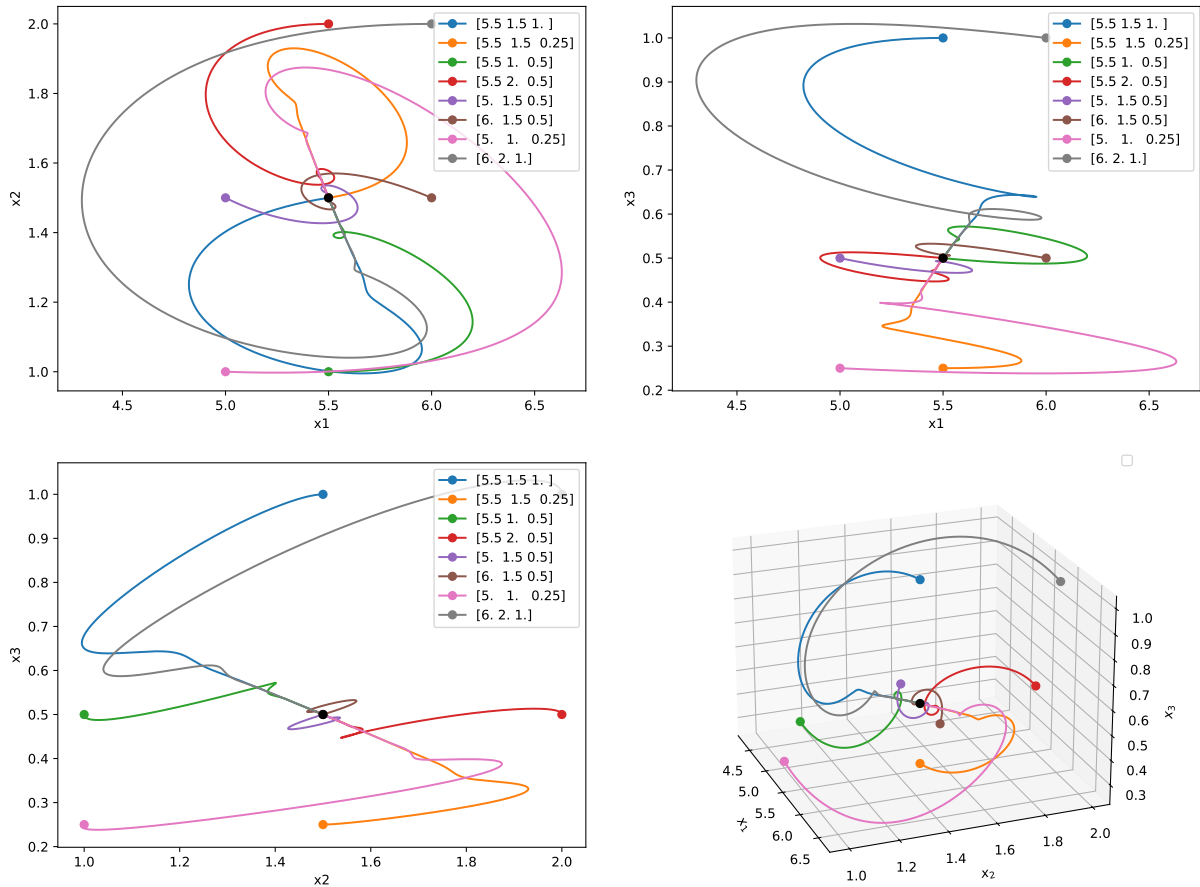


Рис. 10: Около точки $(5.5, 1.5, 0.5)$. На отрезке времени $[0, 3]$.

На рисунке 10 чёрной точкой изображена точка равновесия и несколько решений с указанными начальными значениями. Видно что все решения стремятся к ней, но также следуют по пути устойчивого фокуса, закручиваясь по спирали.

Теперь возьмём ненулевые начальные значения, но на большем удалении от этой точки равновесия.

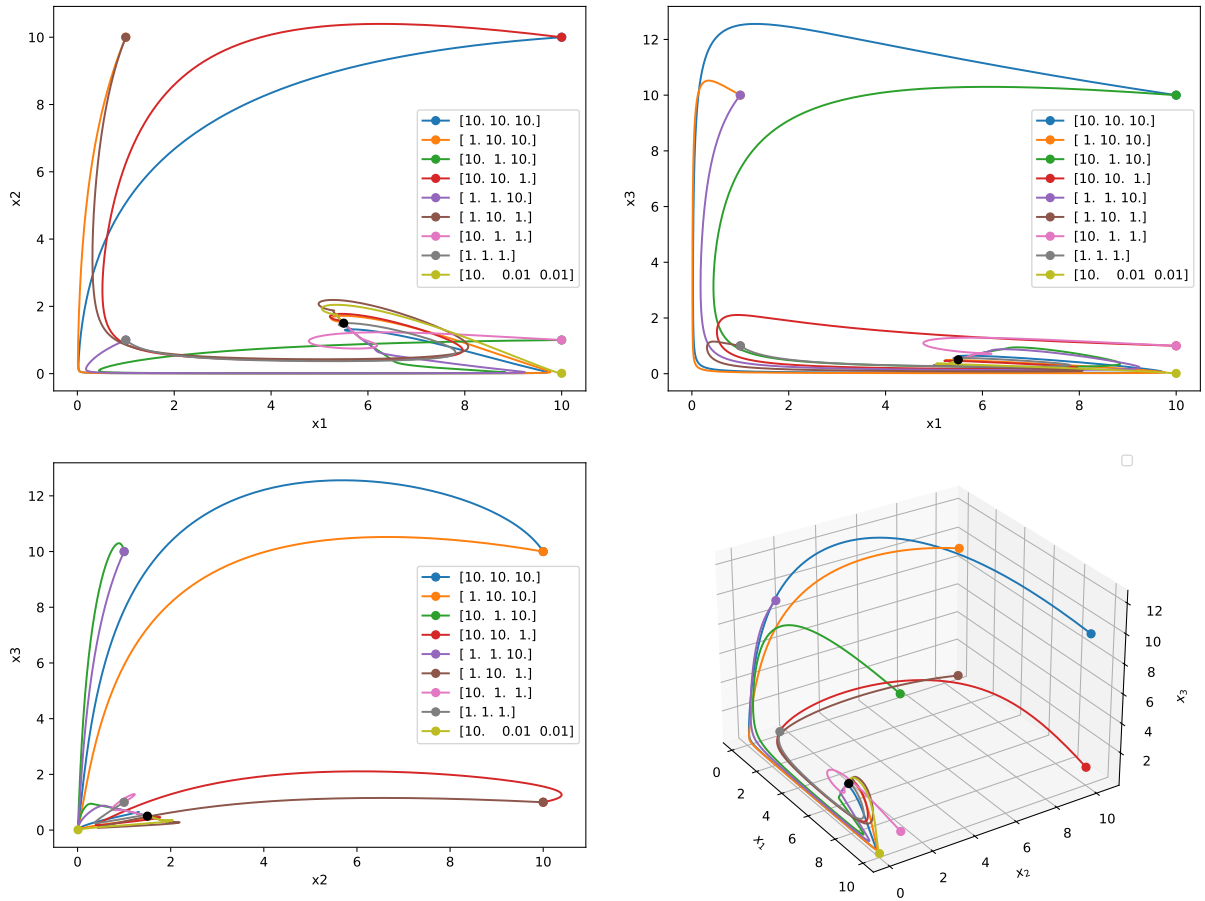


Рис. 11: Несколько ненулевых начальных значений. На отрезке времени $[0, 3]$.

На рисунке 11 все решения стремятся только к ненулевой точке равновесия. Значит, можно сделать вывод, что модель с данными параметрами при любых ненулевых начальных значениях приводит такие популяции к состоянию баланса, и их биомасса перестанет меняться.

5. Заключение

В курсовой работе была рассмотрена схема взаимодействия трех популяций животных: жертвы и двух хищников. Для неё были построены две модели конкуренции, основанные на модели Лотки-Вольтерры и модели Колмогорова. В ходе анализа этих моделей были найдены точки равновесия системы и исследована их устойчивость. На основе анализа были сделаны выводы о примерном поведении популяций, что было показано в ходе вычислительных экспериментов.

На основании этой работы можно сделать вывод, что первая построенная модель (аналог модели Лотки-Вольтерры) описывала такое поведение популяций, при котором, в общем случае, одна из них вымирала, оставляя две другие конкурировать с периодическими циклами их объёмов биомассы. Вторая модель (аналог модели Колмогорова) при ненулевых популяциях описывает поведение, при котором все три популяции со временем придут к балансу и их биомасса перестанет изменяться.

6. Список литературы

- [1] Филипов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений // А. Ф. Филипов – М.: КомКнига, 2007.
- [2] Нефёдов, Н. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Н. Н. Нефёдов, В. Ю. Попов, В. Т. Волков – М.: Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016.
- [3] Березин, И. С. Методы вычислений // И. С. Березин, Н. П. Жидков – М.: Наука, 1959. – Т. 2.
- [4] Свирежев, Ю. М. Устойчивость биологических сообществ // Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет – М.: Наука, 1978.
- [5] Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Л. С. Понтрягин – М.: Наука, 1974.