МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №2 по дисциплине

«Математическое и копмьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Профессор к.ф.-м. н.

Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 13 » апреля 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

Хищник-жертва

2. Построение математической модели

Мы будем строить модель для двух популяций и рассматривать их взаимодействие во времени. Пусть $N(t)$ – популяция жертв, $M(t)$ – популяция хищников. Единицы измерения выберем безразмерные и условно скажем, что это «объём» популяции. Время измеряется в секундах.

В отсутствии взаимодействия между ними популяция хищников будет расти, а популяция жертв убывать в зависимости от объёмов самих популяций:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = a \cdot N, \\ \dfrac{dM}{dt} = -b \cdot M, \end{cases}$$

где a, b – коэффициенты.

3. Анализ модели

Исследуем дифференциальное уравнение на устойчивость.

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow P - kS(T - T_0) - \sigma S(T^4 - T_0^4) = 0,$$

$$\sigma T^4 + kT - \sigma T_0^4 - kT_0 - \frac{P}{S} = 0.$$

Воспользуемся матрицей Гурвица для определения положительности корней.

$$a_0 = \sigma,\ a_{1,2} = 0,\ a_3 = k,\ a_4 = -\sigma T_0^4 - kT_0 - \frac{P}{S}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем главные миноры: $M_1 = 0,\ M_2 = -k\sigma,\ M_3 = kM_2,\ M_4 = a_4M_3$. Заметим, что существует отрицательный минор, значит существует положительный корень.

Также заметим, что удельная теплоёмкость и масса влияют только на скорость увеличения температуры, но не на точки равновесия.

3.1. Анализ конкретной модели

Поскольку анализ модели в общем случае является непростым в связи с 4 степенью параметра, проанализируем на примере конкретной модели. Для этого примени метод анализа по первому приближению. Возьмём параметры (Данная модель будет построена в разделе «Вычислительные эксперименты»):

$$P = 3000\text{Вт},\ m = 0.5\text{кг},\ c = 897\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},\ S = 0.4\text{м}^2,\ k = 2,\ T_0 = 296\text{K}.$$

Найдём точки устойчивости модели с данными параметрами:

$$T_1 = -645.06\ldots,\ T_2 = 599.58\ldots,\ T_{3,4} = 22.73\cdots \pm i623.15\ldots.$$

Исследуем вещественные нули. Для этого найдём производную правой части и подставим данные значения (обозначим правую часть дифференциального уравнения R):

$$\left.\frac{dR}{dT}\right|_{T_1} = 0.053\ldots, \quad \left.\frac{dR}{dT}\right|_{T_2} = -0.045\ldots$$

Для T_1 получили положительное значение, значит данное положение равновесия неустойчивое. Для T_2 получили отрицательное, значит оно устойчивое.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib, в котором был реализован метод Рунге-Кутта.

```python
import numpy as np
import scipy as sci
import matplotlib.pyplot as plt
import math


def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
    num = math.ceil((b - a) / h)
    x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
    y_a = [y0] * num

    for i in range(num - 1):
        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
        k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
        k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
        y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)

    return x_a, np.array(y_a)


def count_time(a, b, c, d, y0):
    plt.figure("C(t)")
    x, y = model(a, b, c, d, np.array(y0))

    plt.plot(x, y[0])
    plt.plot(x, y[1])

    plt.xlabel('t - Время')
    plt.ylabel('C(t) - Количество')
    plt.legend(["N - жертвы", "M - хищники"])

    plt.xlim(left=0)
```

```python
    plt.ylim(bottom=0)


def phase(a, b, c, d, init):
    plt.figure("Phase")
    for i in init:
        x, y = model(a, b, c, d, np.array(i))
        plt.plot(y[0], y[1], marker='o', markevery=[0])

    plt.plot(b/d, a/c, 'ro')
    plt.legend(init)
    plt.xlabel('N - жертвы')
    plt.ylabel('M - хищники')

    plt.xlim(left=0)
    plt.ylim(bottom=0)

def model(a, b, c, d, y0):
    def diff(t, NM):
        return np.array([
            (a - c * NM[1]) * NM[0],
            (-b + d * NM[0]) * NM[1]
        ])


    x_ = np.linspace(t0, tn, n)
    x_, y_ = runge_kutta(diff, y0, t0, tn, (tn-t0)/n)
    y_ = y_.T

    return x_, y_



    # plt.plot(y[1], y[0])

t0, tn = 0, 10
n = 1000

a, c = 2, 0.5
b, d = 1, 0.5
```

```

init_val = [[4,4], [2,6], [3,2], [5, 3], [2,3], [2,1]]

# count_time(a,b,c,d, [4,4])

phase(a,b,c,d, init_val)

# plt.savefig("./sem6-matmodelling/asd.png")
plt.title(f"{a=}, {c=}; {b=}, {d=}")
plt.show()
```

4.2. Модель без терморегулятора

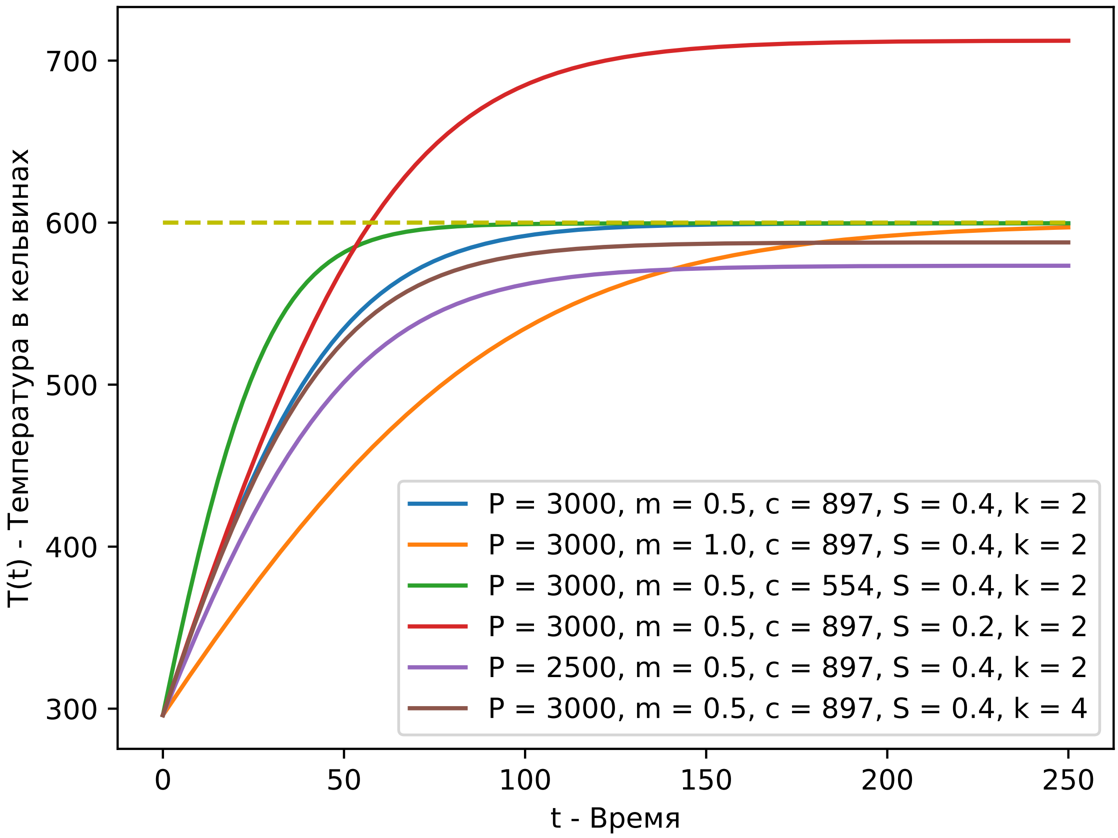

Рис. 1: Графики моделей при $T_0 = 296$.

На графике (Рис. 1) построены несколько моделей с указанными параметрами, а также жёлтый пунктир на отметке $T = 600$ – округлённое значение, найденное при анализе.

Как можно увидеть, первые три модели, которые отличаются только массой и удельной теплоёмкостью, возрастают до определённого значения – точки равновесия.

Остальные модели различаются в параметрах, которые влияют на максимальное значение, что можно также увидеть.

4.3. Модель с терморегулятора

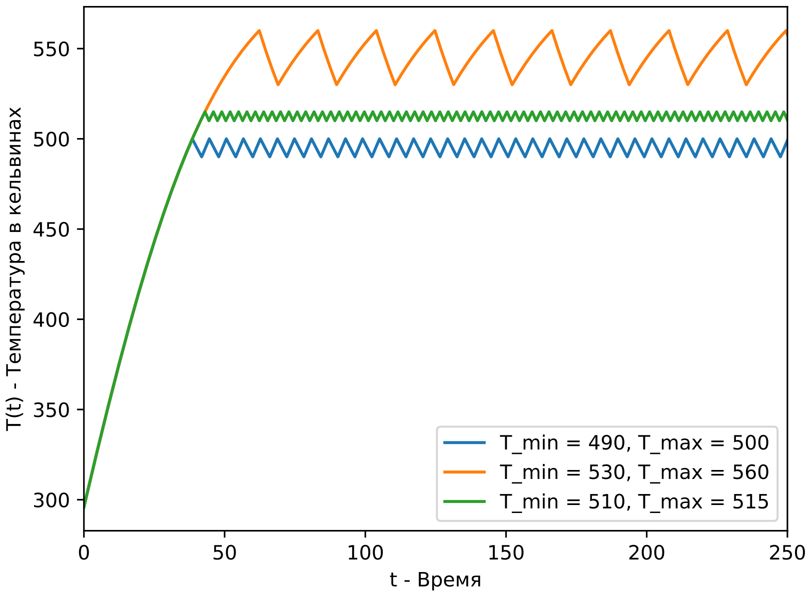

Рис. 2: Графики моделей при

$$P = 3000\text{Вт},\ m = 0.5\text{кг},\ c = 897\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}},\ S = 0.4\text{м}^2,\ k = 2,\ T_0 = 296\text{K}.$$

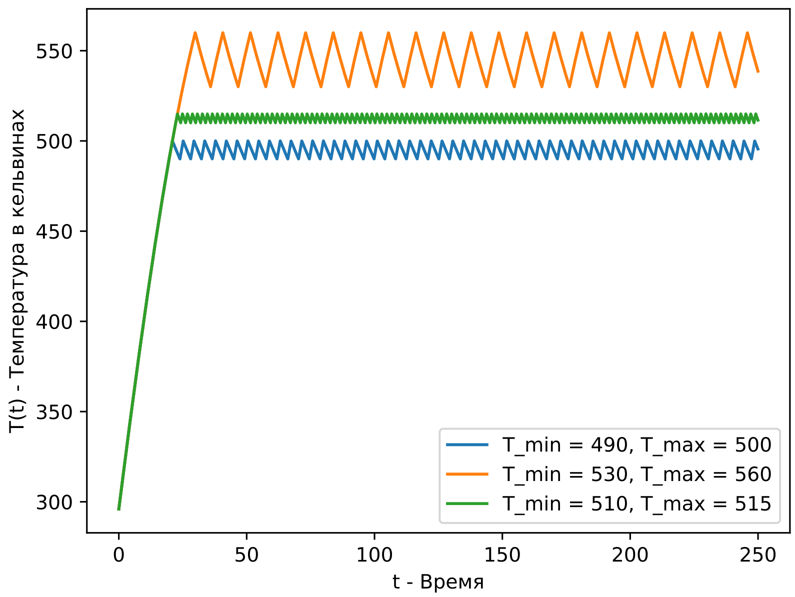

Рис. 3: Графики моделей при
$$P = 2500\text{Вт},\ m = 0.4\text{кг},\ c = 554\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}},\ S = 0.2\text{м}^2,\ k = 4,\ T_0 = 296\text{K}.$$

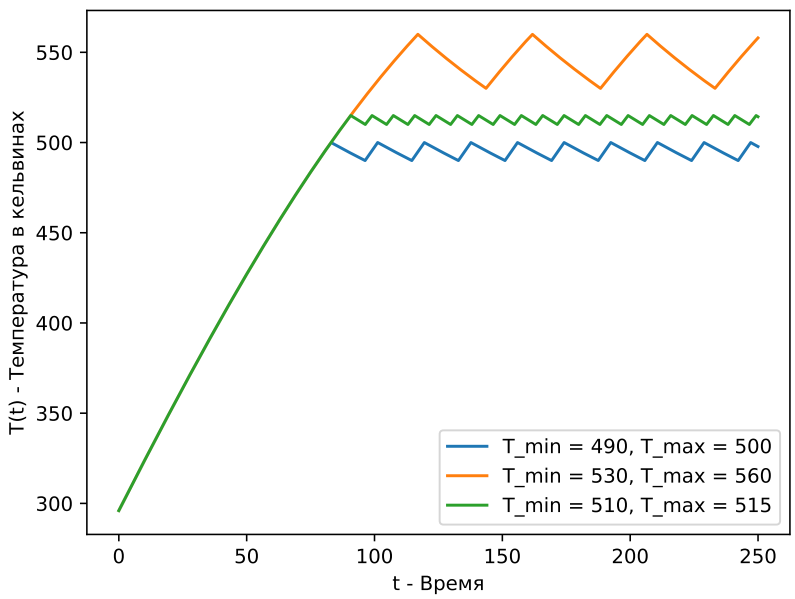

Рис. 4: Графики моделей при
$$P = 2500\text{Вт},\ m = 1\text{кг},\ c = 897\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}},\ S = 0.2\text{м}^2,\ k = 2,\ T_0 = 296\text{K}.$$

На (Рис. 2, 3, 4) построены модели, у которых отличаются только максимальное и минимальное значение температуры для функции-«переключателя».

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель электрического нагревателя с терморегулятором и без него. Написанная программа позволяет построить графики изменения температуры в зависимости от времени, а также найти найти максимальную температуру модели с конкретными параметрами.