МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине

«Математическое и копмьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Профессор д.ф.-м. н.
Пермяков М. С. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 7 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1 Введение **3**

2 Математическая модель **4**

2.1 Модели с внешними силами 5

3 Анализ модели **6**

4 Вычислительные эксперименты **7**

4.1 Алгоритм 7

4.2 Программа 7

4.3 Результаты 9

4.3.1 Модель без дополнительных сил 10

4.3.2 Модель с трением 11

4.3.3 Модель с вынуждающими колебаниями 11

4.3.4 Модель с трением и вынуждающими колебаниями . . . 13

4.3.5 Резонанс 14

5 Заключение **16**

1. Введение

Во нашем мире большое количество явлений это колебания, например, звук – это колебания воздуха, свет – колебания электромагнитных волн. И математический маятник – это фундаментальная модель идеальных колебаний. В отличие от физического маятника, мы не учитываем внешние факторы и представляем маятник наиболее просто – как материальную точку, движущуюся в одной плоскости. Однако, также представляет интерес и взаимодействие каких-либо внешних сил на маятник.

2. Математическая модель

Движение математического маятника во времени можно описать на Декартовой плоскости (x, y) в зависимости от времени t. Предположим, что сам маятник является материальной точкой, длина невесомой нити L (м) и ускорение свободного падения $\left(g \approx 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$ постоянны. Тогда движение маятника вместо пары (x, y) можно описать углом отклонения от вертикальной оси α.

Воспользуемся уравнением моментов для материальной точки:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M,$$

где J – момент инерции относительно оси, M – момент сил. Для материальной точки: $J = mL^2$, где m – масса маятника.

На маятник влияет сила тяжести, равная $F = mg$, но на движение будет влиять только её составляющая, касательная к движению, поэтому $F = -mg \sin \alpha$. Эта сила перпендикулярна к нити, поэтому момент силы равен:

$$M = FL = -mgL \sin \alpha.$$

Подставляя в уравнение моментов, и приводя слагаемые:

$$mL^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL \sin \alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает угол отклонения маятника в зависимости от времени.

Обозначим $w^2 = \frac{g}{L}$ и добавим начальные условия для получения единственного решения:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w^2 \sin \alpha = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Известно, что при небольших значениях углов $\sin x \approx x$, поэтому из нелинейной модели сделаем линейную: $\ddot{\alpha} + w^2 \alpha = 0$.

2.1. Модели с внешними силами

Одной из внешних сил является трение. Оно зависит от скорости с некоторым коэффициентом $k > 0$. Получим модель с трением: $\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + w^2\alpha = 0$.

Также внешними силами могут быть вынуждающие колебания: $A_f \sin\left(w_f t\right)$ с амплитудой A_f и частотой w_f. Модель с вынуждающими колебаниями:
$\ddot{\alpha} + w^2\alpha = A_f \sin\left(w_f t\right)$.

Если на маятник будут действовать сразу обе предыдущие силы, то уравнение будет выглядеть так: $\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + w^2\alpha = A_f \sin\left(w_f t\right)$.

3. Анализ модели

Проанализируем линейную модель:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w^2\alpha = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Известен вид аналитического решения: $\alpha(t) = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)$. Находим частное решение: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(wt) + \dfrac{a_1}{w} \sin(wt)$. Можно найти такой угол φ и константу ρ, что $\rho \sin\varphi = \alpha_0$ и $\rho \cos\varphi = \dfrac{a_1}{w}$, поэтому по формуле синуса суммы: $\alpha(t) = \rho \sin(wt + \varphi)$.

Значит результатом решения будет синусоида с некоторым смещением в зависимости от начальных параметров.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных $\beta(t) = \dot{\alpha}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\beta} + w^2 \sin\alpha = 0, \\ \beta = \dot{\alpha}, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\beta} = -w^2 \sin\alpha, \\ \dot{\alpha} = \beta, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Для системы данного вида можно применять различные численные методы. Уравнения с дополнительными силами аналогично приводятся к такому виду.

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим их решения и фазовые плоскости.

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

```python
import numpy as np
import math


def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
    num = math.ceil((b - a) / h)
    x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
    y_a = [y0] * num

    for i in range(num - 1):
        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
```

```python
        k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
        k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
        y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)

    return x_a, np.array(y_a)

def right(t, ab):
    return np.array([
        ab[1],
        -w**2 * ab[0]
    ])

def model(y0, right):
    x_, y_ = runge_kutta(right, y0, t0, tn, (tn-t0)/n)
    y_ = y_.T

    return x_, y_

t0, tn = 0, 15
n = 10000

g = 9.8
L = 1
w = np.sqrt( g / L )

init = [np.pi/100, 0]
x_, y_ = model(init, right)
```

Для модели с силой трения и вынуждающими колебаниями для каждой частоты колебаний найдём максимальную амплитуду, после того как установится равновесие сил. Это можно сделать, например, найдя максимум последних 100 (или последних 25%) значений результата.

```python
import numpy as np

def right_force_firc(t, ab):
    return np.array([
        ab[1],
        Af * np.sin(wf * t) - k * ab[1] - w**2 * ab[0]
```

```
    ])

def model(y0, right):
    x_, y_ = runge_kutta(right, y0, t0, tn, (tn-t0)/n)
    y_ = y_.T

    return x_, y_

t0, tn = 0, 1000
n = 10000

w = np.sqrt( 9.8 / 1 )л
 = 0.01
Af = 1
wf = 0.5

init = [np.pi/10, 0]
wfs = np.linspace(-1, 1, 41)**5
wfs = 0.1 * wfs + w
for k in [0.1, 0.05, 0.01]:
    Al = []
    for wfi in wfs:
        wf = wfi
        x_, y_ = model(init, right_force_firc)
        Al.append(max(abs( y_[0][-min(n//4, 100):] )))

    wfs, Al
```

4.3. Результаты

Будем строить изменение угла во времени и фазовый портрет системы. Для всех следующих экспериментов длина маятника $L = 1, g = 9.8$, из чего следует, что собственная частота $w = \sqrt{\dfrac{g}{L}} \approx 3.13\ldots$

4.3.1. Модель без дополнительных сил

Сравним линейное и нелинейное дифференциальное уравнение при различных начальных углах наклона и нулевой начальной скорости.

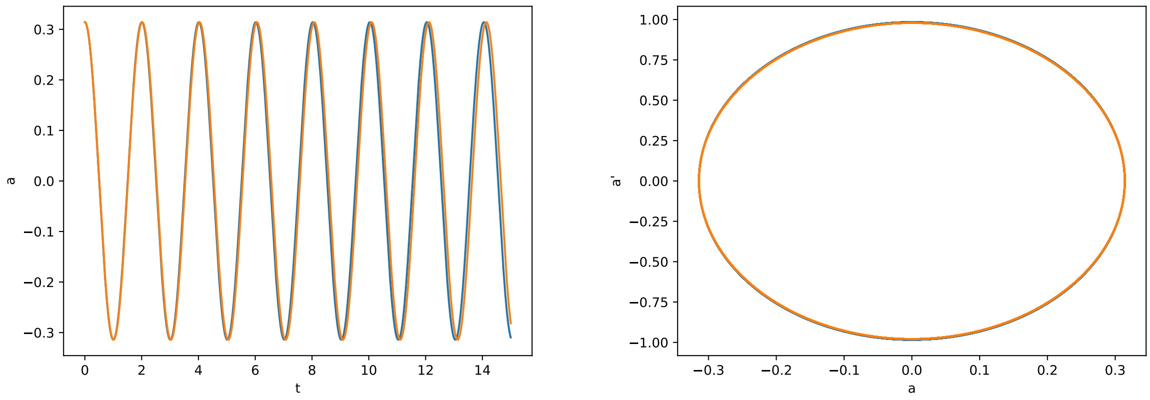

Рис. 1: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}$.

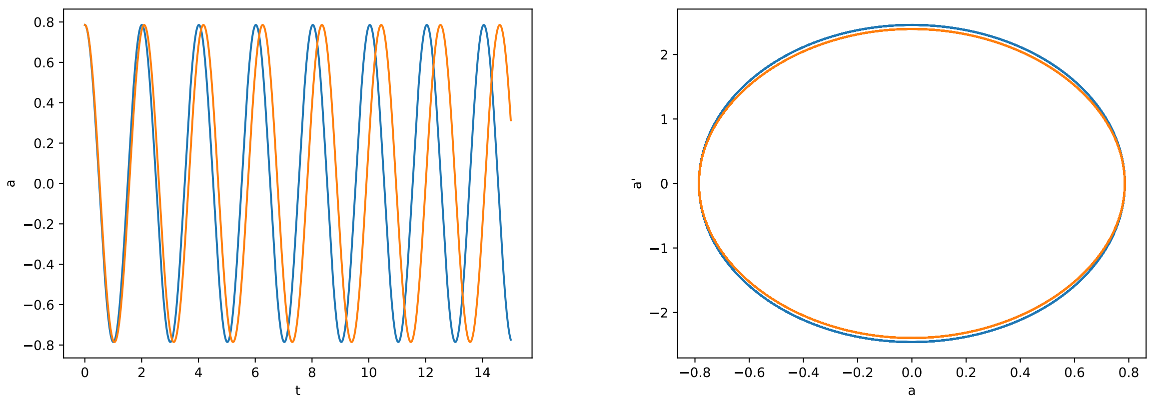

Рис. 2: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Синей кривой визуализирована линейная модель, оранжевой – нелинейная.

На данных результатах видно, что при небольшом угле наклона разница небольшая, а при большем – увеличивается период и вместе с этим растёт и погрешность линейной модели. На фазовой плоскости можно увидеть более суженный эллипс у нелинейной модели, что означает меньшую скорость.

4.3.2. Модель с трением

Рассмотрим результаты влияния трения на маятник.

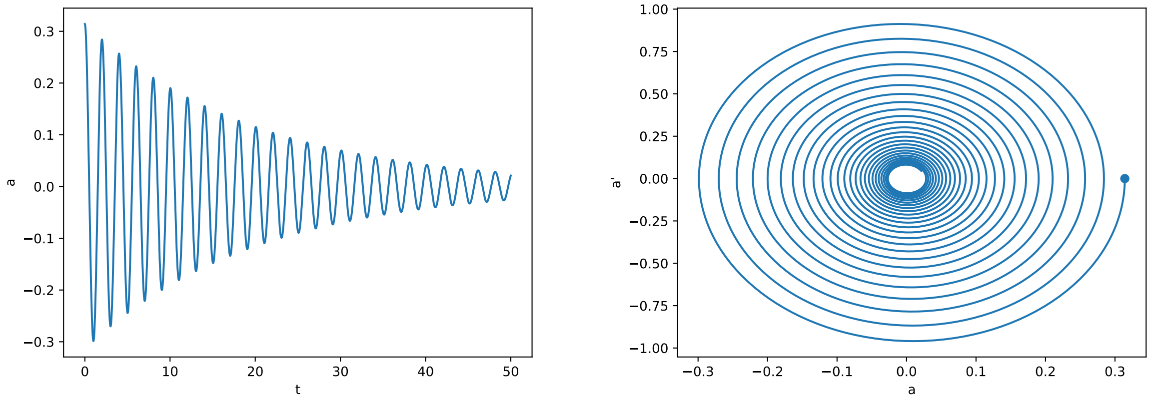

Рис. 3: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}, \quad \dot{\alpha}(0) = 0, \quad k = 0.1.$

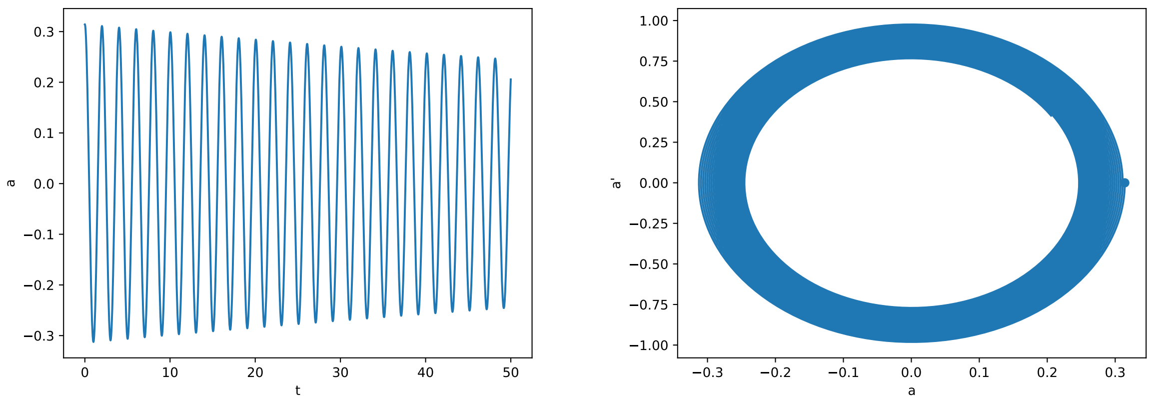

Рис. 4: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}, \quad \dot{\alpha}(0) = 0, \quad k = 0.01.$

Видно, что амплитуда колебаний из-за трения со временем уменьшается, поэтому колебания являются затухающими. Кривая на фазовой плоскости из-за затухания постепенно приближается к нулю. Чем меньше коэффициент трения, тем медленнее происходит затухание.

4.3.3. Модель с вынуждающими колебаниями

Рассмотрим результаты при действии вынуждающих колебаний на маятник с начальными условиями $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}, \quad \dot{\alpha}(0) = 0.$

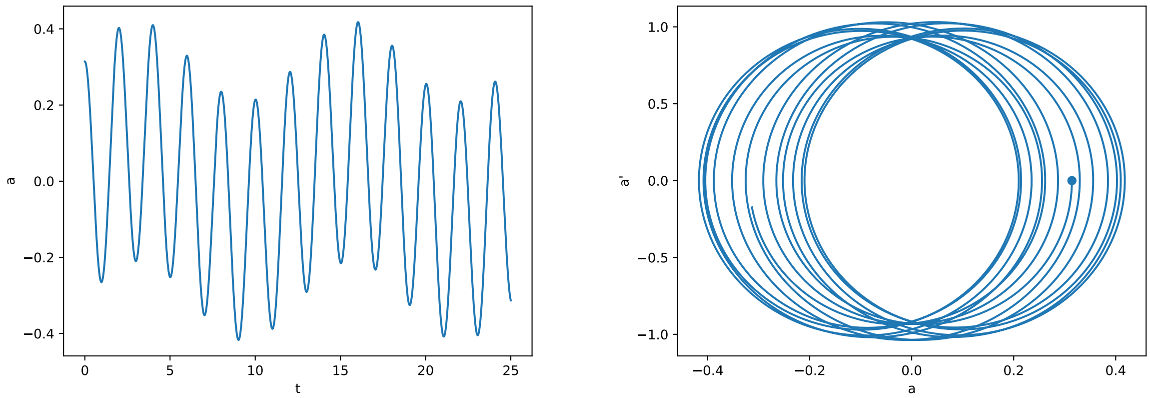

Рис. 5: $A_f = 1 \quad w_f = 0.5$.

Из-за вынуждающих колебаний происходит смещение значений угла наклона маятника, что также отражается и на фазовой плоскости.

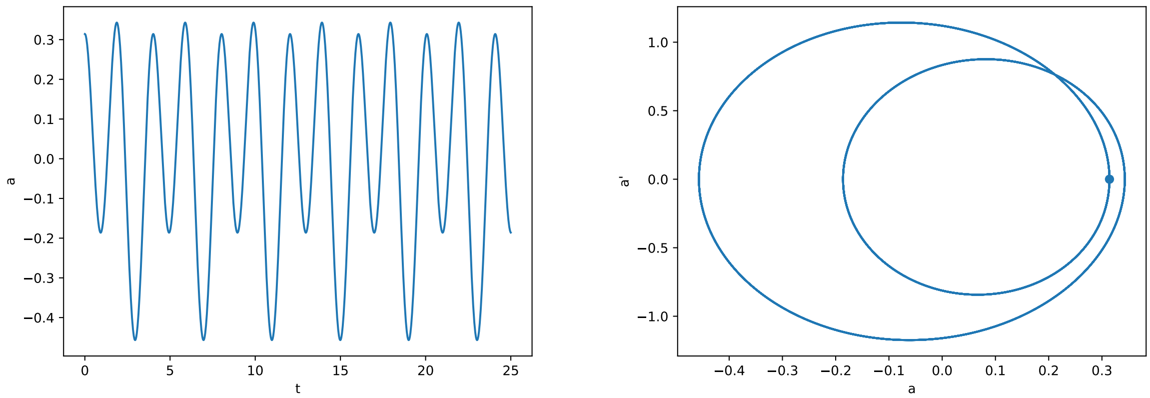

Рис. 6: $A_f = 1 \quad w_f = \dfrac{w}{2}$.

При частоте вынуждающих колебаний, равной целой доли собственной частоты маятника, видно смещение угла, но с некоторым периодом это смещение повторяется. На фазовой плоскости видно замкнутую кривую, что и подтверждает существование некоторого периода колебаний.

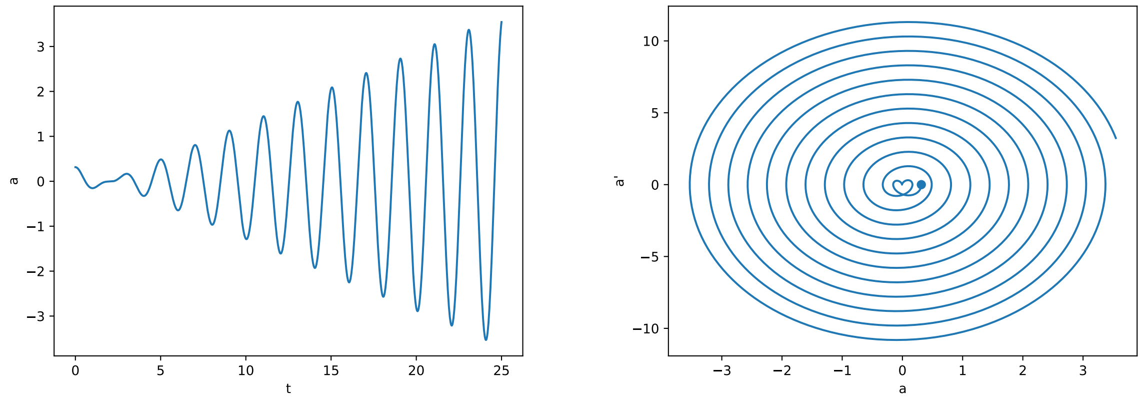

Рис. 7: $A_f = 1 \quad w_f = w$.

При совпадении частоты вынуждающих колебаний с собственной частотой маятника происходит эффект резонанса – амплитуда колебаний неограниченно растёт.

4.3.4. Модель с трением и вынуждающими колебаниями

Рассмотрим модель, в которой присутствуют обе внешние силы, с начальными условиями: $\alpha(0) = \dfrac{\pi}{10}, \quad \dot{\alpha}(0) = 0$. Далее синим визуализированы первая четверть данных, а оранжевым – оставшиеся три четверти.

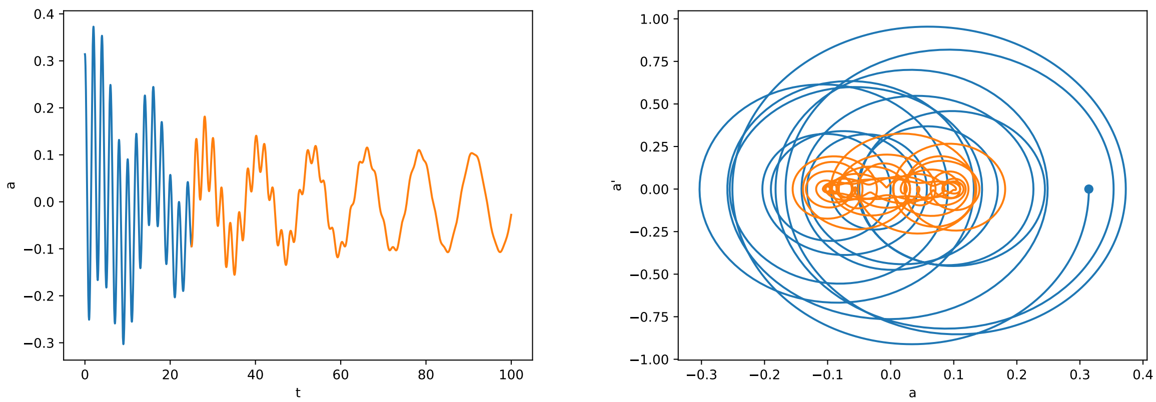

Рис. 8: $A_f = 1 \quad w_f = 0.5$.

Изначально хаотическое движение маятника постепенно сглаживается и получается колебание с другим периодом и амплитудой.

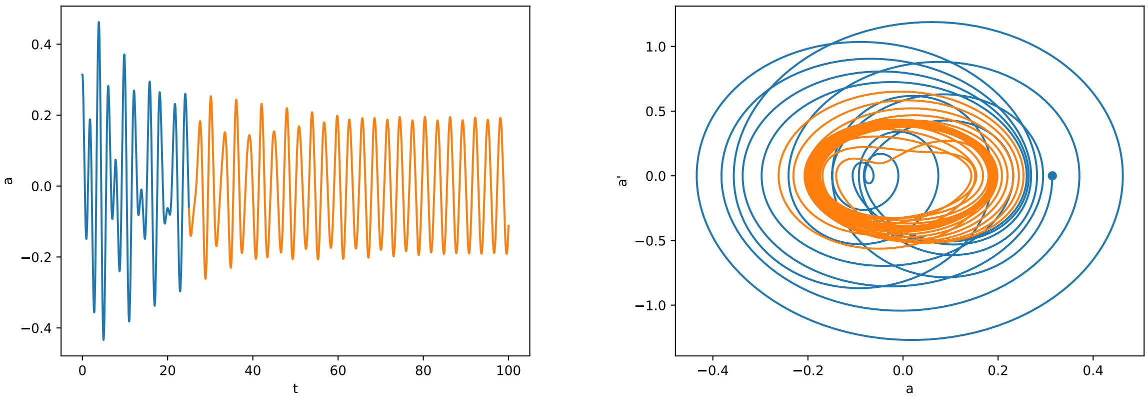

Рис. 9: $A_f = 1 \quad w_f = w - 1$.

При приближении к собственной частоте период и амплитуда установившихся колебаний увеличиваются.

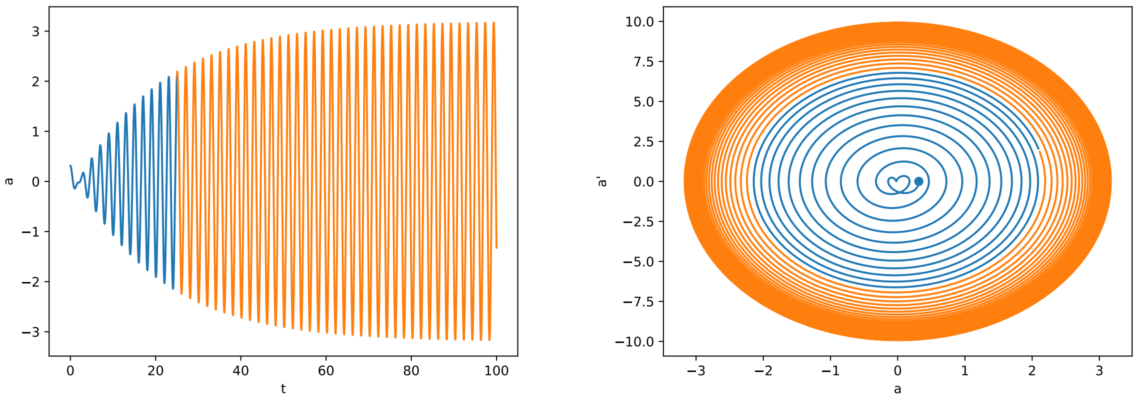

Рис. 10: $A_f = 1 \quad w_f = w$.

Самая большая амплитуда достигается при частоте, равной собственной частоте маятника. В отличие от модели без силы трения, данные резонансные колебания не будут неограниченно увеличиваться.

4.3.5. Резонанс

Изобразим кривые установившихся колебаний для разных параметров трения.

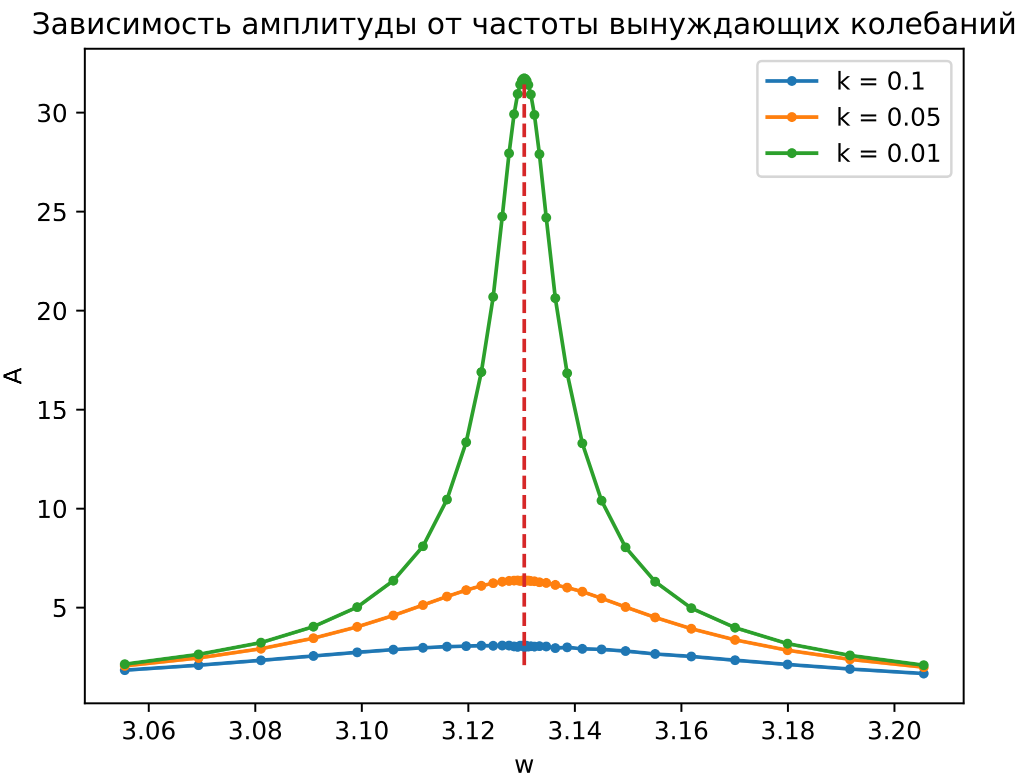

Рис. 11: Кривая амплитуд. Красным пунктиром обозначена собственная частота w.

Видно, что для любых коэффициентов трения при резонансной частоте достигается максимальная амплитуда. При этом, чем меньше трение, тем больше амплитуда.

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель маятника, а именно: линейная, нелинейная, с трением, с вынуждающей силой, и с трением и вынуждающей силой. Модель представляет из себя дифференциальное уравнение второго порядка. Она была проанализирована и был найден аналитический вид решения. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. После чего построены графики решения уравнения в зависимости от параметров: в зависимости от времени и на фазовой плоскости. Был показан эффект резонанса вынуждающей силы с маятником.