



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«Дальневосточный федеральный университет»**  
(ДВФУ)

---

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**  
**(ШКОЛА)**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**ОТЧЁТ**

к лабораторной работе №3 по дисциплине  
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор д.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 15 » июня 2024 г.

**г. Владивосток**

**2024**

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>4</b>
2.1	Модели с внешними силами . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Анализ модели</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Вычислительные эксперименты</b>	<b>7</b>
4.1	Алгоритм . . . . .	7
4.2	Программа . . . . .	7
4.3	Результаты . . . . .	8
4.3.1	Модель без дополнительных сил . . . . .	9
4.3.2	Модель с трением . . . . .	10
4.3.3	Модель с вынуждающими колебаниями . . . . .	11
4.3.4	Модель с трением и вынуждающими колебаниями . . .	12
4.3.5	Резонанс . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>

# 1. Введение

В нашем мире большое количество явлений это колебания, например, звук – это колебания воздуха, свет – колебания электромагнитных волн. И математический маятник – это фундаментальная модель идеальных колебаний. В отличие от физического маятника, мы не учитываем внешние факторы и представляем маятник наиболее просто – как материальную точку, движущуюся в одной плоскости. Однако, также представляет интерес и взаимодействие каких-либо внешних сил на маятник.

## 2. Математическая модель

Движение математического маятника во времени можно описать на Декартовой плоскости  $(x, y)$  в зависимости от времени  $t$ . Предположим, что сам маятник является материальной точкой, длина невесомой нити  $L$  (м) и ускорение свободного падения  $\left(g \approx 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$  постоянны. Тогда движение маятника вместо пары  $(x, y)$  можно описать углом отклонения от вертикальной оси  $\alpha$ .

Воспользуемся уравнением моментов для материальной точки:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M,$$

где  $J$  – момент инерции относительно оси,  $M$  – момент сил. Для материальной точки:  $J = mL^2$ , где  $m$  – масса маятника.

На маятник влияет сила тяжести, равная  $F = mg$ , но на движение будет влиять только её составляющая, касательная к движению, поэтому  $F = -mg \sin \alpha$ . Эта сила перпендикулярна к нити, поэтому момент силы равен:

$$M = FL = -mgL \sin \alpha.$$

Подставляя в уравнение моментов, и приводя слагаемые:

$$mL^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + mgL \sin \alpha = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \alpha = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает угол отклонения маятника в зависимости от времени.

Обозначим  $w^2 = \frac{g}{L}$  и добавим начальные условия для получения единственного решения:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w^2 \sin \alpha = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Известно, что при небольших значениях углов  $\sin x \approx x$ , поэтому из нелинейной модели сделаем линейную:  $\ddot{\alpha} + w^2 \alpha = 0$ .

## 2.1. Модели с внешними силами

Одной из внешних сил является трение. Оно зависит от скорости с некоторым коэффициентом  $k > 0$ . Получим модель с трением:  $\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + w^2\alpha = 0$ .

Также внешними силами могут быть вынуждающие колебания:  $A_f \sin(w_f t)$  с амплитудой  $A_f$  и частотой  $w_f$ . Модель с вынуждающими колебаниями:  $\ddot{\alpha} + w^2\alpha = A_f \sin(w_f t)$ .

Если на маятник будут действовать сразу обе предыдущие силы, то уравнение будет выглядеть так:  $\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} + w^2\alpha = A_f \sin(w_f t)$ .

### 3. Анализ модели

Проанализируем линейную модель:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + w^2 \alpha = 0, \\ \dot{\alpha}(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{cases}$$

Известен вид аналитического решения:  $\alpha(t) = C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)$ .  
Находим частное решение:  $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(wt) + \frac{a_1}{w} \sin(wt)$ . Можно найти такой угол  $\varphi$  и константу  $\rho$ , что  $\rho \sin \varphi = \alpha_0$  и  $\rho \cos \varphi = \frac{a_1}{w}$ , поэтому по формуле синуса суммы:  $\alpha(t) = \rho \sin(wt + \varphi)$ .

Значит результатом решения будет синусоида с некоторым смещением в зависимости от начальных параметров.

## 4. Вычислительные эксперименты

### 4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных  $\beta(t) = \dot{\alpha}(t)$ , и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} + w^2 \sin \alpha = 0, \\ \beta = \dot{\alpha}, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} = -w^2 \sin \alpha, \\ \dot{\alpha} = \beta, \\ \beta(0) = \alpha_1, \quad \alpha(0) = \alpha_0. \end{array} \right.$$

Для системы данного вида можно применять различные численные методы. Уравнения с дополнительными силами аналогично приводятся к такому виду.

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим результаты и фазовые плоскости колебаний.

### 4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками numpy и matplotlib.

---

```
1 import numpy as np
2 import math
3
4
5 def runge_kutta(function, y0: float, a: float, b: float, h: float):
6     num = math.ceil((b - a) / h)
7     x_a = np.linspace(a, b, num=num, endpoint=False)
8     y_a = [y0] * num
9
10    for i in range(num - 1):
11        k0 = function(x_a[i], y_a[i])
12        k1 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k0 / 2)
```

```

13         k2 = function(x_a[i] + h / 2, y_a[i] + h * k1 / 2)
14         k3 = function(x_a[i] + h, y_a[i] + h * k2)
15         y_a[i + 1] = y_a[i] + h / 6 * (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3)
16
17     return x_a, np.array(y_a)
18
19 def right(t, ab):
20     return np.array([
21         ab[1],
22         -w**2 * ab[0]
23     ])
24
25 def model(y0, right):
26     x_, y_ = runge_kutta(right, y0, t0, tn, (tn-t0)/n)
27     y_ = y_.T
28
29     return x_, y_
30
31 t0, tn = 0, 15
32 n = 10000
33
34 g = 9.8
35 L = 1
36 w = np.sqrt( g / L )
37
38 init = [np.pi/100, 0]
39 x_, y_ = model(init, right)

```

---

### 4.3. Результаты

Будем строить изменение угла во времени и фазовый портрет системы. Для всех следующих экспериментов длина маятника  $L = 1$ ,  $g = 9.8$ , из чего следует, что собственная частота  $w = \sqrt{\frac{g}{L}} \approx 3.13 \dots$



#### 4.3.1. Модель без дополнительных сил

Сравним линейное и нелинейное дифференциальное уравнение при различных начальных углах наклона и нулевой начальной скорости.

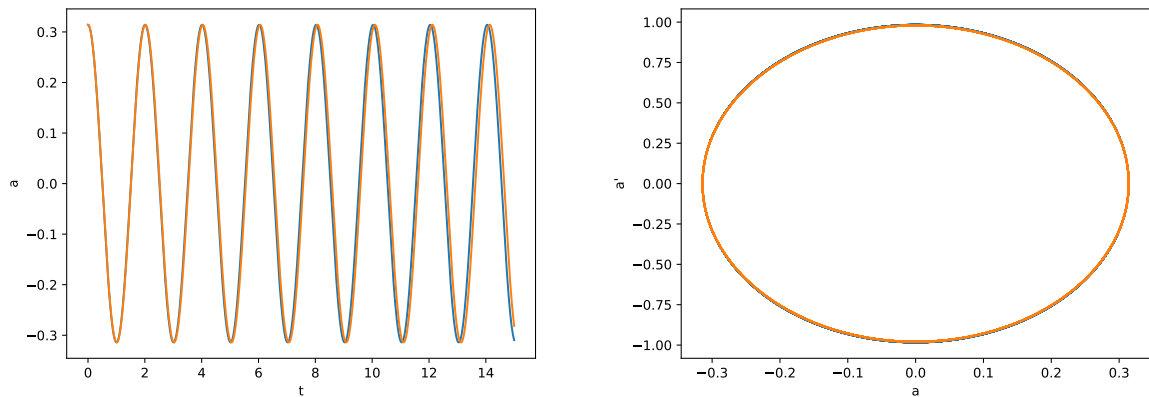


Рис. 1:  $\alpha(0) = \frac{\pi}{10}$ .

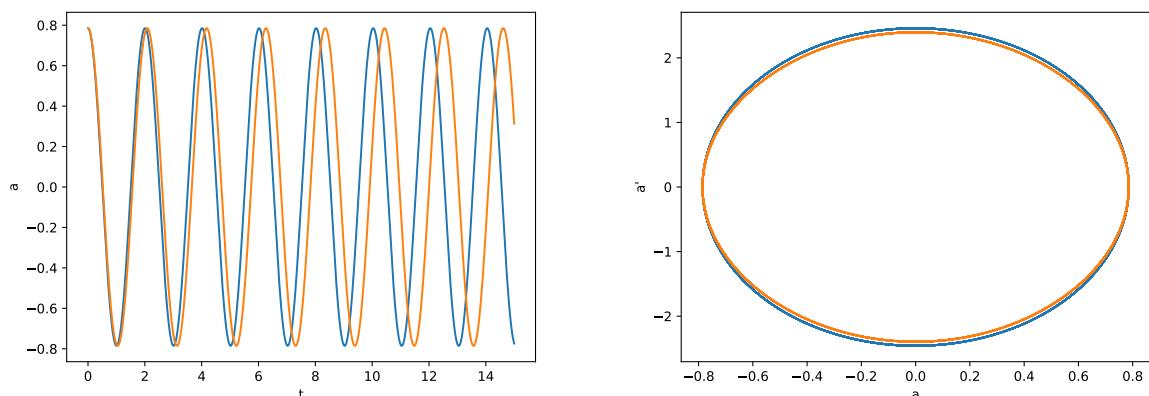


Рис. 2:  $\alpha(0) = \frac{\pi}{4}$ .

Синей кривой визуализирована линейная модель, оранжевой – нелинейная.

На данных результатах (Рис. 1, 2) видно, что при небольшом угле наклона разница небольшая, а при большем – увеличивается период и вместе с этим растёт и погрешность линейной модели. На фазовой плоскости можно увидеть более суженный эллипс у нелинейной модели, что означает меньшую скорость.

### 4.3.2. Модель с трением

Рассмотрим результаты влияния трения на маятник. При начальных условиях  $\alpha(0) = \frac{\pi}{10}$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ .

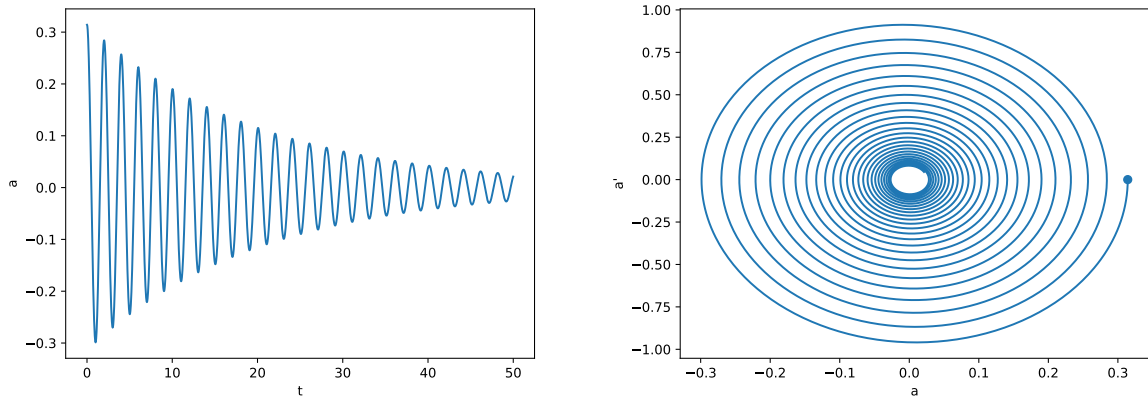


Рис. 3:  $k = 0.1$ .

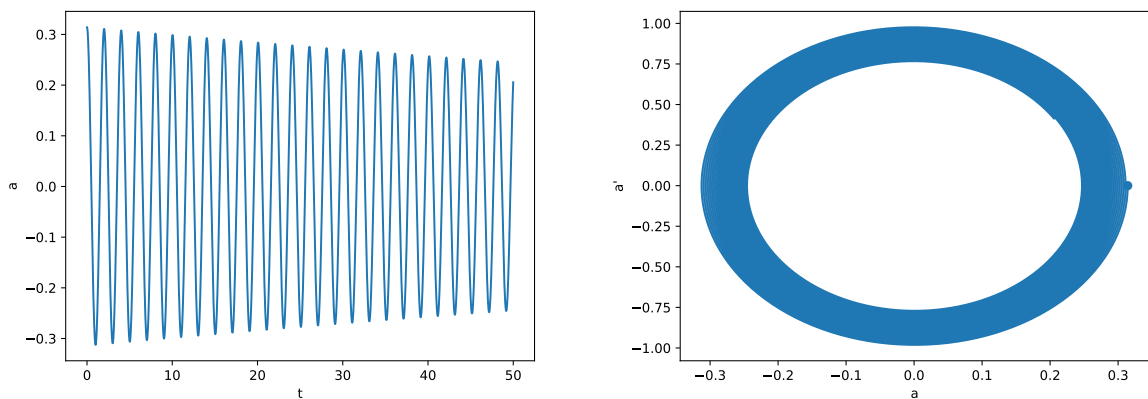


Рис. 4:  $k = 0.01$ .

Видно (Рис. 3,4), что амплитуда колебаний из-за трения со временем уменьшается, поэтому колебания являются затухающими. Кривая на фазовой плоскости из-за затухания постепенно приближается к нулю. Чем меньше коэффициент трения, тем медленнее происходит затухание.

### 4.3.3. Модель с вынуждающими колебаниями

Рассмотрим результаты при действии вынуждающих колебаний на маятник с начальными условиями  $\alpha(0) = \frac{\pi}{10}$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ .

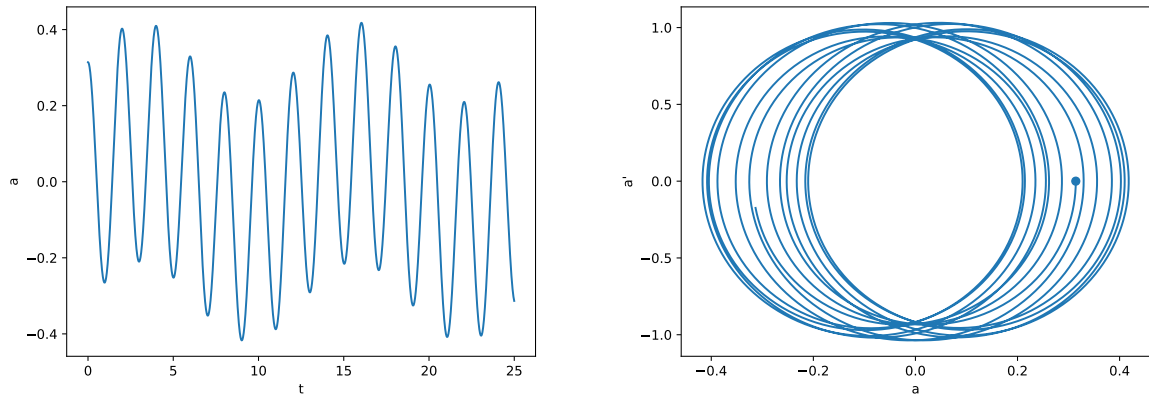


Рис. 5:  $A_f = 1$ ,  $w_f = 0.5$ .

Из-за вынуждающих колебаний (Рис. 5) происходит смещение значений угла наклона маятника, что также отражается и на фазовой плоскости.

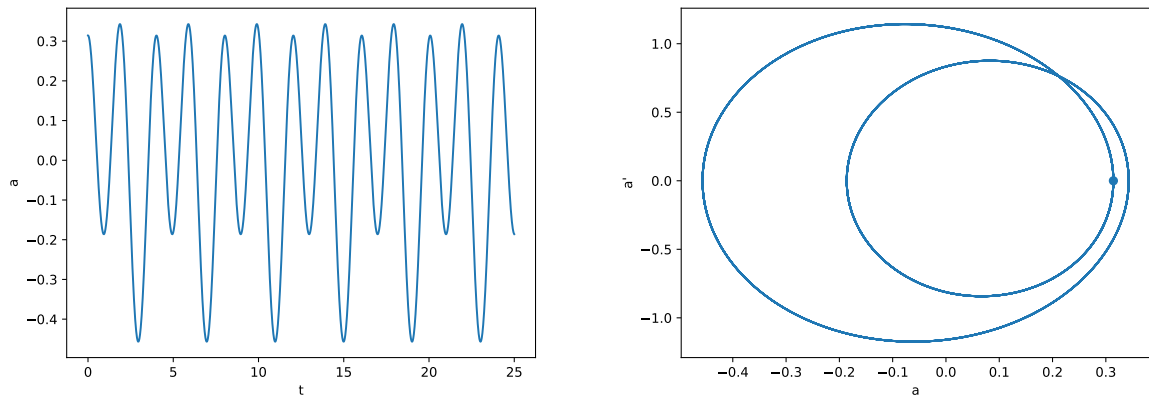


Рис. 6:  $A_f = 1$ ,  $w_f = \frac{w}{2}$ .

При частоте вынуждающих колебаний, равной целой доли собственной частоты маятника (Рис. 6), видно смещение угла, но с некоторым периодом это смещение повторяется. На фазовой плоскости видно замкнутую кривую, что и подтверждает существование некоторого периода колебаний.

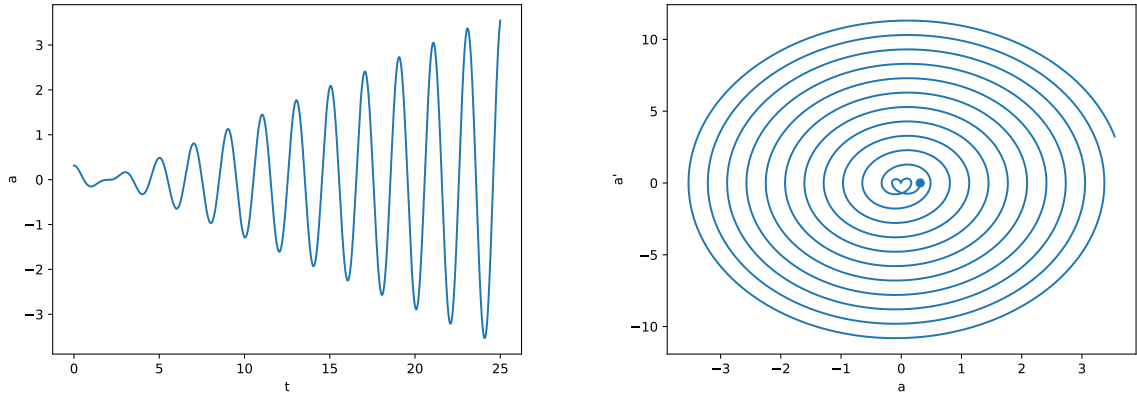


Рис. 7:  $A_f = 1$ ,  $w_f = w$ .

При совпадении частоты вынуждающих колебаний с собственной частотой маятника (Рис. 7) происходит эффект резонанса – амплитуда колебаний неограниченно растёт.

#### 4.3.4. Модель с трением и вынуждающими колебаниями

Рассмотрим модель, в которой присутствуют обе внешние силы, с начальными условиями:  $\alpha(0) = \frac{\pi}{10}$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ . Далее синим визуализированы первая четверть данных, а оранжевым – оставшиеся три четверти.

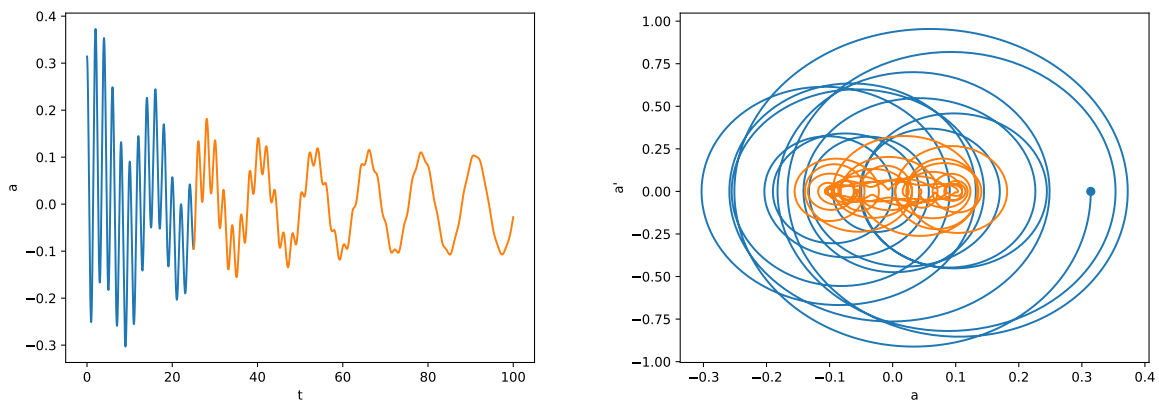


Рис. 8:  $A_f = 1$ ,  $w_f = 0.5$ .

Изначально хаотическое движение маятника постепенно сглаживается и получается колебание с другим периодом и амплитудой (Рис. 8).

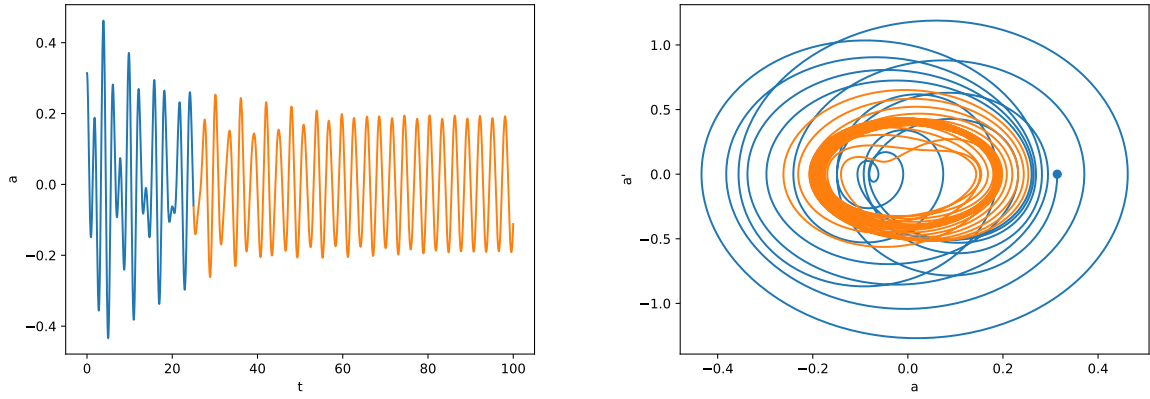


Рис. 9:  $A_f = 1$ ,  $w_f = w - 1$ .

При приближении к собственной частоте (Рис. 9) период и амплитуда установившихся колебаний увеличиваются.

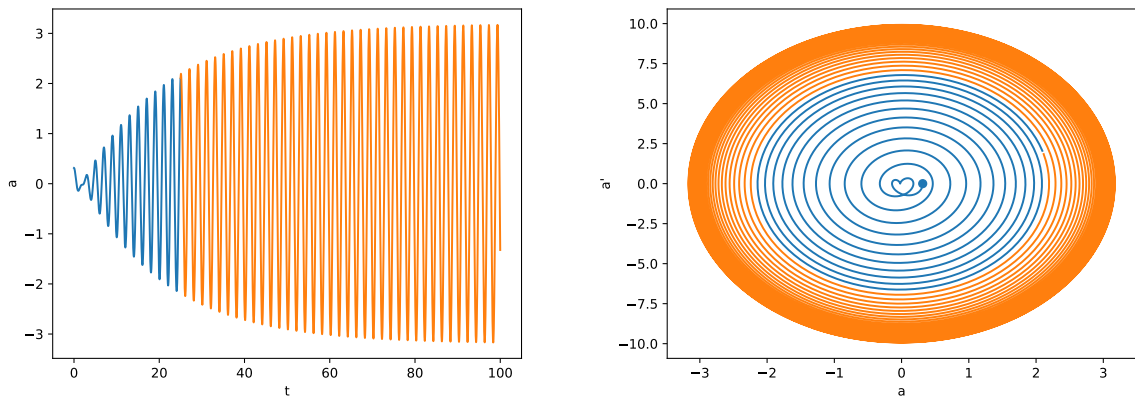


Рис. 10:  $A_f = 1$ ,  $w_f = w$ .

Самая большая амплитуда достигается при резонансной частоте. В отличие от модели без силы трения, данные резонансные колебания не будут неограниченно увеличиваться. Однако, нельзя делать вывод, что с силой трения резонансная частота является собственной (Рис. 10).

#### 4.3.5. Резонанс

Для того, чтобы исследовать эффект резонанса подробнее построим резонансные кривые. Поскольку этот эффект связан с собственной частотой, будем

выбирать несколько значений частоты вынуждающих колебаний около неё. Для каждой такой частоты получим численное решение и найдём из последней четверти значений максимальное по модулю. Получим зависимость  $A = \alpha(w_f)$ . Для сравнения с численным решением используем известное аналитическое решение:

$$\alpha(w_f) = \frac{A_f}{m\sqrt{(2w_fw\zeta)^2 + (w^2 - w_f^2)^2}}, \quad \zeta = \frac{k}{2mw}.$$

В функции используется масса ( $m$ ), примем её равной 1.

По оси  $w$  будем откладывать значения  $\frac{w_f}{w}$  (т.е. резонансная частота находится на отметке 1). Построим кривые для различных значений коэффициента трения на отрезках  $[0.5w, 2w]$  и  $[0.9w, 1.1w]$ . Для выборки значений частоты вынуждающих колебаний используем равномерную сетку из 60 точек.

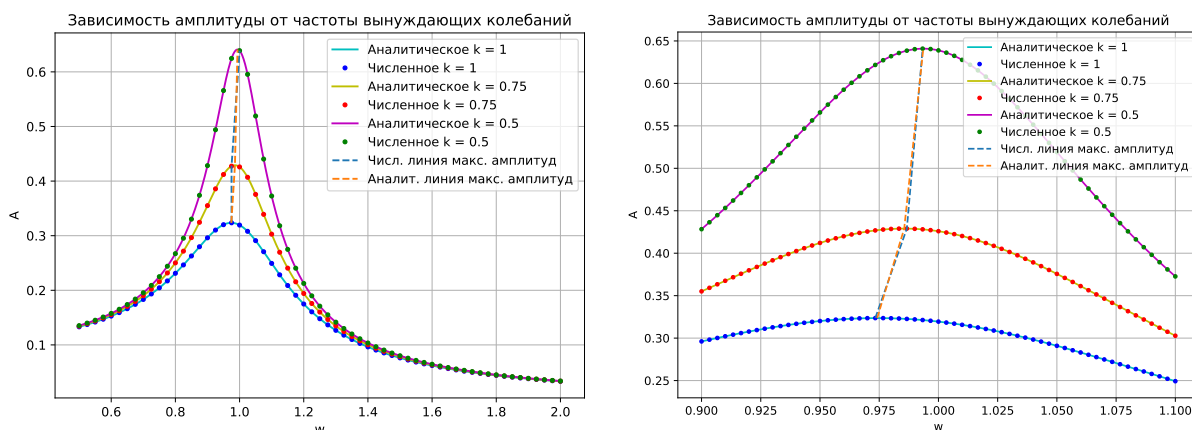


Рис. 11: Кривая амплитуд.

Видно (Рис. 11), что для разных коэффициентов трения резонансная частота достигается в разных местах. При этом, с уменьшением трения амплитуда резонанса становится всё больше, а резонансная частота стремится к собственной.

## 5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель маятника, а именно: линейная, нелинейная, с трением, с вынуждающей силой, и с трением и вынуждающей силой. Модель представляет из себя дифференциальное уравнение второго порядка. Она была проанализирована и был найден аналитический вид решения. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. После чего построены графики решения уравнения в зависимости от параметров: в зависимости от времени и на фазовой плоскости. Был показан эффект резонанса вынуждающей силы с маятником.