

Индивидуальное домашнее задание №2 по
дисциплине «Уравнения математической
физике»
Вариант 6

Держапольский Юрий Витальевич

Задание 1

Найти собственные функции y_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, оператора:

$$\begin{cases} y'' + 3y = \lambda y, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$y'' + (3 - \lambda)y = 0; \quad k^2 + (3 - \lambda) = 0; \quad k = \pm\sqrt{3 - \lambda}$$

$$\lambda - 3 = -\mu^2; \quad k_{1,2} = \pm\mu i$$

$$y(x) = C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x; \quad y'(x) = C_1 \mu \cos \mu x - C_2 \mu \sin \mu x$$

$$y(0) = C_2 = 0; \quad y'(1) = C_1 \mu \cos \mu = 0 \Rightarrow \mu_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0, 1, \dots$$

$$y_k(x) = C_1 \sin ((0.5 + k)\pi x)$$

Нормируем систему:

$$\frac{y_k}{\|y_k\|} = \frac{C_1 \sin ((0.5 + k)\pi x)}{\sqrt{C_1^2 \int_0^1 \left(\sin^2 ((0.5 + k)\pi x) \right) dx}} = \star$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sin^2 ((0.5 + k)\pi x) \right) dx &= \int_0^1 \frac{1 - \cos ((1 + 2k)\pi)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sin(\pi + 2\pi k)}{2(\pi + 2\pi k)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\star = \frac{\sin ((0.5 + k)\pi x)}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \sin ((0.5 + k)\pi x)$$

Задание 2

Разложить функцию $f(x) = x(1-x)^4$ в ряд Фурье по собственным функциям y_k . Построить графики функции и ряда Фурье для пяти гармоник.

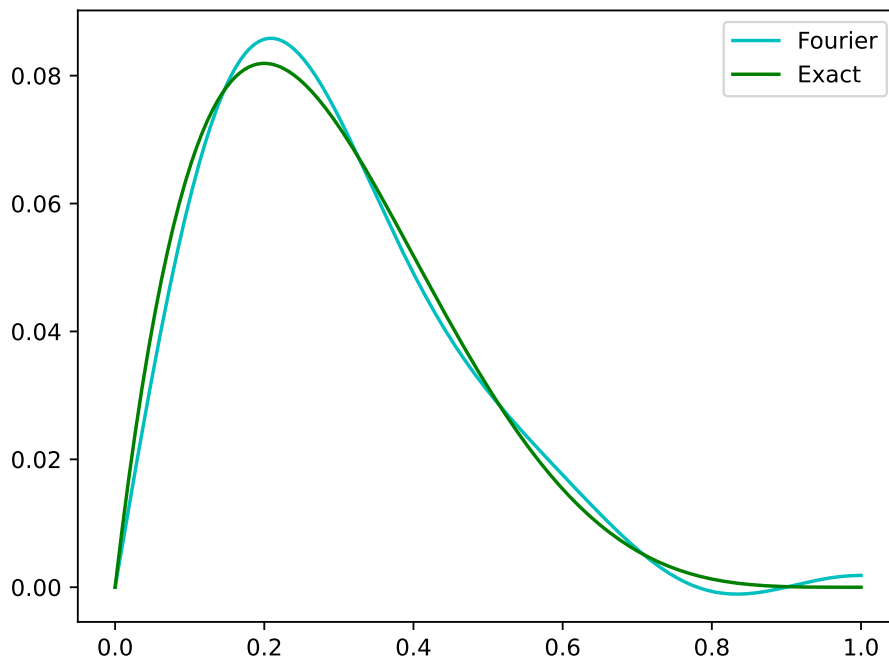
Поскольку система нормированная, то

$$C_k = \frac{(f, y_k)}{(y_k, y_k)} = (f, y_k) = \int_0^1 \left(x(1-x)^4 \cdot \sqrt{2} \sin((0.5+k)\pi x) \right) dx$$

Посчитаем первые 5 коэффициентов:

k	0	1	2	3	4
C_k	0.01975 ...	0.03419 ...	0.01953 ...	0.00756 ...	0.00378 ...

$$f(x) = \sum_{k=0}^4 \left(C_k \cdot \sqrt{2} \sin((0.5+k)\pi x) \right)$$



Задание 3

Проверить равенство Парсеваля: $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2$

$$\|f\|^2 \approx 0.002020202 \dots,$$

$$\sum_{k=0}^4 C_k^2 \approx 0.002012635 \dots,$$

$$\left| \|f\|^2 - \sum_{k=0}^4 C_k^2 \right| \approx 7.566271 \cdot 10^{-6}$$