



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине
«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп

Держапольский Ю.В.

(Ф.И.О.)

(подпись)

Профессор д.ф.-м. н.

Пермяков М. С.

(Ф.И.О.)

(подпись)

« 7 » июня 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель	4
3	Анализ модели	5
4	Вычислительные эксперименты	6
4.1	Алгоритм	6
4.2	Программа	6
4.3	Результаты	6
5	Заключение	9

1. Введение

Как говорил Альберт Эйнштейн: «Всё в мире относительно». И действительно, есть много разных точек зрения на одно и то же явление, и физика не является исключением. Например, когда мы едем в автобусе, мы перемещаемся относительно земли, но находимся на месте в самом автобусе. На космическом уровне Земля перемещается одним путём относительно Солнца, и другим относительно центра галактики.

Интересным представляет собой перемещение во вращающемся объекте, например, человека на карусели, или перемещение около полюса земли. Изучим, как происходит перемещение со стороны человека вне вращающейся системы координат.

2. Математическая модель

Приближим движение в какой-либо вращающейся системе координат вращением на диске. Примем за тело материальную точку с массой m , а угловую скорость диска – Ω . Трением будем пренебрегать.

Поскольку система является неинерциальной, то на тело действует сила инерции:

$$\vec{F}_i = m \frac{d\vec{V}}{dt},$$

где \vec{V} – вектор скорости.

Во вращающейся системе отсчёта наблюдателю кажется, что тела движутся по изогнутой траектории. Такой эффект называется эффектом Кориолиса. Сила Кориолиса равна:

$$\vec{F}_k = m \frac{d\vec{V}}{dt},$$

но в общем случае сила Кориолиса $\vec{F}_k \perp \vec{V}$ и равна:

$$\vec{F}_k = -2m [\vec{\Omega} \times \vec{V}].$$

Приравнивая формулы имеем:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = -2m [\vec{\Omega} \times \vec{V}].$$

Преобразовывая, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}. \end{cases}$$

Уравнения второго порядка, значит нужно 2 начальных условия для каждого – положение и скорость:

$$\begin{cases} x(0) = x_0, & \dot{x}(0) = x_1, \\ y(0) = y_0, & \dot{y}(0) = y_1. \end{cases}$$

3. Анализ модели

Найдём первый интеграл системы.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \Rightarrow x\ddot{x} + y\ddot{y} = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} = const.$$

Это сумма проекций кинетической энергии системы. Поскольку наша система замкнутая, то и закон сохранения энергии является справедливым. Это и подтверждает данное соотношение.

4. Вычислительные эксперименты

4.1. Алгоритм

Для реализации моделей сделаем замену переменных $u(t) = \dot{x}(t)$, $v(t) = \dot{y}(t)$, и получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \dot{y} = v, \\ \dot{u} = 2\Omega v, & \dot{v} = -2\Omega u, \\ x(0) = x_0, & y(0) = y_0, \\ u(0) = x_1, & v(0) = y_1. \end{cases}$$

Для компьютерного вычисления будем использовать метод Рунге-Кутты, с помощью которого получим численное решение системы дифференциальных уравнений с заданными параметрами. После чего построим их решения и фазовые плоскости.

По полученному закону сохранения энергии можем вывести соотношение: $u^2 + v^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0$. Также проверим его выполнение для численного решения.

4.2. Программа

Для расчётов и визуализации был использован язык Python с библиотеками `numpy` и `matplotlib`.

4.3. Результаты

Построим траектории, выходящие из точки $(5, 3)$ и имеющие начальные скорости: $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ на отрезке времени $[0, 5]$. Также покажем закон сохранения энергии.

Для начала возьмём $\Omega = 1$.

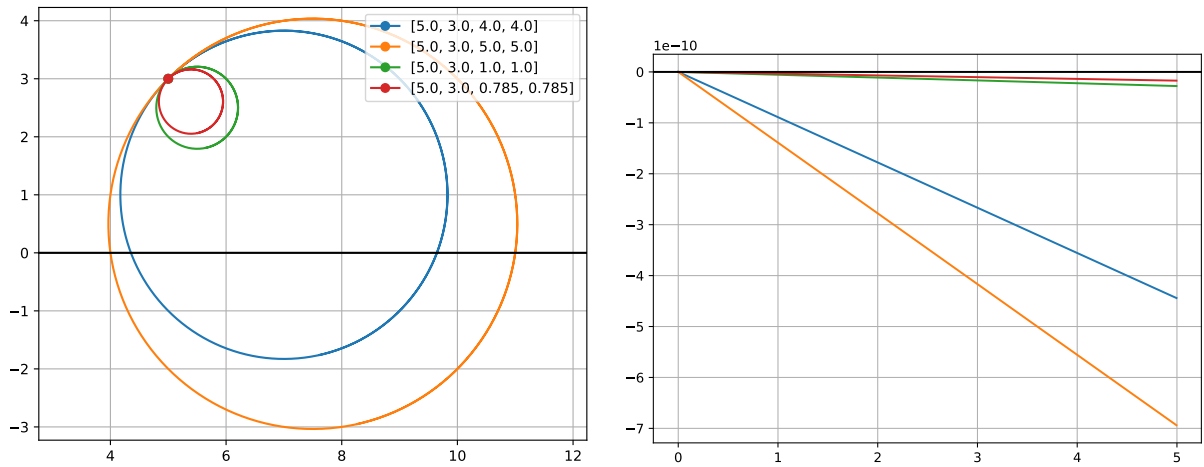


Рис. 1: Результат при количестве разбиений отрезка $n = 1000$.

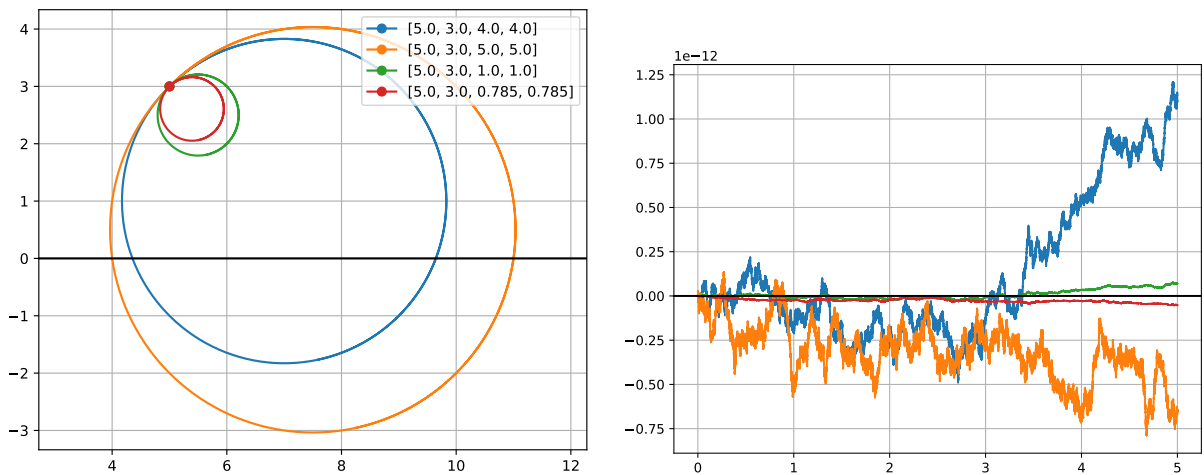


Рис. 2: Результат при количестве разбиений отрезка $n = 100000$.

Из графиков движения видно, что траекторией тела, которое находится во вращающейся системе координат, является окружность. Видно, что чем больше начальная скорость, тем больше радиус окружности у траектории.

У первого эксперимента с малым количеством разбиений отрезка времени погрешность относительно большая, из-за чего закон сохранения энергии не выполняется. У второго же, точно больше и можно сказать, что соотношение выполняется с некоторой погрешностью. Также из обоих экспериментов видно, что чем меньше радиус, тем меньше и погрешность в сохранении энергии.

Теперь возьмём $\Omega = 10$.

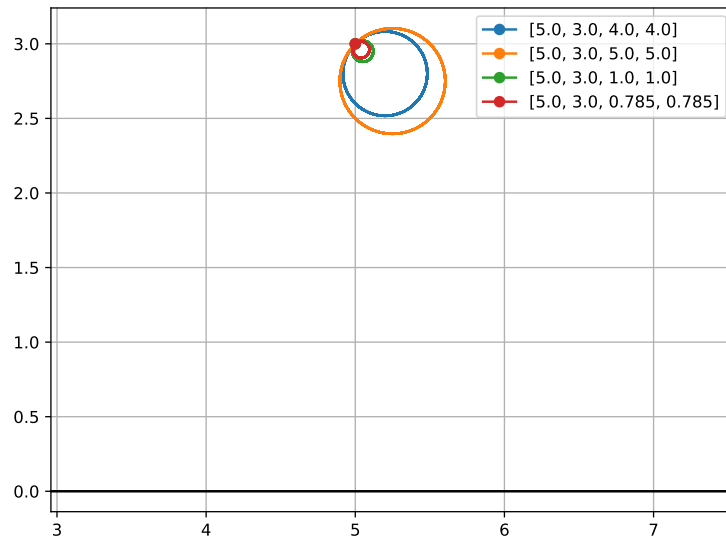


Рис. 3: Трактории при $\Omega = 10$.

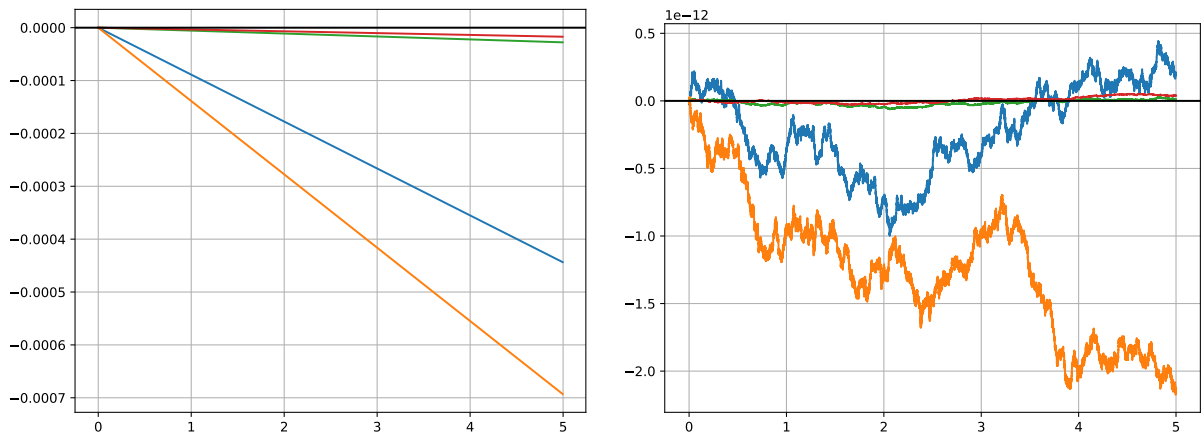


Рис. 4: Закон сохранения при количестве $n = 1000$ и $n = 100000$.

При большей угловой скорости вращения получаем окружности меньшего радиуса. Аналогично ведут себя результаты, показывающие закон сохранения энергии.

5. Заключение

Таким образом, была построена математическая модель перемещения во вращающейся системе координат, представляющая собой систему двух дифференциальных уравнений второго порядка. Она была проанализирована и был показан закон сохранения энергии. Описан алгоритм построения решения и написана программа, реализующая данный алгоритм. После чего построены графики численного решения уравнения в зависимости от параметров. Также был показано выполнение закона сохранения энергии.