Индивидуальное домашнее задание №2 по дисциплине «Комплексный анализ»

Держапольский Юрий Витальевич

1. $\displaystyle\oint\limits_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}dz = \circledast.$

Отношение голоморфных функций, поэтому есть только полюсы $0; 1$ 1-го порядка в круге $\left|z-\dfrac{1}{2}\right| = 1$.

$$\circledast = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^z+1}{z(z-1)} + \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^z+1}{z(z-1)}\right) = 2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\frac{e^z+1}{z-1} + \lim_{z\to 1}\frac{e^z+1}{z}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(-2+\frac{e+1}{1}\right) = 2\pi i\,(e-1)$$

Ответ: $2\pi i\,(e-1)$.

2. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz = \circledast.$

Отношение голоморфных функций, поэтому есть только полюс 0; 2-го порядка в данном круге.

$$\circledast = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} = \frac{2\pi i}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2}\right)' =$$

$$= \pi i\lim_{z\to 0}\left(-2+6z+12z^2\right) = -2\pi i$$

Ответ: $-2\pi i$.

3. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=0.3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2\operatorname{sh}3\pi z}dz = \circledast.$

Отношение голоморфных функций, поэтому есть только особая точка 0 в данном круге. Найдём тип точки.

$$e^{3z}-1-\sin 3z = 1+3z+\frac{(3z)^2}{2!}+\frac{(3z)^3}{3!}+\dots-1-\left(3z-\frac{(3z)^3}{3!}+\frac{(3z)^5}{5!}+\dots\right) =$$

$$= \frac{(3z)^2}{2}\phi(z). \implies \text{Ноль 2-го порядка.}$$

$$z^2\operatorname{sh}3\pi z = z^2\left(3\pi z+\frac{(3\pi z)^3}{3!}+\frac{(3\pi z)^5}{5!}\right) = 3\pi z^3\psi(z). \implies \text{Ноль 3-го порядка.}$$

Значит, $z = 0$ является полюсом 1-го порядка.

$$\circledast = 2\pi i \lim_{z\to 0} z\frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z \cdot 3\pi z} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{3e^{3z} - 3\cos 3z}{6\pi z} = \left[\frac{0}{0}\right] = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{9e^{3z} + 9\sin 3z}{6\pi} = 2\pi i \frac{3}{2\pi} = 3i$$

Ответ: $3i$.

4. $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} - \frac{3\pi i}{e^{\frac{\pi z}{2}} + i} \right) dz = \circledast.$

Первая функция - это отношение голоморфных функций, поэтому в данном круге есть полюс $1 - i$; 2-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{z\to 1-i} \frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)} = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 1-i} \left(\frac{2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{z-3+i} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to 1-i} \frac{\left(\frac{\pi}{1-i}\cos\frac{\pi z}{2-2i}\right)(z-3+i) - 2\sin\frac{\pi z}{2-2i}}{(z-3+i)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Вторая функция - это отношение голоморфных функций. Нули знаменателя: $z = 4n + 3i, n \in \mathbb{N}$. Они не попадают в данный круг, значит значение интеграла $= 0$.

$$\circledast = 2\pi i \, \frac{-1}{2} = -\pi i.$$

Ответ: $-\pi i$.

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sqrt{7}\sin t} = \left| \begin{matrix} z = e^{it} \quad t = \dfrac{\ln z}{i} \quad dt = \dfrac{dz}{iz} \\ \sin t = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right) \end{matrix} \right| = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{4 - \frac{\sqrt{7}}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} =$

$$= \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{\sqrt{7}}{2} + 4iz - z^2\frac{\sqrt{7}}{2}} = \circledast$$

Нули знаменателя: $i\sqrt{7}$; $\dfrac{i}{\sqrt{7}}$. В круг попадает только $\dfrac{i}{\sqrt{7}}$ – полюс 1-го порядка.

$$\circledast = -\frac{2}{\sqrt{7}} \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{i}{\sqrt{7}}} \frac{1}{(z - i\sqrt{z})(z - \frac{i}{\sqrt{7}})} = \frac{-4\pi i}{\sqrt{7}} \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{7}}} \frac{1}{(z - i\sqrt{z})} =$$

$$= \frac{-4\pi i}{\sqrt{7}} \frac{1}{i\left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \sqrt{7}\right)} = \frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

6. $$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4+\sqrt{7}\cos t)^2} = \left| \begin{matrix} z = e^{it} \quad t = \frac{\ln z}{i} \quad dt = \frac{dz}{iz} \\ \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \end{matrix} \right| = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz/iz}{\left(4 + \frac{\sqrt{7}}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{7i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z+\sqrt{7})^2\left(z+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \circledast$$

Нули знаменателя: $-\sqrt{7}$; $-\frac{1}{\sqrt{7}}$. В круг попадает только $-\frac{1}{\sqrt{7}}$ – полюс 2-го порядка.

$$\circledast = \frac{4}{7i} \cdot 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{7}} \frac{z}{(z+\sqrt{7})^2\left(z+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{8\pi}{7} \lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{7}}} \left(\frac{z}{(z+\sqrt{7})^2}\right)' =$$

$$= \frac{8\pi}{7} \lim_{z\to-\frac{1}{\sqrt{7}}} \frac{\sqrt{7}-z}{\left(z+\sqrt{7}\right)^3} = \frac{8\pi}{7} \frac{\sqrt{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}}{(\sqrt{7}-\frac{1}{\sqrt{7}})^3} = \frac{8\pi}{27}$$

Ответ: $\frac{8\pi}{27}$.

7. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

$$\sup_{z\in C_R} \left|\frac{1}{(z^4+1)^2}\right| \le \sup_{z\in C_R} \frac{1}{(|z|^4-1)^2} = \frac{1}{(R^4-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\frac{1}{(z^4+1)^2} = \frac{1}{\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Голоморфна в верхней полуплоскости кроме точек $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ – полюса 2-го порядка.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z^4+1)^2} + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z^4+1)^2}\right) = \circledast$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z^4+1)^2} = \lim_{z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\left(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(z^2+i\right)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{4z\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)+6z^2+2i}{\left(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(z^2+i\right)^3} \right) = -\frac{4i+6i+2i}{-8i(-4+4i)\sqrt{2}} = \frac{3}{8\sqrt{2}(i-1)}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(z^4+1)^2} = \lim_{z\to-\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(z^2-i\right)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to-\frac{1-i}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{-4z\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)+6z^2-2i}{\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 \left(z^2-i\right)^3} \right) = -\frac{-4i-6i-2i}{8i(4+4i)\sqrt{2}} = \frac{3}{8\sqrt{2}(i+1)}$$

$$\circledast = 2\pi i\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{i-1}+\frac{1}{i+1}\right) = 2\pi i\frac{3}{8\sqrt{2}}(-i) = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4\sqrt{2}}$.

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(z+1)e^{iz}}{(z^2+9)(z^2+4)}\,dz = \circledast.$

$$\sup_{z\in C_R}\left|\frac{z(z+1)}{z^4+13z^2+36}\right| \le \sup_{z\in C_R}\frac{|z|(|z|-1)}{|z|^4-13|z|^2-36} = \frac{R^2-R}{R^4-13R^2-36} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Функция голоморфна в верхней полуплоскости, кроме точек $z_1 = 3i,\ z_2 = 2i$ – полюса 1-го порядка.

$$\operatorname*{Res}_{z=3i}\frac{z(z+1)e^{iz}}{(z^2+9)(z^2+4)} = \lim_{z\to3i}\frac{z(z+1)e^{iz}}{(z+3i)(z^2+4)} = \frac{3i(3i+1)e^{-3}}{6i(-5)} = -\frac{3i+1}{10}e^{-3}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z(z+1)e^{iz}}{(z^2+9)(z^2+4)} = \lim_{z\to2i}\frac{z(z+1)e^{iz}}{(z^2+9)(z+2i)} = \frac{2i(2i+1)e^{-2}}{5\cdot4i} = \frac{2i+1}{10}e^{-2}$$

$$\circledast = \operatorname{Re}\left(2\pi i\left(\frac{2i+1}{10}e^{-2}-\frac{3i+1}{10}e^{-3}\right)\right) = \pi\operatorname{Re}\left(\frac{-2+i}{5}e^{-2}-\frac{-3+i}{5}e^{-3}\right) =$$

$$= \frac{3e^{-3}-2e^{-2}}{5}\pi$$

Ответ: $\dfrac{3e^{-3}-2e^{-2}}{5}\pi$.

9. Найти оригинал по изображению $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

$$\frac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)} = \frac{13}{17(p-2)} - \frac{13p+10}{17(p^2+4p+5)} =$$

$$= \frac{13}{17}\frac{1}{(p-2)} - \frac{13}{17}\frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{36}{17}\frac{1}{(p+2)^2+1} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{13}{17}e^{2t} - \frac{13}{17}e^{-2t}\cos t + \frac{36}{17}e^{-2t}\sin t$$

Ответ: $\dfrac{13}{17}e^{2t} - \dfrac{13}{17}e^{-2t}\cos t + \dfrac{36}{17}e^{-2t}\sin t$.

10. Найти решения дифференциального уравнения $y'' - y = \operatorname{th}^2 t$.

11. Оперпционным методом решить задачу Коши $\begin{cases} y'' + y' + y = t^2 + t, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3 \end{cases}$.

Преобразование Лапласа:

$$p^2\overline{y}(p) - p + 3 + p\overline{y}(p) - 1 + \overline{y}(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

$$\overline{y}(p) = \frac{p^4 - 2p^3 + p + 2}{p^3(p^2+p+1)} = \frac{2}{p^3} + \frac{2p}{p^2+p+1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + 2\frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq t^2 - t - 1 + 2e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $t^2 - t - 1 + 2e^{-\frac{t}{2}}\cos\dfrac{t\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\dfrac{t\sqrt{3}}{2}$.

12. $\begin{cases} x' = -2 + y + 2, & x(0) = 1, \\ y' = 3x, & y(0) = 0 \end{cases}$

Преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} p\overline{x} - 1 = -2\overline{x} + \overline{y} + \frac{2}{p} \\ p\overline{y} = 3\overline{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p+2)\overline{x} - \overline{y} = 1 + \frac{2}{p} \\ 3\overline{x} - p\overline{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{p+2}{p^2+2p-3} = \dfrac{p+1}{(p+1)^2-4} + \dfrac{1}{(p+1)^2-4} \risingdotseq e^{-t}\left(\operatorname{ch} 2t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2t\right) \\ \overline{y} = 3\dfrac{p+2}{p(p^2+2p-3)} = \dfrac{9}{4}\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p+3} \risingdotseq \dfrac{9}{4}e^{t} - 2 - \dfrac{1}{4}e^{-3} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = e^{-t}\left(\operatorname{ch} 2t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2t\right) \\ y = \dfrac{9}{4}e^{t} - 2 - \dfrac{1}{4}e^{-3} \end{cases}$.