Лабораторная работа №1 по дисциплине «Дифференциальные уравненеия»

Держапольский Юрий Витальевич

20 марта 2023 г.

Содержание

1 Введение

В этой лабораторной работе мы научимся раешать дифференциальные уравниения и верстать их в Latex.

2 Задание 1: Вычислить неорпеделённый интеграл

2.1 Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1}\ dt$$

2.2 Решение

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1}\ dt = \circledast \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{t+1} = x \\ t = x^3 - 1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| \circledast = \int 3x^2 \sin x\ dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -3 \int x^2\ d(\cos x) = \\
&= -3 \left(x^2 \cos x - \int \cos x\ d\left(x^2\right) \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6 \left(\int x \cos x\ dx \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6 \left(\int x\ d(\sin x) \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6 \left(x \sin x - \int \sin x\ dx \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6x \sin x + 6 \cos x + C = \\
&= 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + 3 \left(2 - (t+1)^{\frac{2}{3}} \right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1}\, dt = 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + 3 \left(2 - (t+1)^{\frac{2}{3}} \right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C\frac{1}{2}$$

3 Задание 2: Численно вычислить интеграл

3.1 Постановка задачи

Четыремя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Реализацию решения проводить на языке «Go»:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt$$

3.2 Решение

Точное значение: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.643767$

1. Метод левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a,b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.64366700142377, n = 30291$$

$$|-0.643767+0.64366700142377| = 9.999857622999819 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$$

Код программы:

```go
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func left_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f(a + delta * float64(i))
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s:= 10000
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = left_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

2. Метод правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\cdot\Delta x,\quad x_k\in[a,b],\ \Delta x=\frac{b-a}{n}$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.643866997722573, n = 27507$$

$$|-0.643767+0.6438669977222573| = 9.999772225732784\cdot 10^{-5} < \varepsilon$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func right_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 1; i <= n; i++ {
        if (i != n) {
            s += f(a + delta * float64(i))
        } else {
            s += f(a + delta * float64(i) - eps)
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = right_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

3. Метод центральных прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a,b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Найденное значение:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.6436670101243651, n = 1726$$

$$|-0.643767+0.6436670101243651| = 9.998987563486494 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func center_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f((2*a + delta * float64(2*i + 1))/2)
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
```

```
        s = center_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

4. Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a,b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.6438669676926193, n = 3676$$

$$|-0.643767 + 0.6438669676926193| = 9.996769261932936 \cdot 10^{-5} < \varepsilon$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func trapezoid_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 0; i < n; i++ {
        if (i != n - 1) {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                 f(a + delta * float64(i+1)))/2
        } else {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                 f(a + delta * float64(i+1) - eps))/2
        }
    }
```

```
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s:= 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = trapezoid_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

4 Задание 3: Решить уравнения

4.1 Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $r' = -\dfrac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}$

2. $\dfrac{1 - \dot{u}}{1 + \dot{u}} \operatorname{tg}(t - u - 1) = 2t + 2u + 8$

3. $\dot{y} = \dfrac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}$

4. $t\dot{u} - u^2 = 2u + 1$

4.2 Решение

1. $r' = -\dfrac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}$

   Тип уравнения: Обобщённое однородное дифференциальное уравнение 1 порядка

   Общее решение: $(3x - 6)y - \dfrac{11y^2}{2} = -\dfrac{5x^2}{2} - 2x + C$

2. $\dfrac{1 - \dot{u}}{1 + \dot{u}} \operatorname{tg}(t - u - 1) = 2t + 2u + 8$

   Тип уравнения: Обычное дифференциальное уравнение 1 порядка

   Общее решение: $-\ln\left(\cos\left(u - t + 1\right)\right) - u^2 - 2ut - 8u = t^2 + 8t + C$

3. $\dot{y} = \dfrac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}$

Тип уравнения: Линейное приведённое неоднородное дифференциальное уравнение 1 порядка с переменными коэффициентами относительно $t = t(y)$

Общее решение: $t(y) = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$

4. $t\dot{u} - u^2 = 2u + 1$

   Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными.
   Общее решение: $u = -\dfrac{1}{\ln(t) + C} - 1$

5 Заключение

Мы научились раешать дифференциальные уравниения и верстать их в Latex.