Индивидуальное домашнее задание №1 по дисциплине «Комплексный анализ»

Держапольский Юрий Витальевич

1. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

$$\rho=\left|-128+i128\sqrt{3}\right|=\sqrt{2^{7\cdot 2}+3\cdot 2^{7\cdot 2}}=\sqrt{2^2\cdot 2^{7\cdot 2}}=2^8$$

$$\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{128\sqrt{3}}{-128}=\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$z_k=\sqrt[4]{2^8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=4\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)$$

$$z_0=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}+2i$$

$$z_1=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2+2\sqrt{3}\ i$$

$$z_2=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{3}-2i$$

$$z_3=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-2\sqrt{3}\ i$$

Ответ: $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}=\left\{\begin{array}{r}2\sqrt{3}+2i\\ -2+2\sqrt{3}\ i\\ -2\sqrt{3}-2i\\ 2-2\sqrt{3}\ i\end{array}\right.$

2. Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(1+4\pi i)$.

$$\operatorname{sh}(1+4\pi i) = \operatorname{sh}1\cdot\operatorname{ch}4\pi i + \operatorname{ch}1\cdot\operatorname{sh}4\pi i =$$

$$= \operatorname{sh}1\cdot\cos 4\pi + \operatorname{ch}1\cdot i\sin 4\pi = \operatorname{sh}1$$

Ответ: $\operatorname{sh}(1+4\pi i) = \operatorname{sh}1$

3. Представить в алгебраической форме: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

Обозначим искомое как z, и $\omega = \dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}$. Тогда $\operatorname{tg} z = \omega$. Отсюда получаем: $z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+i\omega}{1-i\omega}\right)$.

$$\zeta = \frac{1+i\omega}{1-i\omega} = \frac{7-2\sqrt{3}\,i-3}{7+2\sqrt{3}\,i+3} = \frac{4-2\sqrt{3}\,i}{10+2\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{10-2\sqrt{3}\,i}{10-2\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{28-28\sqrt{3}\,i}{112} = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}$$

$$|\zeta| = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \frac{1}{2}; \quad \arg\zeta = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(\zeta) = -\frac{i}{2}\left(\ln|\zeta| + i(\arg\zeta + 2\pi n)\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(-\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\right) = \pi n - \frac{\pi}{6} + \frac{i\ln 2}{2}, n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right) = \pi n - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{i\ln 2}{2}, n\in\mathbb{Z}$

4. Представить в алгебраической форме: $(-i)^{5i}$.

$$(-i)^{5i} = \left(e^{i(-\pi/2+2\pi n)}\right)^{5i} = e^{5\pi/2+10\pi n},\ n \in \mathbb{Z}$$

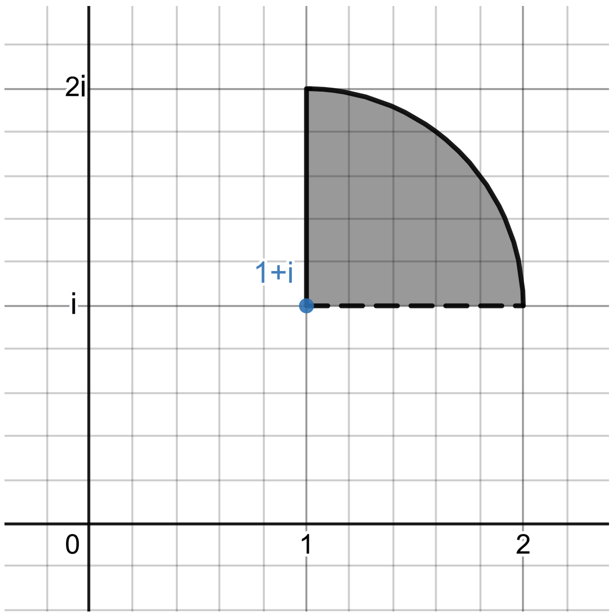
Ответ: $(-i)^{5i} = e^{5\pi/2+10\pi n},\ n \in \mathbb{Z}$

5. Представить в алгебраической форме: $\operatorname{Ln}\left(e^2\right)$.

$$\operatorname{Ln}\left(e^2\right) = \ln\left|e^2\right| + i\left(\arg\left(e^2\right) + 2\pi n\right) = 2 + 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\operatorname{Ln}\left(e^2\right) = 2 + 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$

6. Вычертить область, заданную неравенствами:
$D = \{z:\ |z-1-i| \le 1,\ \operatorname{Im} z > 1,\ \operatorname{Re} z \ge 1\}$.

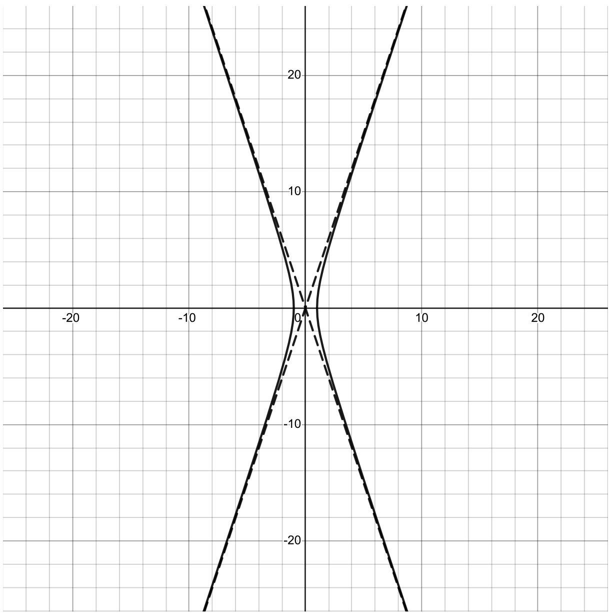


7. Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке. $z = -\sec t + i3\,\mathrm{tg}\,t$.

Наименьший период функций $\mathrm{tg}\,t$ и $\sec t$ равен 2 π, поэтому достаточно построить кривую для $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

$$\begin{cases} x = -\sec t \\ y = 3\,\mathrm{tg}\,t \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \sec^2 t = 1 + \mathrm{tg}^2\,t \\ y^2 = 9\,\mathrm{tg}^2\,t \end{cases} \implies x^2 = 1 + \frac{y^2}{9}$$

$x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы. $x \pm \dfrac{y}{3} = 0$ – асимптоты.



При $t \to -\frac{\pi}{2} + 0, x \to -\infty, y \to -\infty$.

При $t \to \frac{\pi}{2} - 0, x \to -\infty, y \to +\infty$.

При $t \to \frac{\pi}{2} + 0, x \to +\infty, y \to -\infty$.

При $t \to \frac{3\pi}{2} - 0, x \to +\infty, y \to +\infty$.

8. Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $v = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y, \quad f(0) = 2.$

$$v = \left(e^x - e^{-x}\right)\sin y$$

Проверка:

$$\tfrac{\partial v}{\partial x} = (e^x + e^{-x})\sin y \qquad \tfrac{\partial v}{\partial y} = (e^x - e^{-x})\cos y$$
$$\tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (e^x - e^{-x})\sin y \qquad \tfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\,(e^x - e^{-x})\sin y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Функция удовлетворяет условию Лапласа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \left(e^x - e^{-x}\right)\cos y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\left(e^x + e^{-x}\right)\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C_1(y) \\ u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C_2(x) \end{cases}$$

$$u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C$$

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C + i\left(e^x - e^{-x}\right)\sin y =$$

$$= \left(e^x + e^{-x}\right)\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + i\left(e^x - e^{-x}\right)\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} + C =$$

$$= \frac{e^{x+iy} + e^{x-iy} + e^{-x+iy} + e^{-x-iy} + e^{x+iy} - e^{x-iy} - e^{-x+iy} + e^{-x-iy}}{2} + C =$$

$$= e^{x+iy} + e^{-x-iy} + C = e^z + e^{-z} + C$$

$$f(0) = 1 + 1 + C = 2 \implies C = 0$$

Ответ: $f(z) = e^z + e^{-z}$

9. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути $\int_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)\,dz$; ABC - ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_C=i$.

$$\int_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)\,dz=\int_0^i\left(\frac{z^3}{3}+\sin z\right)'\,dz=\left(\frac{z^3}{3}+\sin z\right)\Bigg|_0^i=$$

$$=-\frac{i}{3}+\sin i-0=i\left(\operatorname{sh}1-\frac{1}{3}\right)$$

Ответ: $\int_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)\,dz=i\left(\operatorname{sh}1-\frac{1}{3}\right)$.

10. Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+i)^2\cdot z^{n^2}$.

$$C_k=\begin{cases}(n+i)^2, & k=n^2\\ 0, & k\neq n^2\end{cases}$$

$$|C_{n^2}|=\left|(n+i)^2\right|=\left|n^2-1+2ni\right|=\sqrt{\left(n^2-1\right)^2+(2n)^2}=$$

$$=\sqrt{n^4-2n^2+1+4n^2}=\sqrt{\left(n^2+1\right)^2}=n^2+1$$

$$\sqrt[n^2]{|C_{n^2}|}=\sqrt[n^2]{n^2+1}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

Ответ: $R=1$ и область сходимости – круг $|z|<1$.

11. Найти все лорановкие разложения данной функции в 0 и в ∞: $f(z)=\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$.

Разложим в точке 0:

$$f(z)=\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2(z+2)}-\frac{1}{z-1}=$$

$$=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1+z/2)}+\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\right)z^n$$

$$C_n = \begin{cases} 0, \quad n \le -3, \\ 2, \quad n = -2 \\ \dfrac{1}{2}, \quad n = -1 \\ 1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+2}}, \quad n \ge 0 \end{cases}$$

Разложим в точке ∞:

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+z/2)} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}\frac{1}{(1+2/z)} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} =$$

$$= \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} =$$

$$= \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{n'=-\infty}^{-1}(-1)^{n'+1}\frac{z^{n'}}{2^{n'+2}} - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} - 1\right)z^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-3}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} - 1\right)z^n$$

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} - 1, \quad n \le -3 \\ 0, \quad n \ge -2 \end{cases}$$

12. Найти все лорановские разложения функции по степеням $z - z_0$:
$f(z) = \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}, \quad z_0 = 3 + i.$

13. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0: $f(z) = \cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0 = i$.

$$f(z) = \cos\frac{3z}{z-i} = \cos\left(3 + \frac{3i}{z-i}\right) = \cos 3\cdot\cos\frac{3i}{z-i} - \sin 3\cdot\sin\frac{3i}{z-i} =$$

$$= \cos 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{3i}{z-i}\right)^{2n} - \sin 3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3i}{z-i}\right)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n\cos 3}{(-2n)!(3i)^{2n}}(z-i)^{2n} - \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n\sin 3}{(1-2n)!(3i)^{2n-1}}(z-i)^{2n-1}$$

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n\cos 3}{(-2n)!(3i)^{2n}}, \quad k = 2n,\ n \le 0, \\ \dfrac{(-1)^n\sin 3}{(1-2n)!(3i)^{2n-1}}, \quad k = 2n-1,\ n \le 0, \\ 0, \quad k \ge 1 \end{cases}$$

14. Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции: $f(z) = \dfrac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2} = \lim_{z\to 0}\frac{1 - \frac{(5z)^2}{2!} + \frac{(5z)^4}{4!} + o(z^5) - 1}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5) - 1 - z^2/2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{-\frac{(5z)^2}{2!} + \frac{(5z)^4}{4!} + o(z^5)}{\frac{z^4}{4!} + o(z^5)} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z^4}\frac{-\frac{5^2}{2!} + \frac{5^4z^2}{4!} + o(z^3)}{\frac{1}{4!} + o(z)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2}\frac{-\frac{5^2}{2!}}{\frac{1}{4!}} = \infty$$

$$\lim_{z\to 0}\left(z^2\cdot f(z)\right) = \frac{-\frac{5^2}{2!}}{\frac{1}{4!}}$$

Ответ: $z = 0$ для $f(z)$ является полюсом 2-го порядка.

15. Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип: $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

$$f(z) = \frac{(z+i)(z-i)}{(z-i)^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{(z+i)}{(z-i)(z+2i)(z-2i)}$$

Особые точки: $z_1 = i, z_2 = 2i, z_3 = -2i, z_4 = \infty$.

(a) $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \infty \implies z_0$ – полюс 1-го порядка.

(b) $\lim\limits_{z\to 2i} f(z) = \infty \implies z_1$ – полюс 1-го порядка.

(c) $\lim\limits_{z\to -2i} f(z) = \infty \implies z_2$ – полюс 1-го порядка.

(d) $\lim\limits_{z\to \infty} f(z) = 0 \implies z_3$ – устранимая особая точка.