МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине

«Дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.

Б9121-01.03.02сп(1)

Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 23 » мая 2023 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

В этой лабораторной работе мы будем решать дифференциальные уравнения, неразрешённые относительно производной, и уравнения высших порядков, находить значение функции и строить её график с помощью производной.

2. Задание 1

2.1. Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений указать вид, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $(r - r') \ln r = r' (\varphi - \ln r')$;
2. $\tan \dfrac{r}{r'} = \ln r$;
3. $r = \dfrac{3}{2} \varphi r' + e^{r'}$;
4. $\dot{x}^2 - 2x\dot{x} = x^2 \cdot \left(e^{2t} - 1\right)$;
5. $\ln \theta = \ln r' + r'^2 - 1$;

2.2. Решение

1. $(r - r') \ln r = r' (\varphi - \ln r')$;

   Вид уравнения: $F(\varphi, r, r') = 0$;

   Характеристика уравнения: Полное неразрешенное относительно производной;

   Общее решение: $r \cdot C^C = e^{C\varphi}$.

2. $\tan \dfrac{r}{r'} = \ln r$;

   Вид уравнения: $F(r, r') = 0$;

   Характеристика уравнения: Неразрешенное относительно производной, не содержащее аргумента;

   Общее решение: $\ln r \cdot \operatorname{arctg}(\ln r) = \varphi + \dfrac{1}{2} \ln \left(\ln^2 r + 1\right) + C$.

3. $r = \frac{3}{2}\varphi r' + e^{r'}$;

Вид уравнения: $F(\varphi, r, r') = 0$;

Характеристика уравнения: Уравнение Лагранжа;

Общее решение: $\begin{cases} r = \frac{3}{2}\varphi p + e^{p}, \\ \varphi = \frac{C - \left(2p^2 - 4p + 4\right)e^{p}}{p^3}. \end{cases}$

4. $\dot{x}^2 - 2x\dot{x} = x^2 \cdot \left(e^{2t} - 1\right)$;

Вид уравнения: $F(t, x, \dot{x}) = 0$;

Характеристика уравнения: Полное неразрешенное относительно производной;

Общее решение: $\ln x = t \pm e^{t} + C$.

5. $\ln \theta = \ln r' + r'^2 - 1$;

Вид уравнения: $F(\theta, r') = 0$;

Характеристика уравнения: Неразрешенное относительно производной, не содержащее функции;

Общее решение: $\begin{cases} \theta = pe^{p^2-1}, \\ r = \left(p^2 - \frac{1}{2}\right)e^{p^2-1} + C. \end{cases}$

3. Задание 2

3.1. Постановка задачи

Разрешить следующие уравнения относительно производной и, используя метод Эйлера, найти значение функции в точке. Нарисовать график искомой функции. Реализацию решения проводить на языке «C++»:

1. $\sec^2(1-y-x) = y'^2 - \tan xy + 2; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?;$
2. $e^{x-y} = \cos\big(y' \sin x - \tan^2(\sec xy) - \tan y\big); \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \ln 7,\ y(1) = ?.$

3.2. Решение

1. $\sec^2(1-y-x) = y'^2 - \tan xy + 2; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?;$

   Разрешённое уравнение: $y' = \pm\sqrt{\sec^2(1-y-x) + \tan xy - 2};$

   Значение функции: $\left[\begin{array}{l} y_1\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \approx 1.85955\ldots, \\ y_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \approx 50.73742\ldots; \end{array}\right.$

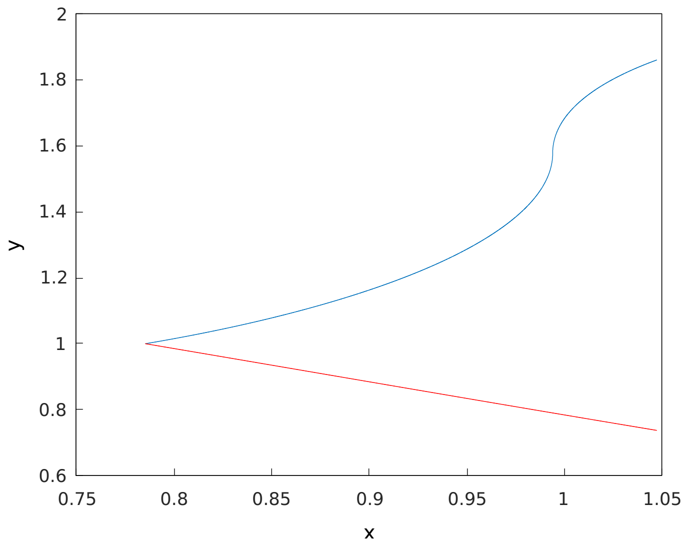

Рис. 1: График решений уравнения (1)

Листинг 1: Код программы

```cpp
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>

double f(double x, double y) {
    return sqrt(std::pow(std::cos(1 - y - x), -2) + std::tan(x * y) - 2);
}

int main() {
    double x_0 = M_PI / 4,
           x_n = M_PI / 3,
           y_prev = 1;
    int n = 10000;
    double h = (x_n - x_0) / n;

    std::vector<double> x;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        x.push_back(x_0 + i * h);
    }

    std::vector<double> y1{y_prev};
    std::vector<double> y2{y_prev};

    for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
        y1.push_back(y1[i] + h * f(x[i], y1[i]));
        y2.push_back(y2[i] - h * f(x[i], y2[i]));
    }

    std::cout << y1.back() << ' ' << y2.back();
}
```

2. $e^{x-y} = \cos\left(y' \sin x - \tan^2(\sec xy) - \tan y\right); \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 7,\ y(1) = ?;$

Разрешённое уравнение: $y' = \dfrac{\arccos\left(e^{x-y}\right) + \tan^2(\sec xy) + \tan y}{\sin x};$

Значение функции: $y\,(1) \approx 1.97059\ldots;$

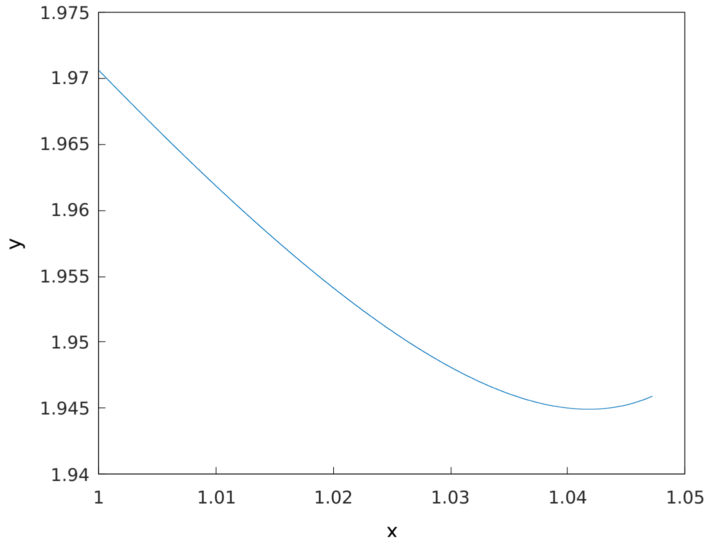

Рис. 2: График решений уравнения (2)

Листинг 2: Код программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>

double f(double x, double y) {
    return (std::acos(std::exp(x - y))
        + std::pow(std::tan(1 / std::cos(x * y)), 2)
        + std::tan(y)) / std::sin(x);
}

int main() {
    double x_0 = M_PI / 3,
           x_n = 1,
           y_prev = std::log(7);
    int n = 10000;
    double h = (x_n - x_0) / n;

    std::vector<double> x;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        x.push_back(x_0 + i * h);
    }

    std::vector<double> y{y_prev};

    for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
        y.push_back(y[i] + h * f(x[i], y[i]));
    }

    std::cout << y.back();
}
```

4. Задание 3

4.1. Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $y'' \cdot \cos y = y'^2 \cdot \cot y$;

2. $u^2 + 4tu\dot{u} + t^2\dot{u}^2 + t^2u\ddot{u} = 2tu\,(u + t\dot{u}) \cdot \tan t;\ [z = \tan t]$;

3. $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}^2 + 1} = \dot{x}$.

4.2. Решение

1. $y'' \cdot \cos y = y'^2 \cdot \cot y$;

   Тип уравнения: Допускающее интегрирование;

   Характеристика уравнения: Вполне интегрируемое уравнение, с интегрирующим множителем $\dfrac{\cos y + 1}{\sin y \cos y}$;

   Общее решение: $\sin^2 y = C_1 e^{C_2 x}\,(\cos y + 1)$.

2. $u^2 + 4tu\dot{u} + t^2\dot{u}^2 + t^2u\ddot{u} = 2tu\,(u + t\dot{u}) \cdot \tan t;\ [z = \tan t]$;

   Тип уравнения: Допускающее интегрирование;

   Характеристика уравнения: Вполне интегрируемое уравнение с заменой $z = \tan t$;

   Общее решение: $t^2u^2 = C_1 \tan t + C_2$.

3. $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}^2+1} = \dot{x};$

Тип уравнения: Допускающее интегрирование;

Характеристика уравнения: Вполне интегрируемое уравнение;

Общее решение: $\sin(x + C_1) = C_2 e^t$.

5. Заключение

В этой лабораторной работе мы решили дифференциальные уравнения, неразрешённые относительно производной, и уравнения высших порядков, нашли значения функций и построили их графики с помощью производной.