Лабораторная работа №1 по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Держапольский Юрий Витальевич

22 марта 2023 г.

Содержание

1 Введение **2**

2 Задание 1: Вычислить неопределённый интеграл **3**
2.1 Постановка задачи . . . 3
2.2 Решение . . . 3

3 Задание 2: Численно вычислить интеграл **4**
3.1 Постановка задачи . . . 4
3.2 Решение . . . 4

4 Задание 3: Решить уравнения **12**
4.1 Постановка задачи . . . 12
4.2 Решение . . . 12

5 Заключение **14**

1 Введение

В этой лабораторной работе мы научимся решать дифференциальные уравнения и верстать их в LaTeX.

2 Задание 1: Вычислить неопределённый интеграл

2.1 Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1}\ dt.$$

2.2 Решение

$$\begin{aligned}
\int \sin \sqrt[3]{t+1}\ dt = \circledast \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{t+1} = x \\ t = x^3 - 1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| \circledast = \int 3x^2 \sin x\ dx = \\
&= -3 \int x^2\ d(\cos x) = \\
&= -3 \left(x^2 \cos x - \int \cos x\ d\left(x^2\right) \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6 \left(\int x \cos x\ dx \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6 \left(\int x\ d(\sin x) \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6 \left(x \sin x - \int \sin x\ dx \right) = \\
&= -3x^2 \cos x + 6x \sin x + 6 \cos x + C = \\
&= 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + \\
&+ 3\left(2 - (t+1)^{\frac{2}{3}}\right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C.
\end{aligned}$$

Ответ:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1}\, dt = 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + 3\left(2 - (t+1)^{\frac{2}{3}}\right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C.$$

3 Задание 2: Численно вычислить интеграл

3.1 Постановка задачи

Четырьмя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Реализацию решения проводить на языке «Go»:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\, dt.$$

3.2 Решение

Точное значение: $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\, dt \approx -0.643767\ldots$

1. Метод левых прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a,b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\, dt \approx -0.643667\ldots,\ n = 30291,$$

$$|-0.643767 + 0.643667| = 9.999 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```go
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func left_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f(a + delta * float64(i))
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s:= 10000
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = left_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

2. Метод правых прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a,b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.643866\ldots,\ n = 27507,$$

$$|-0.643767 + 0.643866| = 9.999 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func right_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 1; i <= n; i++ {
        if (i != n) {
            s += f(a + delta * float64(i))
        } else {
            s += f(a + delta * float64(i) - eps)
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = right_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

3. Метод центральных прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\cdot\Delta x, \quad x_k \in [a, b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.643667\ldots,\ n = 1726,$$

$$|-0.643767 + 0.643667| = 9.998 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```go
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
	return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func center_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
	s := 0.0
	delta := (b-a)/ float64(n)
	for i := 0; i < n; i++ {
		s += f((2*a + delta * float64(2*i + 1))/2)
	}
	s *= delta
	return s
}

func main() {
	n := 0
	eps := 1e-4
	a := 0.0
	b := 1.0
	real := -0.643767
	s := 10000
	n=0
	for math.Abs(real - s) >= eps {
		n++
		s = center_rect(n,a,b)
	}
	fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

4. Метод трапеций:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(x_k\right)+f\left(x_{k+1}\right)}{2}\cdot\Delta x, \quad x_k \in [a,b],\ \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1}\,dt \approx -0.643866\ldots,\ n = 3676,$$

$$|-0.643767+0.643866| = 9.996\cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```go
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func trapezoid_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 0; i < n; i++ {
        if (i != n - 1) {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                 f(a + delta * float64(i+1)))/2
        } else {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                 f(a + delta * float64(i+1) - eps))/2
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s:= 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = trapezoid_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

4 Задание 3: Решить уравнения

4.1 Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $r' = -\dfrac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}$.
2. $\dfrac{1-\dot{u}}{1+\dot{u}}\operatorname{tg}(t-u-1) = 2t + 2u + 8$.
3. $\dot{y} = \dfrac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}$.
4. $t\dot{u} - u^2 = 2u + 1$.

4.2 Решение

1. $r' = -\dfrac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}$.

   Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах.

   Общее решение: $3\theta r - 6r - \dfrac{11r^2}{2} + \dfrac{5\theta^2}{2} + 2\theta = C$.

2. $\dfrac{1-\dot{u}}{1+\dot{u}}\operatorname{tg}(t-u-1) = 2t + 2u + 8$.

   Тип уравнения: Обыкновенное дифференциальное уравнение I порядка, сводящееся к уравнению в полных дифференциалах.

   Общее решение: $e^{(u+t+4)^2}\cos(t-u-1) = C$.

3. $\dot{y} = \dfrac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}$.

   Тип уравнения: Линейное приведённое неоднородное дифференциальное уравнение I порядка с переменными коэффициентами относительно $t = t(y)$.

   Общее решение: $t = Ce^{\sin y} - 2\sin y - 2$.

4. $t\dot{u} - u^2 = 2u + 1$.

   Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными. *Общее решение:* $-\dfrac{1}{u+1} = \ln t + C$.

5 Заключение

Мы научились решать дифференциальные уравнения и верстать их в LaTeX.