# Индивидуальное домашнее задание по дисциплине «Функциональный анализ»

Држапольский Юрий Витальевич

# Содержание

# 1. Задание 1 (1.13в)

## 1.1. Постановка

В множестве $X$ всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим через $k_0(x, y)$ наименьший индекс, при котором $\xi_k \neq \eta_k$. Доказать, что если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то $\rho(x, z) = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$.

## 1.2. Решение

Также имеем, что $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$ и

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{k_0(x, y)}, & x \neq y. \end{cases}$$

1. Пусть $x \neq y, y = z$, тогда

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, y)\} = \max\{\rho(x, y), 0\} = \rho(x, y)$$

2. Пусть $x \neq y \neq z$, тогда без ограничения общности запишем эти элементы так:

$$x = (\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots),$$
$$y = (\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots),$$
$$z = (\dots, x_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \dots),$$

Откуда наглядно имеем: $k_0(x, z) = k_0(y, z) = k_0 \leq k_0(x, y) = k_1$. Т.к. по условию $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то мы не можем находить $\rho(x, y)$, т.к. $\rho(x, z) = \rho(y, z)$. Окончательно имеем:

$$1 + \frac{1}{k_0} \leq \max\left\{1 + \frac{1}{k_1}, 1 + \frac{1}{k_0}\right\} = 1 + \frac{1}{k_0}.$$

Что и требовалось доказать.

# 2. Задание 2 (5.10)

## 2.1. Постановка

Пусть вещественная функция $f$ дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что $f$ – сжимающее отображение в пространстве $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in [0, 1)$ такое, что $|f'(x)| \leq \alpha$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

## 2.2. Решение

($\Rightarrow$) $f$ – дифференцируемая функция, сжимающее отображение в пространстве $\mathbb{R}$ с нормой $\rho(x, y) = |x - y|$. Т.е. $\exists \alpha \in [0, 1) : \rho\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha \cdot \rho(x, y) \,\forall x, y \in \mathbb{R}$. По формуле конечных приращений $\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y| = |f'(\xi)| \cdot \rho(x, y), \xi \in [x, y] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} |f'(\xi)| \in [0, 1)$, откуда следует, что $|f'(x)| \leq \alpha \,\forall x \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

($\Leftarrow$) $f$ – дифференцируемая функция в $\mathbb{R}$ с нормой $\rho(x, y) = |x - y|$ и $\exists \alpha \in [0, 1) : |f'(x)| \leq \alpha \,\forall x \in \mathbb{R}$. По формуле конечных приращений $\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y| = |f'(\xi)| \cdot \rho(x, y), \xi \in [x, y] \subset \mathbb{R}$. Функция $f$ будет сжимающим отображением, если $|f'(\xi)| < 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Но $|f'(x)| \leq \alpha < 1 \,\forall x \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

# 3. Задание 3 (10.3в)

## 3.1. Постановка

В пространстве $X = L^p\left[0, \frac{\pi}{2}\right], 1 < p < \infty$ вычислить норму функционала $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\, ds$.

## 3.2. Решение

Оценим норму функционала сверху.

$$|f(x)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\, ds\right| \overset{(1)}{\leq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\right| ds \overset{(2)}{\leq}$$

$$\leq \max_{s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \left|\sin^3 s \cdot \cos s\right| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |1 \cdot x(s)| ds \overset{(3)}{\leq}$$

$$\leq \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(s)|^p s\, ds\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}} ||x||_{L^p}$$

Значит, $||f|| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$. Проверим достижимость нормы.

Неравенство (1) становится равенством, когда $x(s)$ имеет постоянный знак на интервале.

(2) – когда $\sin^3 s \cdot \cos s$ является константой, что не верно.

(3) – достигается при $x(s) \equiv const$.

$$\overset{(2)}{\leq} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^3 s \cdot \cos s\right|^q \, ds \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(s)|^p s \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{16} ||x||_{L^p}$$

Известно выражение для Бета-функции:

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cdot \cos^{2y-1} t \, dt.$$

Отсюда следует, что

$$k_q = \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3q} s \cdot \cos^q s \, ds \right)^{\frac{1}{q}} = \left( \frac{1}{2} B\left( \frac{3q}{2} + \frac{1}{2}, \frac{q}{2} + \frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left( 0.5 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + 2q\right)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left( 0.5 \cdot \frac{(3q-1)!!}{2^{\frac{3q}{2}}} \frac{(q-1)!!}{2^{\frac{q}{2}}} \frac{\pi}{(2q)!} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \frac{(3q-1)!!(q-1)!!}{(2q)!} \right)^{\frac{1}{q}} = \dots$$

$\dots$

$$k_q \overset{q \to \infty}{\sim} \frac{3\sqrt{3}}{16} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Значит, что $||f|| \leq \frac{3\sqrt{3}}{16} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$. Проверим достижимость нормы.

Неравенство $(1)$ выполняется, если $x(s)$ имеет постоянный знак.

Неравенство Гёльдера (2) выполняется, если

$$x(s) = C|\sin^3 s \cdot \cos s|^{q-1} \operatorname{sign}(\sin^3 s \cdot \cos s) = C \cdot \sin^{3q-3} s \cdot \cos^{q-1} s$$

# 4. Задание 4 (8.26д)

## 4.1. Постановка

В пространстве $L^2[0,1]$ найти $M^\perp$, если $M$ – множество функций из пространства $L^2[0,1]$, которые равны нулю почти всюду на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

## 4.2. Решение

$$M = \left\{ f \in L^2[0,1] : f(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}.$$

Пусть:

$$f \in M : f(t) = \begin{cases} 0^* \,(\text{п.в.}), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ f_2(t) \in L^2\left[\frac{1}{2}, 1\right], & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$$g \in M^\perp : g(t) = \begin{cases} g_1(t) \in L^2\left[0, \frac{1}{2}\right], & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g_2(t) \in L^2\left[\frac{1}{2}, 1\right], & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 0^* \cdot g_1(t)\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2(t) \cdot g_2(t)\, dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2(t) \cdot g_2(t)\, dt = 0.$$

В силу произвольности $f_2(t)$ необходимо, чтобы $g_2(t) = 0^*$. Тогда,

$$M^\perp = \left\{ g \in L^2[0,1] : g(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$$