ИДЗ 2

Держапольский Юрий Витальевич

1. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0$

   Рассмотрим сумму с данным членом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^{n^2}}$

   Для исследования сходимости используем признак Коши: $C_n = \sqrt[n]{a_n}$

   $$C_n = \sqrt[n]{\frac{n^3}{4^{n^2}}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{4^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

   Значит сумма сходится. Из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0$.

2. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$

   Воспользуемся признаком д'Аламбера: $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   $$D_n = \frac{(3n+5)!}{10^{n+1}(n+1)^2} \frac{10^n n^2}{(3n+2)!} = \frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)n^2}{10(n^2+2n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{27n^5}{10n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

   Предел стремится к бесконечности, значит сумма расходится.

3. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

   Воспользуемся признаком Коши.

   $$C_n = \sqrt[n]{n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}} = \sqrt[n]{n}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1 * \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} < 1$$

   Значит сумма сходится.

4. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

   $$\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(2n)\ln^2(2n)}$$

   Воспользуемся известной суммой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$. Т.к. в исследуемой сумме $\alpha = 1$, а $\beta > 1$, то она сходится, а значит и изначальная сумма сходится.

5. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

   Исследуем на абсолютную сходимость. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

   Используем признак Коши.

   $$C_n = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

   Значит сумма сходится. Отсюда следует, что изначальная сумма сходится абсолютно.

6. Напишите программу и вычилите сумму ряда с точностью ε : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2(n+3)}$

Поскольку это ряд Лейбница, то остаток суммы можно оценить его первым слагаемым:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}$$

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>

using namespace std;

int main() {
    double eps, sum = 0, an = 0, minus = 1;
    cout << "Enter epsilon: " << endl;
    cin >> eps;
    cout << endl;
    int n = 1;
    an = 2. / (pow(n, 2) * (n + 3));

    while (an >= eps) {
        an = 2. / (pow(n, 2) * (n + 3));
        minus *= -1;
        sum += minus * an;
        n++;
    }

    cout << fixed << setprecision(abs(log10(eps))) << sum << endl;
    return 0;

}
```