Индивидуальное домашнее задание №1 по дисциплине «Комплексный анализ»

Держапольский Юрий Витальевич

1. Найти все значения корня: $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}}$.

$$\rho = \left|-128+i128\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^{7\cdot 2}+3\cdot 2^{7\cdot 2}} = \sqrt{2^2\cdot 2^{7\cdot 2}} = 2^8$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{128\sqrt{3}}{-128} = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$z_k = \sqrt[4]{2^8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = 4\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)$$

$$z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}+2i$$

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2+2\sqrt{3}\;i$$

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}-2i$$

$$z_3 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2-2\sqrt{3}\;i$$

Ответ: $\sqrt[4]{-128+i128\sqrt{3}} = \left\{\begin{array}{r} 2\sqrt{3}+2i \\ -2+2\sqrt{3}\;i \\ -2\sqrt{3}-2i \\ 2-2\sqrt{3}\;i \end{array}\right.$

2. Представить в алгебраической форме: $\operatorname{sh}(1+4\pi i)$.

$$\operatorname{sh}(1+4\pi i) = \operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{ch} 4\pi i + \operatorname{ch} 1 \cdot \operatorname{sh} 4\pi i =$$

$$= \operatorname{sh} 1 \cdot \cos 4\pi + \operatorname{ch} 1 \cdot i \sin 4\pi = \operatorname{sh} 1$$

Ответ: $\operatorname{sh}(1+4\pi i) = \operatorname{sh} 1$

3. Представить в алгебраической форме: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

Обозначим искомое как z, и $\omega = \dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}$. Тогда $\operatorname{tg} z = \omega$. Отсюда получаем: $z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+i\omega}{1-i\omega}\right)$.

$$\zeta = \frac{1+i\omega}{1-i\omega} = \frac{7-2\sqrt{3}\,i-3}{7+2\sqrt{3}\,i+3} = \frac{4-2\sqrt{3}\,i}{10+2\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{10-2\sqrt{3}\,i}{10-2\sqrt{3}\,i} =$$

$$= \frac{28-28\sqrt{3}\,i}{112} = \frac{1-\sqrt{3}\,i}{4}$$

$$|\zeta| = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \frac{1}{2}; \quad \arg\zeta = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(\zeta) = -\frac{i}{2}\left(\ln|\zeta| + i(\arg\zeta + 2\pi n)\right) =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(-\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\right) = \pi n - \frac{\pi}{6} + \frac{i\ln 2}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right) = \pi n - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{i\ln 2}{2}, n \in \mathbb{Z}$

4. Представить в алгебраической форме: $(-i)^{5i}$.

$$(-i)^{5i} = \left(e^{i(-\pi/2+2\pi n)}\right)^{5i} = e^{5\pi/2+10\pi n},\ n \in \mathbb{Z}$$

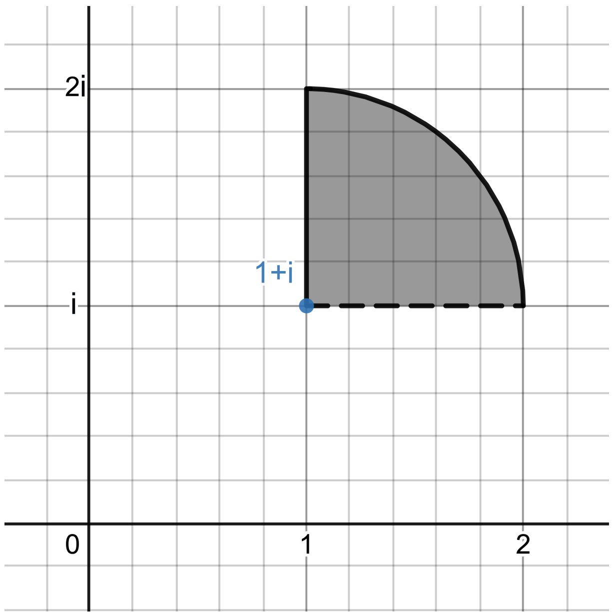
Ответ: $(-i)^{5i} = e^{5\pi/2+10\pi n},\ n \in \mathbb{Z}$

5. Представить в алгебраической форме: $\mathrm{Ln}\left(e^2\right)$.

$$\mathrm{Ln}\left(e^2\right) = \ln\left|e^2\right| + i\left(\arg\left(e^2\right) + 2\pi n\right) = 2 + 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\mathrm{Ln}\left(e^2\right) = 2 + 2\pi n i,\ n \in \mathbb{Z}$

6. Вычертить область, заданную неравенствами:
$D = \{z :\ |z - 1 - i| \leq 1,\ \mathrm{Im}\, z > 1,\ \mathrm{Re}\, z \geq 1\}$.

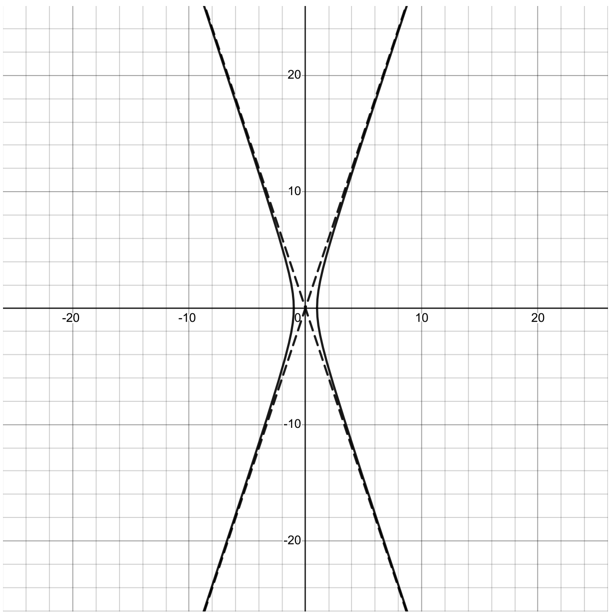


7. Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке. $z = -\sec t + i3\operatorname{tg} t$.

Наименьший период функций $\operatorname{tg} t$ и $\sec t$ равен 2 π, поэтому достаточно построить кривую для $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

$$\begin{cases} x = -\sec t \\ y = 3\operatorname{tg} t \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = \sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t \\ y^2 = 9\operatorname{tg}^2 t \end{cases} \implies x^2 = 1 + \frac{y^2}{9}$$

$x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы. $x \pm \dfrac{y}{3} = 0$ – асимптоты.



При $t \to -\frac{\pi}{2} + 0, x \to -\infty, y \to -\infty$.

При $t \to \frac{\pi}{2} - 0, x \to -\infty, y \to +\infty$.

При $t \to \frac{\pi}{2} + 0, x \to +\infty, y \to -\infty$.

При $t \to \frac{3\pi}{2} - 0, x \to +\infty, y \to +\infty$.

8. Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $v = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y, \quad f(0)=2.$

$$v = \left(e^x - e^{-x}\right)\sin y$$

Проверка:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (e^x + e^{-x})\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = (e^x - e^{-x})\cos y$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (e^x - e^{-x})\sin y \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\,(e^x - e^{-x})\sin y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Функция удовлетворяет условию Лапласа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \left(e^x - e^{-x}\right)\cos y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\left(e^x + e^{-x}\right)\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C_1(y) \\ u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C_2(x) \end{cases}$$

$$u = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C$$

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + C + i\left(e^x - e^{-x}\right)\sin y =$$

$$= \left(e^x + e^{-x}\right)\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + i\left(e^x - e^{-x}\right)\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} + C =$$

$$= \frac{e^{x+iy} + e^{x-iy} + e^{-x+iy} + e^{-x-iy} + e^{x+iy} - e^{x-iy} - e^{-x+iy} + e^{-x-iy}}{2} + C =$$

$$= e^{x+iy} + e^{-x-iy} + C = e^z + e^{-z} + C$$

$$f(0) = 1 + 1 + C = 2 \implies C = 0$$

Ответ: $f(z) = e^z + e^{-z}$

9. Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути $\int_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)\,dz$; ABC - ломаная, $z_A=0, z_B=1, z_C=i$.

$$\int_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)\,dz=\int_0^i\left(\frac{z^3}{3}+\sin z\right)'\,dz=\left(\frac{z^3}{3}+\sin z\right)\Bigg|_0^i=$$

$$=-\frac{i}{3}+\sin i-0=i\left(\operatorname{sh}1-\frac{1}{3}\right)$$

Ответ: $\int_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)\,dz=i\left(\operatorname{sh}1-\frac{1}{3}\right)$.

10. Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+i)^2\cdot z^{n^2}$.

$$C_k=\begin{cases}(n+i)^2, & k=n^2\\ 0, & k\neq n^2\end{cases}$$

$$|C_{n^2}|=\left|(n+i)^2\right|=\left|n^2-1+2ni\right|=\sqrt{\left(n^2-1\right)^2+(2n)^2}=$$

$$=\sqrt{n^4-2n^2+1+4n^2}=\sqrt{\left(n^2+1\right)^2}=n^2+1$$

$$\sqrt[n^2]{|C_{n^2}|}=\sqrt[n^2]{n^2+1}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

Ответ: $R=1$ и область сходимости – круг $|z|<1$.

11. Найти все лорановкие разложения данной функции в 0 и в ∞: $f(z)=\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$.

Разложим в точке 0:

$$f(z)=\frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2(z+2)}-\frac{1}{z-1}=$$

$$=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1+z/2)}+\frac{1}{1-z}=$$

$$=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{2}{z^2}+\frac{1}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\right)z^n$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & n \le -3, \\ 2, & n = -2 \\ \dfrac{1}{2}, & n = -1 \\ 1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+2}}, & n \ge 0 \end{cases}$$

Разложим в точке $z = \infty$. Заменим $z = \frac{1}{w}$, значит раскладываем в точке $w = 0$:

$$f(w) = \frac{\frac{1}{w} - 4}{\frac{1}{w^4} + \frac{1}{w^3} - \frac{2}{w^2}} = \frac{w^3 - 4w^4}{1 + w - 2w^2} =$$

$$= 2w^2 + \frac{w}{2} - \frac{1}{1-w} - \frac{1}{4(1+2w)} + \frac{5}{4} =$$

$$= 2w^2 + \frac{w}{2} + \frac{5}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} w^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2w)^n =$$

$$= 2w^2 + \frac{w}{2} + \frac{5}{4} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{(-2)^n}{4}\right)w^n =$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{5}{4} + \frac{w}{2} - \frac{w}{2} + 2w^2 - 2w^2 - \sum_{n=3}^{\infty}\left(1 + \frac{(-2)^n}{4}\right)w^n =$$

$$= -\sum_{n=3}^{\infty}\left(1 + \frac{(-2)^n}{4}\right)w^n$$

Сделаем обратную замену:

$$-\sum_{n=3}^{\infty}\left(1 + \frac{(-2)^n}{4}\right)\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-3}\left(1 + \frac{(-1)^n}{4 \cdot 2^n}\right)z^n = \sum_{n=-\infty}^{-3}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} - 1\right)z^n$$

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} - 1, & n \le -3 \\ 0, & n \ge -2 \end{cases}$$

12. Найти все лорановские разложения функции по степеням $z-z_0$:
$f(z) = \dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}, \quad z_0 = 3+i.$

$$f(z) = \frac{z-2}{(z+1)(z-3)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-3}$$

Функция голоморфна в 3-х кольцах:

$$K_1 : 0 < |z-z_0| < 1$$
$$K_2 : 1 < |z-z_0| < \sqrt{17}$$
$$K_3 : \sqrt{17} < |z-z_0| < \infty$$

Разложим в K_1:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-z_0+z_0+1} = \frac{1}{z_0+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0+1}} =$$

$$= \frac{1}{z_0+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{z_0+1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z_0+1)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-z_0+z_0-3} = \frac{1}{z_0-3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0-3}} =$$

$$= \frac{1}{z_0-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{z_0-3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z_0-3)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4(z_0+1)^{n+1}}(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4(z_0-3)^{n+1}}(z-z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{3}{(z_0+1)^{n+1}} + \frac{1}{(z_0-3)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n$$

Разложим в K_2:

$\dfrac{1}{z+1}$ аналогично разложению в K_1.

$$\frac{1}{z-3}=\frac{1}{z-z_0+z_0-3}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-3}{z-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z_0-3}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z_0-3)^n}{(z-z_0)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}\frac{(z-z_0)^n}{(z_0-3)^{n+1}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4(z_0+1)^{n+1}}(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{4(z_0-3)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

Разложим в K_3:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-z_0+z_0+1}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0+1}{z-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z_0+1}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z_0+1)^n}{(z-z_0)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{(z_0+1)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

$\dfrac{1}{z-3}$ аналогично разложению в K_2.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{3(-1)^{n+1}}{4(z_0+1)^{n+1}}(z-z_0)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{4(z_0-3)^{n+1}}(z-z_0)^n=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{4}\left(\frac{3}{(z_0+1)^{n+1}}+\frac{1}{(z_0-3)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n$$

13. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0: $f(z) = \cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0 = i$.

$$f(z) = \cos\frac{3z}{z-i} = \cos\left(3 + \frac{3i}{z-i}\right) = \cos 3 \cdot \cos\frac{3i}{z-i} - \sin 3 \cdot \sin\frac{3i}{z-i} =$$

$$= \cos 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{3i}{z-i}\right)^{2n} - \sin 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3i}{z-i}\right)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n \cos 3}{(-2n)!(3i)^{2n}}(z-i)^{2n} - \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n \sin 3}{(1-2n)!(3i)^{2n-1}}(z-i)^{2n-1}$$

$$C_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n \cos 3}{(-2n)!(3i)^{2n}}, \quad k = 2n,\ n \le 0, \\ \dfrac{(-1)^n \sin 3}{(1-2n)!(3i)^{2n-1}}, \quad k = 2n-1,\ n \le 0, \\ 0, \quad k \ge 1 \end{cases}$$

14. Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции: $f(z) = \dfrac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \frac{(5z)^2}{2!} + \frac{(5z)^4}{4!} + o(z^5) - 1}{1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5) - 1 - z^2/2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{(5z)^2}{2!} + \frac{(5z)^4}{4!} + o(z^5)}{\frac{z^4}{4!} + o(z^5)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{z^4} \frac{-\frac{5^2}{2!} + \frac{5^4 z^2}{4!} + o(z^3)}{\frac{1}{4!} + o(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2} \frac{-\frac{5^2}{2!}}{\frac{1}{4!}} = \infty$$

$$\lim_{z\to 0}\left(z^2 \cdot f(z)\right) = \frac{-\frac{5^2}{2!}}{\frac{1}{4!}}$$

Ответ: $z = 0$ для $f(z)$ является полюсом 2-го порядка.

15. Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип: $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.

$$f(z) = \frac{(z+i)(z-i)}{(z-i)^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{(z+i)}{(z-i)(z+2i)(z-2i)}$$

Особые точки: $z_1 = i, z_2 = 2i, z_3 = -2i, z_4 = \infty$.

(a) $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \infty \implies z_0$ – полюс 1-го порядка.

(b) $\lim\limits_{z\to 2i} f(z) = \infty \implies z_1$ – полюс 1-го порядка.

(c) $\lim\limits_{z\to -2i} f(z) = \infty \implies z_2$ – полюс 1-го порядка.

(d) $\lim\limits_{z\to \infty} f(z) = 0 \implies z_3$ – устранимая особая точка.