ИДЗ 3

Держапольский Юрий Витальевич

1. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$

   Заметим, что $\forall x$ $x^2-4x+6 = x^2-4x+4+2 = (x-2)^2+2 > 0$. Воспользуемся признаком Коши.

   $$C_n = \sqrt[n]{\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n} = \frac{\sqrt[n]{n+1}}{3}(x^2-4x+6) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}(x^2-4x+6) < 1 \implies$$

   $$\implies (x-2)^2 < 1 \implies 1 < x < 3$$

   Значит ряд сходится при $x \in (1;3)$. Проверим ряд на концах интервала.

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} * 3^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$$

   Общий член не стремится к нулю, значит ряд расходится.

   Ответ: Область сходимости ряда: $x \in (1;3)$

2. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^n}$

   Область определения ряда: $x+n \neq 0 \implies x \neq -n \implies x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

   $$\frac{1}{(x+n)^n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}$$

   Так как $\frac{1}{n^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, значит это ряд Лейбница и он сходится.

   Ответ: Область сходимости ряда: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

3. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}\sin^{2n} x$

   Воспользуемся признаком Коши.

   $$C_n = \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^2}\sin^{2n} x} = \frac{4}{(\sqrt[n]{n})^2}\sin^2 x \xrightarrow{n\to\infty} 4\sin^2 x < 1 \implies$$

   $$\implies -\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \implies x \in (-\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

   Проверим на концах отрезка: $(\sin^2 x = \frac{1}{4})$

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   Этот ряд сходится, значит нужно включить обе концевые точки.

   Ответ: Область сходимости ряда: $x \in [\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k], k \in \mathbb{Z}$

4. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{3n} x^n \sin \frac{2x}{n}$

Воспользуемся признаком Коши.

$$C_n = \sqrt[n]{2^{3n}|x|^n \left|\sin \frac{2x}{n}\right|} = 2^3|x| \sqrt[n]{\left|\sin \frac{2x}{n}\right|} \xrightarrow{n\to\infty} 8|x| < 1 \implies -\frac{1}{8} < x < \frac{1}{8}$$

Проверим на концах отрезка:

$$x = -\frac{1}{8} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(8^n \left(-\frac{1}{8}\right)^n \sin\left(-\frac{2}{8n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \sin \frac{1}{4n}\right)$$

Так как $\sin(\frac{1}{4n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, то это ряд Лейбница и он сходится.

$$x = \frac{1}{8} : \sum_{n=1}^{\infty} \left(8^n \left(\frac{1}{8}\right)^n \sin\left(\frac{2}{8n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{4n} \implies \sin \frac{1}{4n} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$$

Ряд с данным членом расходится, значит и изначальный ряд тоже.

Ответ: Область сходимости ряда: $x \in [-\frac{1}{8}; \frac{1}{8})$

5. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{x}} \arcsin \frac{x}{3^{nx}}$

Область определения ряда: $\begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq \frac{x}{3^{nx}} \leq 1 \end{cases}$

Найдём значение на концах интервала для второго неравенства при $x \geq 0 : \frac{x}{3^{nx}}|_{x=0} = 0$ и $\frac{x}{3^{nx}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. Найдём экстремумы.

$$\left(\frac{x}{3^{nx}}\right)' = \frac{3^{nx} - x3^{nx} n \ln 3}{3^{2nx}} = \frac{1 - xn\ln 3}{3^{nx}} = 0 \implies x = \frac{1}{n \ln 3}$$

Найдём значение в экстремуме.

$$0 < \frac{1}{n\ln 3} \frac{1}{3^{\frac{1}{\ln 3}}} < \frac{1}{n} \leq 1 \, \forall n$$

Получили, что $\forall n; x \geq 0 \implies 0 \leq \frac{x}{3^{nx}} < \frac{1}{n}$. Значит второе неравенство области определения выполнено.

Исследуем общий член.

$$n^{\sqrt{x}} \arcsin \frac{x}{3^{nx}} \overset{n\to\infty}{\sim} n^{\sqrt{x}} \frac{x}{3^{nx}}$$

Воспользуемся признаком Коши для ряда с данным общим членом.

$$C_n = \sqrt[n]{n^{\sqrt{x}} \frac{x}{3^{nx}}} = (\sqrt[n]{n})^{\sqrt{x}} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{3^x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3^x} < 1 \implies x > 0$$

Проверим концевую точку $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{0}} \arcsin \frac{0}{3^{0n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Значит ряд сходится при $x = 0$

Ответ: Область сходимости ряда: $x \in [0; +\infty)$

6. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2n^2\sqrt{x-2}\, e^{-\frac{n^2}{(x-1)^3}}$

Область определения ряда: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \implies x \geq 2$

Воспользуемся признаком Коши.

$$C_n = \sqrt[n]{2n^2\sqrt{x-2}\, e^{-\frac{n^2}{(x-1)^3}}} = \sqrt[n]{2\sqrt{x-2}}(\sqrt[n]{n})^2 e^{-\frac{n}{(x-1)^3}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

Значит, ряд сходится на области определения.

Ответ: Область сходимости ряда: $x \in [2; +\infty)$

7. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}$

Это степенной ряд, центрированный в точке $x = -5$. Найдём радиус сходимости по теореме Коши-Адамара.

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} \implies R = \frac{1}{\rho} = 3$$

Значит ряд сходится при $x \in (-8; -2)$. Проверим на концевых точках.

$$(\pm 3)^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^n} \overset{n\to\infty}{\sim} (\pm 3)^n \frac{1}{3^n} = (\pm 1)^n$$

Значит, ряд расходится в концевых точках интервала.

Ответ: Область сходимости ряда: $x \in (-8; -2)$

8. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$

Область определения ряда $x \neq 0$.

Воспользуемся признаком Коши.

$$C_n = \sqrt[n]{\frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}} = \sqrt[n]{\frac{2n+3}{(n+1)^5}}\frac{1}{x^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{x^2} < 1 \implies x^2 > 1$$

Значит, ряд сходится при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Приверим в точках $x^2 = 1$

$$\frac{2n+3}{(n+1)^5} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2n}{n^5} = \frac{2}{n^4}$$

Этот ряд сходится, значит изначальный ряд сходится в точках $x = \pm 1$

Ответ: Область сходимости ряда: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$