Контрольная работа по численному дифференцированию

Держапольский Юрий Витальевич
Группа Б9121-01.03.02сп

Задача

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) + R(x)$$

Вывести формулу погрешности аппроксимации $R(x) = \dfrac{h^m}{C_2} f^{(q)}(\xi)$.

Решение

Для вывода воспользуемся рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_2:

$$f(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) + \frac{f''(x_2)}{2!}(x - x_2)^2 + \frac{f'''(x_2)}{3!}(x - x_2)^3 + \ldots$$

Отметим, что для вычисления нас интересуют только коэффициенты C_n у каждого слагаемого $\dfrac{f^{(n)}(x_2)}{n!}$, поскольку мы будем складывать соответствующие слагаемые:

$$f(x) = C_0 f(x_2) + C_1 f'(x_2) + C_2 \frac{f''(x_2)}{2!} + C_3 \frac{f'''(x_2)}{3!} + \ldots$$

Поэтому для краткости будем записывать в таком виде: $[C_0,\ C_1,\ C_2,\ \ldots]$.

Изначально имеем $\left[(x - x_2)^0,\ (x - x_2),\ (x - x_2)^2,\ \ldots\right]$.

$$\begin{array}{lcl}
y_0 = f(x_0) & \Longrightarrow & [\ 1,\ -2h,\ 4h^2,\ -8h^3,\ 16h^4,\ -32h^5,\ \ldots] \\
y_1 = f(x_1) & \Longrightarrow & [\ 1,\ -h,\ h^2,\ -h^3,\ h^4,\ -h^5,\ \ldots] \\
y_2 = f(x_2) & \Longrightarrow & [\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots] \\
y_3 = f(x_3) & \Longrightarrow & [\ 1,\ h,\ h^2,\ h^3,\ h^4,\ h^5,\ \ldots]
\end{array}$$

Согласно формуле умножим каждый ряд на соответствующий множитель:

$$\begin{array}{rl}
y_0: & [\ 1,\ -2h,\ 4h^2,\ -8h^3,\ 16h^4,\ -32h^5,\ \ldots] \\
-6 \cdot y_1: & [\ -6,\ 6h,\ -6h^2,\ 6h^3,\ -6h^4,\ 6h^5,\ \ldots] \\
3 \cdot y_2: & [\ 3,\ 0,\ 0,\ \ldots] \\
2 \cdot y_3: & [\ 2,\ 2h,\ 2h^2,\ 2h^3,\ 2h^4,\ 2h^5,\ \ldots]
\end{array}$$

Сложим ряды и умножим на $\frac{1}{6h}$:

$$\big[0, 6h, 0, 0, 12h^4, -24h^5, \dots\big] \implies \big[0, 1, 0, 0, 2h^3, -4h^4, \dots\big]$$

Запишем в явном виде:

$$f'(x_2) = f'(x_2) + 2h^3 \cdot \frac{f^{(4)}(x_2)}{4!} - 4h^4 \cdot \frac{f^{(5)}(x_2)}{5!} + \dots + R(x)$$

Отсюда:

$$R(x) = -2h^3 \cdot \frac{f^{(4)}(x_2)}{4!} + 4h^4 \cdot \frac{f^{(5)}(x_2)}{5!} + \dots = -\frac{h^3}{12} f^{(4)}(\xi) + O(h^4)$$

Получили: $m = 3,\ C_2 = -12,\ q = 4.$