ИДЗ 5

Держапольский Юрий Витальевич

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x^n}$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{x^n} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{x^n} - \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

2. Найти сумму ряда $\sum\limits_1^\infty (n^2+2n-1)x^{n+1}$

$$S = \sum_1^\infty (n+1+\sqrt{2})(n+1-\sqrt{2})x^{n+1} = x\sum_1^\infty (n+1)(n+1-\sqrt{2})x^n + x\sqrt{2}\sum_1^\infty (n+1-\sqrt{2})x^n =$$

$$= x\sum_1^\infty (n+1)(n+2)x^n + x(-1-\sqrt{2})\sum_1^\infty (n+1)x^n + x\sqrt{2}\sum_1^\infty (n+1)x^n - 2x\sum_1^\infty x^n =$$

$$= xa(x) - xb(x) - \frac{2x^2}{1-x}$$

$$a_1(x) = \int_0^x a(t)dt = \int_0^x \sum_1^\infty (n+1)(n+2)t^n dt = \sum_1^\infty \int_0^x (n+1)(n+2)t^n dt = \sum_1^\infty (n+2)x^{n+1}$$

$$\int_0^x a_1(t)dt = \int_0^x \sum_1^\infty (n+2)t^{n+1}dt = \sum_1^\infty x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x}$$

$$a_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{1-x}\right) = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$$

$$a(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}\right) = \frac{(6x-6x^2)(1-2x+x^2)-(3x^2-2x^3)(-2+2x)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{6x-12x^2+8x^3-2x^4}{(1-x)^4} = \frac{6x-6x^2+2x^3}{(1-x)^3}$$

$$\int_0^x b(t)dt = \int_0^x \sum_1^\infty (n+1)t^n dt = \sum_1^\infty x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

$$b(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$S = x^2\frac{6-6x+2x^2}{(1-x)^3} - x^2\frac{2-x}{(1-x)^2} - x^2\frac{2}{1-x} =$$

$$= x^2\frac{6-6x+x^2-(2-3x+x^2)-(1-2x-x^2)}{(1-x)^3} = x^2\frac{3-x+x^2}{(1-x)^3}$$

3. Разложить в ряд Тейлора в точке 0 $f(x) = \ln(1 + x - 12x^2)$

$$f^{'}(x) = \frac{1-24x}{1+x-12x^2} = \frac{1-24x}{-(3x+1)(4x-1)} = \frac{24x-1}{(3x-1)(4x+1)} = \frac{-3}{1-3x} + \frac{4}{1+4x}$$

$$\int_0^x \left(\frac{-3}{1-3t} + \frac{4}{1+4t}\right) dt = -3\int_0^x \frac{dt}{1-3t} + 4\int_0^x \frac{dt}{1+4t} =$$

$$= -3\int_0^x \sum_0^\infty (3t)^n dt + 4\int_0^x \sum_0^\infty (-4t)^n dt = \sum_0^\infty \frac{(3x)^{n+1}}{n+1} + \sum_0^\infty \frac{(-4x)^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\sum_0^\infty \frac{(3x)^{n+1} + (-4x)^{n+1}}{n+1}$$

4. Исследовать на равномерную сходимость параметризованное семейство: $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, $X = (0;4)$, $y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sup_{x\in X}\left|\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^2}\right| = \sup_{x\in X}\left|\frac{1+x^2-1-x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)(1+x^2)}\right| = \sup_{x\in X}\frac{y^2}{(1+x^2+y^2)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{y^2}{1+y^2} \xrightarrow{y\to 0} 0$$

Значит параметризованное семество сходится на множестве X при $y \to 0$.

5. Вычилсить с помощью дифференцирования по параметру собственный интеграл.

$$f(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg}\left(a\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) dx$$

$\operatorname{arctg}\left(a\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\right)$ непрерына как функция 2-х аргументов $\forall a; x \in [0; \frac{\pi}{4}]$.

$$f^{'}(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial a}\operatorname{arctg}\left(a\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}{1+a^2(1-\operatorname{tg}^2 x)} dx =$$

$$= \left| x = \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}, dx = \frac{dy}{(1+2y^2)\sqrt{1+y^2}}\right| = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{1}{(1+y^2)}}}{1+a^2\frac{1}{1+y^2}} \frac{dy}{(1+2y^2)\sqrt{1+y^2}} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dy}{(1+a^2+y^2)(1+2y^2)} = \int_0^\infty \left(\frac{2}{(1+2a^2)(1+2y^2)} - \frac{1}{(1+2a^2)(1+a^2+y^2)}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{1+2a^2}\left(\int_0^\infty \frac{2dy}{1+2y^2} - \int_0^\infty \frac{dy}{1+a^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+2a^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(y\sqrt{2})\Big|_0^\infty - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\Big|_0^\infty\right) =$$

$$= \frac{1}{1+2a^2}\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}\right) = \frac{\pi}{2+4a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

$$f(a) = \int \frac{\pi}{2+4a^2}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right) da = \frac{\pi}{2}\left(\int \frac{\sqrt{2}da}{(1+2a^2)} - \int \frac{da}{(1+2a^2)\sqrt{1+a^2}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}a) - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right) + f(0) = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}a) - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)$$

6. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычилсить

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\int_a^b x^t dt dx = \int_0^1 dx\int_a^b \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^t dt =$$

$$= \int_a^b dt \int_0^1 \cos\left(-\ln x\right)x^t dx = \int_a^b dt\int_0^1 \cos\left(\ln x\right)x^t dx$$

$$I = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1}\cos(\ln x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \sin\left(\ln x\right)\frac{x^{t+1}}{t+1}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{1}{t+1}\left(1+\int_0^1 \sin\left(\ln x\right)x^t dx\right) = \frac{1}{t+1}\left(1+\frac{x^{t+1}}{t+1}\sin(\ln x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos\left(\ln x\right)\frac{x^{t+1}}{t+1}\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{t+1}\left(1+0-\frac{1}{t+1}\int_0^1 \cos\left(\ln x\right)x^t dx\right) \implies I = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}I \implies I = \frac{t+1}{1+(t+1)^2}$$

$$\int_a^b \frac{t+1}{1+(t+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d((t+1)^2)}{1+(t+1)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+2t+2\right|\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right|$$

7. Найти область сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^\infty x^3 e^{-px^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty ye^{-py}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-p/t}}{t^3}dt$$

По признаку Дирихле:

1) $\left|e^{-p/t}\right| \le 1$ т.к. это возрастающая функция и $e^{-p/t} \xrightarrow{t\to\infty} 1$ при $p>0$
2,3) $\frac{1}{t^3} \downarrow_{t\to\infty} 0$
Область сходимости $p>0$.

8. Найти область сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a \operatorname{tg} x}dx = \int_0^l \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a \operatorname{tg} x}dx + \int_l^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a}\operatorname{ctg} x dx$$

$$\frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a \operatorname{tg} x} \overset{x\to 0}{\sim} \frac{2\cos 2x(-\sin 2x)2 + 8xe^{-4x^2}}{(a+1)x^a} = \frac{-2\sin 4x + 8xe^{-4x^2}}{(a+1)x^a} \sim$$

$$\sim \frac{-8x+8xe^{-4x^2}}{(a+1)x^a} = \frac{8x(e^{-4x^2}-1)(-4x^2)}{(a+1)x^a(-4x^2)} \sim \frac{-16x^3}{(a+1)x^a} = \frac{-16}{(a+1)x^{a-3}}$$

При $x\to 0$ и $a\le 3$ дробь $= const$. При $x\to 0$ и $a>3$ дробь $=\infty$. Значит первый интеграл сходится при $a\le 3$.

$$\frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a}\operatorname{ctg} x \xrightarrow{x\to\frac{\pi}{2}} 0$$

Значит второй интеграл сходится при любом a.
Значит, область сходимости изначального интеграла $a\le 3$.

9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра.

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{(2x-\cos\ln x)^a}dx$$

$$\left|\frac{\cos x}{(2x-\cos\ln x)^a}\right| \le \frac{1}{(2x-\cos\ln x)^a}$$

Сходится абсолютно при $a > 1$.

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A| \leq 1$$

$$\frac{1}{(2x - \cos \ln x)^a} \xrightarrow[a>0]{x\to\infty} 0$$

При $a > 0$ сходится условно по признаку Дирихле, и при $a \leq 0$ расходится.

10. Исследовать на равномерную сходимость интеграл на множестве $E = (-\infty; b), b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + (x-a)^4} dx$$

$$\sup_{x\in(0;+\infty), a\in E} \left| \frac{x}{1 + (x-a)^4} \right| = \infty$$

Расходится, значит интеграл сходится неравномерно.

11. Исследовать на равномерную сходимость интеграл на множестве $E = (0; 1)$

$$\int_0^\infty \sin(ae^x) dx = \left| y = ae^x, x = \ln \frac{y}{a}, dx = \frac{a}{y} \frac{1}{a} dy = \frac{dy}{y} \right| = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y} dy$$

Данный интеграл сходится по признаку Дирихле, значит изначальнй равномерно сходится на множестве E.

12. Доказать равенство

$$\lim_{a\to+0} \int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = 1$$

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = -\cos x e^{-ax} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -ae^{-ax}(-\cos x) dx = 1 - a \int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx =$$

$$= 1 - a \left(\sin x e^{-ax} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -ae^{-ax} \sin x dx \right) = 1 - a^2 I \implies I = \frac{1}{a^2+1}$$

$$\lim_{a\to+0} \frac{1}{a^2+1} = 1$$