МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №4 по дисциплине
«Дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп(1)
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

« 15 » июня 2023 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1 Введение **3**

2 Задание 1: Решить линейные уравнения **4**

2.1 Постановка задачи 4

2.2 Решение 4

3 Задание 2: Решить задачи Коши **6**

3.1 Постановка задачи 6

3.2 Решение 6

4 Задание 3: Генератор псевдо-случайных чисел **8**

4.1 Постановка задачи 8

4.2 Решение 9

5 Заключение **12**

1. Введение

В этой лабораторной работе мы будем пытаться решать диффуры, генерировать псевдо-случайные числа и не умирать.

2. Задание 1: Решить линейные уравнения

2.1. Постановка задачи

Для следующих линейных дифференциальных уравнений дать характеристику и найти общее решение:

1. $\left(x^2+1\right)u''=2u;$

2. $u''-\dfrac{3}{x}u'+\dfrac{6}{x^2}u=0;$

3. $y^{IV}+6\dddot{y}+18\ddot{y}+30\dot{y}+25y=\left(-8t^2-5t+3\right)e^{-t}\sin t;$

4. $t^2\cdot(2\ln t-1)\cdot\ddot{y}+4y=t\cdot(2\ln t+1)\cdot\dot{y};$

5. $(x-1)^3y'''+9(x-1)^2y''+23(x-1)y'-64y=\left(2-3\ln^2(x-1)+8\ln(x-1)\right)\cdot (x-1)\sin^2 2\ln(x-1).$

2.2. Решение

1. $\left(x^2+1\right)u''=2u;$

   Характеристика уравнения: Линейное неприведённое однородное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

   Общее решение: $u=C_1\left(x^2+1\right)+C_2\left(x^2+1\right)\operatorname{arctan}x+C_2x;$

2. $u''-\dfrac{3}{x}u'+\dfrac{6}{x^2}u=0;$

   Характеристика уравнения: Линейное приведённое однородное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

   Общее решение: $u=C_1x^2\sin\left(\sqrt{2}\ln x\right)+C_2x^2\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right);$

3. $y^{IV}+6\dddot{y}+18\ddot{y}+30\dot{y}+25y=\left(-8t^2-5t+3\right)e^{-t}\sin t;$

Характеристика уравнения: Линейное приведённое неоднородное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение:

$$y = e^{-t}\left(-\frac{8t^2}{15}+\frac{341t}{225}-\frac{1151}{3375}\right)\sin t + e^{-t}\left(\frac{16t^2}{15}-\frac{362t}{225}-\frac{518}{3375}\right)\cos t +$$

$$+ e^{-t}\left(C_1\sin 2t + C_2\cos 2t\right) + e^{-2t}\left(C_3\sin t + C_4\cos t\right);$$

4. $t^2\cdot(2\ln t-1)\cdot\ddot{y}+4y = t\cdot(2\ln t+1)\cdot\dot{y};$

Характеристика уравнения: Линейное неприведённое однородное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами.

Общее решение: $y = C_1\ln t + C_2 t^2;$

5. $(x-1)^3y'''+9(x-1)^2y''+23(x-1)y'-64y = \Big(2-3\ln^2(x-1)+8\ln(x-1)\Big)\cdot (x-1)\sin^2 2\ln(x-1).$

Характеристика уравнения: Линейное неприведённое неоднородное уравнение 3-го порядка с переменными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

Общее решение:

$$y = C_1(x-1)^2+\frac{C_2\sin\big(4\ln(x-1)\big)+C_3\cos\big(4\ln(x-1)\big)}{(x-1)^4}+$$

$$+(x-1)\Bigg(\ln^2(x-1)\Big(A_1\sin\big(4\ln(x-1)\big)-A_2\cos\big(4\ln(x-1)\big)+A_3\Big)-$$

$$-\ln(x-1)\Big(B_1\sin\big(4\ln(x-1)\big)-B_2\cos\big(4\ln(x-1)\big)+B_3\Big)-$$

$$-\Big(D_1\sin\big(\ln(x-1)\big)+D_2\cos\big(4\ln(x-1)\big)+D_3\Big)\Bigg)$$

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{18}{7565},\ A_2=\dfrac{111}{15130},\ A_3=\dfrac{3}{82}\\ B_1=\dfrac{143808}{57229225},\ B_2=\dfrac{1373903}{57229225},\ A_3=\dfrac{71}{1681}\\ D_1=\dfrac{3336851796}{432939087125},\ D_2=\dfrac{295897989}{432939087125},\ D_3=\dfrac{2775}{68921}\end{cases}$$

3. Задание 2: Решить задачи Коши

3.1. Постановка задачи

Для заданных уравнений указать тип в простой форме. Найти общее решение. Найти частное решение, удовлетворяющее заданным условиям. Построить график решения:

1. $x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6y^2}{x^2} - 4y; y(1) = 1, y'(1) = 4;$
2. $y'y'' - \sqrt{1 + y'^2} = 0; y(0) = y'(0) = 0.$

3.2. Решение

1. $\begin{cases} x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6y^2}{x^2} - 4y, \\ y(1) = 1, y'(1) = 4; \end{cases}$

   Тип уравнения: Обобщённое однородное уравнение;

   Общее решение: $\left(\dfrac{y'}{x} - 2\dfrac{y}{x^2}\right)^2 = 4\dfrac{y^3}{x^6} + C_1;$

   Частное решение: $y = \dfrac{x^2}{(1 - \ln x)^2}$

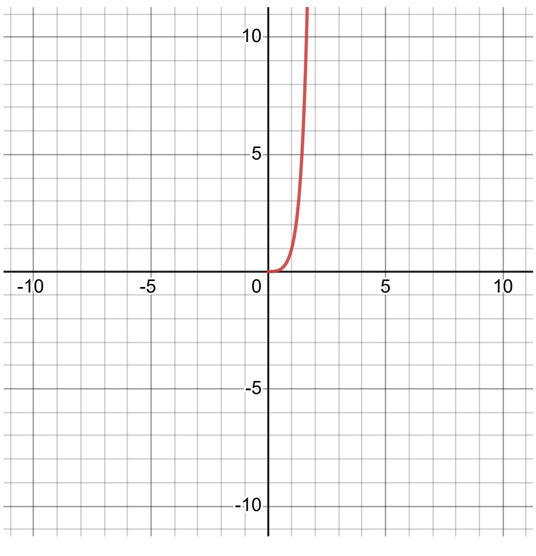

Рис. 1: График решения уравнения (1)

2. $\begin{cases} y'y'' - \sqrt{1+y'^2} = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{cases}$

Тип уравнения: Вполне интегрируемое уравнение.

Общее решение:

$$2y = \pm\left((x+C_1)\sqrt{(x+C_1)^2-1} - \ln\left(\sqrt{(x+C_1)^2-1} + x + C_1\right)\right) + C_2$$

Частное решение: $2y = \pm\left((x+1)\sqrt{x^2+2x} - \ln\left(\sqrt{x^2+2x} + x + 1\right)\right)$;

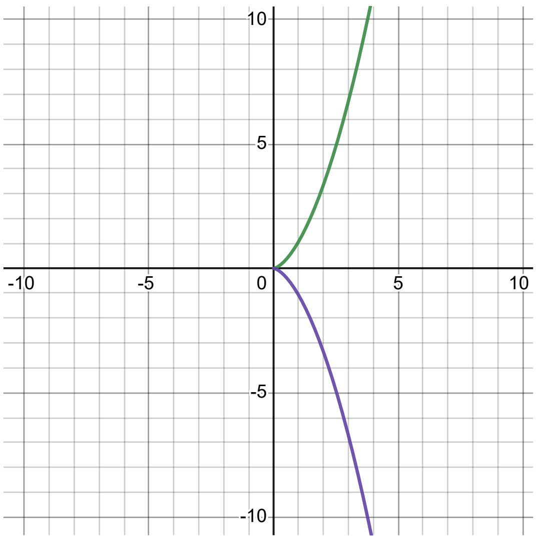

Рис. 2: График решения уравнения (2)

4. Задание 3: Генератор псевдо-случайных чисел

4.1. Постановка задачи

На основе представленной ниже системы дифференциальных уравнений построить генератор псевдо-случайных чисел в диапазоне $[0, 1]$ с помощью метода Эйлера:

$$\dot{x} = \sigma \cdot (y - x); \quad \dot{y} = x \cdot (r - z) - y; \quad \dot{z} = x \cdot y - b \cdot z.$$

В качестве параметров зерна выбрать следующие: $x_0,\ y_0,\ z_0,\ dt$ и n. Здесь:

$$x_0 \in (2.8915, 3.2027),\ y_0 \in (1.4296, 1.7365),\ z_0 \in (15.2113, 16.1852),$$
$$dt \in (0, 0.1],\ n > 100,\ \sigma = 10,\ r = 28,\ b = 2.66;$$

В качестве источника энтропии использовать *Unix*-время, в качестве итератора использовать параметр n. Генератор чисел основывается на методе Эйлера, в качестве результата выдавать десятичную часть числа x_k из метода. На каждой итерации метода, x_k, y_k и z_k округлять до **тысяч**, чтобы избежать переполнения. Протестировать и представить графики соотношений значений с точностью до десятых и сотых относительно их количества. Приложить код, и примеры работы.

4.2. Решение

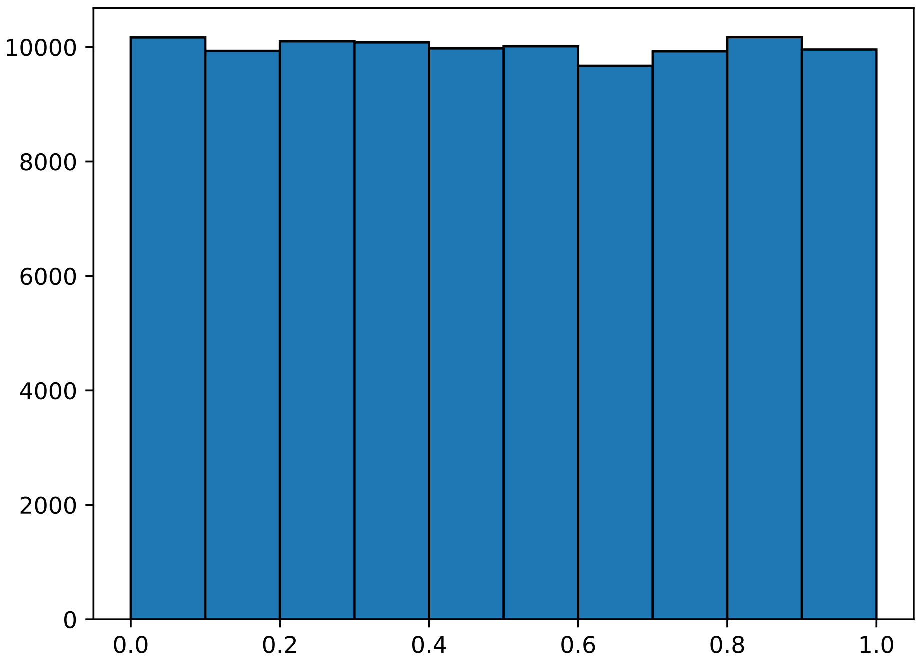

Рис. 3: Значения с точностью до десятых при генерации 100000 чисел.

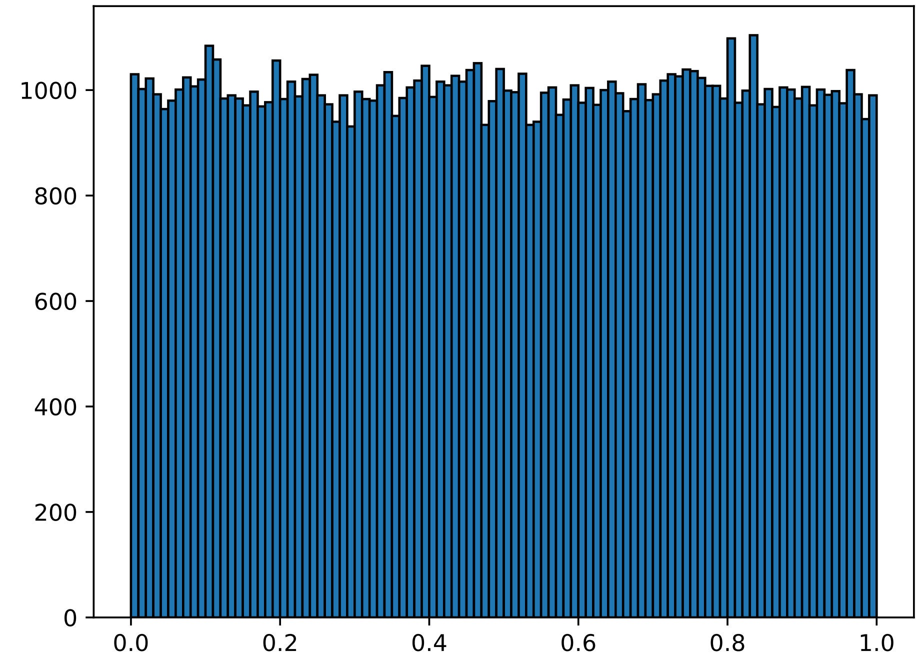

Рис. 4: Значения с точностью до сотых при генерации 100000 чисел.

Листинг 1: Код генератора псевдо-случайных чисел.

```python
import time
from math import fmod


class PseudoRandom:
    def __init__(self, seed : float = None):
        self.seed(seed)
        self.sigma = 10
        self.r = 28
        self.b = 2.66
        self.n_range = (100, 1000)
        self.x_range = (2.8915, 3.2027)
        self.y_range = (1.4296, 1.7365)
        self.z_range = (15.2113, 16.1852)
        self.dt_range = (1e-20, 0.1)

    def fx(self, x, y, z):
        return self.sigma * (y - x)

    def fy(self, x, y, z):
        return x * (self.r - z) - y

    def fz(self, x, y, z):
        return x * y - self.b * z

    def seed(self, seed : float = None):
        self._seed = seed if seed is not None else time.time_ns()
        self.entropy = self._seed

    def get_seed(self):
        return self._seed

    def uniform(self, values: tuple[2], div):
        return values[0] + fmod(self.entropy+div/3, div) * (values[1] - values[0]) / div

    def generate(self):
        x_i = self.uniform(self.x_range, 12399)
        y_i = self.uniform(self.y_range, 874323)
```

```python
        z_i = self.uniform(self.z_range, 56664)
        dt = self.uniform(self.dt_range, 230487)
        n = int( self.uniform(self.n_range, 1000) )

        cut = 10000
        for _ in range(n):
            x_ = x_i + dt * self.fx(x_i, y_i, z_i)
            y_ = y_i + dt * self.fy(x_i, y_i, z_i)
            z_ = z_i + dt * self.fz(x_i, y_i, z_i)
            x_i = fmod(x_, cut)
            y_i = fmod(y_, cut)
            z_i = fmod(z_, cut)

        number = abs(fmod(x_i, 1))

        self.entropy = number * 1e+10

        return number
```

Листинг 2: Пример вызова генератора.

```python
from task3 import PseudoRandom

seed = 10

ps = PseudoRandom(seed)
for i in range(10):
    print(ps.generate())

print()

ps.seed(seed)
for i in range(10):
    print(ps.generate())
```

5. Заключение

В этой лабораторной работе мы решили ещё пожить после решения диффуров, и генерерации псевдо-случайных числел.