

Лабораторная работа №1 по дисциплине  
«Дифференциальные уравнения»

Держапольский Юрий Витальевич

11 апреля 2023 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Задание 1: Вычислить неопределённый интеграл</b>	<b>3</b>
2.1	Постановка задачи . . . . .	3
2.2	Решение . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Задание 2: Численно вычислить интеграл</b>	<b>4</b>
3.1	Постановка задачи . . . . .	4
3.2	Решение . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Задание 3: Решить уравнения</b>	<b>12</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	12
4.2	Решение . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>14</b>

# 1 Введение

В этой лабораторной работе мы научимся решать дифференциальные уравнения и верстать их в L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

## 2 Задание 1: Вычислить неопределённый интеграл

### 2.1 Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1} dt$$

### 2.2 Решение

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt[3]{t+1} dt &= \left( \begin{array}{l} \sqrt[3]{t+1} = x \\ t = x^3 - 1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right) \int 3x^2 \sin x dx = \\ &= -3 \int x^2 d(\cos x) = \\ &= -3 \left( x^2 \cos x - \int \cos x d(x^2) \right) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6 \int x \cos x dx = \\ &= -3x^2 \cos x + 6 \int x d(\sin x) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6 \left( x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6x \sin x + 6 \cos x + C = \\ &= 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + \\ &+ 3 \left( 2 - \sqrt[3]{(t+1)^2} \right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1} dt = 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + 3 \left( 2 - \sqrt[3]{(t+1)^2} \right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C.$$

## 3 Задание 2: Численно вычислить интеграл

### 3.1 Постановка задачи

Четырьмя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Реализацию решения проводить на языке «Go»:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt$$

### 3.2 Решение

*Примерное значение:*  $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643767 \dots$

1. Метод левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

*Найденное значение:*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643667 \dots, \quad n = 30291,$$

$$|-0.643767 + 0.643667| = 9.999 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

*Код программы:*

---

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func left_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f(a + delta * float64(i))
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s:= 10000
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = left_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

---

2. Метод правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

*Найденное значение:*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} \, dt \approx -0.643866\dots, \quad n = 27507,$$

$$|-0.643767 + 0.643866| = 9.999 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

*Код программы:*

---

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func right_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 1; i <= n; i++ {
        if (i != n) {
            s += f(a + delta * float64(i))
        } else {
            s += f(a + delta * float64(i) - eps)
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = right_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

---



3. Метод центральных прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

*Найденное значение:*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643667\dots, \quad n = 1726,$$

$$|-0.643767 + 0.643667| = 9.998 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

*Код программы:*

---

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func center_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f((2*a + delta * float64(2*i + 1))/2)
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = center_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

---

4. Метод трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

*Найденное значение:*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643866\dots, \quad n = 3676,$$

$$|-0.643767 + 0.643866| = 9.996 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

*Код программы:*

---

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func trapezoid_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 0; i < n; i++ {
        if (i != n - 1) {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                f(a + delta * float64(i+1)))/2
        } else {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                f(a + delta * float64(i+1) - eps))/2
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = trapezoid_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

---

## 4 Задание 3: Решить уравнения

### 4.1 Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1.  $r' = -\frac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}$

2.  $\frac{1 - \dot{u}}{1 + \dot{u}} \operatorname{tg}(t - u - 1) = 2t + 2u + 8$

3.  $\dot{y} = \frac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}$

4.  $t\dot{u} - u^2 = 2u + 1$

### 4.2 Решение

1.  $r' = -\frac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}$

*Тип уравнения:* Уравнение в полных дифференциалах.

*Общее решение:*  $6\theta r - 12r - 11r^2 + 5\theta^2 + 4\theta = C$ .

2.  $\frac{1 - \dot{u}}{1 + \dot{u}} \operatorname{tg}(t - u - 1) = 2t + 2u + 8$

*Тип уравнения:* Уравнение, приводимое к уравнению в полных дифференциалах.

*Общее решение:*  $e^{(u+t+4)^2} \cos(t - u - 1) = C$ .

$$3. \quad \dot{y} = \frac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}$$

*Тип уравнения:* Линейное приведённое неоднородное дифференциальное уравнение I порядка с переменными коэффициентами относительно  $t = t(y)$ .

*Общее решение:*  $t = Ce^{\sin y} - 2 \sin y - 2$ .

$$4. \quad t\dot{u} - u^2 = 2u + 1$$

*Тип уравнения:* Уравнение с разделяющимися переменными.

*Общее решение:*  $-\frac{1}{u+1} = \ln t + C$ .

## 5 Заключение

Мы научились решать дифференциальные уравнения и верстать их в L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.