Индивидуальное домашнее задание по дисциплине «Функциональный анализ»

Держапольский Юрий Витальевич

Содержание

1. Задание 1 (1.13в)

1.1. Постановка

В множестве X всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим через $k_0(x,y)$ наименьший индекс, при котором $\xi_k \neq \eta_k$. Доказать, что если $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$, то $\rho(x,z) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$.

1.2. Решение

Также имеем, что $\rho(x,z) \leq \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$ и

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{k_0(x,y)}, & x \neq y. \end{cases}$$

1. Пусть $x \neq y, y = z$, тогда

$$\rho(x,y) \leq \max\{\rho(x,y), \rho(y,y)\} = \max\{\rho(x,y), 0\} = \rho(x,y)$$

2. Пусть $x \neq y \neq z$, тогда без ограничения общности запишем эти элементы так:

$$\begin{aligned} x &= (\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots), \\ y &= (\dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots), \\ z &= (\dots, x_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n-1}, z_n, z_{n+1}, \dots), \end{aligned}$$

Откуда наглядно имеем: $k_0(x,z) = k_0(y,z) = k_0 \leq k_0(x,y) = k_1$. Т.к. по условию $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$, то мы не можем находить $\rho(x,y)$, т.к. $\rho(x,z) = \rho(y,z)$. Окончательно имеем:

$$1 + \frac{1}{k_0} \leq \max\left\{1 + \frac{1}{k_1}, 1 + \frac{1}{k_0}\right\} = 1 + \frac{1}{k_0}.$$

Что и требовалось доказать.

2. Задание 2 (5.10)

2.1. Постановка

Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что f – сжимающее отображение в пространстве $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in [0, 1)$ такое, что $|f'(x)| \leq \alpha$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

2.2. Решение

$(\Rightarrow)$ f – дифференцируемая функция, сжимающее отображение в пространстве $\mathbb{R}$ с нормой $\rho(x, y) = |x - y|$. Т.е. $\exists \alpha \in [0, 1) : \rho\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha \cdot \rho(x, y) \, \forall x, y \in \mathbb{R}$. По формуле конечных приращений $\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y| = |f'(\xi)| \cdot \rho(x, y), \xi \in [x, y] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}} |f'(\xi)| \in [0, 1)$, откуда следует, что $|f'(x)| \leq \alpha \, \forall x \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

$(\Leftarrow)$ f – дифференцируемая функция в $\mathbb{R}$ с нормой $\rho(x, y) = |x - y|$ и $\exists \alpha \in [0, 1) : |f'(x)| \leq \alpha \, \forall x \in \mathbb{R}$. По формуле конечных приращений $\rho\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y| = |f'(\xi)| \cdot \rho(x, y), \xi \in [x, y] \subset \mathbb{R}$. Функция f будет сжимающим отображением, если $|f'(\xi)| < 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$. Но $|f'(x)| \leq \alpha < 1 \, \forall x \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

3. Задание 3 (10.3в)

3.1. Постановка

В пространстве $X = L_p\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 < p < \infty$ вычислить норму функционала $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\, ds$.

3.2. Решение

Оценим норму функционала сверху.

$$|f(x)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\, ds\right| \overset{(1)}{\le} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\right| ds \overset{(2)}{\le}$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x(s)| ds = ||x||_{L_1} = ||x^{\frac{1}{p}}||^p_{L_p}$$

4. Задание 4 (8.26д)

4.1. Постановка

В пространстве $L_2[0,1]$ найти $M^{\perp}$, если M – множество функций из пространства $L_2[0,1]$, которые равны нулю почти всюду на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

4.2. Решение

$M = \left\{ f \in L_2[0,1] : f(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0, t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \right\}.$

Пусть:

$$f \in M : f(t) = \begin{cases} 0^* \,(\text{п.в.}), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ f_2(t) \in L_2\left[\frac{1}{2}, 1\right], & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$$g \in M^{\perp} : g(t) = \begin{cases} g_1(t) \in L_2\left[0, \frac{1}{2}\right], & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g_2(t) \in L_2\left[\frac{1}{2}, 1\right], & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 0^* \cdot g_1(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2(t) \cdot g_2(t)\,dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2(t) \cdot g_2(t)\,dt = 0.$$

В силу произвольности $f_2(t)$ необходимо, чтобы $g_2(t) = 0^*$. Тогда,

$$M^{\perp} = \left\{ g \in L_2[0,1] : g(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$$