ИДЗ 4

Держапольский Юрий Витальевич

1. Докажите, исходя из определения, равномерную сходимость на отрезке $[0;1]$. При каких n абсолютная величина остатка ряда не превосходит ε для любого $x \in [0;1]$? $\sum\limits_1^\infty (-1)^n \frac{x^n}{5n-6}$

   По определению

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^n}{5n-6} \overset{[0;1]}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N \implies \sup_{x\in[0;1]} \left| \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k \frac{x^k}{5k-6} \right| < \varepsilon$$

   Так как $\frac{x^n}{5n-6} \downarrow_{n\to\infty} 0$ при $x \in [0;1]$, то это ряд Лейбница, то его можно оценить $n+1$ членом.

$$\sup_{x\in[0;1]} \left| \sum_{k=n+1}^\infty (-1)^k \frac{x^k}{5k-6} \right| \le \sup_{x\in[0;1]} \left| \frac{x^{n+1}}{5n-1} \right| \le \frac{1}{5n-1} < \varepsilon \implies n > \frac{1}{5\varepsilon} + \frac{1}{5}$$

   Значит, $\forall \varepsilon > 0\, \exists N = \left[\frac{1}{5\varepsilon} + \frac{1}{5}\right] + 1$, что $\forall n > N$ остаток ряда не превосходит ε.

2. Докажите равномерную сходимость на указанном отрезке. $\sum\limits_1^\infty \frac{x^n}{n(n+2)}, [-1;1]$

   Воспользуемся признаком Коши.

$$C_n = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n(n+2)}} = \frac{x}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n+2}} \xrightarrow{n\to\infty} x < 1$$

   Проверим на концах отрезка. При $x = -1$: $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ - сходится как ряд Лейбница.

   При $x = 1$: $\sum\limits_1^\infty \frac{1^n}{n(n+2)} = \sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2+2n}$ - сходится, т.к. степень знаменателя > 1.

   Значит, ряд равномерно сходится на отрезке $[-1;1]$.

3. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, x \in (-3;-1)$

$$\sup_{x\in(-3;-1)} \left| \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}} \right| \le \sup_{x\in(-3;-1)} \left| \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^3+x^4}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

   Значит, ряд сходится равномерно на данном интервале.

4. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{x\sin(x+n)}{n^2x^2+n+1}, x > 0$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{x\sin(x+n)}{n^2x^2+n+1} \right| \le \sup_{x>0} \left| \frac{x}{n^2x^2+n} \right|$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{n^2x^2+n}\right) = \frac{n^2x^2+n-2n^2x^2}{(n^2x^2+n)^2} = 0 \implies x = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Так как в 0 и ∞ дробь $= 0$, то максимум в точке $x = \sqrt{\frac{1}{n}}$.

$$\sup_{x>0}\left|\frac{x}{n^2x^2+n}\right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^2\frac{1}{n}+n} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

Рад с данным членом сходится, значит и исходный ряд сходится равномерно.

5. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right), x > 0$

   Поскольку $\ln^2 x$ возрастающая функция, то для нахождения супремума исходной функции найдем: $\sup\limits_{x>0}\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|$. В $x = 0; x = +\infty$ функция $= 0$, значит найдём экстремум.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \implies x = \frac{1}{n}$$

$$\sup_{x>0}\left|\ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right)\right| \leq \ln^2\left(1+\frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}\right) = \ln^2\left(1+\frac{1}{2n}\right) \overset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^2}$$

   Ряд с данным членом сходится, значит изначальный ряд сходится равномерно.

6. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin\frac{x}{n}}{1+\sqrt{n}x^4}, x > 0$

$$\sup_{x>0}\left|\frac{\cos nx\sin\frac{x}{n}}{1+\sqrt{n}x^4}\right| \leq \sup_{x>0}\left|\frac{\frac{x}{n}}{1+\sqrt{n}x^4}\right| = \sup_{x>0}\left|\frac{x}{n+n^{\frac{3}{2}}x^4}\right|$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{n+n^{\frac{3}{2}}x^4}\right) = \frac{n+n^{\frac{3}{2}}x^4-4n^{\frac{3}{2}}x^4}{(n+n^{\frac{3}{2}}x^4)^2} = 0 \implies x = \frac{1}{\sqrt[4]{3\sqrt{n}}}$$

$$\sup_{x>0}\left|\frac{x}{n+n^{\frac{3}{2}}x^4}\right| \leq \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{3\sqrt{n}}}}{n+n^{\frac{3}{2}}3\sqrt{n}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{3\sqrt{n}})(n+3n^2)}$$

   Ряд с данным членом сходится (т.к. степень знаменателя > 1), значит изначальный ряд сходится равномерно.

7. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}\right| = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}\right|$$

   Так как в $x = 0$ и $x = \pm\infty$ дробь $= 0$, то найдём экстремум.

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2+n^2}\right)^2}\frac{2x^2+2n^2-4x^2}{(x^2+n^2)^2} = 0 \implies x = \pm\frac{1}{n}$$

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}\right| = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\operatorname{arctg}\frac{\pm\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2}+n^2}\right| \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2n}{1+n^4} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\frac{7}{2}}}$$

   Ряд с данным членом сходится, значит и изначальный ряд сходится равномерно.

8. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{1+nx}, x > 0$

$$\sup_{x>0}\left|\sin^2\frac{1}{1+nx}\right| = \sin^2 1$$

Проверим отрицание критерия Коши.

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{k=n+1}^{n+1}\sin^2\frac{1}{1+kx}\right| = \sup_{x>0}\left(\sin^2\frac{1}{1+(n+1)x}\right) = \sin^2 1$$

Не стремится к нулю, значит исходный ряд сходится неравномерно.

9. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2x^2}\sin nx, x \in (0;1)$

$$\sup_{x\in(0;1)}\left|\sum_{k=n+1}^{n+1} e^{-k^2x^2}\sin kx\right| = \sup_{x\in(0;1)}\left|e^{-(n+1)^2x^2}\sin(n+1)x\right| \geq$$

$$\geq \lim_{x\to\frac{1}{n+1}}\left(e^{-(n+1)^2x^2}\sin(n+1)x\right) = e^{-1}\sin 1$$

Не стремится к 0, значит сходится неравномерно на $x \in (0;1)$.

10. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{n}}{2^n}, x \in (0;1)$

По признаку Даламбера.

$$D_n = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{n+1}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

Значит, ряд сходится равномерно на области определения ($x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$), а значит, и при $x \in (0;1)$.

11. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+x^2}}, x \in (0;2)$

Т.к. $\frac{1}{\sqrt[5]{n+x^2}} \downarrow_{n\to\infty} 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+x^2}}$ сходится как ряд Лейбница.

И т.к. $\sup\limits_{x\in(0;2)}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \leq e^2$

То по признаку Абеля исходный ряд сходится равномерно при $x \in (0;2)$.

12. Исследуйте на равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^3\sin^2 nx}{2+n^3x^6}, x > 0$

$$\sup_{x>0}\left|\frac{x^3\sin^2 nx}{2+n^3x^6}\right| \leq \sup_{x>0}\left|\frac{x^3}{2+n^3x^6}\right|$$

В 0 и ∞ дробь $= 0$, найдём экстремум.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{2+n^3x^6}\right) = \frac{6x^2+3n^3x^8-6n^3x^8}{(2+n^3x^6)^2} = 0 \implies x^6 = \frac{2}{n^3} \implies x = \frac{2^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sup_{x>0}\frac{x^3}{2+n^3x^6} = \frac{\frac{2^{1/2}}{n^{3/2}}}{2+n^3\frac{2}{n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{4n^{\frac{3}{2}}}$$

Ряд с данным членом сходится, значит исходный ряд сходится равномерно при $x > 0$.