Лабораторная работа №2 по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Держапольский Юрий Витальевич

Содержание

1 Введение

В этой лабораторной работе мы будем решать дифференциальные уравнения, строить векторные поля, а также решать и проверять задачи Коши, верстая решения в LaTeX.

2 Задание 1: Решить уравнения

2.1 Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, найти общее решение и построить векторное поле с помощью программ компьютерной математики:

1. $u' \cdot \ln x + 2xu = 2x \cdot \sqrt{u}$
2. $e^{xy} \cdot \left(y^2 + xyy'\right) = y' + y \cdot \cot x$
3. $r' \cdot \cos^2 \varphi = \sec r \cdot \ln \sin r$
4. $5x\sqrt{x} \cdot u' - 5u\sqrt{x} = 25x^2 - u^2$
5. $y'\sqrt{x} \cdot \sec^2 \sqrt{y} = 2\sqrt{y} \cdot \left(\tan \sqrt{y} + \ln x\right)$

2.2 Решение

1. $u' \cdot \ln x + 2xu = 2x \cdot \sqrt{u}$

   Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными.

   Общее решение: $\mathrm{Ei}(2\ln x) + \ln(1 - \sqrt{u}) = C$.

   Векторное поле:

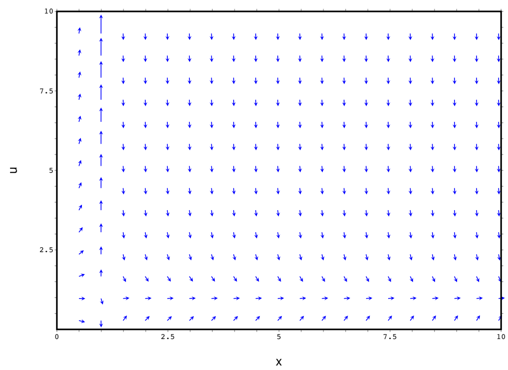

Рис. 1: Векторное поле к уравнению (1).

2. $e^{xy} \cdot \left(y^2 + xyy'\right) = y' + y \cdot \cot x$

Тип уравнения: Приводимое к уравнению в полных дифференциалах.

Общее решение: $e^{xy} - \ln y - \ln(\sin x) = C$.

Векторное поле:

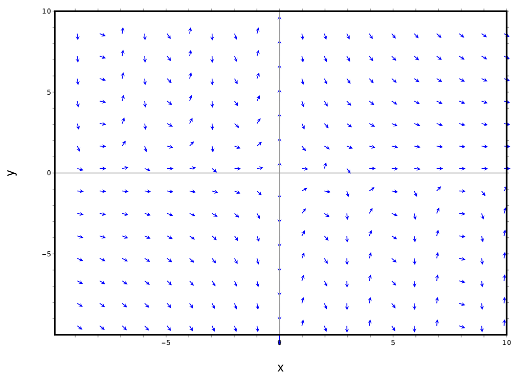

Рис. 2: Векторное поле к уравнению (2).

3. $r' \cdot \cos^2 \varphi = \sec r \cdot \ln \sin r$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными.

Общее решение: $\operatorname{li} \sin r = \tan \varphi + C$.

Векторное поле:

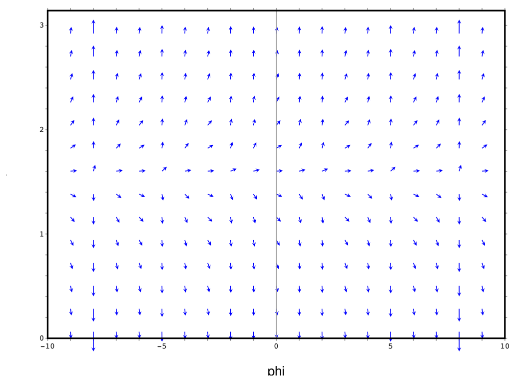

Рис. 3: Векторное поле к уравнению (3).

4. $5x\sqrt{x}\cdot u' - 5u\sqrt{x} = 25x^2 - u^2$

   Тип уравнения: Приводимое к уравнению с разделяющимися переменными.

   Общее решение: $\dfrac{u+5x}{u-5x} = Ce^{4\sqrt{x}}$.

   Векторное поле:

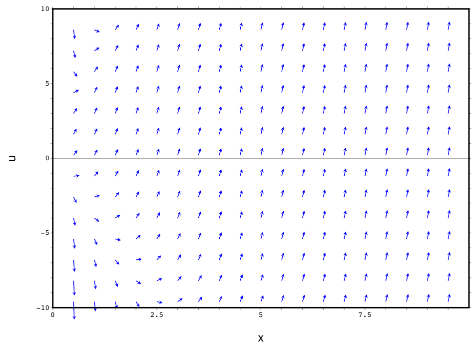

Рис. 4: Векторное поле к уравнению (4).

5. $y'\sqrt{x}\cdot \sec^2\sqrt{y} = 2\sqrt{y}\cdot\left(\tan\sqrt{y} + \ln x\right)$

   Тип уравнения: Приводимое к уравнению в полных дифференциалах заменой $u = \tan\sqrt{y}$.

   Общее решение: $e^{-2\sqrt{x}}\left(\tan\sqrt{y} + \ln x\right) = 2\,\mathrm{Ei}\left(-2\sqrt{x}\right) + C$.

   Векторное поле:

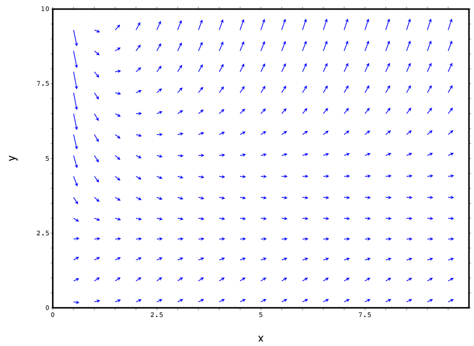

Рис. 5: Векторное поле к уравнению (5).

3 Задание 2: Решить задачи Коши

3.1 Постановка задачи

Для следующих уравнений с начальными условиями определить тип, найти общее и частное решения, построить график решения и векторное поле уравнения:

1. $\theta r' = \theta \cdot \sin\dfrac{r}{\theta} + r;\ r(1) = \dfrac{\pi}{2}$
2. $y' \cos x + y = \dfrac{y}{\ln y};\ y(0) = 1$

3.2 Решение

1. $\begin{cases} \theta r' = \theta \cdot \sin\dfrac{r}{\theta} + r \\ r(1) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

   Тип уравнения: Приводимое к уравнению с разделяющимися переменными заменой $x = \dfrac{r}{\theta}$.

   Общее решение: $\tan\dfrac{r}{2\theta} = C \cdot \theta$.

   Частное решение: $\tan\dfrac{r}{2\theta} = \theta$.

   Векторное поле:

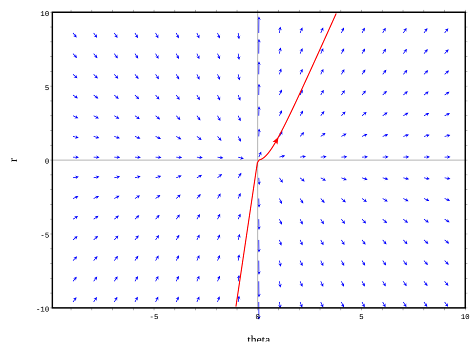

Рис. 6: Векторное поле к уравнению (1).

2. $\begin{cases} y' \cos x + y = \dfrac{y}{\ln y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными.

Общее решение: $y(1 - \ln y) \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = C$.

Частное решение: $y(1 - \ln y) \tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Векторное поле:

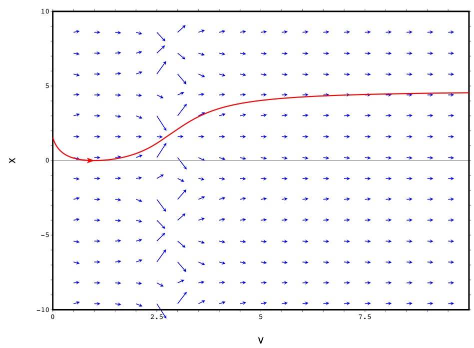

Рис. 7: Векторное поле к уравнению (2).

4 Задание 3: Проверка решения задачи Коши

4.1 Постановка задачи

Для следующей задачи Коши проверить, является ее ли решением представленная неявно заданная функция:

$$\theta r' \cdot (\theta - \sin e^r + re^r \cdot \cos e^r) = \theta r - r^2,\ r(1) = \ln \frac{\pi}{2}; \quad r \ln \theta + \sin e^r = \theta$$

4.2 Решение

Проверка начальных условий:

$$\ln \frac{\pi}{2} \cdot \ln 1 + \sin e^{\ln \frac{\pi}{2}} = 1$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Решение удовлетворяет начальным условиям.
Проверка решения уравнения:

$$r' \ln \theta + \frac{r}{\theta} + e^r r' \cos e^r = 1$$

Подставим $\ln \theta = \dfrac{\theta - \sin e^r}{r}$.

$$r' \frac{\theta - \sin e^r}{r} + e^r r' \cos e^r + \frac{r}{\theta} = 1 \quad | \cdot r\theta$$
$$\theta r' \left(\theta - \sin e^r + e^r r \cos e^r\right) + r^2 = r\theta$$
$$\theta r' \cdot (\theta - \sin e^r + re^r \cdot \cos e^r) = \theta r - r^2$$

Дифференцируя решение, и используя зависимости между функциями в решении, было получено исходное уравнение.

Ответ: Неявно заданная функция является решением задачи Коши.

5 Заключение

В этой лабораторной работе мы решили дифференциальные уравнения, построили векторные поля, а также решили и проверили задачи Коши, сверстав решения в LaTeX.