ИДЗ 2

Держапольский Юрий Витальевич

1. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$

   Заметим, что $\forall x \implies x^2-4x+6 = x^2-4x+4+2 = (x-2)^2+2 > 0$. Воспользуемся признаком Коши.

   $$C_n = \sqrt[n]{\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n} = \frac{\sqrt[n]{n+1}}{3}(x^2-4x+6) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}(x^2-4x+6) < 1 \implies$$

   $$\implies (x-2)^2 < 1 \implies 1 < x < 3$$

   Значит ряд сходится при $x \in (1;3)$. Проверим ряд на концах интервала.

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} * 3^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$$

   Общий член не стремится к нулю, значит ряд расходится.

   Ответ: Обасть сходимости ряда: $x \in (1;3)$

2. Найдите область сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^n}$

   1

   1

   1

   1

   1

   1

   1

   1

   Воспользуемся признаком д'Аламбера: $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

   $$D_n = \frac{(3n+5)!}{10^{n+1}(n+1)^2}\frac{10^n n^2}{(3n+2)!} = \frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)n^2}{10(n^2+2n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{27n^5}{10n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

   Предел стремится к бесконечности, значит сумма расходится.

3. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

   Воспользуемся признаком Коши.

   $$C_n = \sqrt[n]{n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}} = \sqrt[n]{n}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 1 * \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} < 1$$

   Значит сумма сходится.

4. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

$$\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(2n)\ln^2(2n)}$$

Воспользуемся известной суммой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$. Т.к. в исследуемой сумме $\alpha = 1$, а $\beta > 1$, то она сходится, а значит и изначальная сумма сходится.

5. Исследуйте на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Исследуем на абсолютную сходимость. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Используем признак Коши.

$$C_n = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$$

Значит сумма сходится. Отсюда следует, что изначальная сумма сходится абсолютно.

6. Напишите программу и вычилите сумму ряда с точностью ε : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2(n+3)}$

Поскольку это ряд Лейбница, то остаток суммы можно оценить его первым слагаемым:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$