МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

ОТЧЁТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине
«Дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп(1)
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) (подпись)

« 10 » мая 2023 г.

г. Владивосток

2023

Содержание

1. Введение

В этой лабораторной работе мы будем решать дифференциальные уравнения, неразрешённые относительно производной, находить значение функции и строить её график с помощью производной, а также решать дифференциальные уравнения высших порядков, верстая решения в $\LaTeX$.

2. Задание 1

2.1. Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений указать вид, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $(r - r') \ln r = r' (\varphi - \ln r')$;
2. $\tan \dfrac{r}{r'} = \ln r$;
3. $r = \dfrac{3}{2}\varphi r' + e^{r'}$;
4. $\dot{x}^2 - 2x\dot{x} = x^2 \cdot \left(e^{2t} - 1\right)$;
5. $\ln \theta = \ln r' + r'^2 - 1$;

2.2. Решение

1. $(r - r') \ln r = r' (\varphi - \ln r')$;

   Вид уравнения: $F(\varphi, r, r') = 0$;

   Характеристика уравнения: Полное неразрешенное относительно производной;

   Общее решение: $r^C = Ce^{\varphi}$.

2. $\tan \dfrac{r}{r'} = \ln r$;

   Вид уравнения: $F(r, r') = 0$;

   Характеристика уравнения: Неразрешенное относительно производной, не содержащее аргумента;

   Общее решение: $re^{\operatorname{arctg}(\ln r)} = Ce^{\varphi}\sqrt{\ln^2 r + 1}$.

3. $r = \frac{3}{2}\varphi r' + e^{r'}$;

Вид уравнения: $F\left(\varphi, r, r'\right) = 0$;

Характеристика уравнения: Уравнение Лагранжа;

Общее решение: $\begin{cases} r = \dfrac{3C - \left(4p^2 - 12p + 12\right) e^p}{2p^2}, \\ \varphi = \dfrac{C - \left(2p^2 - 4p + 4\right) e^p}{p^3}. \end{cases}$

4. $\dot{x}^2 - 2x\dot{x} = x^2 \cdot \left(e^{2t} - 1\right)$;

Вид уравнения: $F\left(t, x, \dot{x}\right) = 0$;

Характеристика уравнения: Полное неразрешенное относительно производной;

Общее решение: $\ln x = t \pm e^t + C$.

5. $\ln\theta = \ln r' + r'^2 - 1$;

Вид уравнения: $F\left(\theta, r'\right) = 0$;

Характеристика уравнения: Неразрешенное относительно производной, не содержащее функции;

Общее решение: $\begin{cases} \theta = pe^{p^2-1}, \\ r = \left(p^2 - \dfrac{1}{2}\right) e^{p^2-1} + C. \end{cases}$

3. Задание 2

3.1. Постановка задачи

Разрешить следующие уравнения относительно производной и, используя метод Эйлера, найти значение функции в точке. Нарисовать график искомой функции. Реализацию решения проводить на языке «C++»:

1. $\sec^2(1-y-x) = y'^2 - \tan xy + 2; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?;$
2. $e^{x-y} = \cos\left(y' \sin x - \tan^2(\sec xy) - \tan y\right); \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 7,\ y(1) = ?.$

3.2. Решение

1. $\sec^2(1-y-x) = y'^2 - \tan xy + 2; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?;$

   Разрешённое уравнение: $y' = \pm\sqrt{\sec^2(1-y-x) + \tan xy - 2};$

   Значение функции: $\left[\begin{array}{l} 1.85955\ldots, \\ 0.737429\ldots \end{array}\right.$

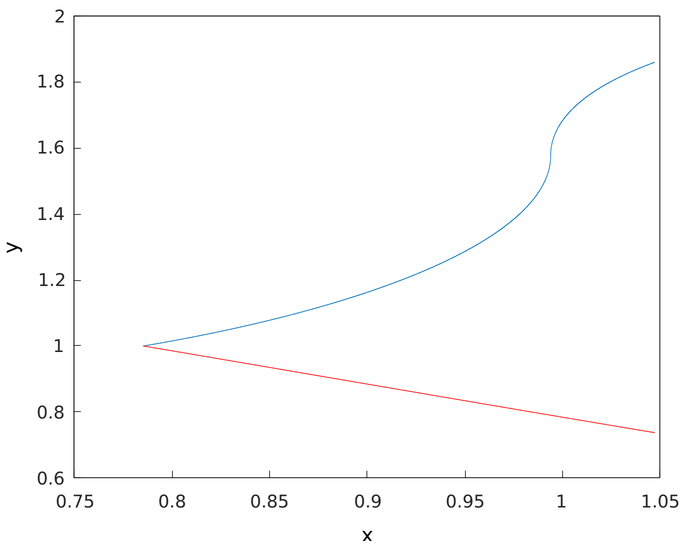

Рис. 1: График решений уравнения (1)

Листинг 1: Код программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>

double f(double x, double y) {
    return sqrt(std::pow(std::cos(1 - y - x), -2) + std::tan(x * y) - 2);
}

int main() {
    double x_0 = M_PI / 4,
            x_n = M_PI / 3,
            y_prev = 1;
    int n = 10000;
    double h = (x_n - x_0) / n;

    std::vector<double> x;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        x.push_back(x_0 + i * h);
    }

    std::vector<double> y1{y_prev};
    std::vector<double> y2{y_prev};

    for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
        y1.push_back(y1[i] + h * f(x[i], y1[i]));
        y2.push_back(y2[i] - h * f(x[i], y2[i]));
    }

    std::cout << y1.back() << '␣' << y2.back();
}
```

2. $e^{x-y} = \cos\left(y' \sin x - \tan^2(\sec xy) - \tan y\right); \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \ln 7,\ y(1) = ?;$

Разрешённое уравнение: $y' = \dfrac{\arccos\left(e^{x-y}\right) + \tan^2(\sec xy) + \tan y}{\sin x};$

Значение функции: $1.97059\ldots$

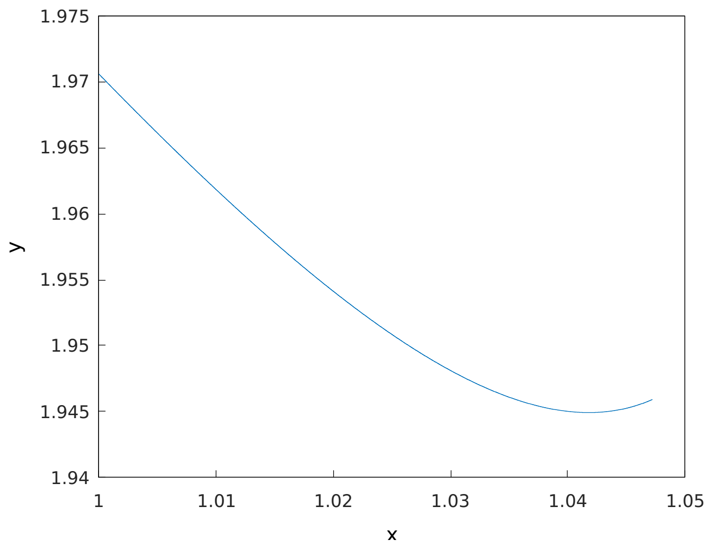

Рис. 2: График решений уравнения (2)

Листинг 2: Код программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <vector>

double f(double x, double y) {
    return (std::acos(std::exp(x - y))
        + std::pow(std::tan(1 / std::cos(x * y)), 2)
        + std::tan(y)) / std::sin(x);
}

int main() {
    double x_0 = M_PI / 3,
            x_n = 1,
            y_prev = std::log(7);
    int n = 10000;
    double h = (x_n - x_0) / n;

    std::vector<double> x;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        x.push_back(x_0 + i * h);
    }

    std::vector<double> y{y_prev};

    for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
        y.push_back(y[i] + h * f(x[i], y[i]));
    }

    std::cout << y.back();
}
```

4. Задание 3

4.1. Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $y'' \cdot \cos y = y'^2 \cdot \cot y$;
2. $u^2 + 4tu\dot{u} + t^2\dot{u}^2 + t^2u\ddot{u} = 2tu\,(u + t\dot{u}) \cdot \tan t$; $[z = \tan t]$;
3. $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}^2 + 1} = \dot{x}$.

4.2. Решение

1. $y'' \cdot \cos y = y'^2 \cdot \cot y$;

   Тип уравнения: Уравнение, допускающее понижение порядка;

   Характеристика уравнения: Не содержащее переменную;

   Общее решение: $y = C_2 - \ln\left(x + C_1\right)$.

2. $u^2 + 4tu\dot{u} + t^2\dot{u}^2 + t^2u\ddot{u} = 2tu\,(u + t\dot{u}) \cdot \tan t$; $[z = \tan t]$;

   Тип уравнения: Однородное уравнение;

   Характеристика уравнения: Однородное по степеням u;

   Общее решение: $t^2u^2\cos t = C_2\cos\left(C_1 + t\right)$.

3. $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}^2 + 1} = \dot{x}$;

   Тип уравнения: Уравнение, допускающее понижение порядка;

   Характеристика уравнения: Не содержащее переменную и функцию;

   Общее решение: $\sin\left(x + C_1\right) = C_2e^t$.

5. Заключение

В этой лабораторной работе мы решили дифференциальные уравнения, неразрешённые относительно производной, нашли значения функций и построили её график с помощью производной, а также решили дифференциальные уравнения высших порядков, верстая решения в LaTeX.