МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ (ШКОЛА)

Департамент математического и компьютерного моделирования

Курсовой проект

по дисциплине «Вычислительная математика»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент гр.
Б9121-01.03.02сп
Держапольский Ю.В. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

Проверил доцент, к.ф-м.н.
Колобов А.Г. ________
(Ф.И.О.) *(подпись)*

«____» ________ 2024 г.

г. Владивосток

2024

Содержание

1. Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач линейной алгебры, а также программное обеспечение, реализующее эти методы.

Цель работы – ознакомиться с численными методами решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождения обратных матриц, решения проблемы собственных значений, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, сравнить удобство использования и эффективность работы каждой использованной программы, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;

- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

Изученный студентом в ходе работы материал должен способствовать повышению его качества знаний, закреплению полученных навыков и уверенности в выборе путей будущего развития своих профессиональных способностей.

2. Основная часть

2.1. Постановка задачи

Пусть даны известные квадратная матрица A, вектор f и неизвестный вектор x размерностями n. Нужно найти вектор x в матричном уравнении $Ax = f$, используя метод отражений.

2.2. Описание алгоритма

Метод отражений состоит в выполнении $(n-1)$ шагов, в результате чего матрица A приводится к верхней треугольной форме и в последующей решении системы с такой матрицей.

Для этого на каждом шаге k будем находить вектор нормали p, характеризующий ортогональную матрицу отражения P, которая обнулит все поддиагональные элементы k-того столбца.

Обозначим вектор нормали и матрицу на шаге k: $p^{(k)}$, $A_k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, тогда

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} \left(a_{lk}^{(k-1)}\right)^2}, \quad \sigma_k = \begin{cases} 1, & a_{kk}^{(k-1)} \geq 0, \\ -1, & a_{kk}^{(k-1)} \leq 0, \end{cases}$$

$$p_i^{(k)} = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1; \qquad p_i^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)}, \quad i = k+1, \ldots, n;$$

Определение матрицы $P_k = I - \dfrac{2p^{(k)}\left(p^{(k)}\right)^*}{\left(p^{(k)}, p^{(k)}\right)}$. Будем применять данную матрицу с обоих сторон уравнения. Связь шагов $A_k = P_k A_{k-1},\ f^{(k)} = P_k f^{(k-1)}$.Запишем явные формулы элементов матрицы A_k и вектора $f^{(k)}$:

$$a_{kk}^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} \left(a_{lk}^{(k-1)}\right)^2}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum\limits_{l=k}^{n} \left(p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)}\right)}{\sum\limits_{l=k}^{n} \left(p_l^{(k)}\right)^2},$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2p_i^{(k)} \frac{\sum\limits_{l=k}^{n} \left(p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}\right)}{\sum\limits_{l=k}^{n} \left(p_l^{(k)}\right)^2}; \quad i = k, \ldots, n, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

В результате выполнения всех $(n-1)$ шагов получится система $A_{n-1}x = f^{(n-1)}$, где матрица A_{n-1} является верхней треугольной, поэтому вектор x можно найти последовательно снизу вверх:

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_i = \frac{f_i^{(n-1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n-1)} x_j}{a_{ii}^{(n-1)}}, \quad i = n-1, \ldots, 1.$$

2.3. Описание тестов, использованных для отладки

Для тестирования были использованы данные:

$$A = \begin{pmatrix} 10.9 & 1.2 & 2.1 & 0.9 \\ 1.2 & 11.2 & 1.5 & 2.5 \\ 2.1 & 1.5 & 9.8 & 1.3 \\ 0.9 & 2.5 & 1.3 & 12.1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -7. \\ 5.3 \\ 10.3 \\ 24.6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.4. Вычислительные эксперименты

2.4.1. Анализ погрешностей приближённых решений

2.5. Оценка количества арифметических операций

Оценим количество арифметических операций метода отражений:

1. Почти во всех формулах используется сумма $\sum\limits_{l=k}^{n}$, которая использует $(n-k)$ операций сложения, что в итоге даёт $\dfrac{n(n-1)}{2}$ операций сложения и всех операций внутри суммы.

2. Для вычисления k-того элемента вектора p во всем методе используется $n-1+\dfrac{n(n-1)}{2}$ операций сложения и столько же умножения, а также n операций вычисления корня.

3. Для вычисления матрицы A.

2.6. Оценка временных ресурсов

2.7. Проверка

2.8. Доп

3. Заключение

В этой лабораторной работе была проведена работа по программированию и тестированию алгоритма выбора главного элемента для решения системы линейных алгебраических уравнений.

4. Список использованных источников

ист

5. Приложения

Приложения

6. Решение теоретических задач

6.1. Задание 1

6.1.1. Постановка задачи

Найдите соотношение эквивалентности, связывающее норму $M(A) = n \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$ с $||A||_\infty$. Проверьте экспериментально.

6.1.2. Решение

$$||Ax||_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \le \max_{i,j} |a_{ij}| \sum_j |x_j| = \max_{i,j} |a_{ij}| \cdot ||x||_1$$

Отсюда получаем: $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| \ge \dfrac{||Ax||_\infty}{||x||_1}$. Равенство достигается, когда все элементы матрицы одинаковые. Имеем: $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{||Ax||_\infty}{||x||_1}$.

Далее будем использовать неравенство: $||x||_\infty \le ||x||_1 \le n||x||_\infty$. Получим оценку снизу:

$$M(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}| = n \sup_{x \ne 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_1} \ge \sup_{x \ne 0} \frac{n||Ax||_\infty}{n||x||_\infty} = ||A||_\infty.$$

Теперь получим оценку сверху:

$$M(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}| = n \sup_{x \ne 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_1} \le n \sup_{x \ne 0} \frac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = n||A||_\infty.$$

Таким образом, получили следующее соотношение эквивалентности:

$$||A||_\infty \le M(A) \le n||A||_\infty$$

Проверим его экспериментально:

6.2. Задание 2

6.2.1. Постановка задачи

Докажите теоретически и проверьте экспериментально, что число обусловленности $\mu(A) = \mu(\alpha A)$, где число $\alpha \neq 0$.

6.2.2. Решение

Для доказательства по определению распишем число обусловленности.

$$\mu(\alpha A) = ||\alpha A|| \cdot ||(\alpha A)^{-1}|| = |\alpha| \cdot ||A|| \cdot |\alpha^{-1}| \cdot ||A^{-1}|| = 1 \cdot ||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \mu(A)$$

Равенство доказано.

Проверим его экспериментально. Для этого используется код в листинге nn.

№	Размер матриц	Кол-во матриц	α	$\log_{10}$ макс. разности
1	5	10000	4	$-\infty$
2	5	10000	10	-6
3	5	100000	Rand(0.1, 100)	-5
4	10	10000	4	$-\infty$
5	10	10000	10	-6
6	100	1000	4	$-\infty$
7	100	1000	10	-5