

## ИДЗ 4

Держапольский Юрий Витальевич

1. Докажите, исходя из определения, равномерную сходимость на отрезке  $[0; 1]$ . При каких  $n$  абсолютная величина остатка ряда не превосходит  $\varepsilon$  для любого  $x \in [0; 1]$ ?  $\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-6}$

По определению

$$\sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{5n-6} \stackrel{[0;1]}{\Rightarrow} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow \sup_{x \in [0;1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{5k-6} \right| < \varepsilon$$

Так как  $\frac{x^n}{5n-6} \downarrow_{n \rightarrow \infty} 0$  при  $x \in [0; 1]$ , то это ряд Лейбница, то его можно оценить  $n+1$  членом.

$$\sup_{x \in [0;1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{5k-6} \right| \leq \sup_{x \in [0;1]} \left| \frac{x^{n+1}}{5n-1} \right| \leq \frac{1}{5n-1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{5\varepsilon} + \frac{1}{5}$$

Значит,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[ \frac{1}{5\varepsilon} + \frac{1}{5} \right] + 1$ , что  $\forall n > N$  остаток ряда не превосходит  $\varepsilon$ .

2. Докажите равномерную сходимость на указанном отрезке.  $\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, [-1; 1]$

$$\sup_{x \in [-1;1]} \left| \frac{x^n}{n(n+2)} \right| \leq \frac{1}{n(n+2)}$$

Ряд с данным членом сходится, а значит исходный ряд равномерно сходится на отрезке  $[-1; 1]$ .

3. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, x \in (-3; -1)$

$$\sup_{x \in (-3; -1)} \left| \frac{(x+2)^n \cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}} \right| \leq \sup_{x \in (-3; -1)} \left| \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^3+x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

Ряд с данным членом сходится, значит изначальный ряд сходится равномерно на данном интервале.

4. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(x+n)}{n^2 x^2 + n + 1}, x > 0$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{x \sin(x+n)}{n^2 x^2 + n + 1} \right| \leq \sup_{x>0} \left| \frac{x}{n^2 x^2 + n} \right|$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{n^2 x^2 + n} \right) = \frac{n^2 x^2 + n - 2n^2 x^2}{(n^2 x^2 + n)^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Так как в 0 и  $\infty$  дробь = 0, то максимум в точке  $x = \sqrt{\frac{1}{n}}$ .

$$\sup_{x>0} \left| \frac{x}{n^2 x^2 + n} \right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^2 \frac{1}{n} + n} = \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

Ряд с данным членом сходится, значит и исходный ряд сходится равномерно.

5. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left(1 + \frac{x}{1+n^2x^2}\right), x > 0$

Поскольку  $\ln^2 x$  возрастающая функция, то для нахождения супремума исходной функции найдем:  $\sup_{x>0} \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right|$ . В  $x = 0$ ;  $x = +\infty$  функция = 0, значит найдём экстремум.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1+n^2x^2} \right) = \frac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \implies x = \frac{1}{n}$$

$$\sup_{x>0} \left| \ln^2 \left(1 + \frac{x}{1+n^2x^2}\right) \right| \leq \ln^2 \left(1 + \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}\right) = \ln^2 \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^2}$$

Ряд с данным членом сходится, значит изначальный ряд сходится равномерно.

6. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \sin \frac{x}{n}}{1+\sqrt{nx^4}}, x > 0$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{\cos nx \sin \frac{x}{n}}{1+\sqrt{nx^4}} \right| \leq \sup_{x>0} \left| \frac{\frac{x}{n}}{1+\sqrt{nx^4}} \right| = \sup_{x>0} \left| \frac{x}{n+n^{\frac{3}{2}}x^4} \right|$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{n+n^{\frac{3}{2}}x^4} \right) = \frac{n+n^{\frac{3}{2}}x^4-4n^{\frac{3}{2}}x^4}{(n+n^{\frac{3}{2}}x^4)^2} = 0 \implies x = \frac{1}{\sqrt[4]{3\sqrt{n}}}$$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{x}{n+n^{\frac{3}{2}}x^4} \right| \leq \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{3\sqrt{n}}}}{n+n^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{3\sqrt{n}}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{3\sqrt{n}})(n+3n^2)}$$

Ряд с данным членом сходится (т.к. степень знаменателя  $> 1$ ), значит изначальный ряд сходится равномерно.

7. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}, x \in \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2} \right| = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2} \right|$$

Так как в  $x = 0$  и  $x = \pm\infty$  дробь = 0, то найдём экстремум.

$$\frac{d}{dx} \left( \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2} \right) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2+n^2}\right)^2} \frac{2x^2+2n^2-4x^2}{(x^2+n^2)^2} = 0 \implies x = \pm \frac{1}{n}$$

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2} \right| = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \operatorname{arctg} \frac{\pm \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2}+n^2} \right| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2n}{1+n^4} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n^{\frac{7}{2}}}$$

Ряд с данным членом сходится, значит и изначальный ряд сходится равномерно.

8. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{1+nx}, x > 0$

$$\sup_{x>0} \left| \sin^2 \frac{1}{1+nx} \right| = \sin^2 1$$

Проверим отрицание критерия Коши.

$$\sup_{x>0} \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} \sin^2 \frac{1}{1+kx} \right| = \sup_{x>0} \left( \sin^2 \frac{1}{1+(n+1)x} \right) = \sin^2 1$$

Не стремится к нулю, значит исходный ряд сходится неравномерно.

9. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \sin nx, x \in (0; 1)$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0;1)} \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} e^{-k^2 x^2} \sin kx \right| &= \sup_{x \in (0;1)} \left| e^{-(n+1)^2 x^2} \sin(n+1)x \right| \geq \\ &\geq \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n+1}} \left( e^{-(n+1)^2 x^2} \sin(n+1)x \right) = e^{-1} \sin 1 \end{aligned}$$

Не стремится к 0, значит сходится неравномерно на  $x \in (0; 1)$ .

10. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{n}}{2^n}, x \in (0; 1)$

По признаку Даламбера.

$$D_n = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{n+1}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1$$

Значит, ряд сходится равномерно на области определения ( $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ), а значит, и при  $x \in (0; 1)$ .

11. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+x^2}}, x \in (0; 2)$

Т.к.  $\frac{1}{\sqrt[5]{n+x^2}} \downarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+x^2}}$  сходится как ряд Лейбница.

И т.к.  $\sup_{x \in (0;2)} \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) \leq e^2$

То по признаку Абеля исходный ряд сходится равномерно при  $x \in (0; 2)$ .

12. Исследуйте на равномерную сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3 \sin^2 nx}{2+n^3 x^6}, x > 0$

$$\sup_{x>0} \left| \frac{x^3 \sin^2 nx}{2+n^3 x^6} \right| \leq \sup_{x>0} \left| \frac{x^3}{2+n^3 x^6} \right|$$

В 0 и  $\infty$  дробь = 0, найдём экстремум.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{2+n^3 x^6} \right) = \frac{6x^2 + 3n^3 x^8 - 6n^3 x^8}{(2+n^3 x^6)^2} = 0 \implies x^6 = \frac{2}{n^3} \implies x = \frac{2^{\frac{1}{6}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sup_{x>0} \frac{x^3}{2+n^3 x^6} = \frac{\frac{2^{1/2}}{n^{3/2}}}{2+n^3 \frac{2}{n^3}} = \frac{\sqrt{2}}{4n^{\frac{3}{2}}}$$

Ряд с данным членом сходится, значит исходный ряд сходится равномерно при  $x > 0$ .