

Лабораторная работа №1 по дисциплине
«Дифференциальные уравнения»

Держапольский Юрий Витальевич

23 марта 2023 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Задание 1: Вычислить неопределённый интеграл	3
2.1	Постановка задачи	3
2.2	Решение	3
3	Задание 2: Численно вычислить интеграл	4
3.1	Постановка задачи	4
3.2	Решение	4
4	Задание 3: Решить уравнения	12
4.1	Постановка задачи	12
4.2	Решение	12
5	Заключение	14

1 Введение

В этой лабораторной работе мы научимся решать дифференциальные уравнения и верстать их в L^AT_EX.

2 Задание 1: Вычислить неопределённый интеграл

2.1 Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1} dt.$$

2.2 Решение

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt[3]{t+1} dt &= \left(\begin{array}{l} \sqrt[3]{t+1} = x \\ t = x^3 - 1 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right) \int 3x^2 \sin x dx = \\ &= -3 \int x^2 d(\cos x) = \\ &= -3 \left(x^2 \cos x - \int \cos x d(x^2) \right) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6 \left(\int x \cos x dx \right) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6 \left(\int x d(\sin x) \right) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\ &= -3x^2 \cos x + 6x \sin x + 6 \cos x + C = \\ &= 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + \\ &+ 3 \left(2 - (t+1)^{\frac{2}{3}} \right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\int \sin \sqrt[3]{t+1} dt = 6\sqrt[3]{t+1} \sin \sqrt[3]{t+1} + 3 \left(2 - (t+1)^{\frac{2}{3}} \right) \cos \sqrt[3]{t+1} + C.$$

3 Задание 2: Численно вычислить интеграл

3.1 Постановка задачи

Четырьмя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. Реализацию решения проводить на языке «Go»:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt.$$

3.2 Решение

Точное значение: $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643767\dots$

1. Метод левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643667\dots, \quad n = 30291,$$

$$|-0.643767 + 0.643667| = 9.999 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func left_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f(a + delta * float64(i))
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s:= 10000
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = left_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

2. Метод правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} \, dt \approx -0.643866\dots, \quad n = 27507,$$

$$|-0.643767 + 0.643866| = 9.999 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func right_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 1; i <= n; i++ {
        if (i != n) {
            s += f(a + delta * float64(i))
        } else {
            s += f(a + delta * float64(i) - eps)
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = right_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

3. Метод центральных прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643667\dots, \quad n = 1726,$$

$$|-0.643767 + 0.643667| = 9.998 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func center_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    for i := 0; i < n; i++ {
        s += f((2*a + delta * float64(2*i + 1))/2)
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = center_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

4. Метод трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \Delta x, \quad x_k \in [a, b], \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Найденное значение:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t^2+1} dt \approx -0.643866\dots, \quad n = 3676,$$

$$|-0.643767 + 0.643866| = 9.996 \cdot 10^{-5} < \varepsilon.$$

Код программы:

```
package main

import "math"
import "fmt"

func f(x float64) float64 {
    return ((math.Log(1-x))/(1+x*x))
}

func trapezoid_rect(n int, a float64, b float64) float64 {
    s := 0.0
    delta := (b-a)/ float64(n)
    eps := 1e-5
    for i := 0; i < n; i++ {
        if (i != n - 1) {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                f(a + delta * float64(i+1)))/2
        } else {
            s += (f(a + delta * float64(i)) +
                f(a + delta * float64(i+1) - eps))/2
        }
    }
    s *= delta
    return s
}

func main() {
    n := 0
    eps := 1e-4
    a := 0.0
    b := 1.0
    real := -0.643767
    s := 10000
    n=0
    for math.Abs(real - s) >= eps {
        n++
        s = trapezoid_rect(n,a,b)
    }
    fmt.Println(s, n, math.Abs(real-s))
}
```

4 Задание 3: Решить уравнения

4.1 Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $r' = -\frac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}.$

2. $\frac{1 - \dot{u}}{1 + \dot{u}} \operatorname{tg}(t - u - 1) = 2t + 2u + 8.$

3. $\dot{y} = \frac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}.$

4. $t\dot{u} - u^2 = 2u + 1.$

4.2 Решение

1. $r' = -\frac{5\theta + 3r + 2}{3\theta - 11r - 6}.$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах.

Общее решение: $6\theta r - 12r - 11r^2 + 5\theta^2 + 4\theta = C.$

2. $\frac{1 - \dot{u}}{1 + \dot{u}} \operatorname{tg}(t - u - 1) = 2t + 2u + 8.$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах.

Общее решение: $e^{(u+t+4)^2} \cos(t - u - 1) = C.$

$$3. \dot{y} = \frac{1}{t \cdot \cos y + \sin 2y}.$$

Тип уравнения: Линейное приведённое неоднородное дифференциальное уравнение I порядка с переменными коэффициентами относительно $t = t(y)$.

Общее решение: $t = Ce^{\sin y} - 2 \sin y - 2$.

$$4. t\dot{u} - u^2 = 2u + 1.$$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными.

Общее решение: $-\frac{1}{u+1} = \ln t + C$.

5 Заключение

Мы научились решать дифференциальные уравнения и верстать их в L^AT_EX.