

ИДЗ 5

Держапольский Юрий Витальевич

1. Найти сумму ряда $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n}$

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{x^n} &= \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^n} - \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

2. Найти сумму ряда $\sum_1^{\infty} (n^2 + 2n - 1)x^{n+1}$

$$\begin{aligned} S &= \sum_1^{\infty} (n+1+\sqrt{2})(n+1-\sqrt{2})x^{n+1} = x \sum_1^{\infty} (n+1)(n+1-\sqrt{2})x^n + x\sqrt{2} \sum_1^{\infty} (n+1-\sqrt{2})x^n = \\ &= x \sum_1^{\infty} (n+1)(n+2)x^n + x(-1-\sqrt{2}) \sum_1^{\infty} (n+1)x^n + x\sqrt{2} \sum_1^{\infty} (n+1)x^n - 2x \sum_1^{\infty} x^n = \\ &= x \sum_1^{\infty} (n+1)(n+2)x^n - x \sum_1^{\infty} (n+1)x^n - 2x \sum_1^{\infty} x^n = xa(x) - xb(x) - \frac{2x^2}{1-x} \end{aligned}$$

$$a_1(x) = \int_0^x a(t)dt = \int_0^x \sum_1^{\infty} (n+1)(n+2)t^n dt = \sum_1^{\infty} \int_0^x (n+1)(n+2)t^n dt = \sum_1^{\infty} (n+2)x^{n+1}$$

$$\int_0^x a_1(t)dt = \int_0^x \sum_1^{\infty} (n+2)t^{n+1} dt = \sum_1^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x}$$

$$a_1(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{1-x} \right) = \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \right) = \frac{(6x - 6x^2)(1-2x+x^2) - (3x^2 - 2x^3)(-2+2x)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{6x - 12x^2 + 8x^3 - 2x^4}{(1-x)^4} = \frac{6x - 6x^2 + 2x^3}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\int_0^x b(t)dt = \int_0^x \sum_1^{\infty} (n+1)t^n dt = \sum_1^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

$$b(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{1-x} \right) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} S &= x^2 \frac{6 - 6x + 2x^2}{(1-x)^3} - x^2 \frac{2-x}{(1-x)^2} - x^2 \frac{2}{1-x} = \\ &= x^2 \frac{6 - 6x + x^2 - (2 - 3x + x^2) - 2(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^3} = x^2 \frac{2 + x - x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^2(2-x)(x+1)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

3. Разложить в ряд Тейлора в точке 0: $f(x) = \ln(1 + x - 12x^2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 - 24x}{1 + x - 12x^2} = \frac{1 - 24x}{-(3x + 1)(4x - 1)} = \frac{24x - 1}{(3x - 1)(4x + 1)} = \frac{-3}{1 - 3x} + \frac{4}{1 + 4x} \\ &= \int_0^x \left(\frac{-3}{1 - 3t} + \frac{4}{1 + 4t} \right) dt = -3 \int_0^x \frac{dt}{1 - 3t} + 4 \int_0^x \frac{dt}{1 + 4t} = \\ &= -3 \int_0^x \sum_0^\infty (3t)^n dt + 4 \int_0^x \sum_0^\infty (-4t)^n dt = \sum_0^\infty \frac{(3x)^{n+1}}{n+1} + \sum_0^\infty \frac{(-4x)^{n+1}}{n+1} \\ &= - \sum_0^\infty \frac{(3x)^{n+1} + (-4x)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

4. Исследовать на равномерную сходимость параметризованное семейство:

$$f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad X = (0; 4), \quad y \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2+y^2} &= \frac{1}{1+x^2} \\ \sup_{x \in X} \left| \frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{1+x^2} \right| &= \sup_{x \in X} \left| \frac{1+x^2-1-x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)(1+x^2)} \right| = \sup_{x \in X} \frac{y^2}{(1+x^2+y^2)(1+x^2)} = \\ &= \frac{y^2}{1+y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Значит параметризованное семейство сходится на множестве X при $y \rightarrow 0$.

5. Вычислить с помощью дифференцирования по параметру собственный интеграл.

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg} \left(a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) dx$$

$\operatorname{arctg} \left(a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)$ непрерывна как функция 2-х аргументов $\forall a; x \in [0; \frac{\pi}{4}]$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\partial}{\partial a} \operatorname{arctg} \left(a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{1 + a^2(1 - \operatorname{tg}^2 x)} dx = \\ &= \left| x = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}, dx = \frac{dy}{(1 + 2y^2)\sqrt{1 + y^2}} \right| = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{1}{(1+y^2)}}}{1 + a^2 \frac{1}{1+y^2}} \frac{dy}{(1 + 2y^2)\sqrt{1 + y^2}} = \\ &= \int_0^\infty \frac{dy}{(1 + a^2 + y^2)(1 + 2y^2)} = \int_0^\infty \left(\frac{2}{(1 + 2a^2)(1 + 2y^2)} - \frac{1}{(1 + 2a^2)(1 + a^2 + y^2)} \right) dy = \\ &= \frac{1}{1 + 2a^2} \left(\int_0^\infty \frac{2dy}{1 + 2y^2} - \int_0^\infty \frac{dy}{1 + a^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{1 + 2a^2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(y\sqrt{2}) \Big|_0^\infty - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \Big|_0^\infty \right) = \\ &= \frac{1}{1 + 2a^2} \left(\sqrt{2} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a^2}} \right) = \frac{\pi}{2 + 4a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \right) \\ f(a) &= \int \frac{\pi}{2 + 4a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \right) da = \frac{\pi}{2} \left(\int \frac{\sqrt{2} da}{(1 + 2a^2)} - \int \frac{da}{(1 + 2a^2)\sqrt{1 + a^2}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}a) - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \right) + f(0) = \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}a) - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \right) \end{aligned}$$

6. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \int_a^b x^t dt dx = \int_0^1 dx \int_a^b \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^t dt = \\ &= \int_a^b dt \int_0^1 \cos(-\ln x) x^t dx = \int_a^b dt \int_0^1 \cos(\ln x) x^t dx \\ I &= \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} \cos(\ln x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin(\ln x) \frac{x^{t+1}}{t+1} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{t+1} \left(1 + \int_0^1 \sin(\ln x) x^t dx\right) = \frac{1}{t+1} \left(1 + \frac{x^{t+1}}{t+1} \sin(\ln x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\ln x) \frac{x^{t+1}}{t+1} \frac{1}{x} dx\right) = \\ &= \frac{1}{t+1} \left(1 + 0 - \frac{1}{t+1} \int_0^1 \cos(\ln x) x^t dx\right) \Rightarrow I = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} I \Rightarrow I = \frac{t+1}{1+(t+1)^2} \\ \int_a^b \frac{t+1}{1+(t+1)^2} dt &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d((t+1)^2)}{1+(t+1)^2} = \frac{1}{2} \ln |t^2 + 2t + 2| \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2} \right| \end{aligned}$$

7. Найти область сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^\infty x^3 e^{-px^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty y e^{-py} dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-p/t}}{t^3} dt$$

По признаку Дирихле:

1) $|e^{-p/t}| \leq 1$ т.к. это возрастающая функция и $e^{-p/t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ при $p > 0$

2,3) $\frac{1}{t^3} \downarrow_{t \rightarrow \infty} 0$

Область сходимости $p > 0$.

8. Найти область сходимости несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a \operatorname{tg} x} dx &= \int_0^l \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a \operatorname{tg} x} dx + \int_l^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a} \operatorname{ctg} x dx \\ \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a \operatorname{tg} x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2 \cos 2x (-\sin 2x) 2 + 8xe^{-4x^2}}{(a+1)x^a} = \frac{-2 \sin 4x + 8xe^{-4x^2}}{(a+1)x^a} \sim \\ &\sim \frac{-8x + 8xe^{-4x^2}}{(a+1)x^a} = \frac{8x(e^{-4x^2} - 1)(-4x^2)}{(a+1)x^a(-4x^2)} \sim \frac{-32x^3}{(a+1)x^a} = \frac{-32}{(a+1)x^{a-3}} \end{aligned}$$

При $x \rightarrow 0$ и $a \leq 3$ дробь = const. При $x \rightarrow 0$ и $a > 3$ дробь = ∞ . Значит первый интеграл сходится при $a \leq 3$.

$$\frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^a} \operatorname{ctg} x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$$

Значит второй интеграл сходится при любом a .

Значит, область сходимости изначального интеграла $a \leq 3$.

9. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\cos x}{(2x - \cos \ln x)^a} dx \\ \left| \frac{\cos x}{(2x - \cos \ln x)^a} \right| \leq \frac{1}{(2x - \cos \ln x)^a} \end{aligned}$$

Сходится абсолютно при $a > 1$.

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A| \leq 1$$

$$\frac{1}{(2x - \cos \ln x)^a} \xrightarrow[a > 0]{x \rightarrow \infty} 0$$

При $a > 0$ сходится условно по признаку Дирихле, и при $a \leq 0$ расходится.

10. Исследовать на равномерную сходимость интеграл на множестве $E = (-\infty; b), b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + (x - a)^4} dx$$

$$\sup_{x \in (0; +\infty), a \in E} \left| \frac{x}{1 + (x - a)^4} \right| = \sup_{x \in (0; +\infty), a \in E} \left| \frac{x}{1} \right| = \infty$$

Расходится, значит интеграл сходится неравномерно.

11. Исследовать на равномерную сходимость интеграл на множестве $E = (0; 1)$

$$\int_0^\infty \sin(ae^x) dx = \left| y = ae^x, x = \ln \frac{y}{a}, dx = \frac{1}{y} dy = \frac{dy}{y} \right| = \int_1^\infty \frac{\sin y}{y} dy$$

Данный интеграл сходится по признаку Дирихле, значит изначальный равномерно сходится на множестве E .

12. Доказать равенство

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = 1$$

$$I = \int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx = -\cos x e^{-ax} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -ae^{-ax} (-\cos x) dx = 1 - a \int_0^\infty e^{-ax} \cos x dx =$$

$$= 1 - a \left(\sin x e^{-ax} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -ae^{-ax} \sin x dx \right) = 1 - a^2 I \implies I = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a^2 + 1} = 1$$