In[132]:=

```
(*Лабораторная работа 5
 Самута Данилл
 Группа 221703
 Вариант 8*)

(*Задание 1*)
```

$$f[x\_] = \left(\mathrm{Cos}\left[x^2 + \sqrt{x}\right]\right)^3$$

Out[132]=

$$\mathrm{Cos}\left[\sqrt{x} + x^2\right]^3$$

In[133]:=

$$x_0 = 5.37;$$

In[134]:=

```
D[f[x], x] (*Вычисляем производные 1-го и 2-
 го порядка с использованием функцию D из пакета Математика*)
```

дифференцировать

дифференцировать

Out[134]=

$$-3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\right)\mathrm{Cos}\left[\sqrt{x} + x^2\right]^2 \mathrm{Sin}\left[\sqrt{x} + x^2\right]$$

In[135]:=

```
D[f[x], {x, 2}]
```

дифференцировать

Out[135]=

$$-3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\right)^2 \mathrm{Cos}\left[\sqrt{x} + x^2\right]^3 - 3\left(2 - \frac{1}{4x^{3/2}}\right)\mathrm{Cos}\left[\sqrt{x} + x^2\right]^2 \mathrm{Sin}\left[\sqrt{x} + x^2\right] + 6\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\right)^2 \mathrm{Cos}\left[\sqrt{x} + x^2\right]\mathrm{Sin}\left[\sqrt{x} + x^2\right]^2$$

In[136]:=

$$d11 = D[f[x], x] \mathbin{/.} x \to x_0$$

дифференцировать

Out[136]=

7.93433

In[137]:=

$$d21 = D[f[x], \{x, 2\}] \mathbin{/.} x \to x_0$$

дифференцировать

Out[137]=

-276.544

In[138]:=

```
(*Вычисляем производные 1-го и 2-го порядка с использованием заданных формул*)
```

In[139]:=

```
pr1[x_, h_] = 1/h * ((f[x+h] - f[x]) - 1/2 (f[x+h] - f[x])^2 + 1/3 * (f[x+h] - f[x])^3)
```

Out[139]=

$$\frac{1}{h}\left(-\text{Cos}\left[\sqrt{x}+x^2\right]^3+\text{Cos}\left[\sqrt{h+x}+(h+x)^2\right]^3-\frac{1}{2}\left(-\text{Cos}\left[\sqrt{x}+x^2\right]^3+\text{Cos}\left[\sqrt{h+x}+(h+x)^2\right]^3\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\text{Cos}\left[\sqrt{x}+x^2\right]^3+\text{Cos}\left[\sqrt{h+x}+(h+x)^2\right]^3\right)^3\right)$$

In[140]:=

```
pr1[x0, 0.1]
pr1[x0, 0.01]
pr1[x0, 0.001]
```

Out[140]=

-8.67123

Out[141]=

6.25054

Out[142]=

7.76473

In[163]:=

```
pr2[x_, h_] = 1/h^2 * ((f[x+h] - f[x])^2 - (f[x+h] - f[x])^3)
pr2[x0, 0.1]
pr2[x0, 0.01]
pr2[x0, 0.000001]
```

Out[163]=

$$\frac{1}{h^2}\left(\left(-\text{Cos}\left[\sqrt{x}+x^2\right]^3+\text{Cos}\left[\sqrt{h+x}+(h+x)^2\right]^3\right)^2-\left(-\text{Cos}\left[\sqrt{x}+x^2\right]^3+\text{Cos}\left[\sqrt{h+x}+(h+x)^2\right]^3\right)^3\right)$$

Out[164]=

59.3682

Out[165]=

38.9142

Out[166]=

62.951

In[147]:=

```
(*Сравнив эти значения можно понять,
что чем меньше шаг, тем точнее значение производной*)
```

In[148]:=

In[149]:=

In[150]:=

```
(*Использовал приближенную формулу для второй производной,
т.к. формула из Лр 5 дала плохой результат*)
```

In[151]:=

```
pr2metoda[x_, h_] = (f[x + h] - 2 f[x] + f[x - h]) / h^2
```

$$\text{pr2metoda}[x\_, h\_] = \frac{f[x+h] - 2\,f[x] + f[x-h]}{h^2}$$

Out[151]=

$$\frac{-2\,\text{Cos}\left[\sqrt{x} + x^2\right]^3 + \text{Cos}\left[\sqrt{-h+x} + (-h+x)^2\right]^3 + \text{Cos}\left[\sqrt{h+x} + (h+x)^2\right]^3}{h^2}$$

In[152]:=

In[153]:=

pr2metoda[x_0, 0.1]

Out[153]=

-149.81

In[154]:=

pr2metoda[x_0, 0.01]

Out[154]=

-274.802

```
In[1]:= (*Задание 2*)

Clear[f];
очистить

f[x_] = Sqrt[1 + x^3] / (Sin[7 * x + 1] * Sin[7 * x + 1]);

In[3]:= a = -1; b = 3; h1 = 0.2;

In[4]:=
Clear[pr1];
очистить

In[5]:= pr1[x_, h_] = (f[x + h] - f[x - h]) / (2 * h)
  (*задаем формулу 2-го порядка точности для вычисления производной 1-го порядка*)
```

Out[5]= $\dfrac{-\sqrt{1+(-h+x)^3}\ \mathrm{Csc}[1+7\ (-h+x)]^2+\sqrt{1+(h+x)^3}\ \mathrm{Csc}[1+7\ (h+x)]^2}{2\ h}$

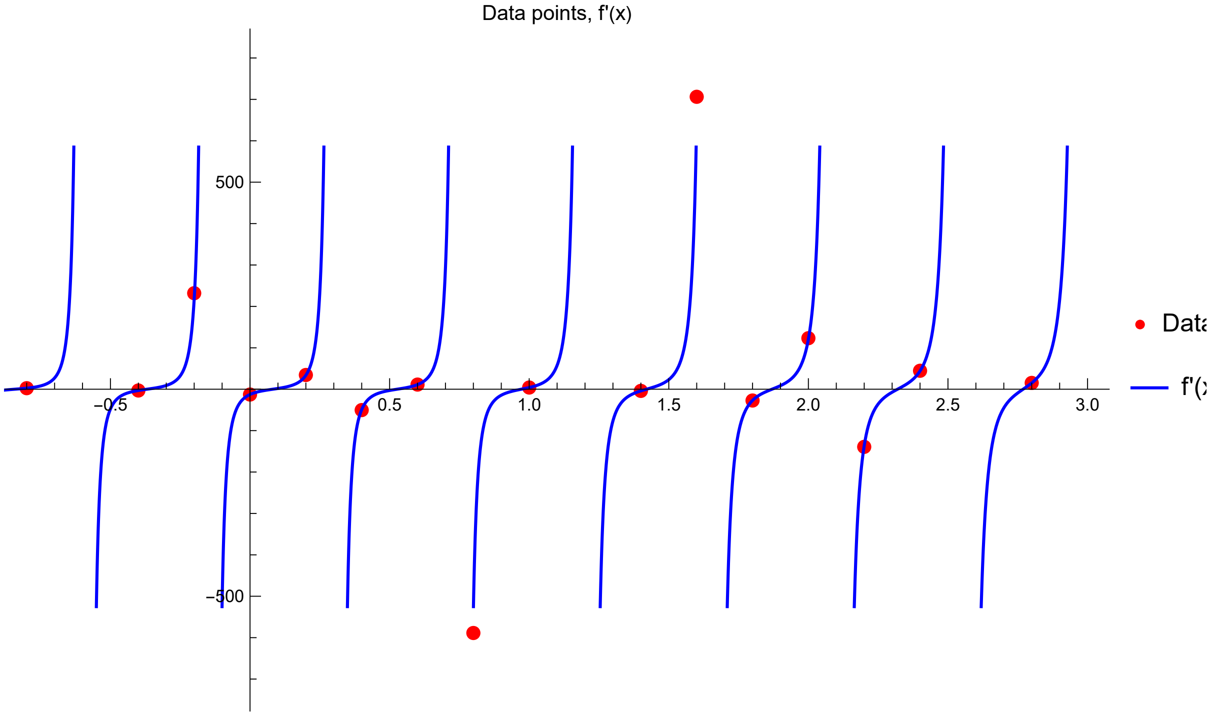
```
In[6]:=
f1[x_] = D[f[x], x]
         дифференции
```

Out[6]= $\dfrac{3\ x^2\ \mathrm{Csc}[1+7\ x]^2}{2\ \sqrt{1+x^3}}-14\ \sqrt{1+x^3}\ \mathrm{Cot}[1+7\ x]\ \mathrm{Csc}[1+7\ x]^2$

```
In[7]:= data = N[Table[{a + i * h1, pr1[(a + i * h1), 0.01]}, {i, 0, (b - a)/h1}]]
              ·· таблица значений

  (*Составляем таблицу значений из значений аргумента и соответсвующего
   ему значению производной на отрезке [-1, 3], с шагом 0.2*)

Out[7]= {{-1., 72.0251 - 194.434 i}, {-0.8, 2.52439}, {-0.6, 328987.},
  {-0.4, -3.09229}, {-0.2, 231.892}, {0., -12.8306}, {0.2, 34.3879},
  {0.4, -50.3908}, {0.6, 11.2217}, {0.8, -588.735}, {1., 4.08427}, {1.2, 31583.},
  {1.4, -4.02833}, {1.6, 706.219}, {1.8, -27.2789}, {2., 123.224}, {2.2, -139.219},
  {2.4, 44.5749}, {2.6, -1497.07}, {2.8, 15.2184}, {3., -27658.1}}

In[8]:= (*Демонстрируем то,
что значения производной в данных точках совпали с графиком функции*)
```

In[9]:=
```
Show[ListPlot[data, PlotStyle → Red, PlotLegends → {"Data points"}],
 Plot[f1[x], {x, -1, 3}, PlotStyle → Blue, PlotLegends → {"f'(x)"}],
 PlotLabel → "Data points, f'(x)", ImageSize → Large]
```
⌊пок··· ⌊диаграмма разб··· ⌊стиль графика ⌊кр··· ⌊легенды графика
⌊график функции ⌊стиль графика ⌊синий ⌊легенды графика
⌊пометка графика ⌊размер изоб··· ⌊крупный

Out[9]=



In[1]:=
```
(*Задание 3*)
(*формула средних прямоугольников*)
Clear[f];
```
очистить

$$f[x\_] = \frac{\sqrt{2*x+2.8}}{0.7*x^2+\sqrt{x^2+1.3}}$$

Out[2]=
$$\frac{\sqrt{2.8+2\,x}}{0.7\,x^2+\sqrt{1.3+x^2}}$$

In[3]:=
$$a = 0.8;\ b = 1.6;\ n1 = 8;\ h = \frac{b-a}{n1};$$

In[4]:=
$$I1 = h*\sum_{i=1}^{n1} f\left[\frac{a+(i-1)*h+a+i*h}{2}\right]$$

(*Вычисляем интеграл по формуле средних прямоугольников для n=8*)

Out[4]= 0.695637

In[5]:=
```
int12 = NIntegrate[f[x], {x, a, b}]
```
квадратурное интегрирование

(*Вычисляем интеграл с использованием стандартной функции пакета Математика*)

Out[5]= 0.695791

In[6]:=
```
PaddedForm[I1, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[6]//PaddedForm=
0.69563745

In[7]:=
```
PaddedForm[int12, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[7]//PaddedForm=
0.69579125

In[8]:=
```
Abs[I1 - int12] (*Сравниваем полученные значения*)
```
абсолютное значение

Out[8]= 0.000153806

In[9]:=
$$a = 0.8;\ b = 1.6;\ n2 = 10;\ h = \frac{b-a}{n2};$$

In[10]:=
$$I2 = h*\sum_{i=1}^{n2} f\left[\frac{a+(i-1)*h+a+i*h}{2}\right]$$

(*Вычисляем интеграл по формуле средних прямоугольников для n=10*)

Out[10]=
0.695693

In[11]:=
```
int22 = NIntegrate[f[x], {x, a, b}]
```
квадратурное интегрирование

(*Вычисляем интеграл с использованием стандартной функции пакета Математика*)

Out[11]=
0.695791

In[12]:=
```
PaddedForm[I2, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[12]//PaddedForm=

 0.69569289

In[13]:=
```
PaddedForm[int22, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[13]//PaddedForm=

 0.69579125

In[14]:=
```
Abs[I2 - int22] (*Сравниваем полученные значения*)
```
абсолютное значение

Out[14]=

0.0000983637

In[15]:=
```
k = 2;
```

In[16]:=

$$I12 = I2 + \frac{n1^k}{n2^k - n1^k} (I2 - I1);$$

```
(*Получаем более точное значение интеграла согласно формуле Ричардсона*)
```

In[17]:=
```
I12
```

Out[17]=

0.695791

In[18]:=
```
PaddedForm[I12, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[18]//PaddedForm=

 0.69579145

In[19]:=
```
Abs[I12 - int22] (*Сравниваем полученное значение с значением,
полученным при использовании функции NIntegrate, разница стала меньше*)
```
абсолютное значение

квадратурное интегрирование

Out[19]=

1.99751×10^{-7}

In[20]:=
```
(*формула трапеций*)
```

$$a = 0.8;\ b = 1.6;\ n1 = 8;\ h = \frac{b - a}{n1};$$

In[21]:=

$$I1 = h * \sum_{i=1}^{n1} \frac{f[a + (i - 1) * h] + f[a + i * h]}{2} \text{ (*Вычисляем интеграл по формуле трапеций для n=8*)}$$

Out[21]=

0.696099

In[22]:=
```
int12 = NIntegrate[f[x], {x, a, b}]
```
квадратурное интегрирование

```
 (*Вычисляем интеграл с использованием стандартной функции пакета Математика*)
```

Out[22]=

0.695791

In[23]:=
```
PaddedForm[I1, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[23]//PaddedForm=
```
 0.69609860
```

In[24]:=
```
PaddedForm[int12, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулям

Out[24]//PaddedForm=
```
 0.69579125
```

In[25]:=
```
Abs[I1 - int12] (*Сравниваем полученные значения*)
```
абсолютное значение

Out[25]=
```
0.000307343
```

In[26]:= $a = 0.8;\ b = 1.6;\ n2 = 10;\ h = \frac{b - a}{n2};$

In[27]:= $I2 = h * \sum_{i=1}^{n2} \frac{f[a + (i - 1) * h] + f[a + i * h]}{2}$ (*Вычисляем интеграл по формуле трапеций для n=10*)

Out[27]=
```
0.695988
```

In[28]:=
```
int22 = NIntegrate[f[x], {x, a, b}]
```
квадратурное интегрирование

(*Вычисляем интеграл с использованием стандартной функции пакета Математика*)

Out[28]=
```
0.695791
```

In[29]:=
```
PaddedForm[I2, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[29]//PaddedForm=
```
 0.69598787
```

In[30]:=
```
PaddedForm[int22, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[30]//PaddedForm=
```
 0.69579125
```

In[31]:=
```
Abs[I2 - int22] (*Сравниваем полученные значения*)
```
абсолютное значение

Out[31]=
```
0.000196618
```

In[32]:=
```
k = 2;
```

In[33]:= $I12 = I2 + \frac{n1^k}{n2^k - n1^k} (I2 - I1);$

(*Получаем более точное значение интеграла согласно формуле Ричардсона*)

In[34]:=
```
I12
```
Out[34]=
```
0.695791
```

In[35]:=
```
PaddedForm[I12, {9, 8}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[35]//PaddedForm=
```
 0.69579102
```

In[36]:=
```
Abs[I12 - int22] (*Сравниваем полученное значение с значением,
полученным при использовании функции NIntegrate, разница стала меньше*)
```
абсолютное значение; квадратурное интегрирование

Out[36]=

2.28389×10^{-7}

In[37]:=
```
(*Задание 4*)
a = 1.04; b = 2; h = 0.06;
```

In[38]:=
```
fTable = ( 0.9519 0.9181 0.8534 0.8278 0.7734 0.7537 0.7071 0.6917 0.6513 0.6392 0.6036 0.59
```
Out[38]=
```
{{0.9519, 0.9181, 0.8534, 0.8278, 0.7734, 0.7537, 0.7071, 0.6917,
  0.6513, 0.6392, 0.6036, 0.5941, 0.5625, 0.5549, 0.5265, 0.5206, 0.495}}
```

In[39]:=
```
data2 = N[Table[{a + i * h, fTable[[1, i + 1]]}, {i, 0, 16}]]
 (*Разбиение отрезка интегрирования на 16 частей*)
```
·· таблица значений

Out[39]=
```
{{1.04, 0.9519}, {1.1, 0.9181}, {1.16, 0.8534}, {1.22, 0.8278},
 {1.28, 0.7734}, {1.34, 0.7537}, {1.4, 0.7071}, {1.46, 0.6917},
 {1.52, 0.6513}, {1.58, 0.6392}, {1.64, 0.6036}, {1.7, 0.5941},
 {1.76, 0.5625}, {1.82, 0.5549}, {1.88, 0.5265}, {1.94, 0.5206}, {2., 0.495}}
```

In[40]:=
```
(*Разбиение отрезка интегрирования на 8 частей*)
```

In[41]:=
```
data1 = N[Table[{a + i * 2 * h, fTable[[1, 2 * i + 1]]}, {i, 0, 8}]]
```
·· таблица значений

Out[41]=
```
{{1.04, 0.9519}, {1.16, 0.8534}, {1.28, 0.7734}, {1.4, 0.7071},
 {1.52, 0.6513}, {1.64, 0.6036}, {1.76, 0.5625}, {1.88, 0.5265}, {2., 0.495}}
```

In[42]:=
```
h = 0.12; (*Считаем определенный интеграл от таблично заданной функции по
 формуле Симпсона (парабол) для разбиения отрезка интегрирования на 8 частей*)
```

In[43]:=

$$\text{int1} = \frac{h}{3} * \left(\text{data1}[[1, 2]] + \text{data1}[[9, 2]] + 4 * \left(\sum_{i=1}^{4} \text{data1}[[2 * i, 2]]\right) + 2 * \left(\sum_{i=1}^{3} \text{data1}[[2 * i + 1, 2]]\right)\right)$$

Out[43]=
```
0.647348
```

In[44]:=
```
(*Считаем определенный интеграл от таблично заданной функции по формуле
 Симпсона (парабол) для разбиения отрезка интегрирования на 16 частей*)
```

```
In[45]:= h = 0.06
Out[45]=
0.06

In[46]:= int2 =
  h/3 * (data2[[1, 2]] + data2[[17, 2]] + 4 * (Sum[data2[[2 * i, 2]], {i, 1, 8}]) + 2 * (Sum[data2[[2 * i + 1, 2]], {i, 1, 7}]))
Out[46]=
0.656058

In[47]:= g[x_] = InterpolatingPolynomial[data1, x]
              интерполяционный многочлен
Out[47]=
0.495 +
 (-0.475938 + (0.313151 + (-0.245045 + (0.134988 + (-0.109041 + (0.120437 + (-0.0761383 +
       2.71099 (-1.4 + x)) (-1.76 + x)) (-1.16 + x))
     (-1.88 + x)) (-1.28 + x)) (-1.52 + x)) (-1.04 + x)) (-2. + x)

In[48]:= Simplify[g[x]]
         упростить
Out[48]=
65.4467 - 346.603 x + 823.594 x^2 - 1120.07 x^3 +
 948.931 x^4 - 512.014 x^5 + 171.714 x^6 - 32.7164 x^7 + 2.71099 x^8

In[49]:= Integrate[g[x], {x, a, b}]
         интегрировать
Out[49]=
0.647325

In[50]:=
 (*Задание 5*)
 f[x_] = (3 + Cos[x + 2])/(x + 2.4); n = 6; a = 1.6; b = 3.2;

In[51]:= LegendreP[6, t] (*Находим полином Лежандра 6 степени*)
         P-функция Лежандра первого рода
Out[51]=
1/16 (-5 + 105 t^2 - 315 t^4 + 231 t^6)

In[52]:= sl = NSolve[LegendreP[6, t] == 0, t] (*Находим его корни*)
              числе···  P-функция Лежандра первого рода
Out[52]=
{{t -> -0.93247}, {t -> -0.661209}, {t -> -0.238619},
 {t -> 0.238619}, {t -> 0.661209}, {t -> 0.93247}}

In[53]:= tt = t /. sl
Out[53]=
{-0.93247, -0.661209, -0.238619, 0.238619, 0.661209, 0.93247}

In[54]:= (*Для определения квадратурных коэффициентов Гаусса Ai
          введем матрицу ее коэффициентов T и столбец свободных членов B*)

In[55]:= T = Table[If[i == 1, 1, (tt[[j]])^(i-1)], {i, 6}, {j, 6}];
             табл···  условный оператор
```

In[56]:=
```
MatrixForm[T]
```
матричная форма

Out[56]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.93247 & -0.661209 & -0.238619 & 0.238619 & 0.661209 & 0.93247 \\ 0.869499 & 0.437198 & 0.0569391 & 0.0569391 & 0.437198 & 0.869499 \\ -0.810782 & -0.289079 & -0.0135868 & 0.0135868 & 0.289079 & 0.810782 \\ 0.756029 & 0.191142 & 0.00324206 & 0.00324206 & 0.191142 & 0.756029 \\ -0.704974 & -0.126385 & -0.000773618 & 0.000773618 & 0.126385 & 0.704974 \end{pmatrix}$$

In[57]:=

$$B = \text{Table}\left[\text{If}\left[\text{EvenQ}[i] == \text{True}, 0, \frac{2}{i}\right], \{i, 6\}\right]$$

табл··· ··· чётное чис··· истина

Out[57]=

$$\left\{2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0\right\}$$

In[58]:=
```
(*Решение данной системы*)
```

In[59]:=
```
A = LinearSolve[T, B]
```
решить линейные урав

Out[59]=
```
{0.171324, 0.360762, 0.467914, 0.467914, 0.360762, 0.171324}
```

In[60]:=
```
(*вычисляем определенный интеграл по формуле Гаусса*)
```

In[61]:=

$$\text{int} = \frac{b-a}{2} * \sum_{i=1}^{6} A[[i]] * f\left[\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * tt[[i]]\right]$$

Out[61]=
```
0.903332
```

In[62]:=
```
PaddedForm[int, {19, 18}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[62]//PaddedForm=
```
 0.903331759138360000
```

In[63]:=
```
(*Вычисляем интеграл используя функцию пакета Математика*)
```

In[64]:=

$$\text{int1} = \int_a^b \frac{3 + \text{Cos}[x + 2]}{x + 2.4} \, dx$$

Out[64]=
```
0.903332
```

In[65]:=
```
PaddedForm[int1, {19, 18}]
```
форма числа с заполнением нулями

Out[65]//PaddedForm=
```
 0.903331759138580000
```

In[66]:=
```
(*Сравниваем значения, видим,
что разница гораздо меньше чем при использовании других методов*)
```

In[67]:=
```
Abs[int - int1]
```
абсолютное значение

Out[67]=

$$2.20601 \times 10^{-13}$$