

碰撞规避算法RVO(Reciprocal Velocity Obstacles)简介

0x01 概述

碰撞规避算法，广泛的应用于机器人、人群模拟、3A游戏、交通工程等领域。这里所说的Agent，可以表示一个单独的行人，一个行走的机器人或是一辆开动的车。

注意，这里说的碰撞规避（collision-avoidance），不是碰撞的物理计算。碰撞规避是避免Agent之间发生碰撞，而碰撞物理计算则是模拟计算物体发生碰撞之后的形变，反弹，破碎等。

0x02 VO(Velocity Obstacle)简介

RVO算法是在VO算法基础之上，成功优化解决了路径抖动问题。所以先简单介绍下VO的相关概念。

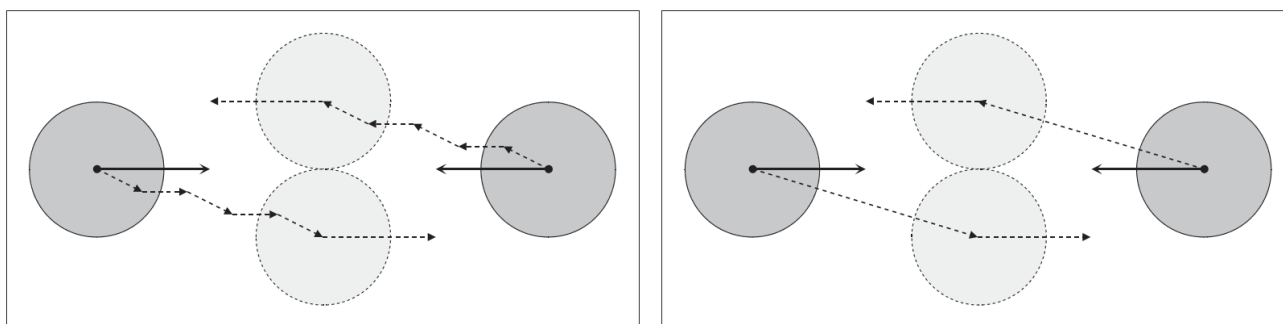


图0，左边是基础VO算法，两个相向而行的物体，在规避碰撞时产生了路径抖动。而右图，RVO解决了这一问题。具体证明请看下文。

• 定义

设A为在平面移动的物体（Agent），其在平面的位置记为 p_A ，B为平面中移动的障碍，其位置记为 p_B 。速度障碍记为 $VO_B^A(v_B)$ ，它表示障碍物B如果以速度 v_B 行进，将来某一时刻，会造成A，B相撞的A物体速度 v_A 的集合。其几何意义如下图所示：

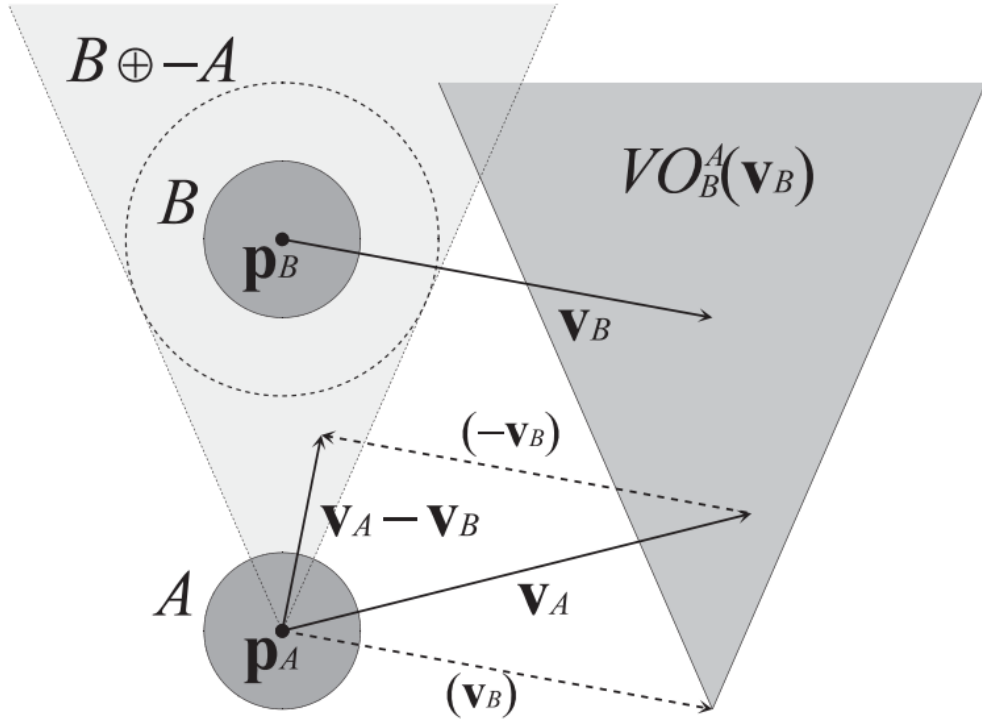


图1

$A \oplus B$ 表示A, B的闵科夫斯基和 ([Minkowski sum](#))。闵氏和是一个几何操作, 在这里的作用是将障碍物增大, 这样就可以把 p_A 视为一个质点了, 方便后续处理。-A表示物体A点集取反, 定义如下:

$$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}, \quad -A = \{-a | a \in A\}.$$

设 $\lambda(p, v)$ 为起始于位置 p , 指向速度 v 方向的射线:

$$\lambda(p, v) = \{p + tv | t \geq 0\}.$$

如果起始于 p_A , 方向为A相对于B的相对速度 ($v_A - v_B$) 的射线, 指向以 p_B 为中心的 $B \oplus -A$ 闵氏和锥形区域, 表示速度 v_A 在B的速度障碍中。因此, B对A的速度障碍定义如下:

定义1 (Velocity Obstacle):

$$VO_B^A(v_B) = \{v_A | \lambda(p_A, v_A - v_B) \cap B \oplus -A \neq \emptyset\}.$$

它的意义是, 如果 $v_A \in VO_B^A(v_B)$ 表示拥有速度 v_A 的物体A与拥有速度 v_B 的物体B, 将在未来一定时间内发生碰撞。如果 $v_A \notin VO_B^A(v_B)$, 则表示A与B不会发生碰撞。几何意义参看图1。

• 性质

引理 2 (对称性):

$$v_A \in VO_B^A(v_B) \Leftrightarrow v_B \in VO_A^B(v_A).$$

显而易见, 如果 v_A 在B的速度阻挡中, 表示A会撞上B, 当然也表示B会撞上A。

引理 3 (平移不变性):

$$v_A \in VO_B^A(v_B) \Leftrightarrow v_B + u \in VO_B^A(v_B + u).$$

考虑速度障碍之外的区域。把这部分区域分为左半区和右半区，可以看到，左半区和右半区是有重叠部分的，如下图所示。

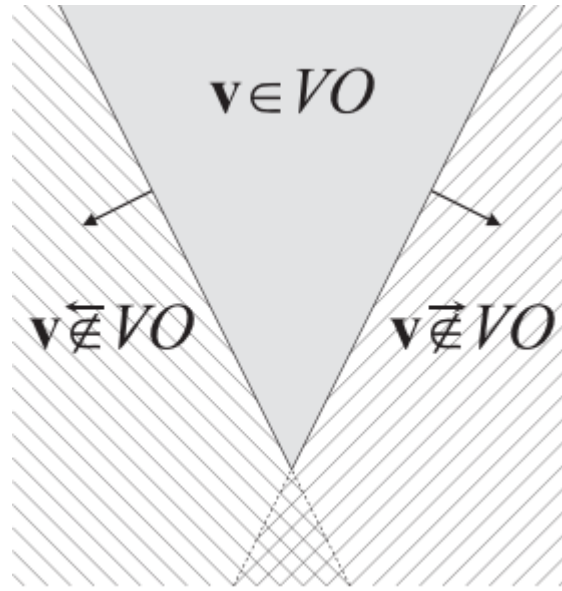


图2

引入两个符号， $\overleftarrow{\notin}$ 和 $\overrightarrow{\notin}$ 。如果速度 v_A 在 $VO_B^A(v_B)$ 之外的左半区，表示 v_A 会使物体A从物体B的左边通过，记为：

$$v_A \overleftarrow{\notin} VO_B^A(v_B)$$

同样，如果速度 v_A 在 $VO_B^A(v_B)$ 之外的右半区，表示 v_A 会使物体A从物体B的右边通过，记为：

$$v_A \overrightarrow{\notin} VO_B^A(v_B)$$

引理2，3同样适用于速度障碍之外的区域。也就是说引理2，3中的 \in 可以等价的转换为 $\overleftarrow{\notin}$ ， $\overrightarrow{\notin}$ 和 $\overleftarrow{\notin}$ 。

引理4 (凸性)：

$$v_A \overrightarrow{\notin} VO_B^A(v_B) \wedge v'_A \overrightarrow{\notin} VO_B^A(v_B) \Rightarrow (1 - \alpha)v_A + \alpha v'_A \overrightarrow{\notin} VO_B^A(v_B), 0 \leq \alpha \leq 1.$$

这是根据凸集性质得到的。连接凸集中任意两点的一条线段，该线段上的每一个点都属于该凸集。x,y两点属于凸集S，那么点 $(1 - \alpha)x + \alpha y$, $0 \leq \alpha \leq 1$. 必然也属于S。

考虑这种情况，两个物体A和B，分别以速度 v_A 和速度 v_B 向各自的目标点行进，如果有 $v_A \in VO_B^A(v_B)$ ，那么同时 $v_B \in VO_A^B(v_A)$ ，于是他们在将来某一时刻会发生碰撞。此时，为了避免碰撞，A决定改变速度为 v'_A 避免撞上B，于是有 $v'_A \notin VO_B^A(v_B)$ 。与此同时，B也决定改变速度为 v'_B ，避免撞上A，于是有 $v'_B \notin VO_A^B(v_A)$ 。那么根据引理2，老的速度也必定不在新速度的VO里，于是有 $v_A \notin VO_B^A(v'_B)$ 同时 $v_B \notin VO_A^B(v'_A)$ 。由于A和B有一个最终的目标，在避障之后，需要往目标点走，而老速度 v_A 和 v_B 并不在当前速度 v'_A 和 v'_B 的VO里，于是老的速度会被重新选择。然而在下一个Tick， v_A 和 v_B 被检测出会发生碰撞，于是又会触发速度改变，速度改变完成后，又会回到老的向目标点的速度。如此往复循环，直到彻底不会发生碰撞。这就是VO算法会发生抖动的原因。参看图0。

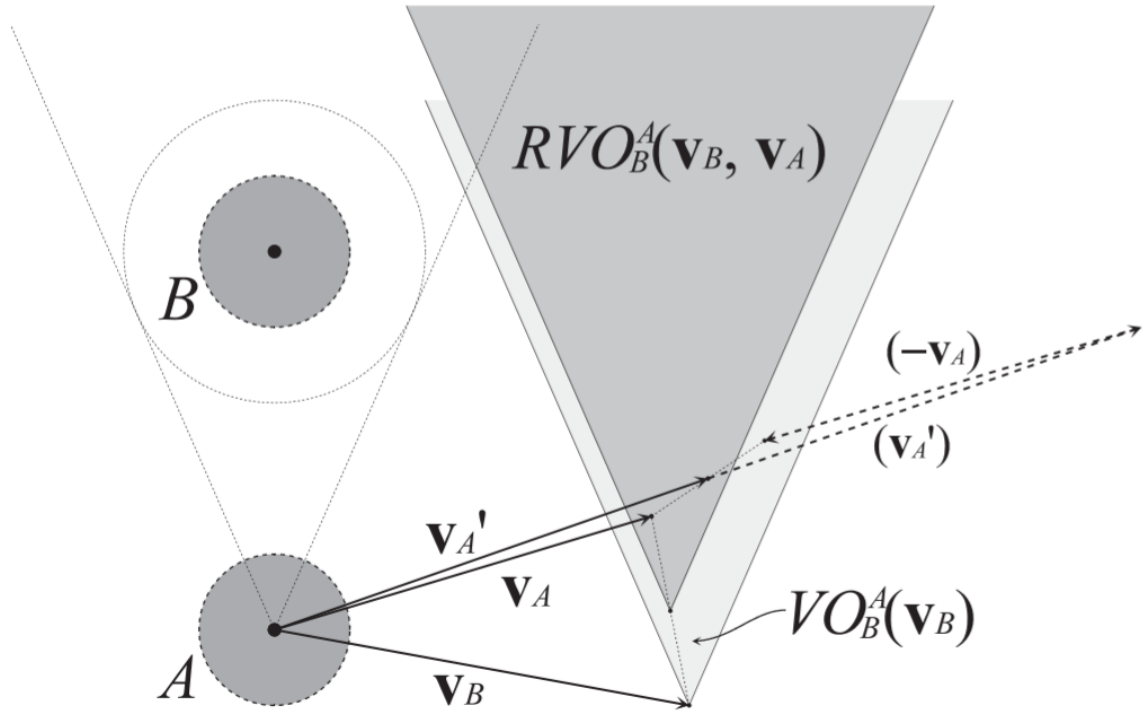
0x03 RVO (Reciprocal Velocity Obstacles) 简介

RVO解决抖动的方法非常简单：不同于VO算法为每个物体选择一个在其他物体速度障碍之外的新速度，RVO选择当前速度与速度障碍之外速度的平均速度作为新的速度。

定义 5(Reciprocal Velocity Obstacle)

$$RVO_B^A(v_B, v_A) = \{v_A' | 2v_A' - v_A \in VO_B^A(v_B)\}.$$

物体B对A的相互速度障碍 $RVO_B^A(v_B, v_A)$ 包含所有当前速度 v_A 与 $VO_B^A(v_B)$ 里速度的平均速度。其几何意义如图3所示，相当于一个顶点在 $\frac{v_A + v_B}{2}$ 处的 $VO_B^A(v_B)$ 。



1. **无碰撞**： v_A 为物体A的当前速度， v_B 为物体B的当前速度，此时A和B同时选择了一个在对方相互速度障碍（RVO）之外的新的速度（ v_A' 和 v_B' ）。如果A和B在同一侧避开对方，那么RVO是能安全避障的。

定理 6（无碰撞）

$$v_A' \notin RVO_B^A(v_B, v_A) \wedge v_B' \notin RVO_A^B(v_A, v_B) \Rightarrow v_A' \notin VO_B^A(v_B) \wedge v_B' \notin VO_A^B(v_A)$$

证明： $v_A' \notin RVO_B^A(v_B, v_A) \wedge v_B' \notin RVO_A^B(v_A, v_B)$

\Leftrightarrow {定义 5和引理 2}

$$2v_A' - v_A \notin VO_B^A(v_B) \wedge v_A \notin VO_B^A(2v_B' - v_B)$$

\Leftrightarrow {引理 3}

$$2v_A' - v_A - v_B \notin VO_B^A(0) \wedge v_A + v_B - 2v_B' \notin VO_B^A(0)$$

\Rightarrow {引理 4, $\alpha = \frac{1}{2}$ }

$$v_A' - v_B' \notin VO_B^A(0)$$

\Leftrightarrow {引理 3和引理 2}

$$v_A' \notin VO_B^A(v_B) \wedge v_B' \notin VO_A^B(v_A)$$

符号 $\vec{\notin}$ 与符号 $\overleftarrow{\notin}$ 可以等价转换。

2. **同侧避障**：两个物体会选择与当前速度距离最小的新速度，在同一侧避开与对方相撞。证明基于如下2个方面：

- (1).对于物体A，如果 $v_A + u$ 是与 v_A 距离最近，且在B的相互速度障碍（RVO）之外的速度，那么 $v_B - u$ 是与 v_B 距离最近，且在A的相互速度障碍（RVO）之外的速度。
- (2).对于物体A，如果与当前速度最近的RVO之外速度，在RVO的右侧（或者左侧），那么对于物体B，它最近的RVO避障速度，也在A物体的RVO的右侧（或者左侧）。

引理 7（同侧避障）

$$v_A + u \notin RVO_B^A(v_B, v_A) \Leftrightarrow v_B - u \notin RVO_A^B(v_A, v_B)$$

证明： $v_A + u \notin RVO_B^A(v_B, v_A)$

\Leftrightarrow {**定义 5**}

$$2(v_A + u) - v_A \notin VO_B^A(v_B)$$

\Leftrightarrow {**引理 3和引理2**}

$$2(v_B - u) - v_B \notin VO_A^B(v_A)$$

\Leftrightarrow {**定义 5**}

$$v_B - u \notin RVO_A^B(v_A, v_B)$$

符号 \notin 能等价的转换为 $\vec{\notin}$ 和 $\overleftarrow{\notin}$ ，或者 \in 。

3. **无抖动**：

定理 8（无抖动）

$$v_A \in RVO_B^A(v_B, v_A) \Leftrightarrow v_A \in RVO_B^A(v_B - u, v_A + u)$$

证明： $v_A \in RVO_B^A(v_B, v_A)$

\Leftrightarrow {**定义 5和引理 3**}

$$2v_A - v_A - v_B \in VO_B^A(0)$$

\Leftrightarrow

$$2v_A - v_A - v_B - u + u \in VO_B^A(0)$$

\Leftrightarrow {**引理 3和定义 5**}

$$v_A \in RVO_B^A(v_B - u, v_A + u)$$

因此，在物体A和B分别选择新速度 $v_A + u$ 和 $v_B - u$ 之后，老速度 v_A 仍然在新速度的RVO内，老速度并不会被重新选择（VO算法中，老速度在下一Tick会被重新选择，因此发生抖动）。事实上，在选择最近的避障速度 $v_A + u$ 和 $v_B - u$ 之后，对A和B来说，对方的RVO区域仍在相同的位置，因此速度 $v_A + u$ 和 $v_B - u$ 仍然是下一Tick的首选速度，从而避免了抖动。