UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Modelagem Matemática de Processos Industriais – Parte 1

Controle de Processos Industriais (CPI)

Departamento de Engenharia de Controle e Automação
Instituto de Ciência e Tecnologia – UNESP – Campus Sorocaba

Prof. Dr. Dhiego Fernandes Carvalho

dhiego.fernandes@unesp.br

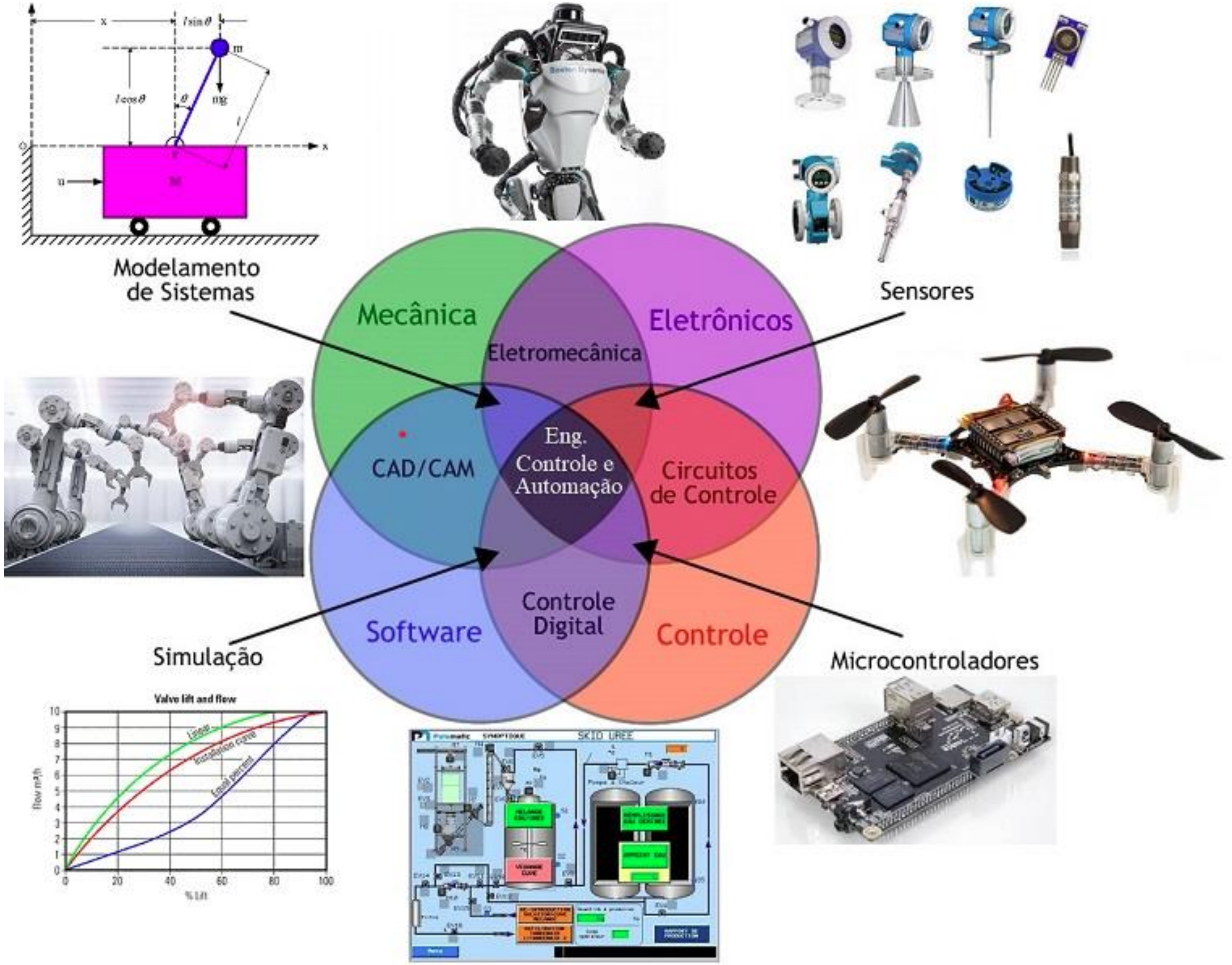
Objetivos

- **Compreender a Modelagem de Processos Industriais**: entender a importância da modelagem de processos na engenharia de controle e como ela é usada para representar sistemas físicos.
- **Entender a Transformada de Laplace**: compreender o conceito da Transformada de Laplace, como ela é usada para simplificar a solução de equações diferenciais e a sua aplicação na análise de sistemas de controle.
- **Aprender sobre a Função de Transferência**: aprender o que é uma função de transferência, como ela é derivada usando a Transformada de Laplace, e o que ela representa no contexto de um sistema de controle.
- **Aplicar a Teoria a Exemplos Práticos**: aplicar a função de transferência a exemplos práticos de sistemas de controle
- **Aprender os diferentes tipos de entradas**: aprender quais são os diferentes tipos de entradas que existem e aplicá-las a exemplos práticos de controle de processos.

Índice

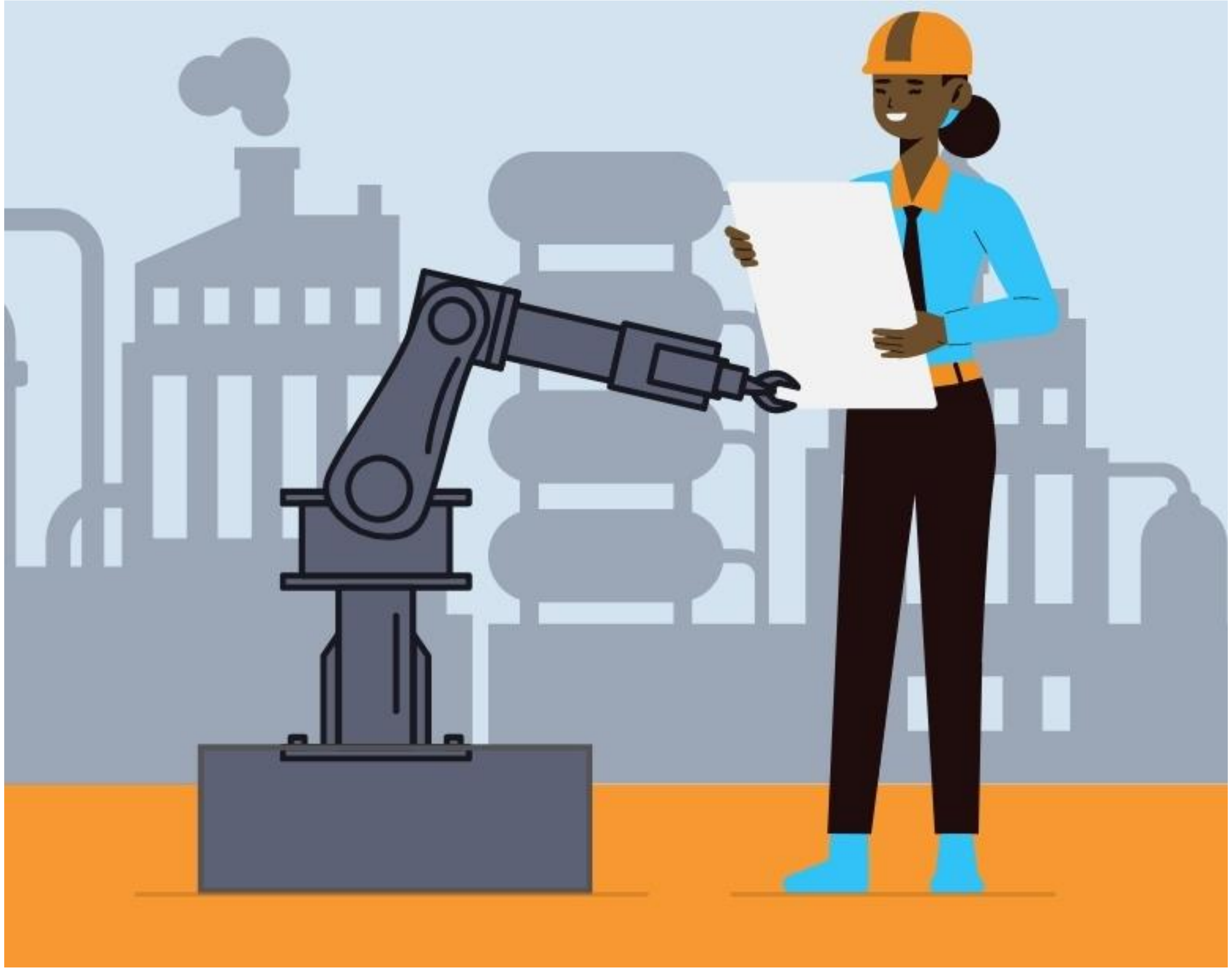
Introdução

- A modelagem de processos industriais é um campo de estudo fascinante e fundamental em muitas disciplinas de engenharia.
- Ela desempenha um papel vital na análise e design de sistemas de controle em uma ampla variedade de indústrias.



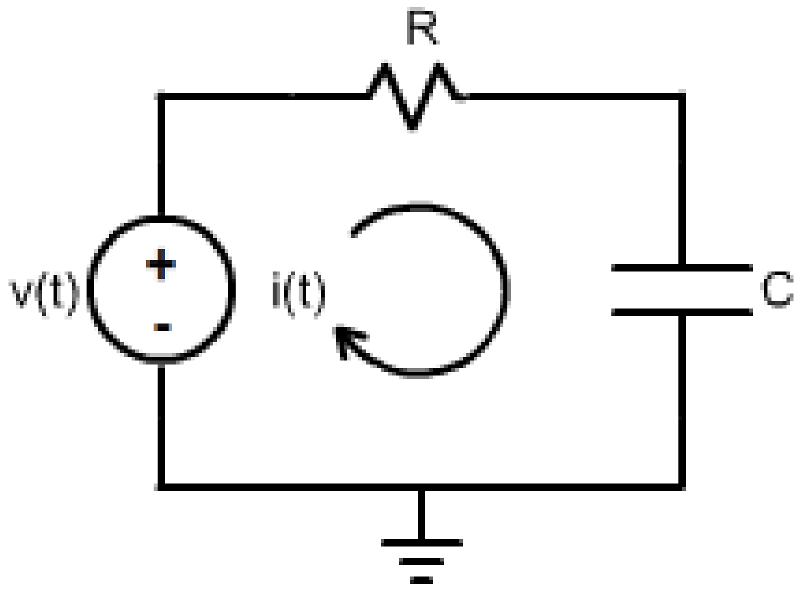
Introdução

- Um sistema envolve muitas variáveis interconectadas que afetam umas às outras de maneiras não lineares e dinâmicas.
- Os sistemas reais geralmente incluem incertezas e distúrbios que podem afetar seu comportamento.



Introdução

- Os sistemas físicos são geralmente representados por um conjunto de equações diferenciais, que são derivadas a partir de princípios físicos fundamentais.
- Pode-se usar as leis de Newton para modelar a dinâmica de um carro ou aeronave.



$$RC\frac{d_{Vc}}{d_T} + V_c = v(t)$$

Onde:

- V(t) é a tensão de entrada
- Vc é a tensão do capacitor
- R é a resistência
- C é o capacitância

Introdução

- A função de transferência é uma representação no domínio da frequência de um sistema descrito por uma equação diferencial.
- A função de transferência nos dá uma visão valiosa de como o sistema se comporta em resposta a diferentes entradas de frequência.

$$G(s) = \frac{U(s)}{X(s)}$$

Onde:

$U(s)$: saída do sistema

$X(s)$: entrada do sistema

s: variável complexa

Transformada de Laplace

- A Transformada de Laplace é uma técnica matemática poderosa usada para simplificar a análise de sistemas dinâmicos, particularmente aqueles descritos por equações diferenciais.

Transformada de Laplace

- A Transformada de Laplace de uma função *f*(*t*), onde *t* é o tempo, é definida como:

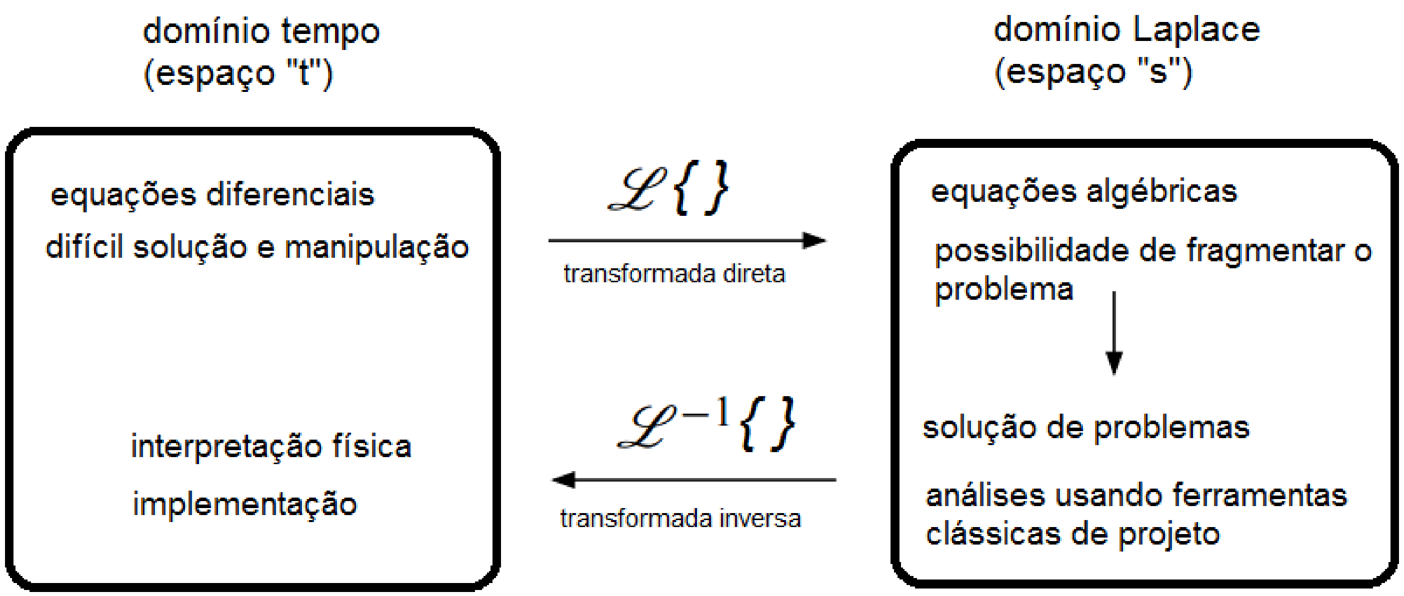
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Onde:

- $s = \sigma + j\omega$, com σ e ω sendo a parte real e imaginária de s, respectivamente.
- e^{-st} é a função de peso exponencial, onde e é a base do logaritmo natural.
- A integral é uma integral de valor impróprio que se estende de zero a infinito.

Transformada de Laplace

- Quando aplicada a equações diferenciais, ela transforma a equação diferencial em uma equação algébrica.
- A transformada nos permite analisar como o sistema descrito pela função responde a diferentes frequências de entrada.



Tabelas da Transformada de Laplace

Transformada de Laplace mais comuns

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (impulso ou delta)	1
$\mu(t)$ (degrau unitário)	$\frac{1}{s}$
$r(t)=t$ (rampa)	$\frac{1}{s^2}$
$e^{\mp a t}$	$\frac{1}{s \pm a}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}$ (n inteiro positivo)	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$t\, e^{\mp a t}$	$\frac{1}{(s \pm a)^2}$
$\frac{t^n e^{\mp a t}}{n!}$ (n inteiro positivo)	$\frac{1}{(s \pm a)^{n+1}}$

$f(t)$	$F(s)$
$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\,\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$e^{\mp a t}\cos(\omega t)$	$\frac{s \pm a}{(s \pm a)^2+\omega^2}$
$e^{\mp a t}\,\mathrm{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s \pm a)^2+\omega^2}$
$\frac{e^{a t}-e^{b t}}{a-b}$ $(a \neq b)$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\frac{e^{-a t}-e^{-b t}}{b-a}$ $(a \neq b)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{a e^{\mp a t}-b e^{\mp b t}}{a-b}$ $(a \neq b)$	$\frac{s}{(s \pm a)(s \pm b)}$

Propriedades da Transformada de Laplace

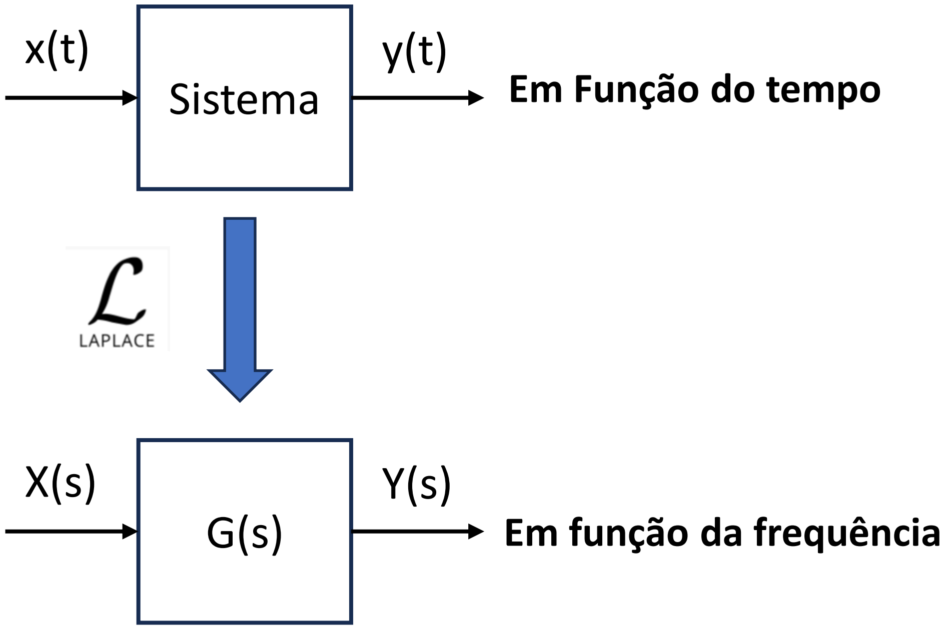
$f(t)$	$F(s)$
$A\,f(t)$ (A = constante)	$A\,F(s)$
$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$f(at)$ $(a>0)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f(t-t_0)\mu(t-t_0)$ $(t_0 \geq 0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$
$e^{\mp a t} f(t)$	$F(s \pm a)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0)$

$f(t)$	$F(s)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-\left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=0} = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\left[\frac{d^{k-1}f(t)}{dt^{k-1}}\right]_{t=0}$
$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$
$\int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda)d\lambda$ (integral de convolução)	$F_1(s)F_2(s)$

$f(0^+)$ (teorema do valor inicial)	$\lim_{s\to\infty}\{sF(s)\}$
$f(\infty)$ (teorema do valor final)	$\lim_{s\to 0}\{sF(s)\}$

Função de Transferência

- A função de transferência de um sistema é uma representação matemática que relaciona a saída de um sistema à sua entrada no domínio da frequência.
- Ela é uma ferramenta muito poderosa na análise e design de sistemas em vários campos da engenharia, especialmente na engenharia de controle.



Função de Transferência

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$

Onde:

- Y(s): a saída do sistema
- X(s): a entrada do sistema
- s: variável complexa

Função de Transferência

- A função de transferência é a Transformada de Laplace da saída do sistema dividida pela Transformada de Laplace da entrada do sistema, assumindo todas as condições iniciais iguais a zero.

$$\mathbf{a}\,\boldsymbol{\frac{dy^2}{dt^2}} + \boldsymbol{b\frac{d_y}{d_t}} + \boldsymbol{cy} = \boldsymbol{du}$$

Onde:

- $y(t)$ é a saída do sistema,
- $u(t)$ é a entrada do sistema,
- a, b, c e d são constantes.

$$\boldsymbol{s^2Y(s)} + \boldsymbol{bsY(s)} + \boldsymbol{cY(s)} = \boldsymbol{dU(s)}$$

Onde:

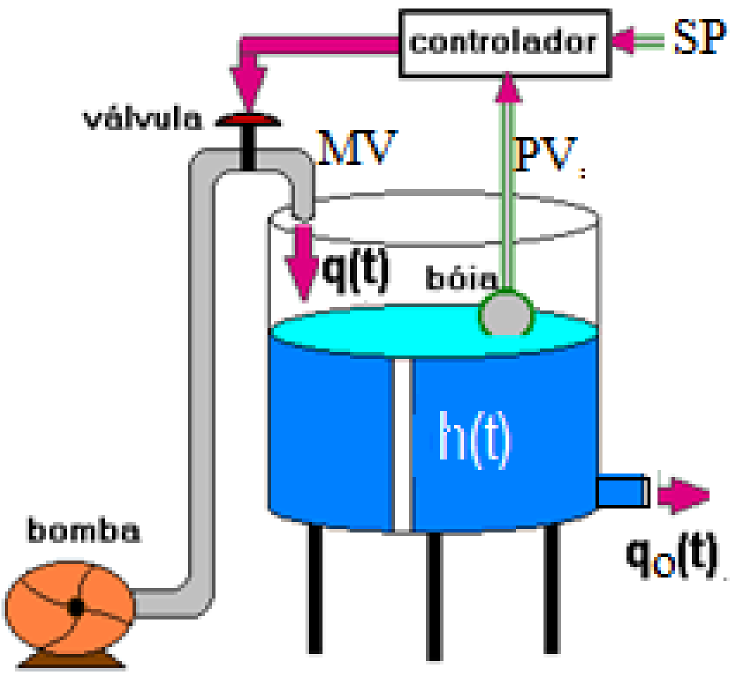
- $Y(s)$ é a Transformada de Laplace $y(t)$
- $U(s)$ é a Transformada de Laplace de $u(t)$.

Função de Transferência

$$\boldsymbol{H(s)} = \boldsymbol{\frac{Y(s)}{U(s)}} = \boldsymbol{\frac{d}{as^2+bs+cd}}$$

Exemplos Práticos

- Considera-se um simples tanque com entrada e saída de líquido para o controle de nível do líquido no tanque.



Modelo do Sistema:

- A: Tanque com área da seção transversal (m^2/s).
- $h(t)$: o nível de líquido no tanque (em metros).
- $q(t)$: A vazão de entrada de líquido no tanque (m^3/s).
- $q_o(t)$: A vazão de saída no tanque (m^3/s).

Aplicando o princípio de Torricelli: $\mathrm{V} = \sqrt{2gh(t)}$

Sendo $q_o(t)$ o produto de V e a (A) Área do Orifício de Saída: $q_o(t) = A\sqrt{2gh(t)}$

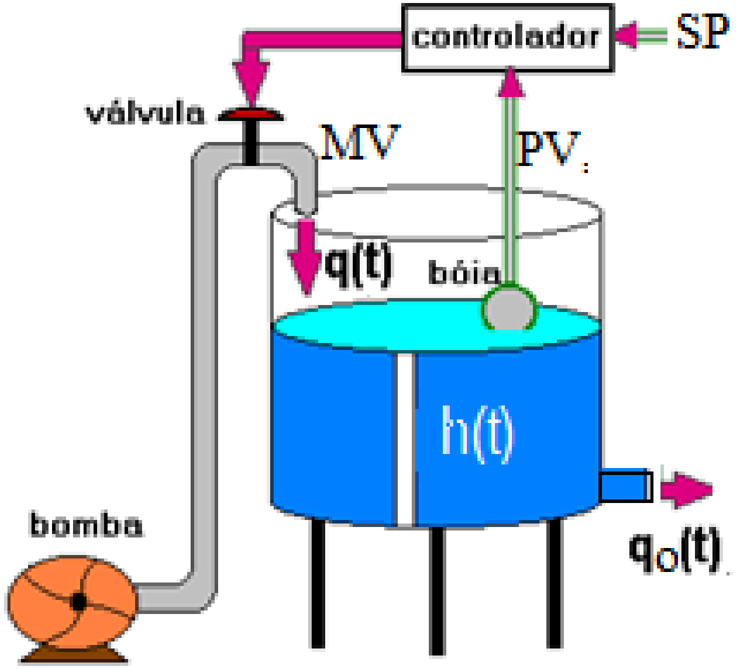
Onde K = $A\sqrt{2g}$ é uma constante de proporcionalidade que depende da área do orifício e da aceleração gravitacional.

Tem-se: $\boldsymbol{q_o(t) = K\sqrt{h(t)}}$

Controle de Nível de Tanque (linearização)

- A função $\boldsymbol{q_o(t) = K\sqrt{h(t)}}$ é não linear, pois o termo $\boldsymbol{\sqrt{h(t)}}$ não satisfaz as propriedades de superposição e homogeneidade.
- Equações não lineares são difíceis de analisar diretamente, especialmente quando se trata de prever o comportamento do sistema ou projetar controladores.
- A linearização transforma a equação não linear em uma forma linear, que é muito mais fácil de trabalhar usando as técnicas de controle padrão.
- Linearizar a equação diferencial em torno de um ponto de operação h_0 é uma técnica comum para simplificar a análise de sistemas não lineares.

Controle de nível de tanque



Usando o princípio da conservação da massa.

$$A\frac{dh(t)}{dt} = q(t) - q_o(t)$$

$$A\frac{dh(t)}{dt} = q(t) - K\sqrt{h(t)}$$

Linearização no ponto h_0:

$$A\frac{dh(t)}{dt} = q_{in}(t) - \left(K\sqrt{h_0} + \frac{K}{2\sqrt{h_0}}(h(t) - h_0)\right)$$

Transformada de Laplace (linearizada):

todas as condições iniciais iguais a zero

$\mathcal{L}$ LAPLACE

$$AsH(s) + \frac{C}{2\sqrt{h_0}}H(s) = Q(s) + K\sqrt{h_0} - \frac{C}{2\sqrt{h_0}}h_0$$

Onde:

- $H(s)$ é a Transformada de Laplace de $h(t)$.
- $Q(s)$ é a Transformada de Laplace de $q(t)$.
- h_0 é ponto de operação desejado para o nível do tanque

A função de transferência (linearizada) é :

$$G(s) = \frac{Q(s)}{H(s)} = \frac{1}{As + \frac{K}{2\sqrt{h_0}}} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad \text{onde: } \tau = \frac{2A\sqrt{h_0}}{K}$$

Controle de Temperatura de um Tanque

- Um tanque contendo água com uma temperatura $T(t)$.
- Um aquecedor elétrico fornece uma potência $P(t)$ (em watts).
- O tanque perde calor para o ambiente a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre a água e o ambiente.

Controle de Temperatura de um Tanque

Equação Diferencial: O balanço de energia no tanque pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$mc_p \frac{T(t)}{dt} = P(t) - K(T(t) - T_{amb})$$

Onde:

- m é a massa de água no tanque em kg.
- c_p é o calor específico da água em J/kg.°C.
- K é o coeficiente de perda de calor para o ambiente em W/°C.
- T_{amb} é a temperatura ambiente (assumida constante) em °C ou K.
- P(t) é a potência do termostato em Watts

- A capacidade térmica do tanque e do aquecedor são desprezíveis em comparação com a da água.
- O coeficiente de perda de calor para o ambiente é constante

Controle de Temperatura de um Tanque

Equação Diferencial:

$$mc_p \frac{T(t)}{dt} = P(t) - K(T(t) - T_{amb})$$

Transformada de Laplace:

$$sT(s) - T(0) = \frac{P(s)}{mc_p} - \frac{K}{mc_p} T(s)$$

$$T(s) = \frac{1}{mc_p s + K} \times P(s)$$

Função de Transferência:

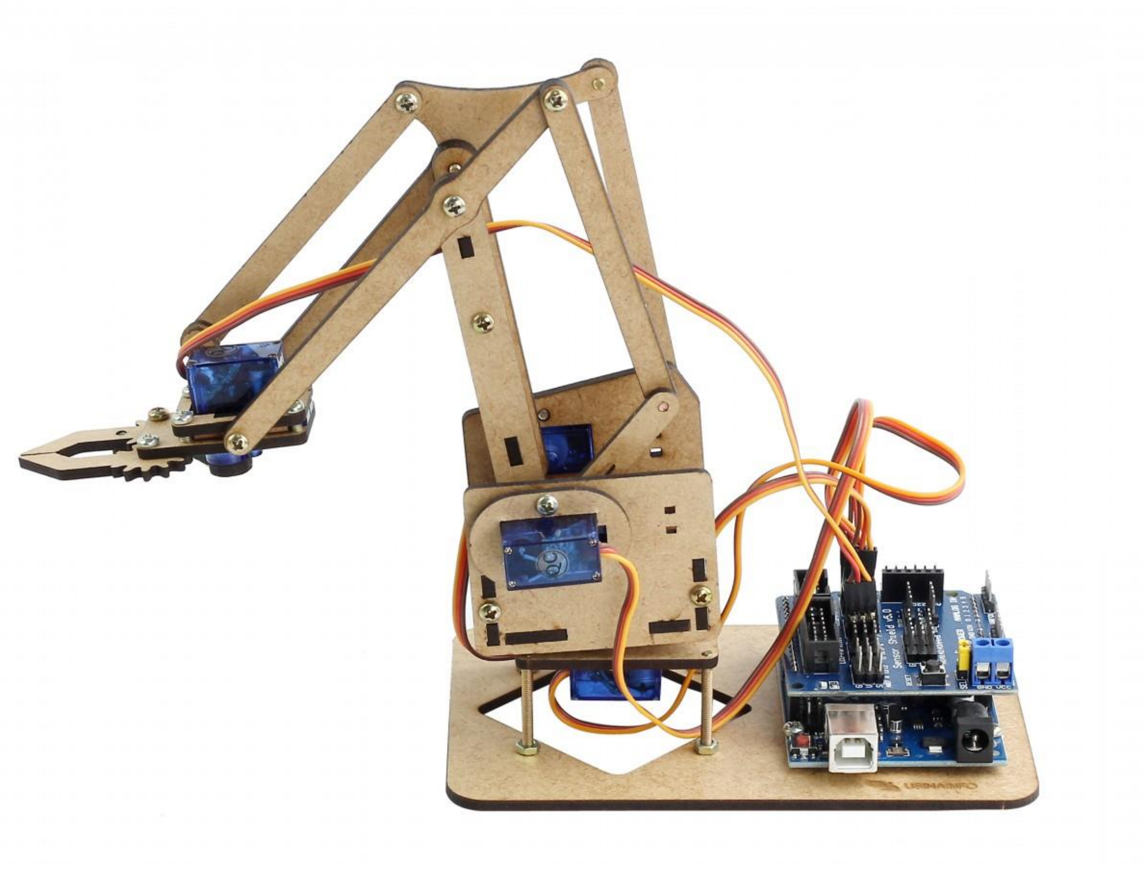
$$G(s) = \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{1}{mc_p s + K} = \frac{K}{mc_p s + \frac{1}{K}}$$

Onde:

- K representa a influência das perdas de calor para o ambiente.
- $\tau = mc_p$, quanto tempo o sistema leva para alcançar aproximadamente 63,2% de sua variação total em resposta a uma mudança na entrada.

Servomotor

- Um servomotor é um motor que pode ser posicionado em diferentes ângulos ou posições por meio de comandos de controle.
- A dinâmica de um servomotor pode ser modelada como um sistema de segunda ordem devido à presença de inércia (massa do rotor) e amortecimento (atrito e resistência elétrica).



Servomotor

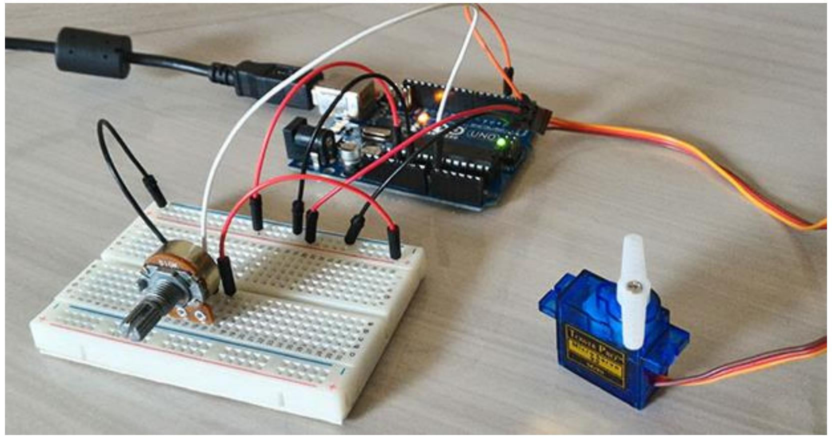
- **Modelagem**: A equação diferencial que descreve a dinâmica de um servomotor é:

$$\boldsymbol{J\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\,\frac{d\theta(t)}{dt} = Ku(t)}$$

Onde:

- $\theta(t)$ é a posição angular do motor em função do tempo.
- J é a inércia do rotor em $kg.m^2$.
- B é o coeficiente de amortecimento em $\mathrm{N.m.}s/rad$ (representa as forças de atrito).
- K é a constante do motor em $N.m/Volt\ ou\ rad/s/Volt$.
- $u(t)$ é a entrada de controle, como a tensão aplicada ao motor em Volts.

Servomotor



Equação Diferencial:

$$J\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\,\frac{d\theta(t)}{dt} = Ku(t)$$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\qquad \Theta(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}U(s)$$

Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs}$$

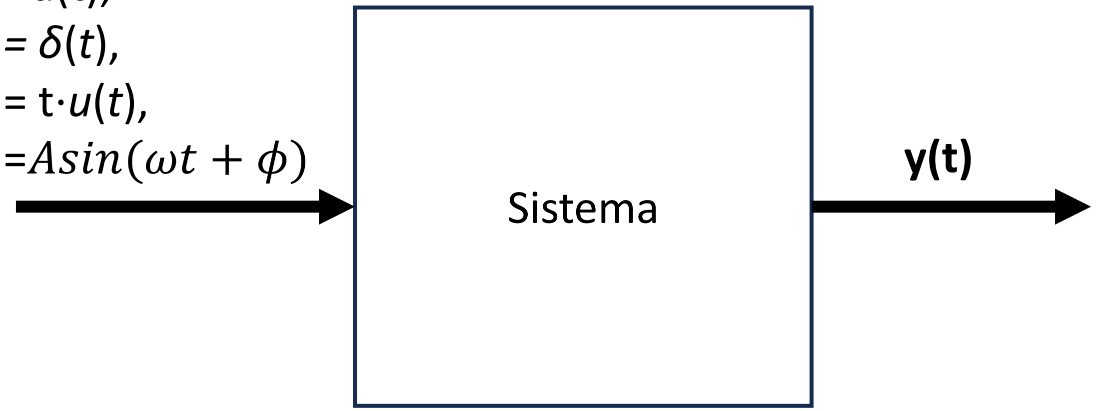
Sendo $w_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$ e $\zeta = \frac{B}{2\sqrt{KJ}}$, a frequência natural e coeficiente de amortecimento.

Entradas de Controle de Processo

A análise de sistemas de controle envolve frequentemente avaliar a resposta do sistema a diferentes tipos de entradas. As entradas mais comuns usadas para essa análise são:

1. **Degrau:** $u(t)$
2. **Impulso:** $\delta(t)$
3. **Rampa:** $t{\cdot}u(t)$
4. **Entradas sinusoidais:** $Asin(\omega t + \phi)$

x(t) = u(t),
= $\delta(t)$,
= t·$u(t)$,
=$Asin(\omega t + \phi)$



Entrada Degrau

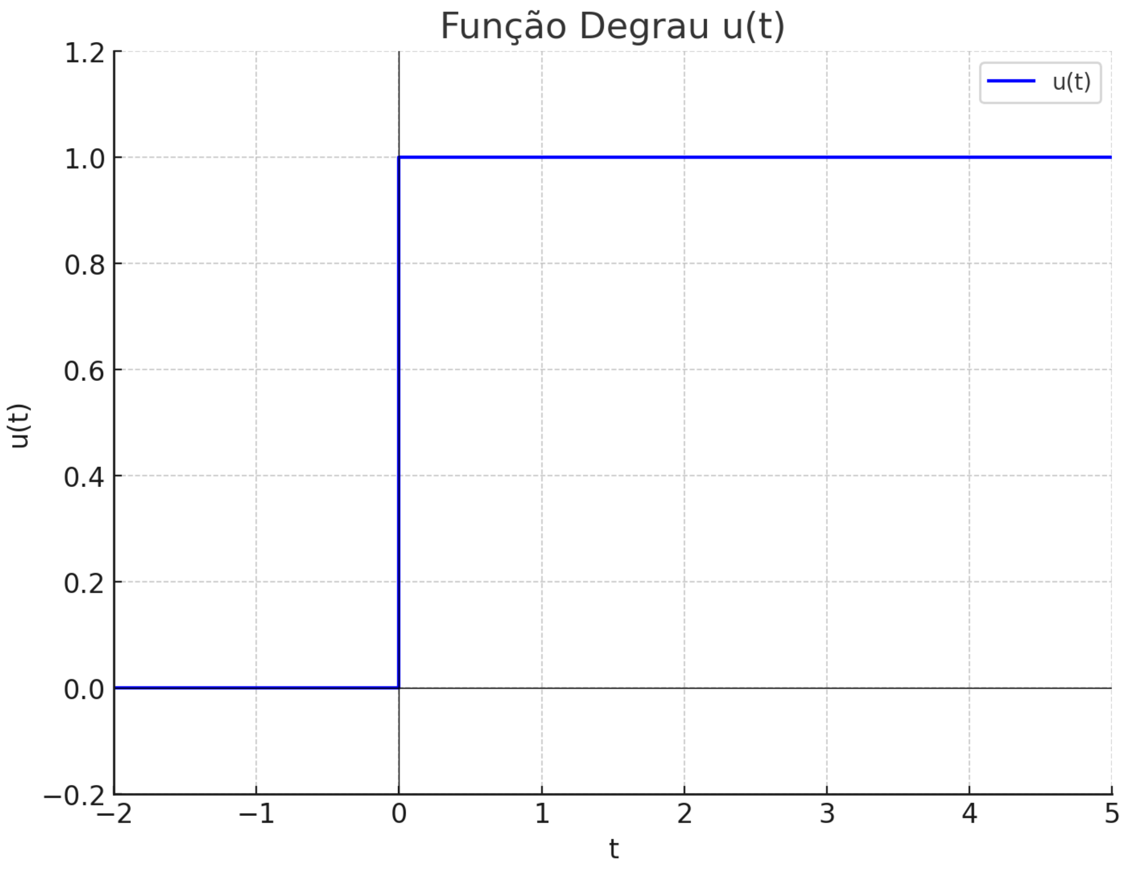
- Matematicamente, a entrada degrau unitário é definida como:

$$\begin{cases} 0 \; para \; t < 0 \\ 1 \; para \; t \geq 0 \end{cases}$$

- A transformada de Laplace da função degrau com amplitude A é:

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s} \text{ ou } L\{A \cdot u(t)\} = \frac{A}{s}$$

- Onde é A é altura da função degrau.



Entrada degrau

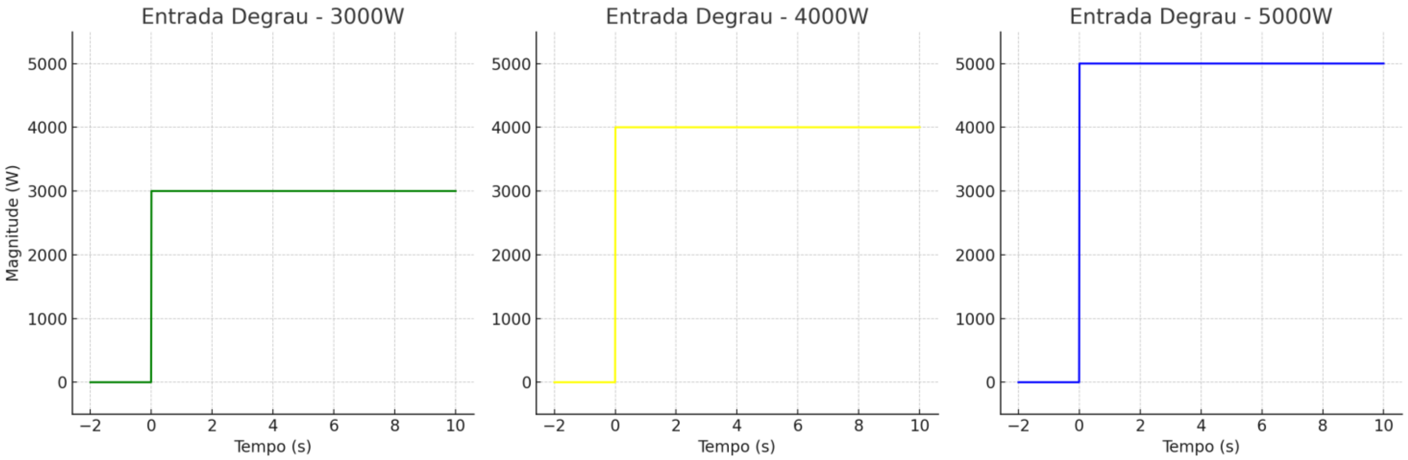
- **Para o controle de temperature com entrada degrau, vamos considerar:**
  - Massa de água: 10kg (volume de 10 L)
  - Calor específico da água: *cp*=4186 J/(kg\cdotp°C)
  - Temperatura ambiente: *Ta*=25°C
  - Constante de proporcionalidade: *K*=100W/°C
  - Potências do aquecedor: 3000W, 4000W e 5000W

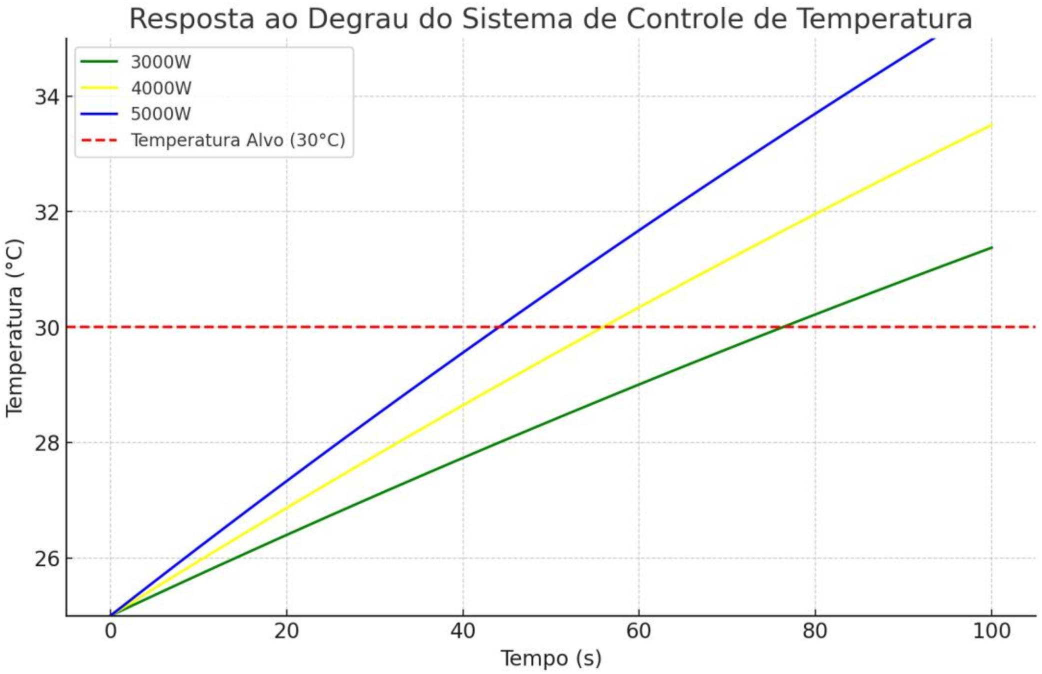
Equação Diferencial:

$$mc_p \frac{T(t)}{dt} = P(t) - K(T(t) - T_{amb})$$

Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{T(s)}{P(s)} = \frac{1}{mc_p s + K} = \frac{1}{41860s + 100}$$





$$\boldsymbol{Entrada\ Degrau}: u(t) = \begin{cases} 0\ para\ t < 0 \\ A\ para\ t \geq 0 \end{cases} \rightarrow L\{A \cdot u(t)\} = \frac{A}{s}$$

Entrada Degrau

Valores das constantes usadas no controle de nível de tanque:

- Área da base do tanque (A): 5 m²
- Coeficiente de vazão de saída (C): 2
- Altura desejada ($h0$): 1 metro
- Vazão de Entrada: 0.5, 1 e 1.5 m³/s

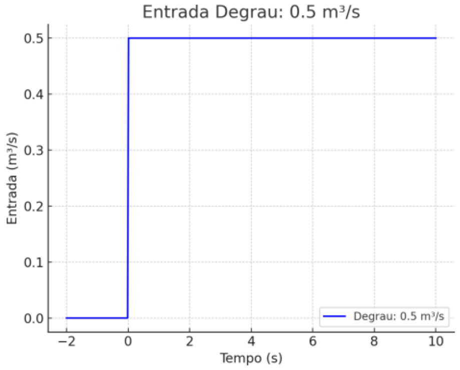
Equação Diferencial

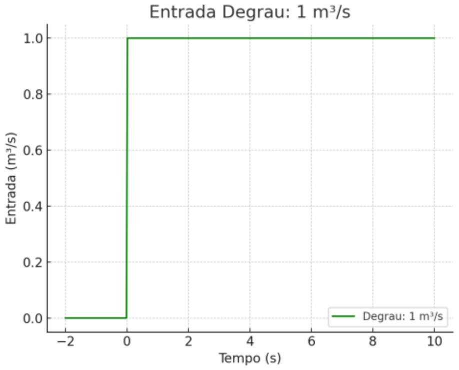
Linearização no ponto h_0:

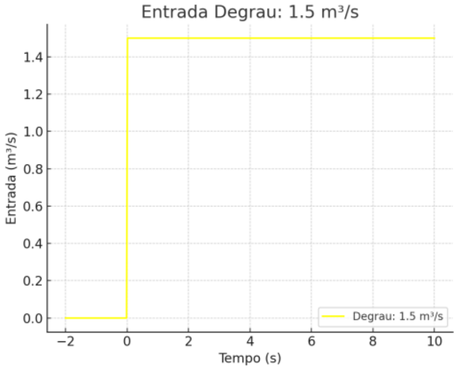
$$A\frac{\mathbf{dh(t)}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{q_{in}(t)} - \left(\mathbf{C\sqrt{h_0}} + \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2\sqrt{h_0}}}(\mathbf{h(t) - h_0})\right)$$

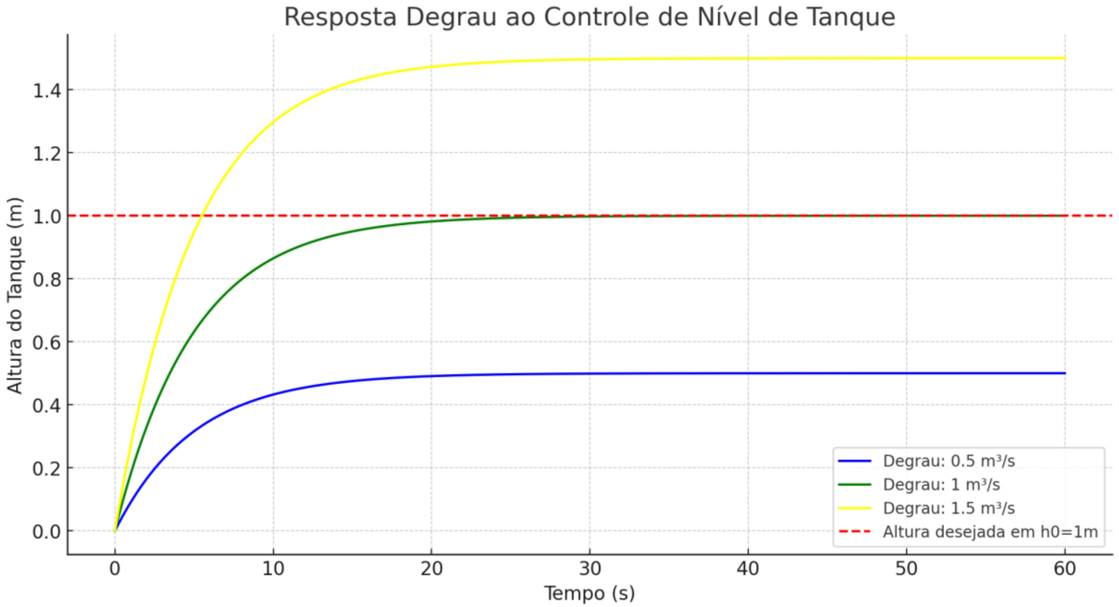
A função de transferência (linearizada) é :

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Q(s)}{H(s)} = \frac{1}{As + \frac{C}{2\sqrt{h_0}}} = \frac{1}{5s+1}}$$









$$\boldsymbol{Entrada\ Degrau}: u(t) = \begin{cases} 0\ para\ t < 0 \\ A\ para\ t \geq 0 \end{cases} \rightarrow L\{A \cdot u(t)\} = \frac{A}{s}$$

Entradas de Controle de Processo

Valores das constantes do servomotor:

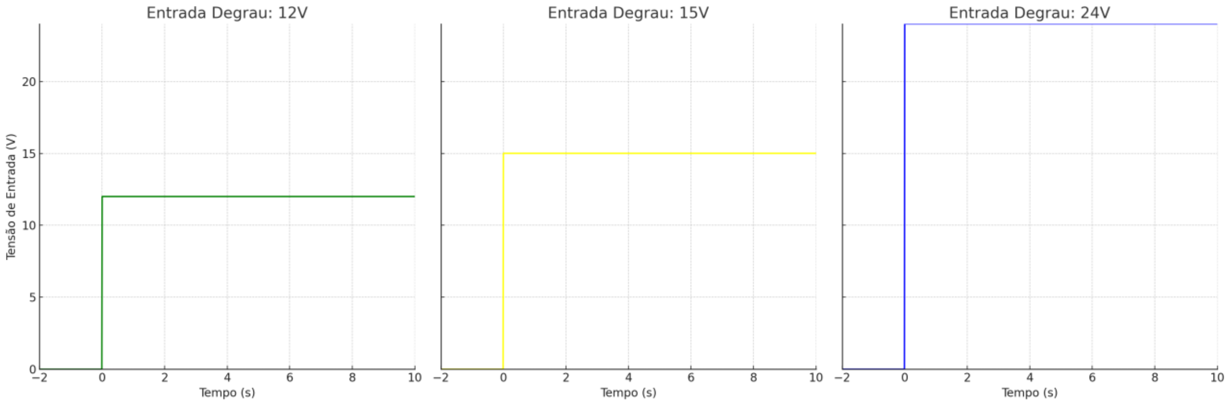
- Momento de inércia: *J*=0.5 kg.m² e o
- Amortecimento viscoso: *B*= 5 N.m.s/rad.
- Contante do Motor: K=0.5
- Entradas Degrau: 12V, 15V e 24V

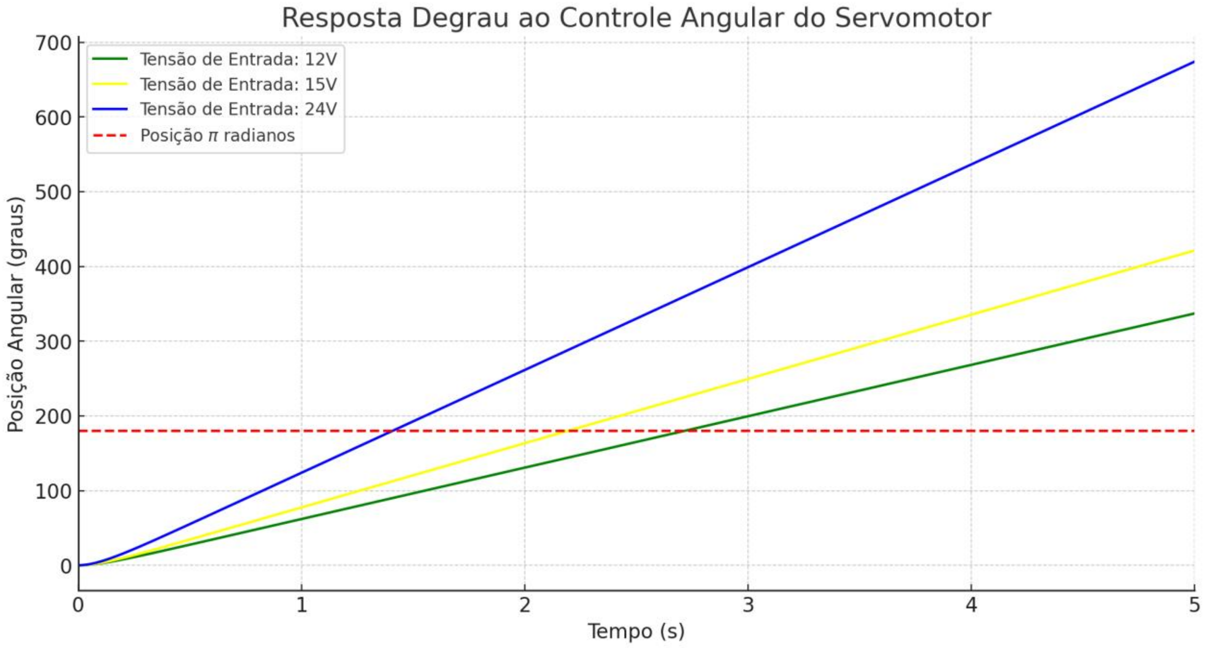
Equação Diferencial:

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} = Ku(t)$$

Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs} = \frac{0.5}{0.5s^2 + 5s}$$

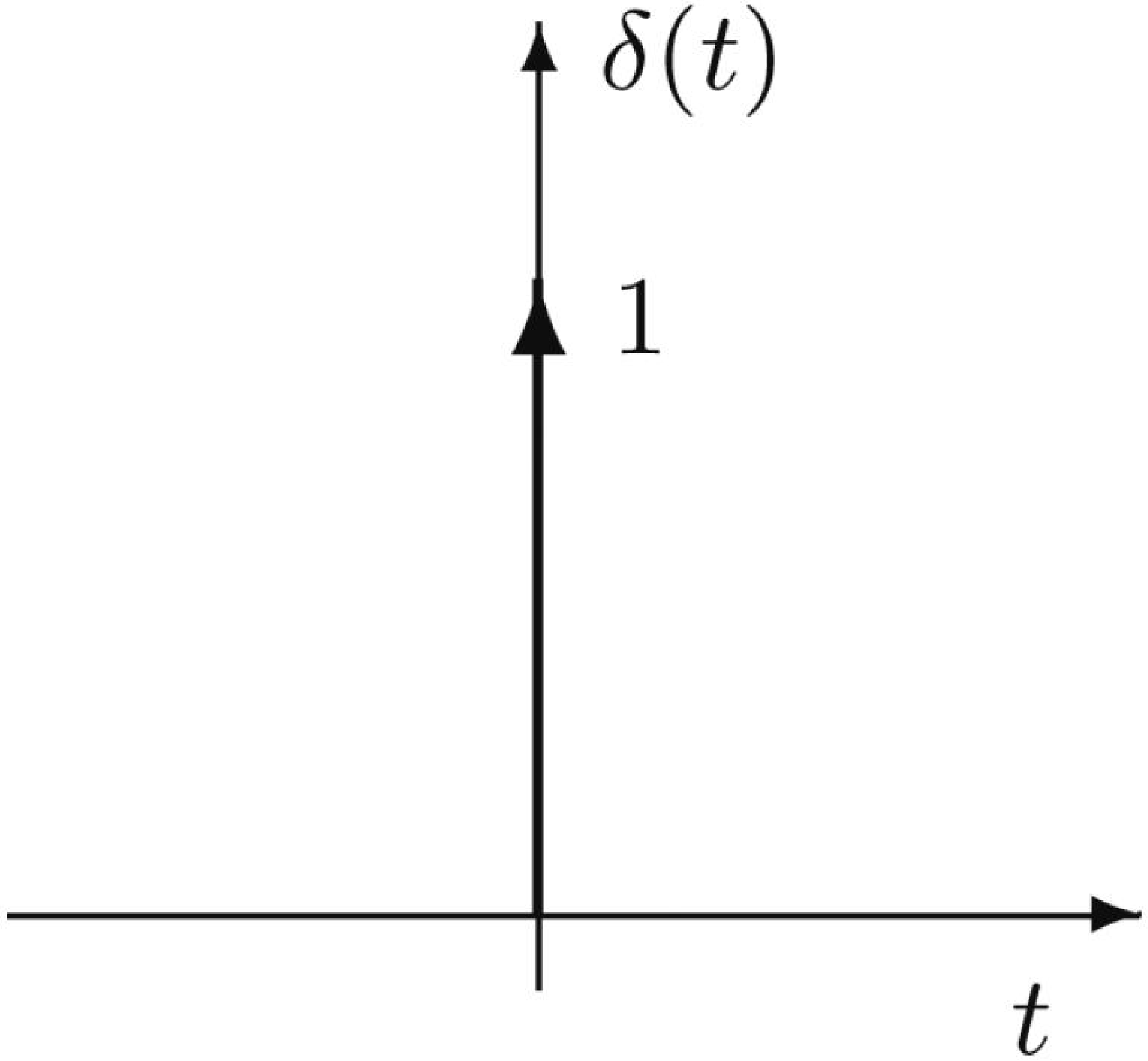




$$\textbf{\textit{Entrada Degrau}}: u(t) = \begin{cases} 0\ para\ t < 0 \\ A\ para\ t \geq 0 \end{cases} \rightarrow L\{A \cdot u(t)\} = \frac{A}{s}$$

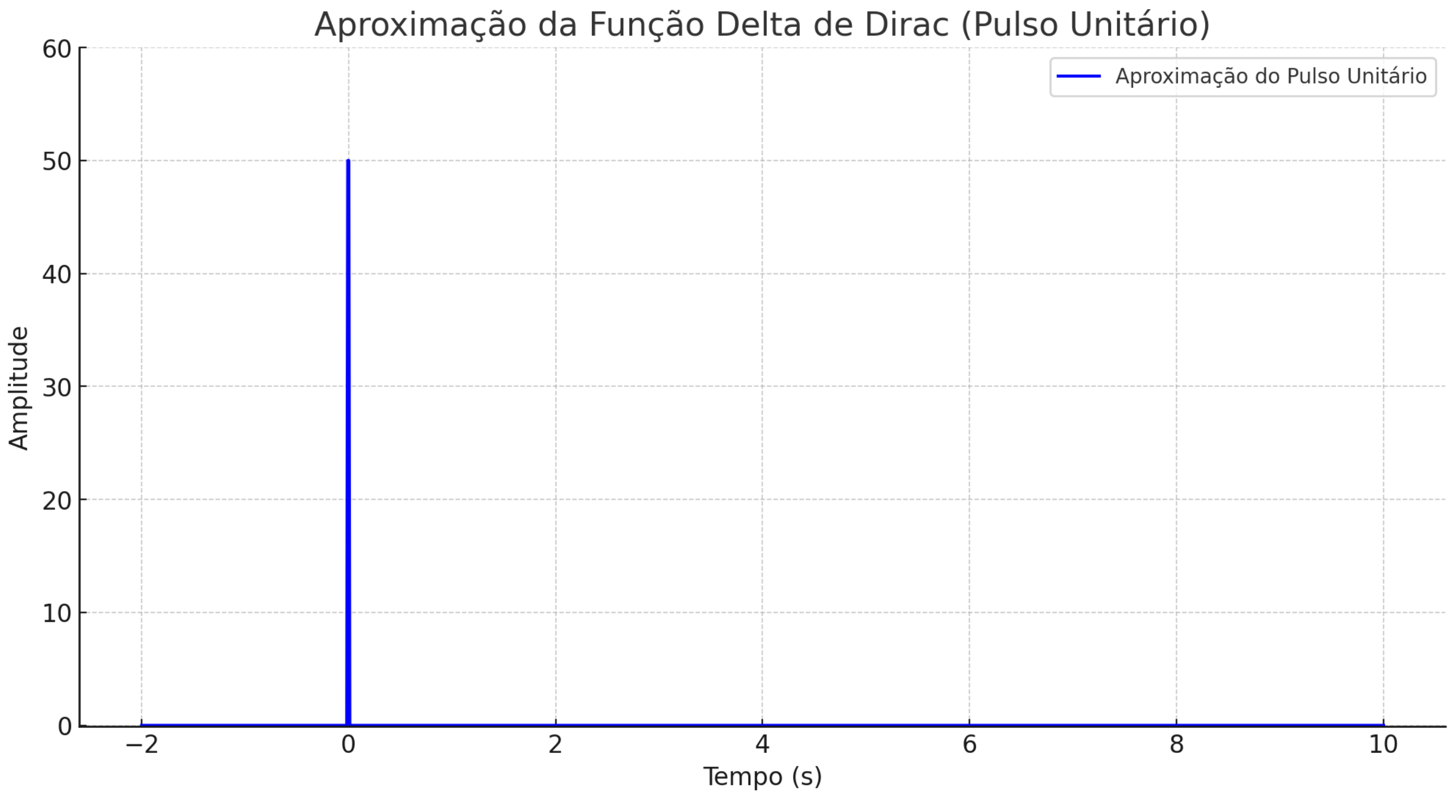
Entrada Impulso

- **Caracterização de sistemas**: qualquer entrada arbitrária pode ser considerada como uma superposição de muitos impulsos unitários. Assim, conhecendo a resposta ao impulso, podemos prever a resposta do sistema a qualquer entrada.
- **Modelagem de eventos abruptos e breves**: a entrada pulso é usada para modelar eventos que acontecem abruptamente em um curto espaço de tempo, como um choque ou batida.
- **Convolução**: A convolução de uma função com a função delta de Dirac resulta na própria função.



Entrada Impulso

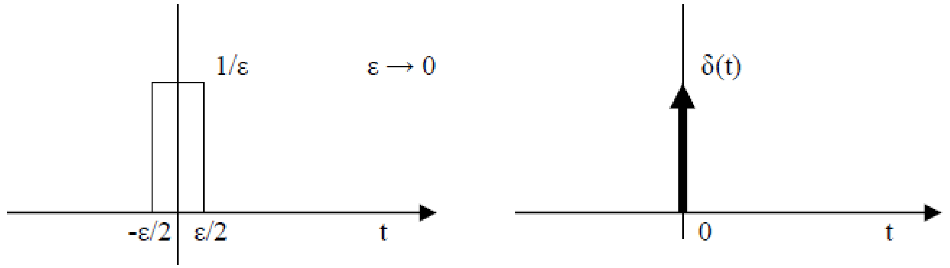
- A função delta de Dirac é uma função que é zero em todos os lugares, exceto na origem, onde é infinitamente alta, de modo que sua integral total seja igual a um (magnitude).



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \; se \; t = 0 \\ 0 \;\; se \; t > 0 \end{cases} \qquad L\{\delta(t)\} = 1$$

- A magnitude da entrada impulso é sempre 1, sabendo que a sua amplitude é 50 (figura ao lado), então a largura do pulso será 0.02 segundos.

$$Largura \; de \; Pulso \; = \frac{Magnitude}{Altura}$$



Entrada Impulso

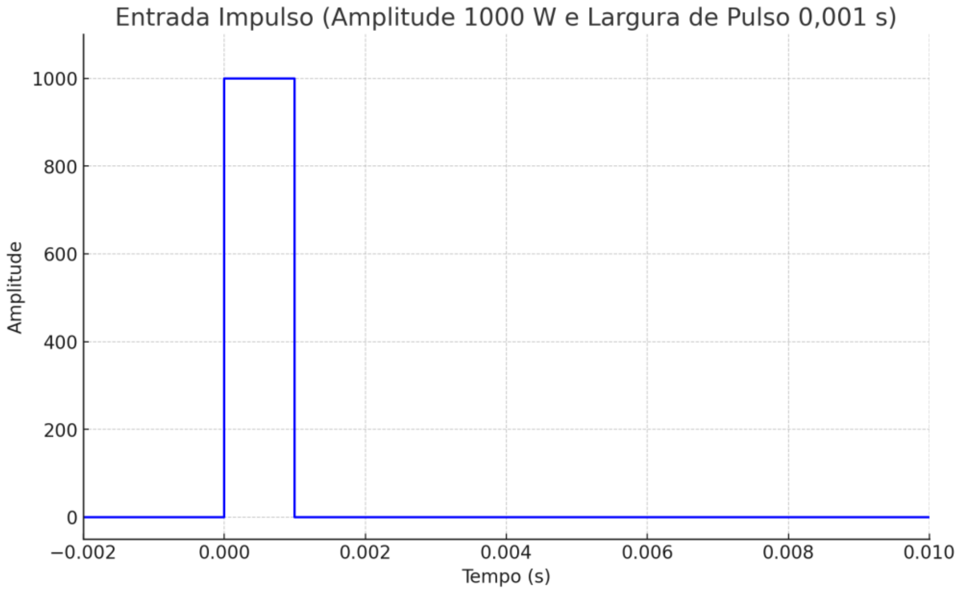
Constantes do Controle de Temperatura:

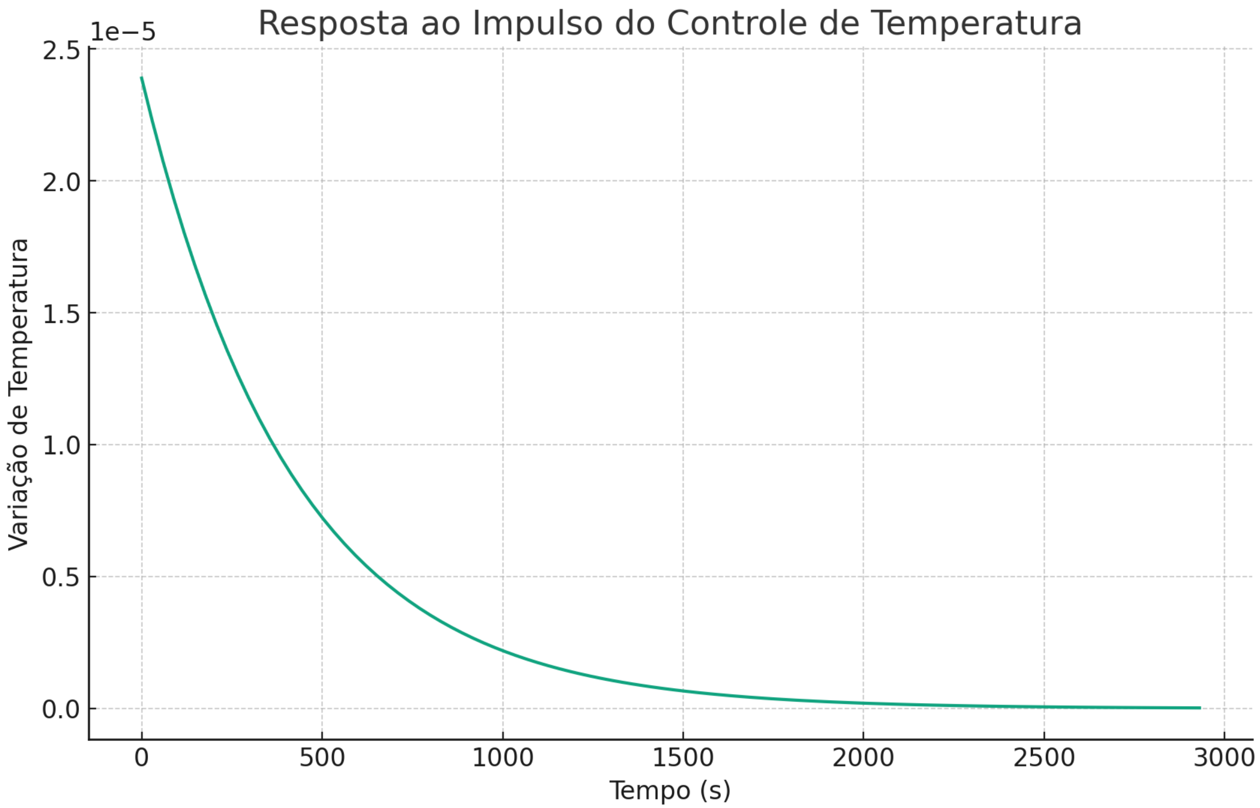
- Massa de água no tanque (m): 10,0 kg
- Calor específico da água (cp): 4,186 kJ/kg.K
- Coeficiente de transferência de calor (α): 100 W/m²·K
- Temperatura ambiente (Ta): 25,0 °C

Função de Transferência do Controle de Temperatura:

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{41860s+100}}$$

Entrada Impulso: $\delta(t) = \begin{cases} \infty \; se \; t = 0 \\ 0 \;\; se \; t > 0 \end{cases} \rightarrow L\{\delta(t)\} = 1$





Entrada Rampa

- Uma **entrada rampa** é uma função do tempo que cresce linearmente a partir de t=0.
- Ela é frequentemente utilizada em análises de sistemas de controle e em simulações para avaliar a resposta de um sistema a uma taxa de variação constante da entrada.

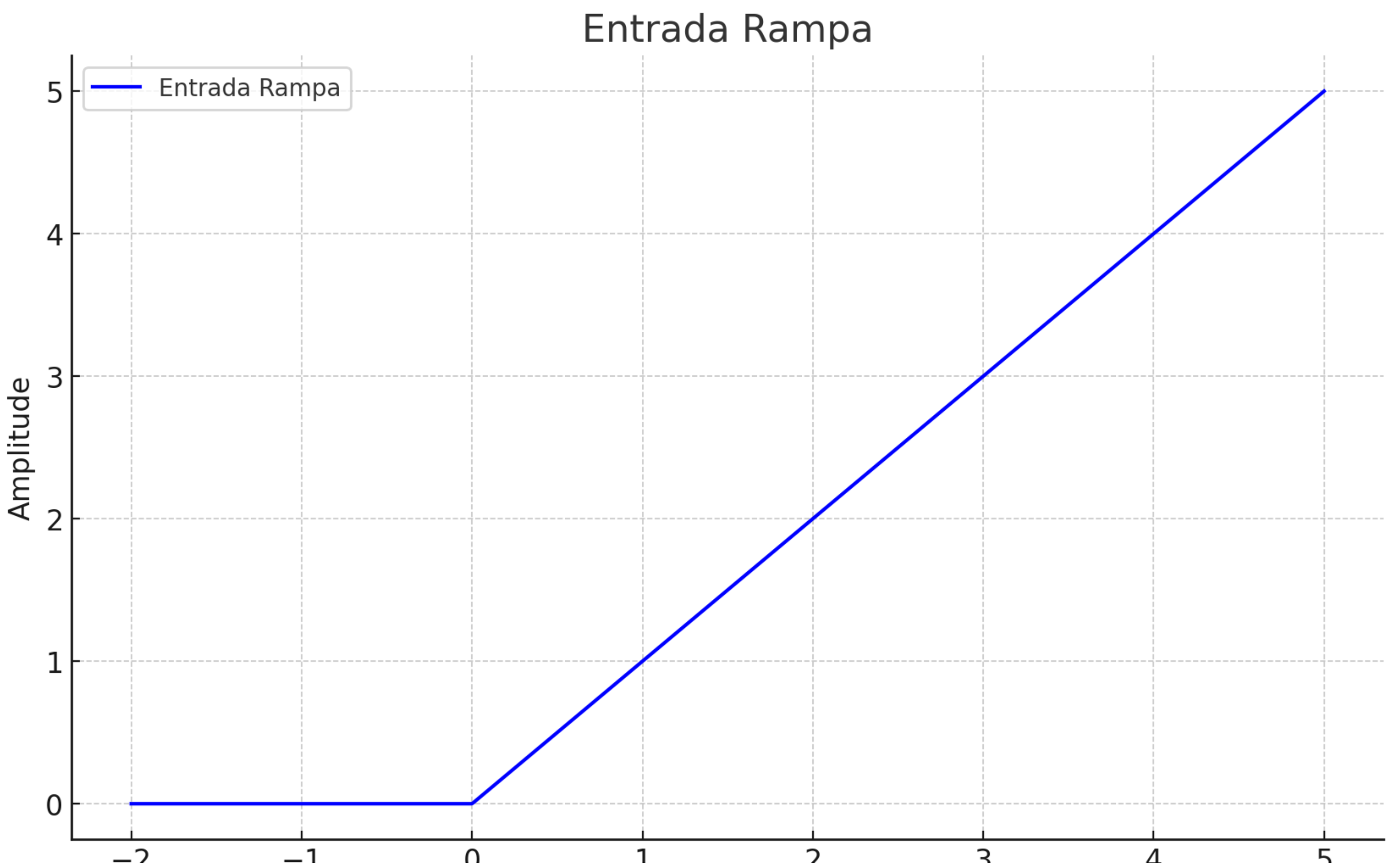
$$\boldsymbol{r(t) = t \cdot u(t)}$$

Onde:

- $u(t)$ é a função degrau unitário.

Transformada de Laplace:

$$\boldsymbol{R(s) = \frac{1}{s^2}}$$



Entrada Rampa

- A inclinação pode ser alterada multiplicando-se a função rampa por uma constante.

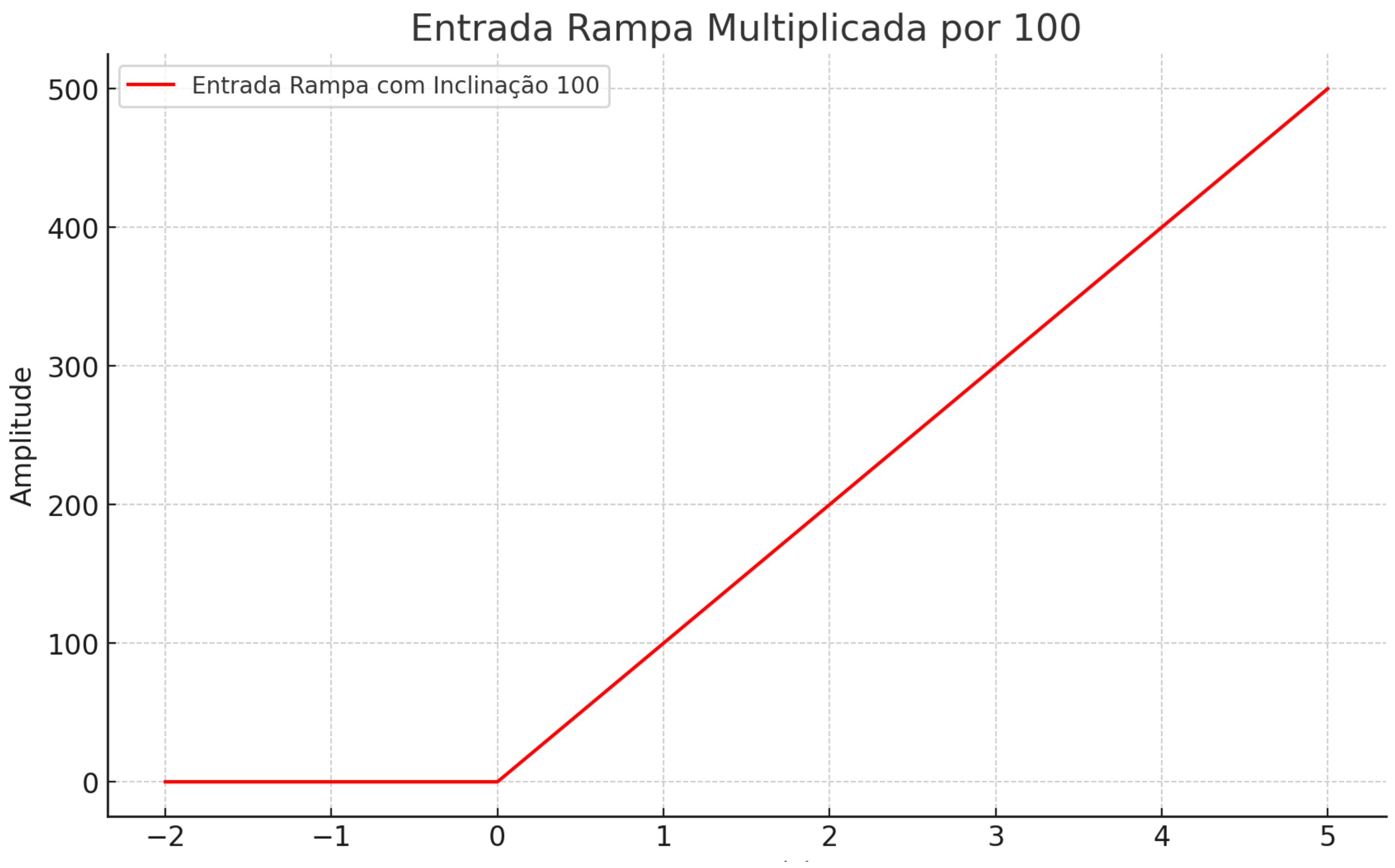
Em função do tempo:

$$\boldsymbol{r(t) = A \cdot t \cdot u(t)}$$

Transformada de Laplace:

$$\boldsymbol{R(s) = \frac{A}{s^2}}$$

- A resposta de um sistema a uma entrada rampa pode revelar coisas como erros de estado estacionário, capacidade do sistema de seguir entradas variáveis e muito mais.



Entrada Rampa

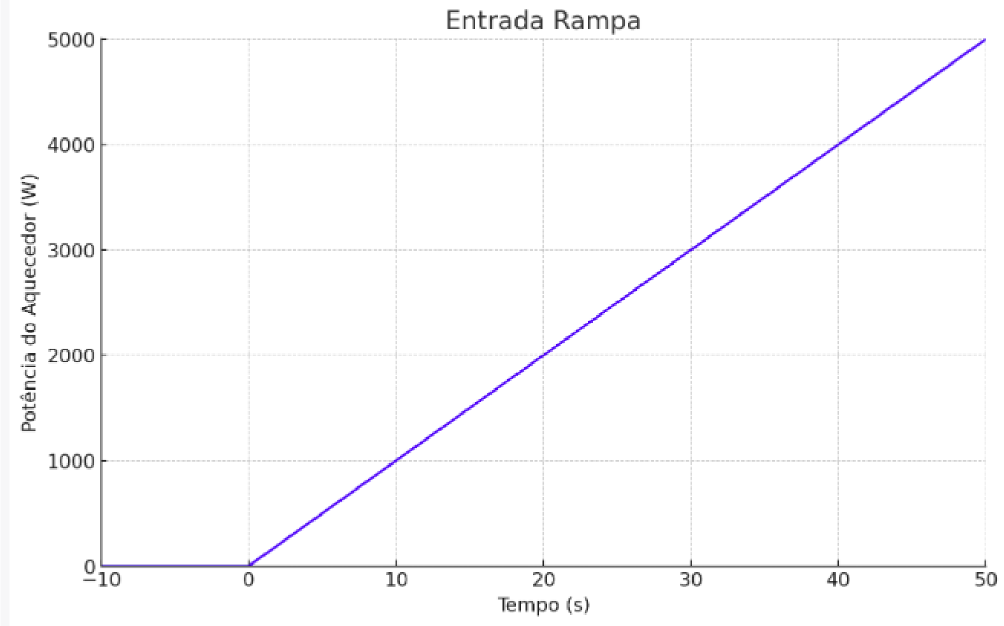
Constantes do Controle de Temperatura:

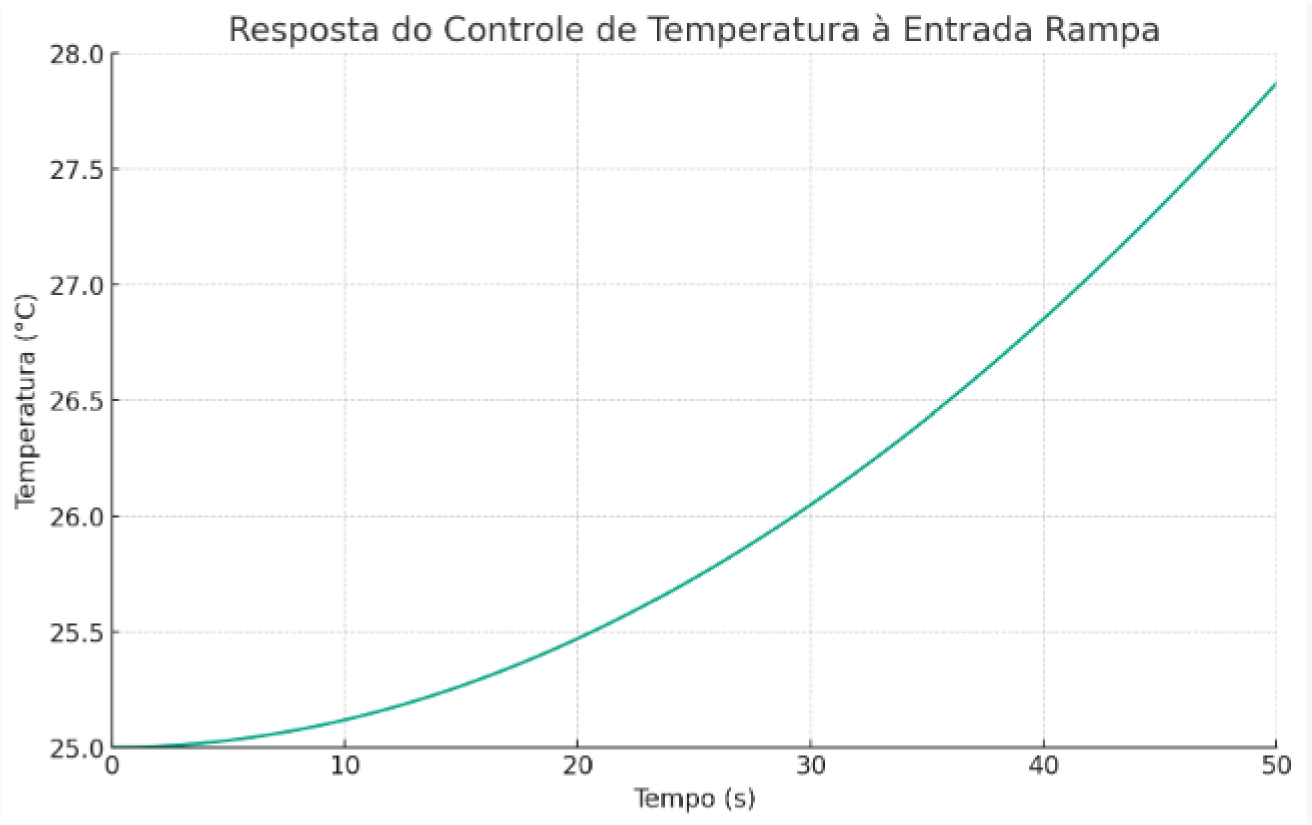
- Massa de água no tanque (m): 10,0 kg
- Calor específico da água (cp): 4,186 kJ/kg.K
- Coeficiente de transferência de calor (α): 1,0 W/K
- Temperatura ambiente (Ta): 25,0 °C

Função de Transferência do Controle de Temperatura:

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{41860s+100}}$$

Entrada Rampa: $\boldsymbol{r(t) = A \cdot t \cdot u(t) \rightarrow R(s) = \frac{100}{s^2}}$





Entrada Senoidal (ou Sinusoidal)

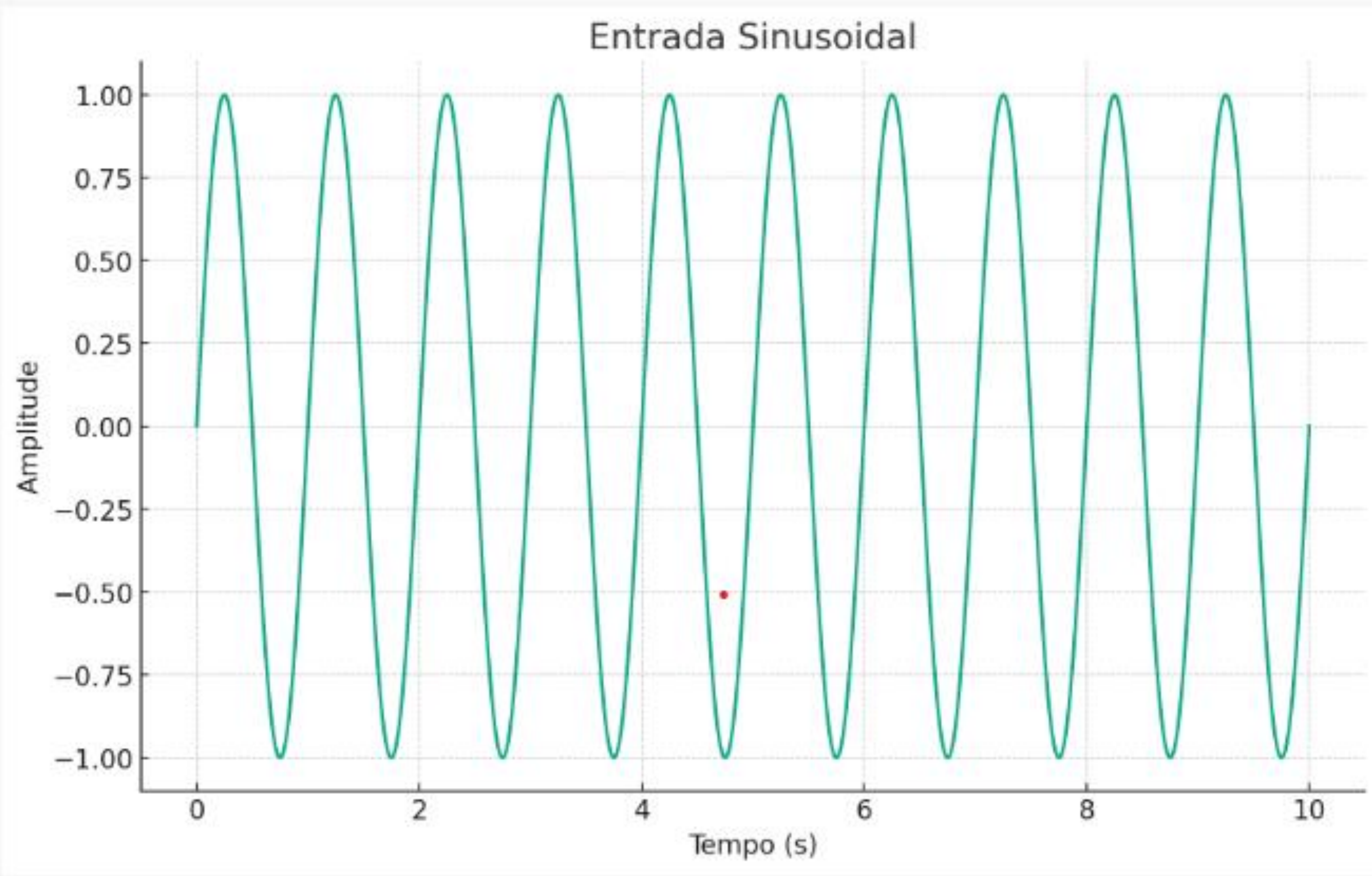
- Elas são caracterizadas por oscilações regulares e repetitivas.

Em função do tempo:

$$x(t) = A sin(2\pi f t + \phi)$$

Onde:

- A é a amplitude da onda sinusoidal.
- f é a frequência da onda sinusoidal (Hertz).
- ϕ é a fase da onda sinusoidal (em radianos), representando um deslocamento horizontal da onda.
- t é a variável de tempo.



Entrada Senoidal

A transformada de Laplace da entrada sinusoidal:

$$x(t) = Asin(2\pi ft + \phi) \ \rightarrow X(s) = L\{Asin(2\pi ft + \phi)\}$$

$$\downarrow$$

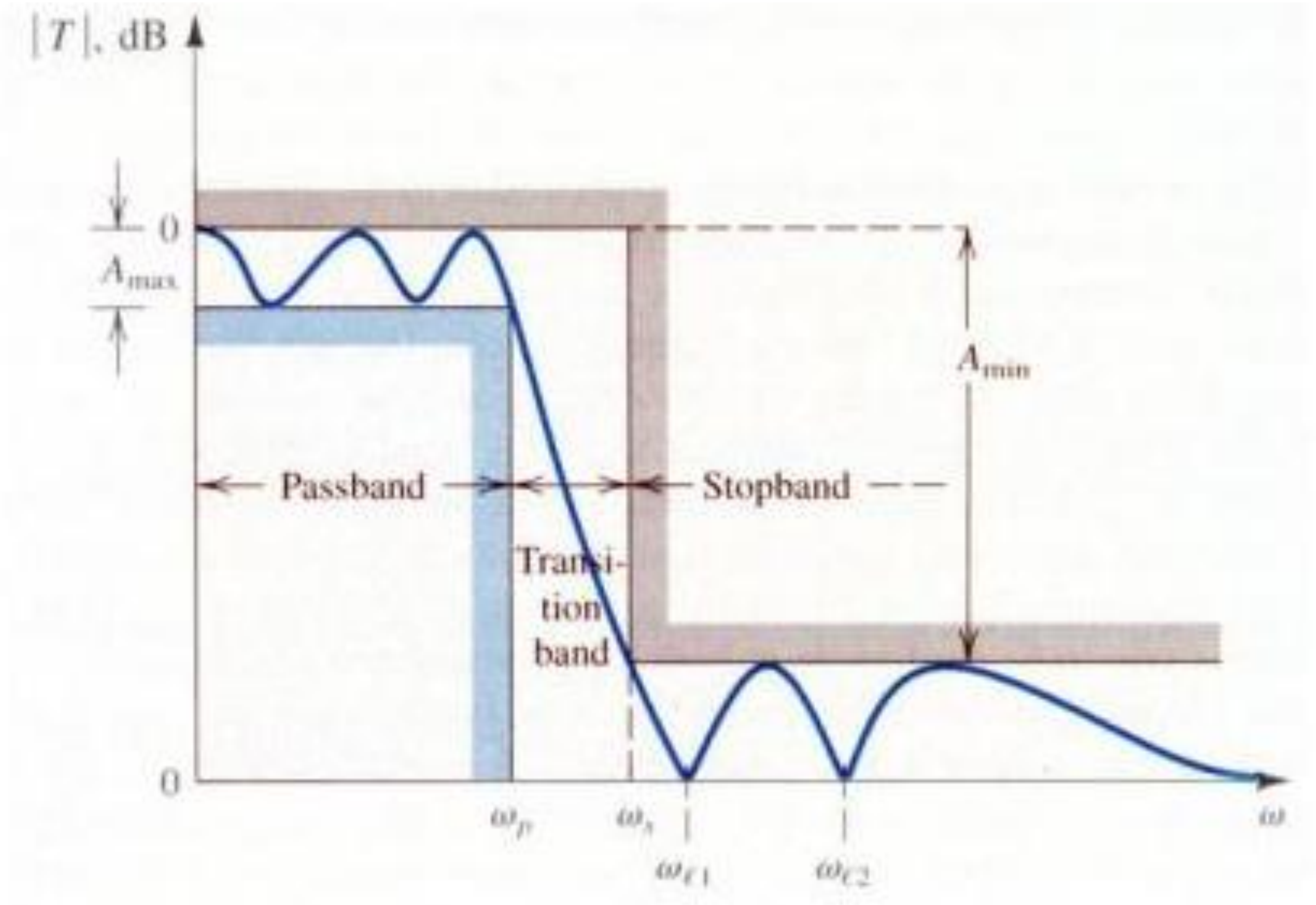
$$X(s) = A\left(\frac{\omega \sin(\phi)}{(s^2+\omega^2)} - \frac{scos(\phi)}{(s^2+\omega^2)}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{X(s) = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}}, \ \ se\ \phi = 0$$

Entrada Senoidal

- As entradas sinusoidais são ferramentas fundamentais para analisar como um sistema responde a diferentes frequências. Isso é essencial para entender o comportamento em frequência de sistemas e para projetar filtros, amplificadores e controladores.



Conclusões

- Nesta aula foi ensinado o que é transformada de Laplace, que é a função que passa do domínio do tempo para frequência.
- Foi explicado que a Transformada de Laplace é usada para criar a função de transferência, muita usado na modelagem de processos.
- Foi demonstrado vários exemplos práticos de controle de processos. Para cada exemplo foi dada a modelagem matemática usando equações diferencias e suas respectivas funções de transferência.
- Através dos vários tipos de entradas (degrau, impulso, rampa e sinusoidal), foi possível fazer a análise da resposta dos exemplos práticos de controle de processo.
- Na próxima aula será dada a parte de modelagem de um sistema de controle em malha fechada.

Exercícios

- Existe algum processo de controle que você queira modelar matematicamente? Faça a sua modelagem matemática.
- Através do programas em python (controle de nível de tanque e o controle de temperatura do tanque) no Google Colab, faça a análise dos diferentes tipos de resposta a cada sistema.
- Usando como base esses programas no Google Colab, utilize o processo de controle que você modelou e crie um programa que faça a análise da resposta para diferentes tipos de entrada.

DÚVIDAS?