Ex 3. a)

$$[v,w](f) \;\equiv\; v[w(f)] - w[v(f)]$$

線形性は明らか。Leibnitz則は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned}
[v,w](gf) &= v[g\,w(f) + f\,w(g)] - w[g\,v(f) + f\,v(g)] \\
&= \{\,v(g)\,w(f) + g\,v[w(f)] + v(f)\,w(g) + f\,v[w(g)]\,\} \;-\; (v \leftrightarrow w) \\
&= g\,\{v[w(f)] - w[v(f)]\} + f\,\{v[w(g)] - w[v(g)]\} \\
&= g\,[v,w](f) + f\,[v,w](g)
\end{aligned}$$

したがって、$[v,w]$ はvector field.

Ex 3. b)

$$\begin{aligned}
[[X,Y],Z](f) &= [X,Y](Z(f)) - Z([X,Y](f)) \\
&= X(Y(Z(f))) - Y(X(Z(f))) - Z(X(Y(f))) + Z(Y(X(f)))
\end{aligned}$$

次のJacobi恒等式が得られる。

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] \;=\; 0$$

これは次に示す式の形式から明らか。

$$\begin{aligned}
A_{123} &\equiv t_{123} - t_{213} - t_{312} + t_{321} \\
A_{123} + A_{231} + A_{312} &= (t_{\cancel{1}23} - t_{\cancel{2}13} - t_{\cancel{3}12} + t_{\cancel{3}21}) \\
&\quad + (t_{\cancel{2}31} - t_{\cancel{3}21} - t_{\cancel{1}23} + t_{\cancel{1}32}) \\
&\quad\quad + (t_{\cancel{3}12} - t_{\cancel{1}32} - t_{\cancel{2}31} + t_{\cancel{2}13}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$4 \times 3 = 2 \times 3!$ 個の項が打ち消し合い 0となる。

Ex 3. c)

$\{Y_\alpha\}$が接ベクトル空間V_pの基底であるとき

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = \sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta} Y_\gamma\,, \quad C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha}$$

とすると

$$\begin{aligned}
[[Y_\alpha, Y_\beta], Y_\gamma](f) &= \sum_\delta [C^\delta_{\alpha\beta} Y_\delta, Y_\gamma](f) \\
&= \sum_\delta C^\delta_{\alpha\beta}\,([Y_\delta, Y_\gamma](f)) \;-\; \sum_\delta Y_\gamma(C^\delta_{\alpha\beta})\,Y_\delta(f) \\
&= \sum_{\delta,\rho} \left\{C^\delta_{\alpha\beta} C^\rho_{\delta\gamma} - Y_\gamma(C^\rho_{\alpha\beta})\right\} Y_\rho(f)
\end{aligned}$$

したがって Jacobi恒等式から

$$\sum_\delta \left(C^\delta_{\alpha\beta} C^\rho_{\delta\gamma} + C^\delta_{\beta\gamma} C^\rho_{\delta\alpha} + C^\delta_{\gamma\alpha} C^\rho_{\delta\beta}\right) = Y_\gamma(C^\rho_{\alpha\beta}) + Y_\alpha(C^\rho_{\beta\gamma}) + Y_\beta(C^\rho_{\gamma\alpha})$$

もし、$\{C^\alpha_{\beta\gamma}\}$が定数ならば、右辺は 0.

Ex 4. a)

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ \pi^\mu(x) = x^\mu$

$$\begin{aligned}
F &= f \circ \psi^{-1} \\
F(x) &= F(a) + \sum_\mu (x^\mu - a^\mu)\,H_\mu(x), \quad H_\mu(a) = \left.\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\right|_{x=a}
\end{aligned}$$

$p \in M$ を固定点、$q \in M$を動点と考えて、$x = \psi(q),\ a = \psi(p)$ とする。

$$
\begin{aligned}
F &= f \circ \psi^{-1} \\
f(q) &= f(p) + \sum_\mu \left[(\pi^\mu \circ \psi)(q) - (\pi^\mu \circ \psi)(p)\right] H_\mu(\psi(q)) \\
v(f) &= \sum_\mu H_\mu(a) v[\pi^\mu \circ \psi] \\
&= \sum_\mu v^\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu}, \quad v^\mu \equiv v[\pi^\mu \circ \psi] \\
\forall v \in V_p, \quad v &= \sum_\mu v^\mu X_\mu, \quad \{X_\mu\}\text{: coordinate basis}, \quad X_\mu(f) = \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\,(f \circ \psi^{-1})}{\partial x^\mu}
\end{aligned}
$$

$v^\mu = v[\pi^\mu \circ \psi]$ が上の式と整合していることは、上の式にfとして $\pi^\mu \circ \psi$ を代入して確かめられる。

$$
v[\pi^\mu \circ \psi] = \sum_\nu v^\nu \frac{\partial\,(\pi^\mu(x))}{\partial x^\nu} = \sum_\mu v^\mu \delta^\mu_\nu = v^\mu
$$

交換 vector fieldの成分は

$$
\begin{aligned}
[v,w]^\mu &= [v,w](\pi^\mu \circ \psi) \\
&= v[w(\pi^\mu \circ \psi)] - w[v(\pi^\mu \circ \psi)] \\
&= \sum_\nu \left(v^\nu \frac{\partial\,(w^\mu \circ \psi^{-1})}{\partial x^\nu} - w^\nu \frac{\partial\,(v^\mu \circ \psi^{-1})}{\partial x^\nu} \right)
\end{aligned}
$$

Ex 4. b)

$$
[Y_i,\ Y_j] = \sum_k C^k_{ij} Y_k, \quad i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}
$$

左辺を座標基底で表すと

$$
[Y_i,\ Y_j] = \sum_{\rho,\sigma} \left[Y_i^\rho (\partial_\rho Y_j^\sigma) - Y_j^\rho (\partial_\rho Y_i^\sigma)\right] \partial_\sigma
$$

これを dualな1-form $Y^{i*},\ Y_i(Y^{j*}) = \delta^j_i$ に作用させて、座標基底で表す $Y^{i*} = \sum_\rho Y^{i*}_\rho\, dx^\rho$ と、次式を得る。

$$
[Y_i,\ Y_j](Y^{k*}) = \sum_{\rho,\sigma} \left[Y_i^\rho (\partial_\rho Y_j^\sigma) - Y_j^\rho (\partial_\rho Y_i^\sigma)\right] Y^{k*}_\sigma = C^k_{ij}
$$

$$
Y_i(Y^{k*}) = \delta^k_i \quad \Rightarrow \quad \sum_\sigma (\partial_\mu Y_i^\sigma)\, Y^{k*}_\sigma + Y_i^\sigma\, (\partial_\mu Y^{k*}_\sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\rho,\sigma} Y_j^\rho\, (\partial_\rho Y_i^\sigma)\, Y^{k*}_\sigma + Y_j^\rho\, Y_i^\sigma\, (\partial_\rho Y^{k*}_\sigma) = 0
$$

最後の式でi,j について反対称化すると

$$
\sum_{\rho,\sigma} \left[Y_i^\rho\, (\partial_\rho Y_j^\sigma) - Y_j^\rho\, (\partial_\rho Y_i^\sigma)\right] Y^{k*}_\sigma = -\sum_{\rho,\sigma} Y_i^\rho\, Y_j^\sigma \left[(\partial_\rho Y^{k*}_\sigma) - (\partial_\sigma Y^{k*}_\rho)\right]
$$

したがって

$$
-\sum_{\rho,\sigma} Y_i^\rho\, Y_j^\sigma \left[(\partial_\rho Y^{k*}_\sigma) - (\partial_\sigma Y^{k*}_\rho)\right] = C^k_{ij}
$$

座標基底成分を使うと逆行列の性質から

$$
Y_i(Y^{k*}) = \sum_\rho Y_i^\rho\, Y^{k*}_\rho = \delta^k_i \quad \Rightarrow \quad \sum_k Y_k^\mu\, Y^{k*}_\nu = \delta^\mu_\nu
$$

これより

$$
(\partial_\mu Y^{k*}_\nu) - (\partial_\nu Y^{k*}_\mu) = -\sum_{i,j} Y^{i*}_\mu\, Y^{j*}_\nu\, C^k_{ij}
$$

Ex 5.

互いに交換するベクトル場が次元の数だけあるとする。

$$[Y_i, Y_j] = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

このベクトル場に dualな1-formを $\{Y^{i*}\}$ とすると、前問から

$$(\partial_\mu Y^{k*}_\nu) - (\partial_\nu Y^{k*}_\mu) = 0$$

したがって、方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} f^{(i)}(x) = Y^{i*}_\mu \ , \ \ i \in \{1, \cdots, n\}$$

は考えている点の開近傍で解を持つ。

$$y^{(i)} = f^{(i)}(x), \quad \det\left(\frac{\partial y^{(i)}}{\partial x^\mu}\right) = \det\left(Y^{i*}_\mu\right) \neq 0$$

は新しい座標を定義する。

Ex 7. a)

metric g を持つ n次元ベクトル空間 V に対して、正規直交基底 $\{e_i\}$, $g(e_i, e_j) = s_i \delta_{ij}$, $s_i = \pm 1$ が常に存在する事。

一次独立な任意の基底 $\{v_i\}$ を選び、それを基に正規直交化できることを帰納法で示す。

既に、 $\{v_i\}$ の中の適当な k 個のベクトル（順序を適当に付け替えて v_1, v_2, $\cdots .v_k$ とする）の線型結合により $e_1, e_2, \cdots, e_k$ が作られているとしよう。u を

$$u = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} g(v_{k+1}, e_i)\, s_i e_i \quad \Rightarrow \quad g(u, e_j) = g(v_{k+1}, e_j) - \sum_{i=1}^{k} g(v_{k+1}, e_i)\, s_i\, g(e_i, e_j) = 0$$

とする。$g(u, u) \neq 0$ ならば

$$e_{k+1} = u / |g(u, u)|^{1/2}$$

とすればよい。

$g(u, u) = 0$（さらに $g(u, e_j) = 0,\ j = 1, 2, \cdots, k$）の場合、metric gは縮退していないので $v_{k+2}, \cdots, v_n$の中にはuとの内積が$\neq 0$のものが存在する。（そうでないと uはすべてのベクトルとの内積が 0になってしまう。）番号を付け替えてこれを v_{k+2}としよう。wを

$$w = v_{k+2} - \sum_{i=1}^{k} g(v_{k+2}, e_i)\, s_i e_i$$

とすると、

$$g(w, e_j) = 0, \ \ j = 1, 2, \cdots, k, \quad g(u, w) = g(u, v_{k+2}) \neq 0$$

そこで

$$g(u, w) = \alpha (\neq 0), \ \ g(w, w) = \beta, \quad u_\pm \stackrel{\mathrm{def}}{=} [1 \mp \beta/(2\alpha)]\, u \pm w$$

とすると

$$\begin{array}{rcl} g(u_+, u_+) & = & 2\,[1 - \beta/(2\alpha)]\,\alpha + \beta & = & 2\,\alpha \\ g(u_-, u_-) & = & -2\,[1 + \beta/(2\alpha)]\,\alpha + \beta & = & -2\,\alpha \\ g(u_+, u_-) & = & -[1 - \beta/(2\alpha)]\,\alpha + [1 + \beta/(2\alpha)]\,\alpha - \beta & = & 0 \end{array}$$

そこで

$$e_{k+1} = u_+ / |2\alpha|^{1/2}, \quad e_{k+2} = u_- / |2\alpha|^{1/2}$$

とすればよい。

Ex 7. b)

二つの正規直交基底

$$\begin{array}{llll} e_1^+,\cdots,e_r^+,e_1^-,\cdots,e_s^-, & r+s=n, & g(e_i^\pm,e_j^\pm)=\pm\delta_{ij}, & g(e_i^+,e_j^-)=0 \\ e'^+_1,\cdots,e'^+_{r'},e'^-_1,\cdots,e'^-_{s'}, & r'+s'=n, & g\left(e'^\pm_i,e'^\pm_j\right)=\pm\delta_{ij}, & g\left(e'^+_i,e'^-_j\right)=0 \end{array}$$

$$\left(e'^{(+)}_1,e'^{(+)}_2,\cdots,e'^{(+)}_{r'}\right)=\left(e_1^{(+)},e_2^{(+)},\cdots,e_r^{(+)}\right)A+\left(e_1^{(-)},e_2^{(-)},\cdots,e_s^{(-)}\right)B,\quad A:r\times r'\text{ 行列},\,B:s\times r'\text{ 行列}$$

があって、$r<r'$ であるとしよう。$r<r'$ なので適当なベクトル $(a_1,a_2,\cdots,a_{r'})\neq 0$ を選んで

$$A\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_{r'}\end{pmatrix}=0$$

とできる。 このベクトルを使って、

$$\begin{aligned} v\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{r'}a_i\,e'^{(+)}_i &= \left(e_1^{(+)},e_2^{(+)},\cdots,e_r^{(+)}\right)A\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_{r'}\end{pmatrix}+\left(e_1^{(-)},e_2^{(-)},\cdots,e_s^{(-)}\right)B\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_{r'}\end{pmatrix}\\ &= \left(e_1^{(-)},e_2^{(-)},\cdots,e_s^{(-)}\right)B\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_{r'}\end{pmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^{s}b_i\,e_i^{(-)} \end{aligned}$$

とすると

$$0<\sum_{i=1}^{r'}{a_i}^2=g(v,v)=\sum_{i=1}^{s}-b_i^2\leq 0$$

となり矛盾する。したがって $r\geq r'$. 同様に $r>r'$ からも矛盾がでるので $r=r'$ でなければならない。