p.41

M上の測地線 $C\colon t\to\gamma(t)\in M$ の接ベクトルを T とすると (3.3.2)

$$T^a\nabla_a T^b=\alpha T^b \tag{1}$$

α は C 上で定義された関数 $\alpha(t)$

C の接ベクトルの定義は、M 上の任意関数 f に対し

$$T(f)=\frac{d}{dt}f(\gamma(t)).$$

曲線 C の媒介変数を $t=\phi(s)$ と変換し、対応する接ベクトルを $\tilde{T}$ とすると

$$\tilde{T}(f)=\frac{d}{ds}f(\gamma(t(s)))=\frac{dt}{ds}T(f)=\frac{1}{\beta}T(f),\quad \beta(t)=\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}=\frac{1}{\phi'(s)}$$

(1) に $T=\beta\tilde{T}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\tilde{T}^a\nabla_a\big(\beta\tilde{T}^b\big) &= \alpha\tilde{T}^b\\ \text{l.h.s} &= \big(\tilde{T}^a\nabla_a\beta\big)\tilde{T}^b+\beta\tilde{T}^a\nabla_a\tilde{T}^b\\ &= \tilde{T}(\beta)\tilde{T}^b+\beta\tilde{T}^a\nabla_a\tilde{T}^b\\ \therefore\quad \tilde{T}^a\nabla_a\tilde{T}^b &= \frac{1}{\beta}\big(\alpha-\tilde{T}(\beta)\big)\tilde{T}^b\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha-\tilde{T}(\beta)=\alpha(t)-\frac{d}{ds}(\phi'(s))^{-1}=\alpha(\phi(s))+\frac{\phi''(s)}{\phi'(s)^2}$$

したがって $\phi(s)$ を次の微分方程式

$$\phi''(s)+\alpha(\phi(s))\,\phi'(s)^2=0$$

の解に選べば

$$\tilde{T}^a\nabla_a\tilde{T}^b=0$$

とできる。即ち適当な媒介変数表示を選べば測地線方程式を

$$T^a\nabla_a T^b=0$$

として構わない。この形を保つ媒介変数のとり方の自由度は（ $\phi''(s)=0$ より ）

$$t=a\,s+b,\quad a,b\text{定数}$$

に制限される。