■ 特殊相対論

p.62 完全流体

u を流体の4元速度を表すベクトル場 $u\cdot u=-1$

エネルギー応力テンソルは

$$T_{ab}=\rho\,u_a\,u_b+P\,(\eta_{ab}+u_a\,u_b)$$

4元速度 v を持つ観測者の慣性系でにおけるエネルギー流密度は

$$J_a=-T_{ab}\,v^b$$

外力がない場合の流体の運動方程式は

$$\begin{aligned}\partial^a T_{ab}=0 \quad\Longrightarrow\quad \partial^a T_{ab} &= (\rho+P)\,[(\partial^a u_a)\,u_b+u_a\,\partial^a u_b]+[u_a\,\partial^a(\rho+P)]\,u_b+(\partial^a P)\,\eta_{ab}\\ &= [(\partial^a\rho)\,u_a+(\rho+P)\,(\partial^a u_a)\,]\,u_b+[(\rho+P)\,u^a\,\partial_a u_b+(\partial^a P)\,(\eta_{ab}+u_a\,u_b)]\\ &= [u\ \text{方向}]+[u\,\text{に直交}] \qquad \because\ (\partial^a u_b)\,u^b=\frac{1}{2}\,\partial^a(u_b\,u^b)=0\\ &= 0\end{aligned}$$

したがって、

$$\partial^a T_{ab}=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}(\partial^a\rho)\,u_a+(\rho+P)\,(\partial^a u_a) &= 0\\ (\rho+P)\,u^a\,\partial_a u_b+(\partial^a P)\,(\eta_{ab}+u_a\,u_b) &= 0\end{cases}$$

非相対論的近似を考えるために c を明示して記す。（エネルギー密度と圧力は同じ単位： [力]/[長さ]^2）

$u\approx(1,\vec v/c)$, 静止エネルギーの寄与を考えると $P\ll\rho$, ρ/c^2 は流体の密度

$$(\partial^a\rho)\,u_a+(\rho+P)\,(\partial^a u_a)=0 \quad\Rightarrow\quad (\partial^a\rho)\,u_a+\rho\,(\partial^a u_a)=\partial_a(\rho\,u^a)=\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec\nabla\cdot(\rho\,\vec v)\right]=0$$

座標系を選んで $i=1,2,3$ を空間成分の添字とすると

$$(\rho+P)\,u^\mu\,\partial_\mu u_i+(\partial^\mu P)\,(\eta_{\mu i}+u_\mu u_i)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&\rho\,u^\mu\,\partial_\mu u_i+(\partial^\mu P)\,(\eta_{\mu i}+u_\mu u_i)=0\\ &u^\mu\,\partial_\mu u_i\approx\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial t}+(\vec v\cdot\vec\nabla)\,v_i\right]\\ &(\partial^\mu P)\,(\eta_{\mu i}+u_\mu u_i)\approx\partial_i P+\frac{v_i}{c^2}\left[\frac{\partial P}{\partial t}+(\vec v\cdot\vec\nabla)\,P\right]\approx\partial_i P+\frac{v_i}{c^2}\frac{dP}{dt}\approx\partial^i P\\ &\therefore\quad \frac{\rho}{c^2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial t}+(\vec v\cdot\vec\nabla)\,v_i\right]=-\vec\nabla P\end{aligned}$$

以上より、非相対論的近似において、改めて流体の密度 ρ/c^2 を ρと記すと

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\vec\nabla\cdot(\rho\,\vec v) &= 0\\ \rho\left[\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+(\vec v\cdot\vec\nabla)\,v_i\right] &= -\vec\nabla P\end{cases}$$

p. 63 Klein-Gordon場

自由スカラー場ϕの方程式（ Klein-Gordon方程式 ）

$$\partial^a\,\partial_a\phi-m^2\,\phi=0$$

エネルギー応力テンソル

$$T_{ab}=\partial_a\phi\,\partial_b\phi-\frac{1}{2}\,\eta_{ab}\,(\partial^c\phi\,\partial_c\phi+m^2\,\phi^2)$$

保存則

$$\begin{aligned}\partial^a T_{ab} &= (\partial^a\partial_a\phi)\,\partial_b\phi+\partial_a\phi\,(\partial^a\partial_b\phi)-[(\partial_b\partial^a\phi)\,\partial_a\phi+m^2\,\phi\,\partial_b\phi]\\ &= [\,(\partial^a\partial_a\phi)-m^2\,\phi\,]\,\partial_b\phi\\ &= 0\end{aligned}$$

p. 64 電磁場

$$F_{ab},\quad F_{ab}=-F_{ba}\qquad \begin{cases} E_a &=& F_{ab}\,v^b \\ B_a &=& -\dfrac{1}{2}\,\epsilon_{ab}{}^{cd}\,F_{cd}\,v^b \end{cases},\quad v^a\ \text{:観測者の4元ベクトル}$$

観測者の静止系となる座標系を導入する。$v=\big(1,\vec{0}\big)$

$$\begin{aligned} \vec{E}=(E^i) &= (F_{i0}) \\ \vec{B}=(B^i) &= -\epsilon_{i0}{}^{jk}F_{jk}=\epsilon_{ijk}F_{jk} \\ &= (F_{23},-F_{13},F_{12}) \end{aligned}$$

■ 一般相対論

∇_aの下で計量g_{ab} の出入りは自由であることに注意する。

p. 70 Maxwell' equations

$$\nabla^a F_{ab} = -4\,\pi\,j_b \tag{1}$$
$$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0 \tag{2}$$

torsion free であることから $\nabla_{[a}\nabla_b\,A_{c\,]}=0$ であるので、(2)より、少なくとも局所的には

$$F_{ab}=\nabla_a\,A_b-\nabla_b\,A_a$$

と置ける。またやはりtorsion freeであることから、任意のスカラー χ に対して $[\nabla_a,\nabla_b]\,\chi=0$ なので

$$A_a\ \longrightarrow\ A_a+\nabla_a\,\chi$$

のゲージ自由度がある。Lorentz ゲージ条件 $\nabla^a A_a=0$ を課すと

$$\begin{aligned} \nabla^a\,F_{ab} &= \nabla^a\nabla_a\,A_b-\nabla^a\,\nabla_b\,A_a \\ &= \nabla^a\nabla_a\,A_b-[\nabla_c,\nabla_b]\,A_a\,g^{ca} \\ &= \nabla^a\nabla_a\,A_b-R_{cba}{}^d\,A_d\,g^{ca} \\ &= \nabla^a\nabla_a\,A_b-R_b{}^d\,A_d \end{aligned}$$

したがって

$$\nabla^a\nabla_a\,A_b-R_b{}^d\,A_d=-4\,\pi\,j_b \tag{3}$$

平坦計量の場合と比較すると、Ricci tensor 項が加わる。この項が有ることにより、カレント保存則が成り立つ。（↓）
(1)からカレント保存則が成立 ($\rightarrow$ p.88 problems 1)。F_{ab} の反対称性から

$$\begin{aligned} -4\,\pi\,\nabla^b\,j_b=\nabla^b\nabla^a\,F_{ab} &= \frac{-1}{2}\,[\nabla_a,\nabla_b]\,F^{ab}=\frac{-1}{2}\,([\nabla_a,\nabla_b]\,F_{cd})\,g^{ac}\,g^{bd} \\ &= \frac{-1}{2}\,(R_{abc}{}^e\,F_{ed}+R_{abd}{}^e\,F_{ce})\,g^{ac}\,g^{bd} \\ &= \frac{-1}{2}\,(R_b{}^e\,F_{ed}\,g^{bd}-R_a{}^e\,F_{ce}\,g^{ac}) \\ &= \frac{-1}{2}\,(R_{be}\,F^{eb}-R_{ae}\,F^{ae}) \\ &= R_{ab}\,F^{ab} \\ &= 0 \qquad \because\ \ R_{ab}=R_{ba} \end{aligned}$$

当然、(3)からもカレント保存則が得られるはずである。

$$\begin{aligned} \nabla^b\,\nabla^a\nabla_a\,A_b &= (\nabla_c\,\nabla_a\,\nabla_b\,A_d)\,g^{ab}\,g^{cd} \\ &= [(\nabla_c\,\nabla_a\,\nabla_b-\nabla_a\,\nabla_b\,\nabla_c)\,A_d]\,g^{ab}\,g^{cd},\quad \because\ \nabla^a\,A_a=0 \\ &= [\,([\nabla_c,\nabla_a]\,\nabla_b+\nabla_a\,[\nabla_c,\nabla_b])\,A_d\,]\,g^{ab}\,g^{cd} \\ &= [(R_{cab}{}^e\,\nabla_e\,A_d+R_{cad}{}^e\,\nabla_b\,A_e)+\nabla_a\,(R_{cbd}{}^e\,A_e)]\,g^{ab}\,g^{cd} \qquad \therefore\ \ \nabla^b\,(\nabla^a\nabla_a\,A_b-R_b{}^d\,A_d)=0 \\ &= -R_c{}^e\,\nabla_e\,A^c+R_a{}^e\,\nabla^a\,A_e+\nabla^b\,(R_b{}^e\,A_e) \\ &= (R_{ab}-R_{ba})\,\nabla^a\,A^b+\nabla^b\,(R_b{}^e\,A_e) \\ &= \nabla^b\,(R_b{}^e\,A_e) \end{aligned}$$