p.37-38 の議論

$p\in\mathcal{M},\ v\in V_p$ を微小な閉曲線に沿って平行移動させ、元の点pに戻った時の変化を考える。そのために、wを任意の dual vector field として、この閉曲線上でスカラー量 $v^a\,w_a$ を考える。ただし、閉曲線上の点q に対して$v(q)$ は $v\in V_p$ を閉曲線に沿ってqまで平行移動させて得られるベクトルとする。

pを含む$\mathcal{M}$内の局所的な2次元平面を考え、pを原点とするその平面の局所座標を(t,s)とする。

考える閉曲線は微小な矩形

$$(0,0)\ \underset{s=0}{\xrightarrow{(1)}}\ (\Delta t,0)\ \underset{t=\Delta t}{\xrightarrow{(2)}}\ (\Delta t,\Delta s)\ \underset{s=\Delta s}{\xrightarrow{(3)}}\ (0,\Delta s)\ \underset{t=0}{\xrightarrow{(4)}}\ (0,0) \tag{1}$$

とする。路(1)～(4)における $v^a\,w_a$ の変化を $\delta^{(i)},\ i=1\sim 4$ とし、$\Delta t,\Delta s$ について二次の量まで考える。

$$\delta^{(1)}=\Delta t\,\frac{\partial}{\partial t}(v^a\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,0)}=\Delta t\,T^b\nabla_b(v^a\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,0)}=\Delta t\,(v^a\,T^b\nabla_b\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,0)},\ \because\ \nabla_a\,v=0 \tag{2}$$

他の$\delta^{(i)}$も同様なので

$$\begin{aligned}
\delta^{(1)}+\delta^{(3)} &= \Delta t\left[\frac{\partial}{\partial t}(v^a\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,\ 0)}-\frac{\partial}{\partial t}(v^a\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,\ \Delta s)}\right]\\
&= \Delta t\left[(v^a\,T^b\nabla_b\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,\ 0)}-(v^a\,T^b\nabla_b\,w_a)\bigg|_{(\Delta t/2,\ \Delta s)}\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{(2)}+\delta^{(4)} &= \Delta s\left[\frac{\partial}{\partial s}(v^a\,w_a)\bigg|_{(\Delta t,\ \Delta s/2)}-\frac{\partial}{\partial s}(v^a\,w_a)\bigg|_{(0,\ \Delta s/2)}\right]\\
&= \Delta s\left[(v^a\,S^b\nabla_b\,w_a)\bigg|_{(\Delta t,\ \Delta s/2)}-(v^a\,S^b\nabla_b\,w_a)\bigg|_{(0,\ \Delta s/2)}\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

これより、微小閉路に沿った平行移動による vの変化量 δv は$\Delta s,\Delta t$ について二次の量であることが分かる。

$v|_p^{/\!/\to q}$ を $v\in V_p$ を点qまで（pからqに至る径路については明示しないが）平行移動したV_qのベクトルとする。ベクトル以外の一般のテンソルについても同じ様に記す。

$$\begin{aligned}
v|_{(\Delta t/2,\Delta s)} &= v|_{(\Delta t/2,0)}^{/\!/\to(\Delta t/2,\Delta t)} \quad + \ [\Delta t,\Delta s\ \text{について二次}]\\
w|_{(\Delta t/2,\Delta s)} &= w|_{(\Delta t/2,0)}^{/\!/\to(\Delta t/2,\Delta s)} \ +\Delta s\,S^b\nabla_b\,w_a \ + \ [\Delta t,\Delta s\ \text{について二次}]
\end{aligned}$$

S,Tはそれぞれ$t=$const., s=const 方向

$$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+h^2\,f''(a)/2+\mathcal{O}(h^3)=f(a)+h\,f'(a+h/2)+\mathcal{O}(h^3)$$