p.87　ドップラー偏移と相対論的ビームミング

(5.73), (5.75)式の導出はテキストの様に、波数4元ベクトル$\boldsymbol{k}=(\omega,\,\vec{k})$の変換性を使うのが楽ではあるが、次のような導出も物理的な過程がよく分かって意味があると思われる。

全方位に角振動数ωで放射する光源が$K(t,\ \vec{x})$系の原点にあり、$K'(t',\ \vec{x}\,')$ではこの光源がx軸方向に速度vで移動するものとしよう。

$$\left\{\begin{array}{lcl} ct &=& \gamma(ct'-\beta x') \\ x &=& \gamma(x'-\beta ct') \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} ct' &=& \gamma(ct+\beta x) \\ x' &=& \gamma(x+\beta ct) \end{array}\right.$$

x軸に関して軸対称なのでx軸を含む平面をxy軸としてその上で考える。

時空点P: $(t',\,x',\,y')\leftrightarrow(t,\,x,\,y)$で観測される光は、$K$系の原点にある光源からある時刻$t_1$に発せられた光である。この時空点を$Q$としよう。

$$Q(t_1,0,0)\,\leftrightarrow\,(t_1',\beta t_1',0),\quad t_1=t-r/c,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

K (K')系においてPで観測される光の方向をx (x')軸からの角度で計ってα (α')とする。時空ベクトルQPを両系で考え、ローレンツ変換でむすぶと$\cos\alpha$と$\cos\alpha'$の関係が得られる。

(→ 相対論的ビーミング)

$$\mathrm{QP}\colon (r/c, r\cos\alpha, r\sin\alpha)\leftrightarrow\big(\,t'-t_1', c(t'-t_1')\cos\alpha', c\,(t'-t_1')\sin\alpha'\,\big)$$

$$\begin{array}{rcl} c\,(t'-t_1')\cos\alpha' &=& \gamma\,(r\cos\alpha+\beta r) \\ c\,(t'-t_1') &=& \gamma\,(r+\beta r\cos\alpha) \end{array}\quad\therefore\quad \cos\alpha'=\frac{\cos\alpha+\beta}{1+\beta\cos\alpha}.$$

K'系の同じ空間点$(x',\,y')$において、角振動数はどのように観測されるであろうか。K'系での微小時間$\Delta t'$の時間経過を考えよう。両系での対応は

$$(t,x,y)\rightsquigarrow(t+\Delta t, x-\beta c\,\Delta t, y)\quad\longleftrightarrow\quad(t',x',y')\rightsquigarrow(t'+\Delta t',x',y')$$

である。K'の空間点(x',y')で受け取る光が光源から出た時間がK系において

$$t_1\rightsquigarrow t_1+\Delta t_1$$

と変化しているとすれば、空間点(x',y')で観測する振動回数は$\omega\,\Delta t_1$であり、角振動数ω'は

$$\omega'\,\Delta t'=\omega\Delta t_1$$

から決まる。

$$c\,\Delta t'=\gamma\,\{c\,\Delta t+\beta(-\beta\,c\Delta t)\}\quad\Rightarrow\quad\Delta t'=\gamma\,(1-\beta^2)\ \Delta t=\frac{1}{\gamma}\Delta t$$

また、$t_1=t-r/c$より

$$c\,\Delta t_1=c\,\Delta t-\Delta r=c\,\Delta t-\frac{x\,\Delta x}{r}=c\Delta t-(\cos\alpha\,)\,\Delta x=(1+\beta\cos\alpha)\,c\,\Delta t.$$

以上より、K'系での振動数の角度依存性を表す次式を得る。(→ ドップラー偏移)

$$\begin{array}{rcl} \omega' &=& \omega\,\dfrac{\Delta t_1}{\Delta t'}=\omega\,\dfrac{(1+\beta\cos\alpha)\,\Delta t}{\Delta t/\gamma} \\ &=& \omega\,\gamma\,(1+\beta\cos\alpha) \\ &=& \omega\,\gamma\left(1+\beta\,\dfrac{\cos\alpha'-\beta}{1-\beta\cos\alpha'}\right)=\omega\,\gamma\,\dfrac{1-\beta^2}{1-\beta\cos\alpha'} \\ &=& \dfrac{\omega}{\gamma\,(1-\beta\cos\alpha')} \end{array}$$