

■ 測地線方程式 (p.161)

テスト粒子が時空点 x_A から x_B に至る運動経路を考えよう。その経路に沿った固有時間 τ_{AB} は

$$\begin{aligned}\tau_{AB} &= \int_0^1 d\sigma L(x(\sigma), \dot{x}(\sigma)), \quad x(\sigma=0)=x_A, \quad x(\sigma=1)=x_B, \quad \cdot \equiv \frac{d}{d\sigma} \\ &= \int_0^1 d\sigma (-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2}, \quad L(x(\sigma), \dot{x}(\sigma)) = (-g_{\alpha\beta}(x(\sigma)) \dot{x}^\alpha(\sigma) \dot{x}^\beta(\sigma))^{1/2}\end{aligned}\quad (1)$$

τ_{AB} に関して Lagrange 方程式を立てる。

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{-1}{L} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{-1}{2L} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \\ \therefore \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \right) &= \frac{1}{2L} \partial_\alpha (g_{\beta\gamma}) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\end{aligned}\quad (3)$$

$\frac{d\sigma}{d\tau} = L^{-1}$ に注意し、 L^{-1} を両辺に掛けると

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} u^\beta) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma}) u^\beta u^\gamma, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (4)$$

左辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} u^\beta) &= g_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau} + (\partial_\gamma g_{\alpha\beta}) u^\beta u^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma}) u^\beta u^\gamma\end{aligned}\quad (5)$$

したがって

$$g_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) u^\beta u^\gamma = 0 \quad (6)$$

ここで次の Christoffel 記号を導入する。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\gamma g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\gamma} - \partial_\rho g_{\beta\gamma})\end{aligned}$$

$(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})$ は添字に関して次の対称性を持つことに注意。

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$$

Christoffel 記号を使うと、(6) は

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma = 0, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (7)$$

■ (4) に対する補足：Killingベクトル

$\xi = (\xi^\mu)$ を ベクトル場 として $\xi \cdot u$ がテスト粒子の運動における保存量となる場合

$$\frac{d}{d\tau} (\xi \cdot u) = 0$$

を考え、そのために ξ が満たすべき条件を調べよう。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(\xi \cdot \mathbf{u}) &= \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu) = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} g_{\mu\nu} u^\nu + \xi^\mu \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu} u^\nu) \\
\frac{d\xi^\mu}{d\tau} &= u^\rho \partial_\rho \xi^\mu \rightarrow = u^\rho (\partial_\rho \xi^\mu) g_{\mu\nu} u^\nu + \xi^\mu \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu} u^\nu) \\
(4) \rightarrow &= (\partial_\rho \xi^\mu) g_{\mu\nu} u^\rho u^\nu + \frac{1}{2} \xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu}) u^\rho u^\nu \\
&= \left[(\partial_\rho \xi^\mu) g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \right] u^\rho u^\nu \\
&= [(\partial_\rho \xi^\mu) g_{\mu\nu} + \xi^\mu \Gamma_{\rho\mu\nu}] u^\rho u^\nu \\
&= [g_{\mu\nu} (\partial_\rho \xi^\mu) + g_{\rho\sigma} \xi^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] u^\rho u^\nu \\
&= \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} (\partial_\rho \xi^\mu) + g_{\rho\sigma} \xi^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + (\rho \leftrightarrow \nu)] u^\rho u^\nu \\
&= \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} (\partial_\rho \xi^\mu) + g_{\nu\sigma} \xi^\mu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + g_{\mu\rho} (\partial_\nu \xi^\mu) + g_{\rho\sigma} \xi^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] u^\rho u^\nu \\
&= \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} (\partial_\rho \xi^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \xi^\sigma) + g_{\mu\rho} (\partial_\nu \xi^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \xi^\sigma)] u^\rho u^\nu \\
&= \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \nabla_\rho \xi^\mu + g_{\mu\rho} \nabla_\nu \xi^\mu) u^\rho u^\nu = \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \xi]
\end{aligned}$$

以上より

$$g_{\mu\nu} \nabla_\rho \xi^\mu + g_{\mu\rho} \nabla_\nu \xi^\mu = 0 \implies \frac{d}{d\tau}(\xi \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (8)$$

(8)をKilling方程式、(8)を満たすベクトル場を**Killingベクトル場**と呼ぶ。

(8)の導出過程を振り返ると、(8)の左辺は局所座標で次のようにも表せることが分かる。

$$g_{\mu\nu} \nabla_\rho \xi^\mu + g_{\mu\rho} \nabla_\nu \xi^\mu = (\partial_\rho \xi^\mu) g_{\mu\nu} + (\partial_\nu \xi^\mu) g_{\mu\rho} + \xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu}) \quad (9)$$

或る特定の局所座標を取ったとき、計量がその中の或る座標変数（仮に x^a としよう）に対する依存性を持たなかったとする。

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \mathbf{g} = 0, \quad \mathbf{g} = (g_{\mu\nu})$$

このとき $\xi = (\xi^\mu)$, $\xi^\mu = \delta_a^\mu = \begin{cases} 1 & (\mu = a) \\ 0 & (\mu \neq a) \end{cases}$ は (9)より明らかにKilling方程式を満たし、Killingベクトル場を与える。

■ 例8.7

二次元ユークリッド平面で（敢えて）極座標を取って測地線を考える。

$$(dS)^2 = (dr)^2 + (r d\phi)^2 \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$\{\Gamma^\alpha_\beta\}$ のうち 0でない成分を書き出すと

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}$$

方程式 (7) より $\dot{} \equiv \frac{d}{dS}$ として次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

しかし、上の方程式を扱うよりは(10)から得られる保存則

$$(\dot{r})^2 + (r\dot{\phi})^2 = 1 \quad (11)$$

と、計量が ϕ に依存しない ($\partial_\phi g_{\alpha\beta} = 0$)ことから (4) から得られる保存則

$$r^2 \dot{\phi} = \ell (= \text{const.}) \quad (12)$$

を使う方が易しい。