■ **12.1 p.238〜：**

座標変数t の代わりに次に示す変数v を導入。

$$
\begin{aligned}
t &= v-\left(r+2\,M\log\left|\frac{r}{2\,M}-1\right|\right)\\
dt &= dv-\left(dr+\frac{1}{r/(2\,M)-1}\,dr\right)=dv-\left(1-\frac{2\,M}{r}\right)^{-1}dr
\end{aligned}
$$

Schwarzschild 計量は、この変数を使うと、計量の 項 $h(r)^{-1}\,dr^2,\ r\to 2\,M$ で起こる（見かけ上の）特異性を消去できる。

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -h(r)\,dt^2+\frac{1}{h(r)}\,dr^2+r^2\,d\ell^2,\quad h(r)\overset{\text{def}}{=}1-\frac{2\,M}{r},\ d\ell^2\overset{\text{def}}{=}d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2\\
&= -h(r)\left[dv-\frac{1}{h(r)}\,dr\right]^2+\frac{1}{h(r)}\,dr^2+r^2\,d\ell^2\\
&= -h(r)\,dv^2+2\,dv\,dr+r^2\,d\ell^2
\end{aligned}
$$

(v,r,θ,ϕ) 座標系には $r=2\,M$ における特異性はない。半径方向の光の経路

$$
\begin{aligned}
0 &= -h(r)\,dv^2+2\,dv\,dr\\
&= dv\,(-h(r)\,dv+2\,dr)\quad\therefore\quad dv{=}0,\ \text{or}\ \frac{dv}{dr}=\frac{2}{h(r)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\,v=0 &\quad\Rightarrow\quad v=\text{const.}\\
\frac{dv}{dr}=\frac{2}{h(r)}=\frac{2\,r}{r-2\,M}=2+\frac{4\,M}{r-2\,M} &\quad\Rightarrow\quad v=2\,r+4\,M\log\left|\frac{r}{2\,M}-1\right|+\text{const.}
\end{aligned}
$$

さらに (v,r) の代わりに $(\tilde{t},r),\ \tilde{t}\overset{\text{def}}{=}v-r$ を導入すると

$$
\begin{aligned}
v=\text{const.} &\quad\Rightarrow\quad \tilde{t}=\text{const.}-r\\
v=2\,r+4\,M\log\left|\frac{r}{2\,M}-1\right|+\text{const.} &\quad\Rightarrow\quad \tilde{t}=\text{const.}+r+4\,M\log\left|\frac{r}{2\,M}-1\right|
\end{aligned}
$$

計量は

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -h(r)\,(d\,\tilde{t}+dr)^2+2\,(d\tilde{t}+dr)\,dr+r^2\,d\Sigma^2\\
&= -h(r)\,d\,\tilde{t}^2+[2-h(r)]\,dr^2+2\,d\tilde{t}\,dr+r^2\,d\Sigma^2,\quad 2-h(r)=1+\frac{2\,M}{r}
\end{aligned}
$$

■ **Exer12-12.**

地平$r=2\,M$上の点での法ベクトルは(v,r,θ,ϕ) 座標系で $(1,0,0,0)$. これはヌルベクトルであり、地平の接ベクトルでもある。

■ **Exer 12-10.**

$r=0$に向かう光線が半径方向以外の成分を持つとき

$$
0=-h(r)\,dv^2+2\,dv\,dr+r^2\,d\ell^2\quad\Rightarrow\quad -h(r)\,dv^2+2\,dv\,dr=-r^2\,d\ell^2\le 0
$$

$r=2\,M$の内側で光路の $r=0$に向かう接ベクトルを考えるとき $(-d\,r)>0,\ h(r)<0$ なので

$$
d\,v<0\ \Rightarrow\ -h(r)\,dv^2+2\,dv\,dr>0\quad\therefore\quad dv>0
$$

$$
0>-h(r)\,dv^2+2\,dv\,dr=d\,v\,(-h(r)\,dv+2\,dr)\quad\Rightarrow\quad -h(r)\,dv+2\,dr<0\quad\therefore\quad 0<d\,v<\frac{2(-d\,r)}{-h(r)}
$$

$\tilde{t}=v-r,\ d\,\tilde{t}=dv-dr$ に焼き直すと

$$
-dr<d\,\tilde{t}<\left[\frac{2}{h(r)}-1\right]dr=d\left(r+4\,M\log\left|\frac{r}{2\,M}-1\right|\right)
$$

この光路の接線方向が、$\tilde{t}$-r座標図において半径方向に進む光線で定義される光円錐の中にあることが分かる。

■ **Kruskal-Szekeres 座標**

$$\begin{aligned} ds^2/(2M)^2 &= \frac{4}{(r/2M)}\, e^{-(r/2M)}[-(dV)^2+(dU)^2] + \left(\frac{r}{2M}\right)^2 [\,(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\phi)^2\,] \\ & \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = U^2 - V^2 \end{aligned}$$

$r/2M \to r$ と書き直し、$V=0,\ \theta=\pi/2$ 曲面を考える。曲面上の線素は

$$ds^2/(2M)^2 = \frac{4}{r}\, e^{-r}\,(dU)^2 + r^2\,(d\phi)^2, \quad (r-1)\,e^r = U^2$$

この曲面を3次元平坦空間にz軸について軸対称に埋め込む。r, ϕ はそのままz軸に垂直な平面の極座標と考えることができる。

$$\begin{aligned} & & [\,(z')^2+1\,]\,(dr)^2 &= \frac{4}{r}\, e^{-r}\,(U')^2\,(dr)^2, \quad {}' = \frac{d}{dr} \\ 2UU' = r\,e^r, \quad \left(U'^2\right) = \frac{r^2\,e^{2r}}{4U^2} = \frac{r^2\,e^r}{4\,(r-1)} & \quad \to & &= \frac{r}{r-1}\,(dr)^2 \\ & & (z')^2 &= \frac{r}{r-1} - 1 \\ & & &= \frac{1}{r-1} \\ z\Big|_{r=1} = 0 \text{ とすると} & & \int_0^z dz &= \pm \int_1^r \frac{dr}{\sqrt{r-1}} \\ & & \therefore\ z &= \pm 2\sqrt{r-1} \\ & & r &= \frac{1}{4}\,z^2 + 1 \end{aligned}$$

つまり、横倒しにした放物線をz軸の周りに回転させた曲面となる。$z \gtrless 0$ には $U \gtrless 0$ が対応している。

$V = V_0 = \text{const},\ \theta = \pi/2$ の曲面ついてはどうか。上と同様であるが

$$(r-1)\,e^r = U^2 - V_0^2, \quad [(r-1)\,e^r]' = r\,e^r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc} r & r_0 & \nearrow & 1 & \nearrow & \infty \\ \hline U & 0 & \to & \pm|V_0| & \to & \pm\infty \end{array}, \quad -1 \leq (r_0-1)\,e^{r_0} = -V_0^2,\ |V_0| \leq 1$$

に注意して

$$\begin{aligned} & & [\,(z')^2+1\,]\,(dr)^2 &= \frac{4}{r}\, e^{-r}\,(U')^2\,(dr)^2 \\ 2UU' = r\,e^r, \quad \left(U'^2\right) = \frac{r^2\,e^{2r}}{4U^2} = \frac{r^2\,e^{2r}}{4\,[(r-1)\,e^r + V_0^2]} & \quad \to & &= \frac{r\,e^r}{(r-1)\,e^r + V_0^2}\,(dr)^2 \\ & & (z')^2 &= \frac{r\,e^r}{(r-1)\,e^r + V_0^2} - 1 \\ & & &= \frac{e^r - V_0^2}{(r-1)\,e^r + V_0^2} = \frac{e^{r-r_0} - (1-r_0)}{(r-1)\,e^{r-r_0} + (1-r_0)} \\ z\Big|_{r=r_0} = 0 \text{ とすると} & & \int_0^z dz &= \pm \int_{r_0}^r \left[\frac{e^{r-r_0} - (1-r_0)}{(r-1)\,e^{r-r_0} + (1-r_0)}\right]^{1/2} dr \\ & & \therefore\ z &= \pm \int_0^{r-r_0} \left[\frac{e^\rho - \xi_0}{[\rho - \xi_0]\,e^\rho + \xi_0}\right]^{1/2} d\rho, \quad 1 - r_0 = \xi_0 \end{aligned}$$

被積分関数の積分下端 $\rho \approx 0$ での振る舞いは

$$\begin{aligned} \frac{e^\rho - \xi_0}{[\rho - \xi_0]\,e^\rho + \xi_0} &\underset{\rho\approx 0}{\approx} \frac{(1+\rho+\rho^2/2) - \xi_0}{(\rho-\xi_0)(1+\rho+\rho^2/2) + \xi_0} \\ &\approx \frac{1 - \xi_0 + \rho + \rho^2/2}{\rho\,(1-\xi_0) + \rho^2(1-\xi_0/2)} \\ &\approx \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1}{1-\xi 0}\,\rho\right)\left(1 - \frac{1-\xi_0/2}{1-\xi_0}\,\rho\right) \\ &\approx \frac{1}{\rho}\left[1 + \frac{\xi_0/2}{1-\xi_0}\,\rho\right] = \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1-r_0}{2\,r_0}\,\rho\right) \\ \left[\frac{e^\rho - \xi_0}{[\rho - \xi_0]\,e^\rho + \xi_0}\right]^{1/2} &\underset{\rho\approx 0}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(1 + \frac{1-r_0}{4\,r_0}\,\rho\right) \end{aligned}$$

$$z \;\approx\; \pm\left[2\,(r-r_0)^{1/2} + \frac{1-r_0}{6\,r_0}\,(r-r_0)^{3/2} + \cdots\right]$$

■ **Exer 12-14.**

ブラックホールの事象の地平を超えてしまった後、特異点で破滅するまでに観測者が費やす最も長い固有時を求める。Eddington-Finkelstein座標 (v, r, θ, ϕ)で考える。空間方向である θ, ϕ方向の変位は固有時を減少させるので v, r の変位を考えれば十分である。

以下、長さの単位を$2M$で測る。$r/2M \to r,\ v/2M \to v,\ \tau/2M \to \tau$

対象となる軌道を$(v(r),\ r)$とすると、E-F座標で書き換えた計量を使って

$$\begin{aligned}(d\tau)^2 &= -(1/r-1)\,dv^2 - 2\,dv\,dr \\ d\tau &= (-dr\,)\sqrt{-(1/r-1)\,v'(r)^2 - 2\,v'(r)}\end{aligned} \tag{1}$$

$$f(z) = -(r^{-1}-1)\,z^2 - 2\,z \ \text{ とすると、} f(z)\text{は } f'(z)=0 \text{ より } z = -1/(r^{-1}-1) = \frac{-r}{1-r} \text{ で最大値 } \frac{r}{1-r}$$

なので、rの変位に対して、$d\tau$の変位が最大になるのは

$$\begin{aligned}v'(r) &= \frac{-r}{1-r} = 1 - \frac{1}{1-r}\ \ (<0 \text{ for } r<1) \\ \therefore \quad v(r) &= \text{const} + r + \log(1-r)\end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる軌道である。これは事象の地平の中で閉じていて、地平の外側へは抜けていない軌道となっている。しかし事象の地平$r=1$を超えてから直ちにこの軌道に乗ったとすると軌道に沿った固有時は有限の値となる。

$$\begin{aligned}\tau &= \int_1^0 (-dr)\sqrt{\frac{r}{1-r}} = \int_0^1 dr\sqrt{\frac{r}{1-r}} \\ &\leftarrow \quad r=\sin^2\xi, \quad dr = 2\sin\xi\cos\xi\,d\xi \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \tan\xi \times \sin\xi\cos\xi d\xi = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2\xi\,d\xi = \int_0^{\pi/2} (1-\cos(2\xi)\,)d\xi \\ &= \Big[\xi - (\sin 2\xi)/2\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \pi/2\end{aligned}$$

$2M$を元に戻すと、$\tau = (\pi/2\,)\times 2M = \pi\,M$となる。さらに $G,\ c$ を復活させると

$$\tau = \pi\,\frac{G\,M}{c^3}\,(\text{sec}) \tag{3}$$

式(2)で与えられる軌道はSchwarzchildt座標では

$$t = \text{const.} \quad \because \quad \text{S座標とE-F座標の関係は } t = v - r - \log|r-1|$$

に他ならない。事象の地平の内側では tの変化は空間的であり、rの変化が時間的であることから、これは空間的には静止している状態を表しており、固有時間が最大になる。また、軌道(2)はSchwarzchildt幾何学における測地線の保存量

$$e = (1-2M/r)\,\frac{dt}{d\tau}, \quad \ell = r^2\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{d\tau}$$

が $e=0,\ \ell=0$ である場合に対応しており、したがって測地線である。