■ Kerr計量

質量M、角運動量Jを持つKerr計量は次の通り。（Boyer-Lindquist座標での計量　$c=G=1$単位）

$$
\begin{aligned}
s^2 &= -\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2-\frac{4Mar\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi\,dt+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \qquad (1)\\
&a=\frac{J}{M}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\rho^2 = r^2+a^2\cos^2\theta\\
\Delta = r^2-2Mr+a^2
\end{cases}
\qquad (2)
$$

Mを単位として $s/M\to s,\ a/M\to a,\ r/M\to r,\ t/M\to t$ とし、s,t,r,a を無単位の量として書くと

$$
ds^2=-\left(1-\frac{2r}{\rho^2}\right)dt^2-\frac{4ar\sin^2\theta}{\rho^2}d\phi\,dt+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2+\rho^2d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2ra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \qquad (3)
$$

$$
\begin{cases}
\rho(r,\theta)^2 = r^2+a^2\cos^2\theta\\
\Delta(r) = r^2-2r+a^2
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
g_{tt}=-\left(1-\frac{2r}{\rho^2}\right) \quad g_{rr}=\frac{\rho^2}{\Delta} \quad g_{\phi\phi}=\left(r^2+a^2+\frac{2ra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\\
g_{t\phi}=-\frac{2ar\sin^2\theta}{\rho^2} \quad g_{\theta\theta}=\rho^2
\end{cases}
\qquad (4)
$$

ゆっくり回転する場合の近似における漸近的振る舞いを調べる。$r\gg1\gg a$ として

$$
\begin{aligned}
r/\rho^2 &= \frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta}=\frac{1}{r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)}\\
&\approx \frac{1}{r}-\frac{a^2}{r^3}\cos^2\theta+\cdots\\
\frac{\rho^2}{\Delta} &= \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2r+a^2}=\frac{1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}{1-\frac{1}{r}\left(2-\frac{a^2}{r}\right)}=\left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)\left(1+\frac{2}{r}-\frac{a^2}{r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2+\cdots\right)\\
&\approx 1+\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}(2-a^2\sin^2\theta)+\cdots
\end{aligned}
$$

$a^2,\ 1/r^2$ 補正の項を落とすと

$$
ds^2\approx-\left(1-\frac{2}{r}\right)dt^2+\left(1+\frac{2}{r}\right)dr^2+r^2d\theta^2++r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2)-\frac{4a\sin^2\theta}{r}d\phi\,dt \qquad (5)
$$

最後の項が前章で取り上げられた「ゆっくりした回転」の効果。

単位に関して先ず長さ(m)の単位を復活させ、次に時間と質量(sec, kg)を復活させると、最後の項は

$$
\begin{aligned}
& & ds^2 &=\cdots-\frac{4a\sin^2\theta}{r}d\phi\,dt\\
r\to r/M,\ a\to a/M,\ t\to t/M,\ s\to s/M &\Rightarrow & ds^2 &=\cdots-M^2\times\frac{4(a/M)\sin^2\theta}{r/M}d\phi\,(dt/M)\\
& & &=\cdots-\frac{4Ma\sin^2\theta}{r}d\phi\,dt\\
t\to ct,\ M\to GM/c^2,\ a=J/M\to J/(cM) &\Rightarrow & &=\cdots-\frac{4GJ}{c^3r^2}\sin^2\theta\,(r\,d\phi)\,(c\,dt)
\end{aligned}
$$

となる。これは前章でSchwarzschild計量に加えた項に等しい。

■ $\Delta=0$ は見かけの座標特異点であること（p.304 問題3）

以下Mを単位とした表記(3)で進める。

計量は $r=0,\ \theta=\pi/2$ において$\rho(r,\theta)=0$ となり特異的になる。また計量は $\Delta=0$ において特異的に見える。

$$
\Delta(r)=r^2-2r+a^2=0 \quad\Rightarrow\quad r=r_\pm\stackrel{\text{def}}{=}1\pm\sqrt{1-a^2},\ a\le1
$$

$r = r_+$ はヌル三次元曲面を形成し、事象の地平であることが以下で分かる。$r = r_+$ での特異性は見かけ上である。$a > 1$ のときは地平が形成されず、 $r = 0,\ \theta = \pi/2$ の特異点は地平に隠されず露わになる。

また、計量の g_{tt} 成分をみると（$\to$(4)）$r = r_+$曲面を外側で囲む曲面内において符号が代わり、<u>tが時間的でなくなっている</u>ことが分かる。

$$-g_{tt} \gtrless 0 \ \Leftrightarrow\ \rho^2 - 2r = r^2 - 2r + a^2\cos^2\theta \gtrless 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} r < 1 - \sqrt{1 - a^2\cos^2\theta} \quad \text{or} \quad 1 + \sqrt{1 - a^2\cos^2\theta} < r \\ 1 - \sqrt{1 - a^2\cos^2\theta} < \ r \ < 1 + \sqrt{1 - a^2\cos^2\theta} \end{cases}$$
$$1 - \sqrt{1 - a^2\cos^2\theta} \le \ r_-, \quad r_+ \ \le\ 1 + \sqrt{1 - a^2\cos^2\theta} \tag{6}$$

$\Delta = 0$ の特異性が座標系依存であることをみるために次のような座標変換を行う。

$$(t, r, \phi) \to (v(t, r), r, \psi(r, \phi)), \quad \begin{cases} dt = dv - \dfrac{r^2 + a^2}{\Delta}\, dr \\ d\phi = d\psi - \dfrac{a}{\Delta}\, dr \end{cases} \ \Leftarrow\ \begin{cases} t = v - \displaystyle\int^r \frac{r^2 + a^2}{(r - r_-)(r - r_+)}\, dr \\ \phi = \psi - a\displaystyle\int^r \frac{dr}{(r - r_-)(r - r_+)} \end{cases} \tag{7}$$

$f(\boldsymbol{x})$を時空間上の関数とするとき

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(v, r, \psi, \theta) & = & \tilde{f}(v(t, r), r, \psi(r, \phi), \theta) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} & f(t, r, \phi, \theta) \end{array}, \quad \begin{cases} \partial_t f = (\partial_t v)\, \partial_v \tilde{f} \\ \partial_r f = \partial_r \tilde{f} + (\partial_r v)\, \partial_v \tilde{f} + (\partial_r \psi)\, \partial_\psi \tilde{f} \\ \partial_\phi f = (\partial_\phi \psi)\, \partial_\psi \tilde{f} \end{cases} \tag{8}$$

$a = 0$ のとき(7)は Eddington-Finkelstein座標に一致する。

$$a = 0 \ \Rightarrow\ r_+ = 2,\ r_- = 0, \quad \therefore \quad \begin{array}{rcl} t & = & v - \displaystyle\int^r \frac{r\, dr}{r - 2}, \\ & = & v - r - 2\log|r - 2| + \text{const.} \\ \phi & = & \psi \end{array}$$

これらを計量の式(3)に代入すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\, d\phi\, dt + \frac{\rho^2}{\Delta}\, dr^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\, d\phi^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2r}{\rho^2}\right)\left(dv - \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\, dr\right)^2 - \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\left(d\psi - \frac{a}{\Delta}\, dr\right)\left(dv - \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\, dr\right) \\ &\quad + \left(r^2 + a^2 + \frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\left(d\psi - \frac{a}{\Delta}\, dr\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}\, dr^2 + \rho^2\, d\theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dr^2\ \text{項} &= \frac{-1}{\rho^2}(\rho^2 - 2r)\left[\frac{(r^2 + a^2)}{\Delta}\right]^2 - \frac{4\,a^2\, r(r^2 + a^2)\sin^2\theta}{\rho^2\Delta^2} + \frac{a^2\left[\rho^2(r^2 + a^2) + 2\,r\,a^2\sin^2\theta\right]\sin^2\theta}{\rho^2\Delta^2} + \frac{\rho^2}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\rho^2\Delta^2}\left\{(r^2 + a^2)\left[-(\rho^2 - 2r)(r^2 + a^2) - 4\,a^2\, r\sin^2\theta + a^2\rho^2\sin^2\theta\right] + 2\,a^4\, r\sin^4\theta + \rho^4\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\rho^2\Delta^2}\left\{(r^2 + a^2)\left[-(\rho^2 - 2r)\underbrace{(r^2 + a^2 - a^2\sin^2\theta)}_{=\rho^2} - 2\,a^2\, r\sin^2\theta\right] + 2\,a^4\, r\sin^4\theta + \rho^4\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\rho^2\Delta^2}\left\{(r^2 + a^2)\left[-(\rho^2 - 2r)\,\rho^2 - 2\,a^2\, r\sin^2\theta\right] + 2\,a^4\, r\sin^4\theta + \rho^4\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\rho^2\Delta^2}\left\{-(r^2 + a^2)(\rho^2 - 2r)\,\rho^2 + 2\,a^2\, r\sin^2\theta\underbrace{\left[-(r^2 + a^2) + a^2\sin^2\theta\right]}_{=-\rho^2} + \rho^4\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\Delta^2}\left\{-\underbrace{\left[(r^2 + a^2)(\rho^2 - 2r) + 2\,a^2\, r\sin^2\theta\right]}_{=\rho^2\Delta} + \rho^2\Delta\right\} \end{aligned}$$

$$\downarrow \quad \begin{array}{rcl} (r^2 + a^2)(\rho^2 - 2r) + 2\,a^2\, r\sin^2\theta & = & (\rho^2 + a^2\sin^2\theta)(\Delta - a^2\sin^2\theta) + 2\,a^2\, r\sin^2\theta \\ & = & \rho^2\Delta + (\Delta - \rho^2)\, a^2\sin^2\theta - a^4\sin^4\theta + 2\,a^2\, r\sin^2\theta \\ & = & \rho^2\Delta + (-2r + a^2\sin^2\theta)\, a^2\sin^2\theta - a^4\sin^4\theta + 2\,a^2\, r\sin^2\theta \\ & = & \rho^2\Delta \end{array} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \\
dv\,dr\ \text{項} &= 2\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)\frac{r^2+a^2}{\Delta}+\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{a}{\Delta} \\
&= \frac{2}{\rho^2\,\Delta}\left[\,(\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2)+2\,a^2\,r\sin^2\theta\,\right] \\
(9)\ \rightarrow\quad &= 2 \\
dr\,d\psi\ \text{項} &= \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{r^2+a^2}{\Delta}-2\,\frac{a}{\Delta}\cdot\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \\
&= \frac{2\,a\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta}\left[2\,r\,(r^2+a^2)-\rho^2\,(r^2+a^2)-2\,r\,a^2\sin^2\theta\right] \\
&= -\frac{2\,a\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta}\left[(\rho^2-2\,r\,)(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta\right] \\
(9)\ \rightarrow\quad &= -2\,a\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$dv^2,\ dv\,d\psi,\ d\psi^2,\ d\theta^2$ については特に計算は必要ない。以上より

$$
\begin{aligned}
ds^2 \;=\; &-\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dv^2+2\,dv\,dr-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,dv\,d\psi-2\,a\sin^2\theta\,dr\,d\psi \\
&+\rho^2\,d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\psi^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

最後の係数に現れる因子は次のようにも表せる

$$
\begin{aligned}
r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2} &= \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta\,\right] \\
(9)\ \rightarrow\quad &= \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,\Delta+2\,r\,(\Delta+2\,r)\right] \\
&= \Delta\cdot\left(1+\frac{2\,r}{\rho^2}\right)+\frac{4\,r^2}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

となって、$r=r_\pm$ における特異性は消失する。

■ 拡張Eddington-Finkelstein座標における計量

$$
(g_{\alpha\beta})=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v & r & \psi & \theta \end{array} \\
\begin{pmatrix}
g_{vv} & 1 & g_{v\psi} & \\
1 & 0 & g_{r\psi} & \\
g_{v\psi} & g_{r\psi} & g_{\psi\psi} & \\
 & & & g_{\theta\theta}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v \\ r \\ \psi \\ \theta \end{array}
$$

(v,r,ψ) に関する部分を取り出し、計算上、表記を簡単にするために次のように記す。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} v & r & \psi \end{array} \\
\begin{pmatrix}
g_{vv} & 1 & g_{v\psi} \\
1 & 0 & g_{r\psi} \\
g_{v\psi} & g_{r\psi} & g_{\psi\psi}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v \\ r \\ \psi \end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} v & r & \psi \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\alpha & 1 & \beta \\
1 & 0 & \gamma \\
\beta & \gamma & \delta
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v \\ r \\ \psi \end{array}
$$

ここで

$$
\left\{
\begin{aligned}
g_{vv} = \quad \alpha\ &= -(\rho^2-2\,r)/\rho^2 \\
g_{v\psi} = \quad \beta\ &= -2\,a\,r\sin^2\theta/\rho^2 \\
g_{r\psi} = \quad \gamma\ &= -a\sin^2\theta \\
g_{\psi\psi} = \quad \delta\ &= [\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta/\rho^2
\end{aligned}
\right.
\quad\overset{r=r_+\text{上}}{\Longrightarrow}\quad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha\ &= a^2\sin^2\theta/\rho_+^2 \\
\beta\ &= -2\,a\,r_+\sin^2\theta/\rho_+^2 \\
\gamma\ &= -a\sin^2\theta \\
\delta\ &= 4\,r_+^2\sin^2\theta/\rho_+^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left.\begin{pmatrix}
g_{vv} & 1 & g_{v\psi} \\
1 & 0 & g_{r\psi} \\
g_{v\psi} & g_{r\psi} & g_{\psi\psi}
\end{pmatrix}\right|_{r=r_+}
=\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}
\begin{pmatrix}
a^2 & 1 & -2\,a\,r_+ \\
1 & 0 & -a\,\rho_+^2 \\
-2\,a\,r_+ & -a\,\rho_+^2 & 4\,r_+^2
\end{pmatrix} \tag{12}
$$

計量の逆行列を計算しよう。先ず

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} &= 2\beta\gamma - (\delta + \alpha\gamma^2) \\
&= \frac{4\,a^2\,r\sin^4\theta}{\rho^2} - \left\{ \frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2\,(r^2+a^2) + 2\,a^2\,r\sin^2\theta\right]\sin^2\theta - \frac{(\rho^2 - 2\,r)}{\rho^2}\,a^2\sin^4\theta \right\} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left\{ 4\,a^2\,\cancel{r}\sin^2\theta - \left[\rho^2\,\underbrace{(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta)}_{=\rho^2} + 4\,a^2\,\cancel{r}\sin^2\theta\right]\right\} \\
&= -\rho^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{-\rho^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
\to \quad &= \frac{1}{-\rho^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -\gamma^2 & \beta\gamma-\delta & \gamma \\ \beta\gamma-\delta & \alpha\delta-\beta^2 & \beta-\alpha\gamma \\ \gamma & \beta-\alpha\gamma & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\beta\gamma - \delta &= \frac{2\,a^2\cancel{r}\sin^4\theta}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,(r^2+a^2) + 2\,a^2\,\cancel{r}\sin^2\theta\,\right]\sin^2\theta \\
&\quad -(r^2+a^2)\sin^2\theta \\
\beta - \alpha\gamma &= =\frac{-2\,a\,\cancel{r}\sin^2\theta}{\rho^2} - \frac{(\rho^2 - \cancel{2}r)\,a\sin^2\theta}{\rho^2} \\
&= -a\sin^2\theta \\
\alpha\,\delta - \beta^2 &= -\frac{\sin^2\theta}{\rho^4}\left\{(\rho^2-2\,r)\left[\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,a^2\,r\sin^2\theta\right] + (2\,a\,r)^2\sin^2\theta\right\} \\
&= -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\,(\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2) + 2\,a^2\,r\sin^2\theta\,\right] \\
& \qquad (\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2)+2\,a^2\,r\sin^2\theta \;\; =\rho^2\,(r^2+a^2) - 2\,r\,(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta) \\
\downarrow & \qquad\qquad =\rho^2\,(r^2+a^2) - 2\,r\,\rho^2 \\
& \qquad\qquad =\rho^2\,(r^2+a^2-2\,r) \\
& \qquad\qquad =\rho^2\,\Delta \\
&= -\Delta\cdot\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g^{vv} & g^{vr} & g^{v\psi} \\ g^{vr} & g^{rr} & g^{r\psi} \\ g^{v\psi} & g^{r\psi} & g^{\psi\psi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\rho^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -\gamma^2 & \beta\gamma-\delta & \gamma \\ \beta\gamma-\delta & \alpha\delta-\beta^2 & \beta-a\gamma \\ \gamma & \beta-a\gamma & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta & r^2+a^2 & a \\ r^2+a^2 & \Delta & a \\ a & a & -1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$r = r_+$ 上では

$$
\left.\begin{pmatrix} g^{vv} & g^{vr} & g^{v\psi} \\ g^{vr} & g^{rr} & g^{r\psi} \\ g^{v\psi} & g^{r\psi} & g^{\psi\psi} \end{pmatrix}\right|_{r=r_+} = \frac{1}{\rho_+^2}\begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta & 2\,r_+ & a \\ 2\,r_+ & 0 & a \\ a & a & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (14)
$$

■ $\boldsymbol{r = r_+}$: 回転ブラックホールの地平

テキストでは三次元曲面 $r = r_+$ 上の解析を計量(3)をそのまま使って行っているが、(3)は $r = r_+$ において特異的なので、座標系(v, r, θ, ψ) とその上の計量(10)で行うべきであろう。

ただし、この面上 $dr = 0$ においては座標変換(7)において $dt = dv,\ d\phi = d\psi$ なので、そこでの議論に誤りはないようだ。

$r = r_+$ 上の接ベクトルを

$$\boldsymbol{t} \ = \ \overset{\hphantom{t^v}v\ \ r\ \ \theta\ \ \psi}{(t^v, 0, t^\theta, t^\psi)}$$

とする。この曲面がヌル曲面であることを示すために、ヌル接ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ が存在するかを調べる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\ell} &= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\,\ell^\alpha\,\ell^\beta \\
&= g_{vv}\,(\ell^v)^2 + 2\,g_{v\psi}\,\ell^v\,\ell^\psi + g_{\psi\psi}\,(\ell^\psi)^2 + g_{\theta\theta}\,(\ell^\theta)^2 \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,[\,a^2\,(\ell^v)^2 - 4\,a\,r_+\,\ell^v\,\ell^\psi + 4\,r_+^2\,(\ell^\psi)^2\,] + \rho_+^2\,(\ell^\theta)^2 \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,(a\,\ell^v - 2\,r_+\,\ell^\psi)^2 + \rho_+^2\,(\ell^\theta)^2 \qquad (15)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\ell} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ell^\psi = \frac{a}{2\,r_+}\,\ell^v,\ \ \ell^\theta = 0, \qquad \boldsymbol{\ell} \ = \ \ell^v\ \overset{v\ \ r\ \ \theta\qquad\ \psi}{(1, 0, 0, a/(2\,r_+))} \qquad (16)$$

となる。

$r = r_+$ 上の時空点$\boldsymbol{x}$から光が$\boldsymbol{\ell}$方向に少しだけ進んだとするとき、Boyer-Lindquist座標では

$$\begin{aligned}
t(\boldsymbol{x}) \ \to\ t(\boldsymbol{x} + \varepsilon\,\boldsymbol{\ell}) &= t(v + \epsilon\,\ell^v, r) = t(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^v\,(\partial_v\,t) \\
&= t(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^v \\
\phi(\boldsymbol{x}) \ \to\ \phi(\boldsymbol{x} + \varepsilon\,\boldsymbol{\ell}) &= \phi(r, \psi + \epsilon\,\ell^\psi) = \phi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^\psi\,(\partial_\psi\,\phi) \\
&= \phi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^\psi
\end{aligned}\ ,\quad \therefore\quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell^\psi}{\ell^v} = \frac{a}{2\,r} \qquad (17)$$

光は角速度 $a/(2\,r)$ で座標に対し「回転」している、と言えるがしかし(6)でも見たように$r = r_+$ 上では t方向は空間的であることに注意したい。

$r = r_+$ 上では次の二つの接ベクトルが $\boldsymbol{\ell}$ に直交することが分かる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}\cdot(0, 0, 1, 0) &= \sum_\alpha g_{\alpha\theta}\,\ell^\alpha = g_{\theta\theta}\,\ell^\theta = 0 \\
\boldsymbol{\ell}\cdot(0, 0, 0, 1) &= \sum_\alpha g_{\alpha\psi}\,\ell^\alpha \\
&= g_{v\psi}\,\ell^v + g_{\psi\psi}\,\ell^\psi \\
&= \frac{2\,r_+\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,(-a\,\ell^v + 2\,r_+\,\ell^\psi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\ell}$ はヌル曲面 $r = r_+$ を形成する光線の方向を指す。

■ ヌル曲面 $\boldsymbol{r = r_+}$ 上 $\boldsymbol{\ell}$方向に発射された光がこのヌル曲面に留まること（**p.304 問題5**）

光の測地線方程式は測地線のパラメータをλとして

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad \frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,u^\beta\,u^\gamma = 0 \qquad (18)$$

接続が計量を使って表されるとき（Levi-Civita接続）には、これは次の方程式に等しい事を思い起こそう。

$$\frac{d}{d\lambda}\,(g_{\alpha\beta}\,u^\beta) = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma \qquad (19)$$

計量(10)を与える座標系(v,r,θ,ψ)で考える。計量$(g_{\alpha\beta})$には v,ψ の依存性がないので、(19)より

$$\sum_\alpha g_{v\alpha}\,u^\alpha = \mathrm{const.},\quad \sum_\alpha g_{\psi\alpha}\,u^\alpha = \mathrm{const.} \tag{20}$$

ここで初期値として、光は $r=r_+$ 上にあって

$$\boldsymbol{u}\propto\boldsymbol{\ell},\ \ \text{i.e.}\ \ \boldsymbol{u}=(u^v,0,0,u^\psi),\quad u^\psi=\frac{a}{2\,r_+}\,u^v \tag{21}$$

を仮定し、さらにこの条件が測地線上でそのままに留まる

$$\frac{du^r}{d\lambda}=-\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^r{}_{\beta\gamma}\,u^\beta u^\gamma=0,\quad \frac{du^\theta}{d\lambda}=-\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^\theta{}_{\beta\gamma}\,u^\beta u^\gamma=0 \tag{22}$$

ことを示したい。

(20)は $u^r=0,\ u^\theta=0$ を仮定すると

$$\begin{aligned}\sum_\alpha g_{v\alpha}\,u^\alpha = g_{vv}\,u^v+g_{v\psi}\,u^\psi &= \frac{-1}{\rho^2}\,[(\rho^2-2\,r)\,u^v+(2\,a\,r\sin^2\theta)\,u^\psi]\\ &\xrightarrow{r=r_+} \frac{a\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,(a\,u^v-2\,r_+\,u^\psi)=0\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha g_{\psi\alpha}\,u^\psi = g_{\psi v}\,u^v+g_{\psi\psi}\,u^\psi &= \frac{1}{\rho^2}\,\{-(2\,a\,r\sin^2\theta)\,u^v+[\Delta\cdot(\rho^2+2\,r)+4\,r^2]\,u^v\}\\ \text{(11)より}\nearrow\ &\xrightarrow{r=r_+} \frac{2\,r_+}{\rho_+^2}\,(-a\,u^v+2\,r_+\,u^\psi)=0\end{aligned} \tag{24}$$

(22)の右辺を計算しよう。初期値として $u^r=u^\theta=0$ であることに注意して、零とならずに寄与するLevi-Civita接続の成分は

$$\Gamma^r{}_{\alpha\beta}=g^{rr}\,\Gamma_{r\alpha\beta}+g^{rv}\,\Gamma_{v\alpha\beta}+g^{r\psi}\,\Gamma_{\psi\alpha\beta},\quad \begin{array}{lll}\Gamma_{rvv}=-\frac{1}{2}\,\partial_r\,g_{vv} & \Gamma_{rv\psi}=-\frac{1}{2}\,\partial_r\,g_{v\psi} & \Gamma_{r\psi\psi}=-\frac{1}{2}\,\partial_r\,g_{\psi\psi}\\ \Gamma_{vvv}=0 & \Gamma_{vv\psi}=0 & \Gamma_{v\psi\psi}=0\\ \Gamma_{\psi vv}=0 & \Gamma_{\psi v\psi}=0 & \Gamma_{\psi\psi\psi}=0\end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^r{}_{\beta\gamma}\,u^\beta u^\gamma &= -\frac{1}{2}\,g^{rr}\,[(\partial_r\,g_{vv})\,(u^v)^2+2\,(\partial_r\,g_{v\psi})\,u^v u^\psi+(\partial_r\,g_{\psi\psi})\,(u^\psi)^2]+\{u^r,u^\theta\ \text{を含む項}\}\\ &\xrightarrow{r=r_+} 0+\{u^r,u^\theta\ \text{を含む項}\}\quad \because\quad g^{rr}=\frac{\Delta}{\rho^2}\end{aligned} \tag{25}$$

$$\Gamma^\theta{}_{\alpha\beta}=g^{\theta\theta}\,\Gamma_{\theta\alpha\beta},\quad \Gamma_{\theta vv}=-\frac{1}{2}\,\partial_\theta\,g_{vv}\quad \Gamma_{\theta v\psi}=-\frac{1}{2}\,\partial_\theta\,g_{v\psi}\quad \Gamma_{\theta\psi\psi}=-\frac{1}{2}\,\partial_\theta\,g_{\psi\psi}$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta\,g_{vv}\Big|_{r=r_+} &= \partial_\theta\left(g_{vv}\Big|_{r=r_+}\right) = a^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\\ \partial_\theta\,g_{v\psi}\Big|_{r=r_+} &= \partial_\theta\left(g_{v\psi}\Big|_{r=r_+}\right) = -2\,a\,r_+\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\\ \partial_\theta\,g_{\psi\psi}\Big|_{r=r_+} &= \partial_\theta\left(g_{\psi\psi}\Big|_{r=r_+}\right) = 4\,r_+^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^\theta{}_{\beta\gamma}\,u^\beta u^\gamma &= -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\,[(\partial_\theta\,g_{vv})\,(u^v)^2+2\,(\partial_\theta\,g_{v\psi})\,u^v u^\psi+(\partial_\theta\,g_{\psi\psi})\,(u^\psi)^2]+\{u^r,u^\theta\ \text{を含む項}\}\\ &\xrightarrow{r=r_+} -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\right][a^2\,(u^v)^2-4\,a\,r_+\,(\partial_\theta\,g_{v\psi})\,u^v u^\psi+4r_+^2\,(u^\psi)^2]+\{u^r,u^\theta\ \text{を含む項}\}\\ &= -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\right](a\,u^v-2\,r_+\,u^\psi)^2+\{u^r,u^\theta\ \text{を含む項}\}\\ &= 0+\{u^r,u^\theta\ \text{を含む項}\}\end{aligned} \tag{26}$$

以上、(23,24,25,26)より初期条件(21)で射出された光はそのまま地平$r=r_+$上に留まることが分かる。