■ Schwarzchild座標におけるChristoffel記号

$$2\,\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta\, g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma\, g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\, g_{\beta\gamma}$$

$2\,\Gamma_{rtt} = -\partial_r\, g_{tt} = h'$	$2\,\Gamma_{ttr} = \partial_r\, g_{tt} = h'$	$2\,\Gamma_{\theta r\theta} = \partial_r\, g_{\theta\theta} = 2\,r$
$2\,\Gamma_{rtr} = -\partial_t\, g_{rr} = 0$		$2\,\Gamma_{\theta\phi\phi} = -\partial_\theta\, g_{\phi\phi} = -2\,r^2\sin\theta\cos\theta$
$2\,\Gamma_{rrr} = \partial_r\, g_{rr} = -h'/h^2$		
$2\,\Gamma_{rr\theta} = \partial_\theta\, g_{rr} = 0$		$2\,\Gamma_{\phi r\phi} = \partial_r\, g_{\phi\phi} = 2\,r\sin^2\theta$
$2\,\Gamma_{rr\phi} = \partial_\phi\, g_{rr} = 0$		$2\,\Gamma_{\phi\theta\phi} = \partial_\theta\, g_{\phi\phi} = 2\,r^2\sin\theta\cos\theta$
$2\,\Gamma_{r\theta\theta} = -\partial_r\, g_{\theta\theta} = -2\,r$		
$2\,\Gamma_{r\phi\phi} = -\partial_r\, g_{\phi\phi} = -2\,r\sin^2\theta$		

,

$$g_{tt} = -h(r), \quad g_{rr} = 1/h(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$$

$$h(r) = 1 - \frac{2\,M}{r}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\rho}\,\Gamma_{\rho\beta\gamma}$$

$\Gamma^r_{tt} = h\,h'/2 = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2\,M}{r}\right)$	$\Gamma^t_{tr} = -h'/(2\,h) = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2\,M}{r}\right)^{-1}$	$\Gamma^\theta_{r\theta} = 1/r$
$\Gamma^r_{rr} = -h'/(2h) = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2\,M}{r}\right)^{-1}$		$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$
$\Gamma^r_{\theta\theta} = -h\,r = -(r - 2\,M)$		$\Gamma^\phi_{r\phi} = 1/r$
$\Gamma^r_{\phi\phi} = -h\,r\sin^2\theta = -(r - 2\,M)\sin^2\theta$		$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$

■ ジャイロスピン$\boldsymbol{s}$

測地線に沿った接ベクトルを$\boldsymbol{u}$ とするとき、ジャイロスピン$\boldsymbol{s}$ とは測地線にそって平行移動する4元ベクトルであって、さらに $\boldsymbol{u}$に直交するベクトルである。

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, s^\beta\, u^\gamma = 0 \quad (i.e. \quad (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{s} = 0\,), \quad \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

■ 回転していない天体の動径方向に向かって落下するジャイロスピン$\boldsymbol{s}$

ジャイロスピンの4元速度$\boldsymbol{u} = (u^t, u^r, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds^t}{d\tau} + \Gamma^t_{tr}\,(s^t\,u^r + s^r\,u^t) \\ 0 &= \frac{ds^r}{d\tau} + \Gamma^r_{rr}\, s^r\, u^r + \Gamma^r_{tt}\, s^t\, u^t \end{aligned}$$

したがって $s^t = s^r = 0$ は整合性を持つ。そこでジャイロスピンは落下方向に対して垂直 $\boldsymbol{s} = (0, 0, s^\theta, s^\phi)$ とする。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds^\theta}{d\tau} + \Gamma^\theta_{r\theta}\, s^\theta\, u^r = \frac{ds^\theta}{d\tau} + \frac{1}{r}\, s^\theta\, u^r \quad \Rightarrow \quad \frac{ds^\theta}{dr} = -\frac{s^\theta}{r} \\ 0 &= \frac{ds^\phi}{d\tau} + \Gamma^\phi_{r\phi}\, s^\phi\, u^r = \frac{ds^\phi}{d\tau} + \frac{1}{r}\, s^\phi\, u^r \quad \Rightarrow \quad \frac{ds^\phi}{dr} = -\frac{s^\phi}{r} \end{aligned}$$

これは Schwarzchild座標において、ジャイロスピンが方向と大きさを一定に保ちながら（$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s} = \mathrm{const.}$）落下するという至極当然と思える結果を示している。

■ ゆっくりと回転する天体の回転軸上を落下するジャイロスピン$\boldsymbol{s}$

Schwarzcild計量に次のような回転効果の摂動が加わる。（c, G を復活させて）計量は

$$(ds)^2 = (ds)^2_{\mathrm{Swd}} + 4\,j(r)\sin^2\theta\,(r\,d\phi)\,(c\,dt), \quad j(r) \equiv \frac{G\,J}{c^3\,r^2}$$

ここでJは天体の角運動量。おおよその評価をすると

$J \sim M\,R^2\,\Omega \sim M\,R\,V$,（$R$は天体の半径、$\Omega$は天体の回転角速度、$V = R\,\Omega$）

$$\frac{G\,J}{c^3\,R^2} \sim \left(\frac{G\,M}{c^2}/R\right) \times \frac{V}{c}$$

回転軸をz 軸に取り、(r, θ, ϕ) の代わりに(x, y, z) 座標をとる。回転軸は対称性から明らかに測地線となる。

回転軸に沿って落下するジャイロスピンを考える。$\boldsymbol{u} = (u^t, 0, 0, u^z)$

$$
\begin{array}{ll}
x = r\sin\theta\cos\phi & \\
y = r\sin\theta\sin\phi & \Rightarrow \\
z = r\cos\theta &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\tan\phi = \dfrac{y}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{d\phi}{\cos^2\phi} = \left[1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right] d\phi = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} \\
\therefore \quad (r^2\sin^2\theta)\,d\phi = x\,dy - y\,dx
\end{array}
$$

$$
(ds)^2 = (ds)^2_{\mathrm{Swd}} + 4\,j(r)\,\frac{x\,dy - y\,dx}{r}(c\,dt). \quad g_{xt} = -\frac{2\,j(r)\,y}{r}, \quad g_{yt} = \frac{2\,j(r)\,x}{r}
$$

摂動項からのChristoffel記号への$\underline{(1/c)\text{に関する最低次の寄与}}$のうち、回転軸上で 0にならないのは

$$
\begin{array}{l}
\Gamma^x_{yt} = \Gamma^x_{ty} \approx \Gamma_{xyt}, \quad \Gamma^x_{yt}\Big|_{\text{z軸}} = \dfrac{1}{2}\,(\partial_y\,g_{xt} - \partial_x\,g_{yt})\Big|_{\text{z軸}} = -\dfrac{2\,j(z)}{z} \\
\Gamma^y_{xt} = \Gamma^y_{tx} \approx \Gamma_{yxt}, \quad \Gamma^y_{xt}\Big|_{\text{z軸}} = \dfrac{1}{2}\,(\partial_x\,g_{yt} - \partial_y\,g_{xt})\Big|_{\text{z軸}} = \dfrac{2\,j(z)}{z}
\end{array}
$$

z軸上でジャイロスピン成分のうち $s^t = s^z = 0$ としても不整合にならないことは前と同じ。

$$
\frac{ds^x}{d\tau} +
$$

$$
\begin{array}{rcl}
r\,dr & = & x\,dx + y\,dy + z\,dz \\
\dfrac{1}{h}\,(dr)^2 + r^2\,[(d\theta)^2 + \sin^2\theta\,(d\phi)^2] & = & \left[1 + (h^{-1} - 1)\,\dfrac{x^2}{r^2}\right](dx)^2 + \left[1 + (h^{-1} - 1)\,\dfrac{y^2}{r^2}\right](dy)^2 + \left[1 + (h^{-1} - 1)\,\dfrac{z^2}{r^2}\right](dz)^2 \\
& & + 2\,(h^{-1} - 1)\,\dfrac{1}{r^2}\,(x\,y\,dx\,dy + y\,z\,dy\,dz + x\,z\,dx\,dz)
\end{array}
$$

z軸上で値を持つChristoffel記号は

$$
\begin{array}{l}
g_{yz} = (h^{-1} - 1)\,\dfrac{y\,z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{yyz}\Big|_{\text{z軸}} = \partial_y\,g_{yz}\Big|_{\text{z軸}} = \dfrac{h^{-1} - 1}{z} \approx \Gamma^y_{yz}\Big|_{\text{z軸}} \\
g_{xz} = (h^{-1} - 1)\,\dfrac{x\,z}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{xxz}\Big|_{\text{z軸}} = \partial_x\,g_{xz}\Big|_{\text{z軸}} = \dfrac{h^{-1} - 1}{z} \approx \Gamma^x_{xz}\Big|_{\text{z軸}}
\end{array}
$$

式の最後の $\approx$ はc^{-1}展開を考えているため。