■ **9.3 p.179～：テスト粒子の束縛軌道**

テスト粒子の運動に対し、計量が t依存性およびϕ依存性を持たないことから次式で定義する $e,\ \ell$ が保存量となり、

$$e = -g_{tt}\frac{dt}{d\tau} \ = \ \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{1}$$

$$\ell = g_{\phi\phi}\frac{d\phi}{d\tau} \ = \ r^2\sin^2\theta\frac{d\phi}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \ell = r^2\frac{d\phi}{d\tau},\ \ \theta=\pi/2 \tag{2}$$

それぞれ（テスト粒子の）単位静止質量当たりのエネルギー、単位静止質量当たりの角運動量と理解される。

時空の球対称性からテスト粒子は質量中心を通る「面」内を運動する。

実際、(2)より、テスト粒子の運動の初期値が $\phi=0,\ d\phi/d\tau=0$ であるようにϕ座標を取ればテスト粒子は$\phi=0$の面内に留まる。改めてこの面を赤道面 $\theta=\pi/2$ にとると都合がよい。

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=-1, \quad \boldsymbol{u}=(dx^\mu/d\tau)$$

に(1),(2)および $u^\theta=d\theta/d\tau=0$ を代入して整理すると動径方向の運動を記述する次の方程式を得る。

$$\frac{e^2-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right] \tag{3}$$

単位質量当たりのエネルギー e は静止エネルギーの寄与を含むので、Newton力学のエネルギー$\mathcal{E}$と比較するためには

$$e=1+\mathcal{E}, \quad \frac{e^2-1}{2}=\frac{(1+\mathcal{E})^2-1}{2}\approx\mathcal{E},\ \ \mathcal{E}\ll 1$$

とする必要がある。Newton力学の場合と比較すべき有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right]=-\frac{M}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{M\ell^2}{r^3} \tag{4}$$

こうすると、Newton力学の場合の

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+V_{\text{eff}}(r)$$

と照応する。

さて、以下ではMを用いて r,ℓ を無次元量で書き直し、面倒なので無次元化したr,ℓに同じ記号を使う。

$$r/M\to r, \quad \ell/M\to\ell, \quad \frac{d\phi}{d\tau}=\frac{\ell}{r^2}\to\frac{\ell}{Mr^2}, \quad e\to e$$

$$V_{\text{eff}}(r)\to \quad V_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right]=-\frac{1}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{\ell^2}{r^3}$$

$V_{\text{eff}}(r)$の極値

$$\begin{aligned} V'_{\text{eff}}(r) &= \frac{1}{r^2}-\frac{\ell^2}{r^3}+\frac{3\ell^2}{r^4} \\ &= \frac{1}{r^4}(r^2-\ell^2 r+3\ell^2)=\begin{cases} \dfrac{1}{r^4}(r-r_+)(r-r_-), \quad 0<r_-<r_+ & ,\ \text{for}\ \ \ell^2\geq 12 \\ >0 & ,\ \text{for}\ \ \ell^2<12 \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

$$V'_{\text{eff}}(r_\pm)=0 \quad \Rightarrow \quad r_\pm=\frac{1}{2}\ell^2\left(1\pm\sqrt{1-12/\ell^2}\right), \quad V''_{\text{eff}}(r_\pm)\gtrless 0 \tag{6}$$

$V_{\text{eff}}(r)$ は$r=r_-$ で極大、 $r=r_+$ で極小となる。ℓを変化させると

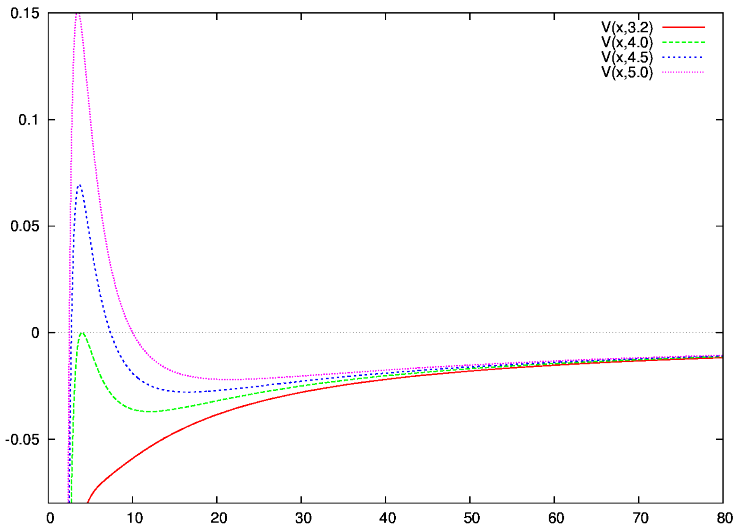
$$3<r_-\leq 6\leq r_+, \quad \ell\geq\sqrt{12} \tag{7}$$

[memo]

$$
\begin{aligned}
r_+ = \frac{1}{2}\ell^2\left(1+\sqrt{1-12/\ell^2}\right) &= \frac{\ell^2+\ell\sqrt{\ell^2-12}}{2} \quad \ell \geq \sqrt{12}\ \text{において単調増加} \\
r_- = \frac{1}{2}\ell^2\left(1-\sqrt{1-12/\ell^2}\right) &= \frac{\ell^2-\ell\sqrt{\ell^2-12}}{2} = \frac{\ell}{2}\left(\ell-\sqrt{\ell^2-12}\right) \\
&= \frac{6\lambda}{\ell+\sqrt{\ell^2-12}} = \frac{6}{1+\sqrt{1-12/\ell^2}} \quad \ell\ \text{について単調減少}
\end{aligned}
$$

ℓ	$\sqrt{12}$		4		∞
$r_+ = \dfrac{\ell^2+\ell\sqrt{\ell^2-12}}{2}$	6	$\nearrow$	12	$\nearrow$	∞
$r_- = \dfrac{6}{1+\sqrt{1-12/\ell^2}}$	6	$\searrow$	4	$\searrow$	3

$\therefore\ 3 \leq\ r_-\ \leq 6\ \leq\ r_+$



有効ポテンシャル：$V(r,l) = -1/r + \ell^2/r^2 - \ell^2/r^3$

■ 安定円軌道

式(7)より $6 \leq r$ なる r について安定円軌道をとることができる。

そのためには eの値がちょうど$V_{\rm eff}$の極小値の値に対応している必要がある。

$$
\frac{e^2-1}{2} = V_{\rm eff}(r), \quad V'_{\rm eff}(r) = 0
$$

そのためには、式(5)と式(3) より

$$
\begin{aligned}
V'_{\rm eff}(r) = 0 \ \Rightarrow \quad \ell^2 &= \frac{r^2}{r-3} \\
\frac{e^2-1}{2} = V_{\rm eff}(r) \ \Rightarrow \quad e^2 &= \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right) \overset{\text{上式}}{\Longrightarrow} \ \text{右辺} = \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r-3}\right) = \frac{(r-2)^2}{r(r-3)} \qquad (8) \\
\therefore \quad \frac{\ell}{e} &= \frac{\sqrt{r^3}}{r-2} = \frac{\sqrt{r}}{1-2/r} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

でなければならない。円軌道の半径rからその円軌道を実現するe,ℓの値も決まる。このとき

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\ell}{Mr^2} = \frac{1}{Mr\sqrt{r-3}}, \quad (\text{以下の式の}r,\ell\text{は無次元量であることに注意}) \\
\frac{dt}{d\tau} &= e/\left(1-\frac{2}{r}\right) = \sqrt{\frac{r}{r-3}} \\
\Omega \overset{\text{def}}{=} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{d\tau}\Big/\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{M}\left(\frac{\ell}{e}\right)\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2}{r}\right) = \frac{1}{M\sqrt{r^3}} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Mを復活させて$r \to r/M$の置き換えをすると

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3}$$

ただし、"角速度" Ω はシュワツシルト座標時間tに関するものである。

シュワツシルト座標時間 tは無限遠で固有時間と等しくなるので、$2\,\pi/\Omega$ は無限遠方にいる観測者がこの円運動を見たときの周期となる。

固有時間に対する角度変化$\tilde{\Omega} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{d\phi}{d\tau}$を考えると、式(2),(8)より

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}^2 = \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 &= \frac{\ell^2}{r^4} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{M r^2}{r-3\,M}\right) \\ &= \frac{M}{r^2\,(r-3\,M)}\end{aligned}$$

■ 束縛軌道の形

軌道の形を知るためにはϕをrの関数として求める必要がある。再びMで無次元化した r, ℓ を使って

式(3)より

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= (e^2-1) - 2\,V_{\mathrm{eff}}(r) \\ &= e^2 - \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right) \\ &= e^2 - 1 + \frac{1}{r} - \frac{\ell^2}{2\,r^2} + \frac{\ell^2}{r^3} \\ &= \frac{1}{r^3}\left[(e^2-1)\,r^3 + r^2 - \frac{\ell^2}{2}\,r + \ell^2\right]\end{aligned}$$

式(2),(3)より

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\ell}{r^2} \\ \frac{dr}{d\tau} &= \pm\sqrt{e^2 - \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)} = \pm\sqrt{(e^2-1) - 2\,V_{\mathrm{eff}}(r)} \\ \frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\tau}\Big/\frac{dr}{d\tau} &= \pm\frac{\ell}{r^2}\left[e^2 - \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}\end{aligned}$$

式(8)より$V_{\mathrm{eff}}(r)$の極値は、$r = r_\pm$ において

$$2\,V_{\mathrm{eff}}(r_\pm) = \frac{(r_\pm - 2\,)^2}{r_\pm\,(r_\pm - 3\,)} - 1 = \frac{-(r_\pm - 4\,)}{r_\pm\,(r_\pm - 3)}$$

束縛軌道となるためには $V_{\mathrm{eff}}(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ であることを考慮すると

$$\min\,(0, 2\,V_{\mathrm{eff}}(r_-)) > e^2 - 1 > 2\,V_{\mathrm{eff}}(r_+), \quad \ell \geq \sqrt{12}$$

軌道半径の転回点 $r_1, r_2,\ (r_1 \leq r_2)$ は軌道上で $\frac{dr}{d\tau} = 0$ となる場所であり、

$$e^2 - 1 - V_{\mathrm{eff}}(r_i) = 0,\ (i = 1, 2), \qquad r_1 \leq r \leq r_2 \ \Rightarrow\ (e^2-1) - 2\,V_{\mathrm{eff}}(r) \geq 0$$

より定まる。

転回点からその転回点に戻るまでの ϕ の変化 $\Delta\phi$ は、転回点 r_1 から r_2 までの移動の間のϕの変化の2倍なので

$$\Delta\phi = 2\,\ell\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}\frac{1}{\sqrt{e^2 - \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)}} \tag{11}$$

となる。

■ **Newton理論からの補正：近日点の移動**

Newton理論からの逸脱を近似的に考えるために、式(3)を、定数G, cを復活させて通常の単位系に戻して書いてみる。($\tau \to c\tau$ にも注意)

$$
\begin{array}{ccll}
\text{式(3)} & & \text{置き換え後} & \\
\hline
e & \to & \dfrac{c^2+e_N}{c^2}, & e_N\text{：運動物体の質量当たりのエネルギー} \\
\dfrac{e^2-1}{2} & \to & \dfrac{e_N}{c^2}\left(1+\dfrac{e_N}{c^2}\right) & \\
M & \to & GM/c^2 & \\
\ell & \to & \ell/c, & \ell\text{：運動物体の質量当たりの角運動量} \qquad \ell = r^2\dfrac{d\phi}{d\tau} \overset{\tau\to c\tau}{\longrightarrow} \dfrac{r^2}{c}\dfrac{d\phi}{d\tau} = \dfrac{\ell}{c} \\
V_{\text{eff}}(r) & \to & \dfrac{1}{c^2}\left(-\dfrac{GM}{r}+\dfrac{\ell^2}{2r^2}-\dfrac{GM\ell^2}{c^2r^3}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right)\left(1+\dfrac{\ell^2}{c^2r^2}\right)-1\right] &
\end{array}
$$

結局、式(3)は

$$
e_N\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(-\frac{GM}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{GM\ell^2}{c^2r^3}\right)
$$

ここで、Newton理論において物体が束縛軌道上を運動する場合には、物体の軌道方向の速度をvとしておおよそ

$$
\frac{\ell}{c} \approx r\frac{v}{c}, \quad \frac{GM}{r^2} \approx \frac{v^2}{r} \quad \therefore \frac{GM}{r} \approx \frac{\ell^2}{r^2}
$$

であることから、$V_{\text{eff}}(r)$ の第一と第二項は同程度なのに対して、第三項は

$$
\text{第三項} \ \approx\ \text{第一項} \times \frac{\ell^2}{c^2r^2} \ \approx\ \text{第一項} \times \left(\frac{v}{c}\right)^2
$$

となっており、相対論的補正を与えるものであることが分かる。

式(11)をNewton理論からの補正として計算しよう。

補正項がよく分かるように c は残して $G\to 1,\ r/M \to r,\ \ell/M \to \ell$ とする。式(11)は

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi &= 2\left(\frac{\ell}{c}\right)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2}{c^2r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{c^2r^2}\right)}} \qquad (12) \\
&= 2\left(\frac{\ell}{c}\right)\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)}}, \quad u=\frac{1}{r},\ du=\frac{-dr}{r^2}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)} &= \sqrt{1-\frac{2u}{c^2}}\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{2u}{c^2}\right)^{-1}-\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)} \\
\left(1-\frac{2u}{c^2}\right)^{-1/2} &= 1+\frac{u}{c^2}+\mathcal{O}(1/c^4) \\
\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{2u}{c^2}\right)^{-1}-\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right) &= \left[1+\frac{2e_N}{c^2}+\left(\frac{e_N}{c^2}\right)^2\right]\left[1+\frac{2u}{c^2}+\left(\frac{2u}{c^2}\right)^2+\text{(higher order terms)}\right]-\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right) \\
&= \frac{1}{c^2}\left\{2e_N+2u-\ell^2u^2+\frac{1}{c^2}[(e_N)^2+4e_Nu+4u^2]+\mathcal{O}(1/c^4)\right\} \\
&= \frac{1}{c^2}[\alpha+\beta u-\gamma^2u^2+\mathcal{O}(1/c^4)], \quad \alpha=e_N\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right),\ \beta=2\left(1+2\frac{e_N}{c^2}\right),\ \gamma^2=\ell^2-\frac{4}{c^2} \\
&= \frac{1}{c^2}[\gamma^2(u_1-u)(u-u_2)+\mathcal{O}(1/c^4)] \\
\gamma^{-1} &= \left(\ell^2-\frac{4}{c^2}\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\ell}\left(1+\frac{2}{c^2\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^4)\right)
\end{aligned}
$$

上の式変形は、平方の中が$1/c^2$の一次項まで含めて u の二次式に収まるようになっていて巧妙である。

したがって式(12)において、被積分関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\ell/c}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2\,u^2}{c^2}\right)}} &= \frac{(\ell/c)\,[1+u/c^2+\mathcal{O}(1/c^4)]}{(\gamma/c)\,\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)+\mathcal{O}(1/c^4)}} \\
&= \frac{[1+2/(c^2\,\ell^2)]\,(1+u/c^2)}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\mathcal{O}(1/c^4) \\
&= \left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\frac{1}{c^2}\,\frac{u}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\mathcal{O}(1/c^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad \Delta\phi &= 2\int_{u_2}^{u_1}\frac{(\ell/c)\,du}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2\,u^2}{c^2}\right)}} \\
&= 2\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\frac{2}{c^2}\int_{u_2}^{u_1}\frac{u\,du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\mathcal{O}(1/c^4)
\end{aligned}
$$

積分の計算をしよう。

$$
\begin{array}{lll}
z=\sqrt{\dfrac{u_1-u}{u-u_2}}, & (u-u_2)\,z^2=u_1-u & \\
 & (1+z^2)\,u=u_1+u_2\,z^2 & \\
 & u=\dfrac{u_1+u_2\,z^2}{1+z^2} & \begin{array}{c|ccc} u & u_2 & \to & u_1 \\ \hline z & \infty & \to & 0 \end{array} \\
\hline
\dfrac{dz}{du}=\dfrac{1}{2\,z}\cdot\dfrac{-(u-u_2)-(u_1-u)}{(u-u_2)^2}, & u-u_2=\dfrac{u_1-u_2}{1+z^2} & \\
\phantom{\dfrac{dz}{du}}=\dfrac{-(u_1-u_2)}{2\,z\,(u-u_2)^2} & \sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}=z\,(u-u_2) & \\
\phantom{\dfrac{dz}{du}}=\dfrac{-(1+z^2)^2}{2\,z\,(u_1-u_2)} & \phantom{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}=\dfrac{(u_1-u_2)\,z}{1+z^2} & \\
du=-2\,(u_1-u_2)\,\dfrac{z}{(1+z^2)^2}\,dz & \therefore\ \dfrac{du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}=-2\,\dfrac{dz}{1+z^2} & \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}} &= 2\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}\ =2\Big[\arctan z\Big]_0^{\infty} \\
&= \pi \\
\int_{u_2}^{u_1}\frac{u\,du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}} &= 2\int_0^{\infty}\frac{u_1+u_2\,z^2}{(1+z^2)^2}\,dz \\
&\qquad \tfrac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\tfrac{dz}{1+z^2}=\Big[\tfrac{z}{1+z^2}\Big]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\tfrac{2\,z^2}{(1+z^2)^2}\,dz=2\int_0^{\infty}\tfrac{z^2}{(1+z^2)^2}\,dz \\
&\qquad \int_0^{\infty}\tfrac{dz}{(1+z^2)^2}=\int_0^{\infty}\Big[\tfrac{1}{1+z^2}-\tfrac{z^2}{(1+z^2)^2}\Big]dz=\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}\,(u_1+u_2)
\end{aligned}
$$

解と係数の関係から

$$
u_1+u_2=\frac{\beta}{\gamma^2}=\frac{2\,(1+2\,e_N/c^2)}{\ell^2-4/c^2}=\frac{2}{\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^2)
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi &= 2\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)\times\pi+\frac{2}{c^2}\times\frac{\pi}{2}\,(u_1+u_2)+\mathcal{O}(1/c^4) \\
&= 2\,\pi\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)+\frac{2\,\pi}{c^2\,\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^4) \\
&= 2\,\pi+\frac{6\pi}{c^2\,\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^4)
\end{aligned}
$$

G, M を復活させると $\ell\to\ell/M\to\ell/(G\,M)$ であるので

$$
\Delta\phi=2\,\pi+6\,\pi\left(\frac{G\,M}{c^2}\right)^2\left(\frac{c}{\ell}\right)^2+\text{higer order terms}
$$

第一項の 2π はNewton力学では一回転して軌道が閉じることを意味する。

近日点（=内側の転回点）から公転によって次に近日点に至るとき、完全には同じ位置ではなく

$$\delta\phi_{\mathrm{prec}} = \Delta\phi - 2\pi$$

だけ移動することになる。

水星の軌道に関して数値的に見てみると

$$\begin{aligned}
\frac{G\,M_{\mathrm{sun}}}{c^2} &= 1.48 \times 10^3\,(\mathrm{m}) \\
\frac{\ell_{\mathrm{mercury}}}{c} &= 9.05 \times 10^6 (\mathrm{m}) \\
\delta\phi_{\mathrm{prec}} &= 6\,\pi \left(\frac{G\,M_{\mathrm{sun}}}{c^2}\right)^2 \left(\frac{c}{\ell_{\mathrm{mercury}}}\right)^2 = 2\,\pi \times 7.99 \times 10^{-8} (/1\text{公転})
\end{aligned}$$

また水星の公転周期より

$$T_{\mathrm{merc}} = 0.241(\mathrm{year}), \quad 415.0(\text{公転}/\mathrm{century}), \implies \quad \delta\phi_{\mathrm{prec}} \approx 43.0(\text{秒}/\mathrm{century})$$