■ Schwarzchild座標におけるChristoffel接続

$$2\,\Gamma_{\alpha\,\beta\gamma} = \partial_\beta\, g_{\alpha\,\gamma} + \partial_\gamma\, g_{\alpha\,\beta} - \partial_\alpha\, g_{\beta\gamma}$$

$2\,\Gamma_{rtt} \;=-\partial_r\, g_{tt} = h'$	$2\,\Gamma_{ttr} \;=\partial_r\, g_{tt} = h'$	$2\,\Gamma_{\theta r\theta} \;=\partial_r\, g_{\theta\theta} = 2\,r$	$g_{tt} = -h(r)$
$2\,\Gamma_{rtr} \;=\partial_t\, g_{rr} = 0$		$2\,\Gamma_{\theta\phi\phi} \;=-\partial_\theta\, g_{\phi\phi} = -2\,r^2\sin\theta\cos\theta$	$g_{rr} = 1/h(r)$
$2\,\Gamma_{rrr} \;=\partial_r\, g_{rr} = -h'/h^2$			$g_{\theta\theta} = r^2$
$2\,\Gamma_{rr\theta} \;=\partial_\theta\, g_{rr} = 0$		$2\,\Gamma_{\phi r\phi} \;=\partial_r\, g_{\phi\phi} = 2\,r\sin^2\theta$	$g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$
$2\,\Gamma_{rr\phi} \;=\partial_\phi\, g_{rr} = 0$		$2\,\Gamma_{\phi\theta\phi} \;=\partial_\theta\, g_{\phi\phi} = 2\,r^2\sin\theta\cos\theta$	$h(r) = 1 - \dfrac{2\,M}{r}$
$2\,\Gamma_{r\theta\theta} \;=-\partial_r\, g_{\theta\theta} = -2\,r$			
$2\,\Gamma_{r\phi\phi} \;=-\partial_r\, g_{\phi\phi} = -2\,r\sin^2\theta$			

(1)

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\rho}\,\Gamma_{\rho\,\beta\gamma}$$

$\Gamma^r_{tt} \;= h\,h'/2 = \dfrac{M}{r^2}\left(1-\dfrac{2\,M}{r}\right)$	$\Gamma^t_{tr} \;= -h'/(2\,h) = \dfrac{M}{r^2}\left(1-\dfrac{2\,M}{r}\right)^{-1}$	$\Gamma^\theta_{r\theta} \;= 1/r$
$\Gamma^r_{rr} \;= -h'/(2h) = -\dfrac{M}{r^2}\left(1-\dfrac{2\,M}{r}\right)^{-1}$		$\Gamma^\theta_{\phi\phi} \;= -\sin\theta\cos\theta$
$\Gamma^r_{\theta\theta} \;= -h\,r = -(r-2\,M)$		$\Gamma^\phi_{r\phi} \;= 1/r$
$\Gamma^r_{\phi\phi} \;= -h\,r\sin^2\theta = -(r-2\,M)\sin^2\theta$		$\Gamma^\phi_{\theta\phi} \;= \cot\theta$

(2)

■ ジャイロスピン$\boldsymbol{s}$

測地線に沿った接ベクトルを$\boldsymbol{u}$ とするとき、ジャイロスピン$\boldsymbol{s}$ とは測地線にそって平行移動する4元ベクトルであって、さらに $\boldsymbol{u}$に直交するベクトルである。

$$\frac{ds^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, s^\beta\, u^\gamma = 0 \quad (i.e. \quad (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{s} = 0\,), \quad \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{3}$$

$\boldsymbol{u}$との直交性は、ジャイロスピンとともに測地線に沿って移動する観測者の局所慣性系　基底：$(\boldsymbol{e}_{\hat{0}}, \boldsymbol{e}_{\hat{1}}, \boldsymbol{e}_{\hat{2}}, \boldsymbol{e}_{\hat{3}})$　では $\boldsymbol{s}$ は空間成分のみを持つと考えるためである。

$$\boldsymbol{e}_{\hat{0}} = \boldsymbol{u}\ \ (\leftarrow\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1), \quad \boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{3} s^{\hat{i}}\,\boldsymbol{e}_{\hat{i}}, \qquad \boldsymbol{e}_{\hat{\mu}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\,\hat{\nu}} \tag{4}$$

■ Schwarzschild 安定円軌道上のジャイロスピン（p.278～280）

Schwarzschild時空に安定円軌道があることは既にみた。（→ chapt09-31.pdf）

円軌道（半径 R）を赤道面に取って$\theta = \pi/2$とすると

$$\boldsymbol{u} = u^t\,(1,\ 0,\ 0,\ \Omega), \quad u^t = \frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{R}{R-3\,M}}, \quad \Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{M}\,\sqrt{(M/R)^3}\,, \quad \Omega^2 = \frac{M}{R^3} \tag{5}$$

ジャイロスピン$\boldsymbol{s}$の初期値を軌道面上に取れば（$s^\theta = 0$）、球対称性から明らかに軌道面上に留まる。

$$\boldsymbol{s} = (s^t, s^r, 0, s^\phi), \qquad \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

$\boldsymbol{u}$ との直交条件を書き下すと（$\theta = \pi/2$ なので）

$$\begin{aligned} 0 = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u} \;&=\; u^t(g_{tt}\, s^t + g_{\phi\phi}\, s^\phi\,\Omega) = u^t\,[-(1-2\,M/R)\, s^t + R^2\,\Omega\, s^\phi] \\ u^t \neq 0, \quad \therefore \quad s^t \;&=\; R^2\,\Omega\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{-1} s^\phi \end{aligned} \tag{6}$$

したがって、s^r, s^ϕ について調べればよい。(2),(3)より $u^r = u^\theta = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{ds^r}{d\tau} = \frac{ds^r}{dt}\,u^t \;&=\; -(\Gamma^r_{tt}\, u^t\, s^t + \Gamma^r_{\phi\phi}\, u^\phi\, s^\phi) \\ &=\; -u^t\left[\frac{M}{R^2}\left(1-\frac{2\,M}{R}\right) s^t - (R-2\,M)\,\Omega\, s^\phi\right] \\ (6)\ \ \rightarrow \;&=\; u^t\,[(R-3M)\Omega\, s^\phi] \\ \therefore\ \ \frac{ds^r}{dt} \;&=\; (R-3M)\Omega\, s^\phi \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds^\phi}{d\tau} = \frac{ds^\phi}{dt}\,u^t \;&=\; -\Gamma^\phi_{r\phi}\, u^\phi\, s^r = -u^t\,\frac{\Omega}{R}\, s^r \\ \therefore\ \ \frac{ds^\phi}{dt} \;&=\; -\frac{\Omega}{R}\, s^r \end{aligned} \tag{8}$$

以上より

$$\frac{d^2}{dt^2}\,s^\phi = -\tilde{\Omega}^2\,s^\phi,\quad \tilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega\sqrt{1-\frac{3M}{R}} \tag{9}$$

$$s^\phi|_{t=0} \equiv s_0^\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s^r(t) \;=\; s_0^r\cos\left(\tilde{\Omega}\,t\right) \\ \qquad\qquad \swarrow \; s^r(t) = (R/\Omega)\,\dfrac{ds^\phi}{dt} \\ s^\phi(t) \;=\; -s_0^r\left(\dfrac{\Omega}{R\,\tilde{\Omega}}\right)\sin\left(\tilde{\Omega}\,t\right) \end{cases} \tag{10}$$

スピンベクトル $\boldsymbol{s}$ の大きさを s_*(=const) とすると(6),(10)より、$s^\phi|_{t=0} \equiv s_0^\phi = 0$ としているので

$$\begin{aligned} s_*^2 = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}|_{t=0} &= g_{rr}\,(s^r|_{t=0})^2 = (1-2M/R)^{-1}\,(s_0^r)^2 \\ \therefore\quad s_0^r &= \sqrt{1-2M/R}\,s_* \end{aligned} \tag{11}$$

したがって再度書き改めると

$$s^\phi|_{t=0} \equiv s_0^\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s^r(t) \;=\; s_*\sqrt{1-\dfrac{2M}{R}}\cos\left(\tilde{\Omega}\,t\right) \\ s^\phi(t) \;=\; -s_*\sqrt{1-\dfrac{2M}{R}}\left(\dfrac{\Omega}{R\,\tilde{\Omega}}\right)\sin\left(\tilde{\Omega}\,t\right) \end{cases} \tag{12}$$

p.286 問題4

観測者の正規直交基底(4)を求めると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{\hat{t}} &= u^t\,(1,0,0,\Omega) = \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{e}_{\hat{r}} &= \sqrt{h}\,(0,1,0,0) \\ \boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} &= (1/R)\,(0,0,1,0) \\ \boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} &= (R^2\,\Omega\,h^{-1},0,0,1) = \frac{\sqrt{h}\,\Omega}{R\,\tilde{\Omega}}\,(R^2\,\Omega\,h^{-1},0,0,1) \end{aligned} \qquad h = h(R) = 1-\frac{2M}{R} \tag{13}$$

$$[(R^2\,\Omega\,h^{-1},0,0,1)]^2 = -\frac{(R^2\,\Omega)^2}{h} + R^2 = \frac{R^2}{h}\,[h-(R\,\Omega)^2] = \frac{R^2}{h}\left(1-\frac{3M}{R}\right) = \frac{(R\,\tilde{\Omega})^2}{h\,\Omega^2} \qquad \leftarrow\ \Omega^2 = \frac{M}{R^3}$$

したがって観測者の局所慣性系におけるスピンベクトルの成分は

$$\begin{aligned} s^{\hat{t}} &= \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \\ s^{\hat{r}} &= \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = h^{-1}\sqrt{h}\,s^r = \frac{1}{\sqrt{h}}\,s^r \\ s^{\hat{\theta}} &= \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\theta}} = 0 \\ s^{\hat{\phi}} &= \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\phi}} = \frac{\sqrt{h}\,\Omega}{R\,\tilde{\Omega}}\,(-R^2\,\Omega\,s^t + R^2\,s^\phi) \stackrel{(6)}{=} \frac{\sqrt{h}\,\Omega}{R\,\tilde{\Omega}}R^2\,[1-h^{-1}(R\,\Omega)^2]\,s^\phi = \frac{\sqrt{h}\,\Omega}{R\,\tilde{\Omega}}\,\frac{(R\,\tilde{\Omega})^2}{h\,\Omega^2}\,s^\phi \\ &= \frac{R\,\tilde{\Omega}}{\sqrt{h}\,\Omega}\,s^\phi \end{aligned} \tag{14}$$

(12)と合わせると、当然ではあるが観測者の系ではスピンは大きさs_* で歳差運動していることが分かる。

$$\begin{cases} s^{\hat{r}} = s_*\cos\left(\tilde{\Omega}\,t\right) \\ s^{\hat{\phi}} = -s_*\sin\left(\tilde{\Omega}\,t\right) \end{cases} \tag{15}$$

歳差の観測

円軌道（参照→(5)）を一周巡って戻ってくるのに、Scwarzchild時間では $t = 2\pi/\Omega$ かかる。(15)より、最初に動径方向を向いていたスピンはこの間に観測者の系では逆回りして、（円軌道を一回りした後）動径方向とは運動方向（ϕ方向）に次の角度だけズレた角度をなして戻ってくる。

$$\Delta\phi_{\rm geodetic} = 2\pi\left(1 - \tilde{\Omega}/\Omega\right) = 2\pi\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3M}{R}}\right) \underset{M/R \ll 1}{\Longrightarrow} 3\pi\frac{M}{R} \tag{16}$$

地球に対してこの値を計算してみよう。

$$\frac{M_\oplus}{R_\oplus} = \frac{0.443 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{6.38 \times 10^6\,\mathrm{m}} = 6.94 \times 10^{-10}, \quad \Delta\phi_{\rm geodetic} \approx 3\pi\frac{M_\oplus}{R_\oplus}\frac{R_\oplus}{R} = \frac{R_\oplus}{R} \times 6.54 \times 10^{-9}\,\mathtt{rad}$$

一年間では、これは次の角度だけ累積する（一年の歳差率）。

$$\begin{aligned} 365 \times 24 \times 60^2 \times \frac{\Omega}{2\pi} \times \Delta\phi_{\rm geodetic}(\mathtt{rad}) \approx 6.08 \times 10^3 \times \Delta\phi_{\rm geodetic}(\mathtt{rad}) &\approx \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^{5/2} \times 6.08 \times 10^3 \times 1.35 \times 10^{-3}\text{秒} \\ &\approx \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^{5/2} \times 8.2'' \end{aligned}$$

$$\Delta\phi_{\rm geodetic} \approx \frac{R_\oplus}{R} \times 6.54 \times 10^{-9}\,\mathrm{rad} = \frac{R_\oplus}{R} \times 6.54 \times 10^{-9} \times \frac{180}{\pi} \times 60^2\text{秒} = 1.35 \times 10^{-3}\text{秒}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{M}{R^3}} = \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^{3/2}\left(\frac{M_\oplus}{R_\oplus}\right)^{1/2}\frac{1}{R_\oplus} = \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^{3/2} \times \frac{(6.94 \times 10^{-10})^{1/2}}{6.38 \times 10^6\,\mathbf{m}} = \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^{3/2} \times 4.04 \times 10^{-12}\mathbf{m}^{-1} = \left(\frac{R_\oplus}{R}\right)^{3/2} \times 1.21 \times 10^{-3}\mathtt{s}^{-1}$$

■ 回転していない天体の動径方向に向かって落下するジャイロスピン$\boldsymbol{s}$

ジャイロスピンの4元速度$\boldsymbol{u} = (u^t, u^r, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds^t}{d\tau} + \Gamma^t_{tr}(s^t u^r + s^r u^t) \\ 0 &= \frac{ds^r}{d\tau} + \Gamma^r_{rr} s^r u^r + \Gamma^r_{tt} s^t u^t \end{aligned}$$

したがって $s^t = s^r = 0$ は整合性を持つ。そこでジャイロスピンは落下方向に対して垂直 $\boldsymbol{s} = (0, 0, s^\theta, s^\phi)$ とする。

$$\begin{aligned} 0 = \frac{ds^\theta}{d\tau} + \Gamma^\theta_{r\theta} s^\theta u^r = \frac{ds^\theta}{d\tau} + \frac{1}{r} s^\theta u^r \quad &\Rightarrow \quad \frac{ds^\theta}{dr} = -\frac{s^\theta}{r} \ \Rightarrow \ s^\theta = \frac{\text{const.}}{r} \\ 0 = \frac{ds^\phi}{d\tau} + \Gamma^\phi_{r\phi} s^\phi u^r = \frac{ds^\phi}{d\tau} + \frac{1}{r} s^\phi u^r \quad &\Rightarrow \quad \frac{ds^\phi}{dr} = -\frac{s^\phi}{r} \ \Rightarrow \ s^\phi = \frac{\text{const.}}{r} \end{aligned}$$

これは Schwarzchild座標において、ジャイロスピンが方向と大きさを一定に保ちながら（$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s} = \text{const.}$）落下するという至極当然と思える結果を示している。正規直交基底の成分をみれば

$$\boldsymbol{s} = (0, 0, s^\theta, s^\phi), \ \ \boldsymbol{u} = (u^t, u^r, 0, 0), \qquad \begin{aligned} s^{\hat\theta} &= \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{e}_{\hat\theta} = \sqrt{g_{\theta\theta}}\, s^\theta = r\, s^\theta = \text{const.} \\ s^{\hat\phi} &= \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{e}_{\hat\phi} = \sqrt{g_{\phi\phi}}\, s^\phi = r\,|\cos\theta|\, s^\theta = \text{const.} \end{aligned}$$

■ ゆっくりと回転する天体に落下するジャイロスピン$\boldsymbol{s}$

Schwarzcild計量に次のような回転効果の摂動が加わる。（c, G を復活させて）計量は

$$(ds)^2 = (ds)^2_{\rm Swd} - 4\,j(r)\sin^2\theta\,(r\,d\phi)\,(c\,dt), \quad j(r) \equiv \frac{G\,J}{c^3\,r^2}$$

ここでJは天体の角運動量。おおよその評価をすると

$J \sim M R^2 \Omega \sim M R V$,（Rは天体の半径、Ωは天体の回転角速度、$V = R\Omega$）

$$\frac{G\,J}{c^3\,R^2} \sim \left(\frac{G\,M}{c^2}/R\right) \times \frac{V}{c}$$

$G = c = 1$ に取った単位系で、**J/r^2（←無次元）項は $1/c^2$ 因子 $(G\,M/c^2\,r)$ に更にもう一段 $1/c$ が掛かった効果となる**ことに注意。

回転軸をz軸に取り、(r,θ,ϕ) の代わりに(x,y,z) 座標をとる。

$$\begin{array}{lll} x=r\sin\theta\cos\phi & & \tan\phi=\dfrac{y}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{d\phi}{\cos^2\phi}=\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]d\phi=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2} \\ y=r\sin\theta\sin\phi & \Rightarrow & \\ z=r\cos\theta & & \therefore\quad (r^2\sin^2\theta)\,d\phi=x\,dy-y\,dx \end{array}$$

$$(ds)^2=(ds)^2_{\rm Swd}-4\,j(r)\,\frac{x\,dy-y\,dx}{r}(c\,dt).\quad g_{xt}=\frac{2\,j(r)\,y}{r},\;\; g_{yt}=-\frac{2\,j(r)\,x}{r} \tag{17}$$

以下では再び $G=c=1$ とする。摂動項からのChristoffel接続への寄与を調べよう。計量にはt依存性が無いことに注意して

$$j(r)=\frac{J}{r^2},\qquad \begin{array}{c|l} g_{xt}\;\Rightarrow & \partial_y\,g_{xt}=\dfrac{2J}{r^3}\left(1-\dfrac{3\,y^2}{r^2}\right),\;\partial_x\,g_{xt}=\dfrac{-6J}{r^5}\,x\,y,\;\partial_z\,g_{xt}=\dfrac{-6J}{r^5}\,y\,z \\ \hline g_{yt}\;\Rightarrow & \partial_x\,g_{yt}=\dfrac{-2J}{r^3}\left(1-\dfrac{3\,x^2}{r^2}\right),\;\partial_y\,g_{yt}=\dfrac{6J}{r^5}\,x\,y,\;\partial_z\,g_{yt}=\dfrac{6J}{r^5}\,x\,z \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{添字}xt\text{を含む：} & \Gamma_{xyt}=(\partial_y\,g_{xt}-\partial_x\,g_{yt})/2=-\Gamma_{yxt} & = & \dfrac{J}{r^5}\,[2\,r^2-3\,(x^2+y^2)\,] \\ & \Gamma_{txy}=(\partial_x\,g_{ty}+\partial_y\,g_{tx})/2 & = & \dfrac{-3J}{r^5}\,(y^2-x^2) \\ & \Gamma_{xzt}=\Gamma_{txz}=\partial_z\,g_{xt}/2=-\Gamma_{zxt} & = & \dfrac{-3J}{r^5}\,y\,z \\ & \Gamma_{txx}=\partial_x\,g_{xt} & = & \dfrac{-6J}{r^5}\,x\,y \\ & \Gamma_{xtx}=(\partial_x\,g_{xt}-\partial_x\,g_{tx})/2 & = & 0 \\ \hline \text{添字}yt\text{を含む：} & \Gamma_{xyt}=(\partial_y\,g_{xt}-\partial_x\,g_{yt})/2=-\Gamma_{yxt} & = & \text{同上} \\ & \Gamma_{txy}=(\partial_x\,g_{ty}+\partial_y\,g_{tx})/2, & = & \text{同上} \\ & \Gamma_{yzt}=\Gamma_{tyz}=\partial_z\,g_{yt}/2=-\Gamma_{zyt} & = & \dfrac{3J}{r^5}\,x\,z \\ & \Gamma_{tyy}=\partial_y\,g_{yt} & = & \dfrac{6J}{r^5}\,x\,y \\ & \Gamma_{yty}=(\partial_y\,g_{yt}-\partial_y\,g_{ty})/2 & = & 0 \end{array} \tag{18}$$

$J\to 0$で0 になる寄与のみを考えよう。

Jが現れるJ/r^2の最低次の近似を考えるとき、摂動項を除いた Schwarzscildt幾何学中の

$$1-h(r)=2M/r\;\;\Rightarrow\;\;\frac{2G\,M}{c^2\,r}$$

の効果は考えなくても良いことになる。したがってこの近似では摂動項を除いた部分は平坦幾何と考えてよい。

質量中心に向かって落下するジャイロスピンの方程式(3)を考えよう。(18)からの寄与をみるとき

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}\approx\eta^{\alpha\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

としてよい。s^t に関しては

$$\frac{ds^t}{d\tau}=-[\Gamma^t_{xy}\,(u^x\,s^y+u^y\,s^x)+\Gamma^t_{xx}\,u^x\,s^x+\Gamma^t_{yy}\,u^x\,s^x]$$

となるが、

$$\boldsymbol{u}=u^t\,(1,v^x,v^y,v^z),\quad v^i=\frac{dx^i}{dt}$$

u^x,u^y は $1/c$ 因子を持つ（$c=1$ では $|v^i|\ll 1$）ので、右辺はJについての最低次では落としてよい。したがってs^tの初期値を0とすれば

$$s^t\approx\text{const.}=0.$$

ジャイロスピンの他の成分については

$$\begin{array}{lll} \dfrac{ds^x}{d\tau} & = & -[\Gamma^x_{yt}\,(u^t\,s^y+u^y\,s^t)+\Gamma^x_{zt}\,(u^t\,s^z+u^z\,s^t)] \\ \dfrac{ds^y}{d\tau} & = & -[\Gamma^y_{xt}\,(u^t\,s^x+u^x\,s^t)+\Gamma^y_{zt}\,(u^t\,s^z+u^z\,s^t)] \\ \dfrac{ds^z}{d\tau} & = & -[\Gamma^z_{xt}\,(u^t\,s^x+u^x\,s^t)+\Gamma^z_{yt}\,(u^t\,s^y+u^y\,s^t)] \end{array}$$

となるが、$s^t \approx 0$ を考慮して(18)を使うと

$$
\begin{aligned}
\frac{ds^x}{dt} &= -\Gamma^x_{yt}\,s^y - \Gamma^x_{zt}\,s^z &=& \frac{J}{r^5}\left\{-[2\,r^2 - 3\,(x^2+y^2)\,]\,s^y + 3\,y\,z\,s^z\right\} \\
\frac{ds^y}{dt} &= -\Gamma^y_{xt}\,s^x - \Gamma^y_{zt}\,s^z &=& \frac{J}{r^5}\left\{[2\,r^2 - 3\,(x^2+y^2)\,]\,s^x - 3\,x\,z\,s^z\right\} \\
\frac{ds^z}{dt} &= -\Gamma^z_{xt}\,s^x - \Gamma^z_{yt}\,s^y &=& \frac{3J}{r^5}\,z\,(-y\,s^x + x\,s^y)
\end{aligned}
$$

上の式の右辺は $\vec{s} = (s^x, s^y, s^z)$ として

$$
\begin{aligned}
\frac{J}{r^5}\,(3\,x\,z, 3y\,z, 3\,z^2 - r^2) \times \vec{s} &= \frac{J}{r^3}\left[\frac{3\,z}{r^2}\,(x,y,z) - (0,0,1)\right] \times \vec{s}\,, \\
&= \frac{1}{r^3}\left[\,3\,(\vec{J}\cdot\vec{n_r}\,)\,\vec{n}_r - \vec{J}\,\right] \times \vec{s}\,, \qquad \vec{n}_r = \frac{1}{r}(x,y,z),\ \ \vec{J} = (0,0,J)
\end{aligned}
$$

と表せる。以上より、次式を得る。

$$
\frac{d}{dt}\,\vec{s} = \frac{1}{r^3}\left[\,3\,(\vec{J}\cdot\vec{n_r}\,)\,\vec{n}_r - \vec{J}\,\right] \times \vec{s} \tag{19}
$$

ジャイロスピンが<u>回転軸上を落下する場合</u>は $x = y = 0,\ \ r = z$ とすればよいので非常に簡単になる。

$$
\frac{d}{dt}\,\vec{s} = \frac{2J}{z^3}\,(0,0,1) \times \vec{s} = \frac{2J}{z^3}\,(-s^y, s^x, 0), \quad \therefore \quad \begin{cases} s^x &= -\dfrac{2J}{z^3}\,s^y \\ s^y &= \dfrac{2J}{z^3}\,s^x \end{cases} \tag{20}
$$

このゆっくりとした天体の回転によるジャイロスピンの歳差運動への効果をLense-Thirring効果と呼ぶ。
この歳差運動の角速度$\Omega_{\rm LT}$は

$$
\Omega_{\rm LT} = \frac{2J}{z^3} \quad \Rightarrow G, c\ 復活 \Rightarrow \quad = \frac{2\,G\,J}{c^2\,z^3} \tag{21}
$$

<u>**地球の自転によるLense-Thirring効果**</u>

地球の自転による角運動量$J_\oplus$を評価する。$J_\oplus$は

$$
J_\oplus = M_\oplus\,\mathfrak{R}_\oplus^2\,\Omega_\oplus = M_\oplus\,R_\oplus^2\,\Omega_\oplus\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R_\oplus}\right)^2
$$

と表すとき $\mathfrak{R}_\oplus / R_\oplus \approx 0.576$ となる値を持つ。これまでの議論を適用するにあたって近似の根拠となる無単位量は

$$
\begin{aligned}
\frac{J_\oplus}{R_\oplus^2} = \frac{M_\oplus}{R_\oplus}\,(R_\oplus \Omega_\oplus)\left(\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{R_\oplus}\right)^2 &\approx \approx \frac{0.443 \times 10^{-2}}{6.38 \times 10^6} \times \frac{2\pi \times 6.38 \times 10^6(\mathrm{m})}{24 \times 60^2 \times 3.0 \times 10^8(\mathrm{m})} \times 0.576^2 \\
&\approx 6.94 \times 10^{-10} \times 1.55 \times 10^{-6} \times 0.576^2 \approx 3.57 \times 10^{-16} \quad \ll 1
\end{aligned}
$$

地球の自転に伴うLense-Thirring効果を評価すると

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\rm LT} &\approx \frac{2J_\oplus}{z^3} = 2\left(\frac{R_\oplus}{z}\right)^3\left(\frac{J_\oplus}{R_\oplus^2}\right) \times \frac{3.0 \times 10^8 \times 365 \times 24 \times 60^2\,(\mathrm{rad} \times \mathrm{m/year})}{R_\oplus\,(\mathrm{m})} \\
&\approx \left(\frac{R_\oplus}{z}\right)^3 \times 1.06 \times 10^{-6}\,(\mathrm{rad/year}) \ \approx\ \left(\frac{R_\oplus}{z}\right)^3 \times 0.22''/\mathrm{year}
\end{aligned} \tag{22}
$$