■ Hawking輻射

$$\frac{dM}{dt} = -\nu \frac{\hbar}{M^2} \qquad \nu \text{ は無次元の定数} \tag{1}$$

$$\int_0^M M^2\, dM = \frac{1}{3} M^3 = -\nu\hbar \int_{t^*}^t dt = \nu\hbar\,(t^* - t)$$

$$\therefore \quad M(t) = [3\nu\hbar\,(t^*-t)]^{1/3} \tag{2}$$

blackholeの温度と質量の関係：blackholeからの輻射は次式で与えられる温度の黒体輻射と同じ

$$k_B T = \frac{\hbar}{8\pi M} \tag{3}$$

黒体の放射発散度I（放射物体の単位表面から単位時間に放出される輻射エネルギー）は Stefan-Boltzmannの法則により

$$I = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B{}^4}{60\, c^2 \hbar^3} \ \text{：Stefan-Boltzmann定数} \tag{4}$$

(1)を事象の地平からの輻射によるエネルギー損失と考えると、（事象の地平の面積は $A = 16\pi M^2$なので）

$$I = \frac{-1}{16\pi M^2} \frac{dM}{dt} = \frac{\nu\hbar}{16\pi M^4} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \frac{\nu\hbar}{16\pi} (8\pi k_B T/\hbar)^4 = \nu \times \frac{4\cdot 8^2 \pi^3}{\hbar^3} (k_B T)^4$$

これを(4)と比較すると（$c=1$としているので）(1)に現れる比例定数の値が一応得られる。

$$\nu = \frac{\hbar^3}{4\cdot 8^2 \pi^3} \frac{\sigma}{k_B{}^4} = \frac{\hbar^3}{4\cdot 8^2\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{60\,\hbar^3} = \frac{1}{15360\,\pi}$$

この値自身はともかくとして、(1), (3)はStefan-Boltzmannの法則と形が整合している。

—

S_Hをblackholeのエントロピーとして、blackholeに対する熱力学の第一法則を考える[1]と

$$dM = T\, d S_H \tag{5}$$

とする。一方、(1), (3)より

$$dM = d\left(\frac{\hbar}{8\pi k_B T}\right) = \frac{-\hbar}{8\pi k_B T^2} dT$$

(5)と合わせると

$$\begin{aligned} dS_H &= \frac{-\hbar}{8\pi k_B T^3} dT = d\left(\frac{\hbar}{16\pi k_B T^2}\right) = d\left[\frac{\hbar k_B}{16\pi}\left(\frac{8\pi M}{\hbar}\right)^2\right] = d\left(\frac{4\pi k_B M^2}{\hbar}\right) \\ &= d\left(\frac{k_B}{4\hbar} A\right) \\ \therefore \quad S_H &= \frac{k_B}{4\hbar} A, \qquad S_H|_{A=0} = 0 \text{ を仮定} \end{aligned} \tag{6}$$

例13.2　blackholeの寿命：Hawking輻射によってblackholeが消滅するとすると(2)よりその寿命 τ_{Hawk} は[2]

$$\tau_{\text{Hawk}} = \frac{M^3}{3\nu\hbar} \quad \Rightarrow G, c \text{ 復活} \Rightarrow \quad \frac{M}{3\nu\hbar}\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 = \frac{1.75\times 10^{-21}}{\nu} \times \left(\frac{M}{1\text{kg}}\right)^3 \text{秒}$$

1. 何故ここで突如として熱力学が出てくるのか？ この章の議論だけではさっぱり分からない。
2. 単位換算： 長さ$/c \to$時間， $[G/c^2] = [M^{-1} L]$， $G/c^2 \times$質量$\to$長さ， $G/c^2 = 7.42\times 10^{-28}$ m/kg,
$[\hbar] = [M L^2 T^{-1}]$， $\hbar = 1.05\times 10^{-34} \text{kgm}^2/s$