■ 測地線方程式（**p.161**）

テスト粒子が時空点x_Aからx_Bに至る運動経路を考えよう。その径路に沿った固有時間 τ_{AB} は

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{AB}} &= \int_0^1 d\sigma\, L(x(\sigma),\dot{x}(\sigma)), \quad x(\sigma=0)=x_A,\ x(\sigma=1)=x_B, \quad \dot{} \equiv \frac{d}{d\sigma} \\ &= \int_0^1 d\sigma\,(-g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta)^{1/2}, \quad L(x(\sigma),\dot{x}(\sigma)) = (\,-g_{\alpha\beta}(x(\sigma))\,\dot{x}^\alpha(\sigma)\,\dot{x}^\beta(\sigma)\,)^{1/2} \end{aligned} \tag{1}$$

τ_{AB} に関して Lagrange方程式を立てる。

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{-1}{L}\,g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{-1}{2\,L}\,\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\,\dot{x}^\beta\,\dot{x}^\gamma \\ \therefore \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L}\,g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta\right) &= \frac{1}{2\,L}\,\partial_\alpha(g_{\beta\gamma})\,\dot{x}^\beta\,\dot{x}^\gamma\end{aligned} \tag{3}$$

$\frac{d\sigma}{d\tau} = L^{-1}$ に注意し、L^{-1}を両辺に掛けると

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\alpha\beta}\,u^\beta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{4}$$

左辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(g_{\alpha\beta}\,u^\beta) &= g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{d\tau} + (\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta})\,u^\beta\,u^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2}(\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma\end{aligned} \tag{5}$$

したがって

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2}(\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma = 0 \tag{6}$$

ここで次の Christoffel記号 を導入する。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2}(\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma}) \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= g^{\alpha\rho}\,\Gamma_{\rho\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\rho}\,(\partial_\gamma\,g_{\rho\beta} + \partial_\beta\,g_{\rho\gamma} - \partial_\rho\,g_{\beta\gamma})\end{aligned}$$

$(\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma})$ は添字に関して次の対称性を持つことに注意。

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$$

Christofffel記号を使うと、(6) は

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}u^\beta\,u^\gamma = 0, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{7}$$

(7)を測地線方程式、(7)（⇔(4)）を満たす経路を（時間的）測地線と呼ぶ。

■ **(4) に対する補足：Killingベクトル**

$\boldsymbol{\xi} = (\xi^\mu)$ をベクトル場として $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{u}$ がテスト粒子の運動における保存量となる場合

$$\frac{d}{d\tau}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{u}) = 0$$

を考え、そのために$\boldsymbol{\xi}$が満たすべき条件を調べよう。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{u}) = \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu) \quad &= \quad \frac{d\xi^\mu}{d\tau} g_{\mu\nu} u^\nu + \xi^\mu \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}u^\nu) \\
\frac{d\xi^\mu}{d\tau} = u^\rho \partial_\rho \xi^\mu \;\; \to \quad &= \quad u^\rho (\partial_\rho \xi^\mu)\, g_{\mu\nu} u^\nu + \xi^\mu \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}u^\nu) \\
(4) \;\; \to \quad &= \quad (\partial_\rho \xi^\mu)\, g_{\mu\nu} u^\rho u^\nu + \frac{1}{2}\xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu})\, u^\rho u^\nu \\
&= \quad \left[(\partial_\rho \xi^\mu)\, g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\right] u^\rho u^\nu \\
&= \quad [(\partial_\rho \xi^\mu)\, g_{\mu\nu} + \xi^\mu \Gamma_{\rho\mu\nu}]\, u^\rho u^\nu \\
&= \quad [g_{\mu\nu}(\partial_\rho \xi^\mu) + g_{\rho\sigma}\xi^\mu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}]\, u^\rho u^\nu \\
&= \quad \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}(\partial_\rho \xi^\mu) + g_{\rho\sigma}\xi^\mu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} + (\rho \leftrightarrow \nu)]\, u^\rho u^\nu \\
&= \quad \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}(\partial_\rho \xi^\mu) + g_{\nu\sigma}\xi^\mu \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}(\partial_\nu \xi^\mu) + g_{\rho\sigma}\xi^\mu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}]\, u^\rho u^\nu \\
&= \quad \frac{1}{2}[g_{\mu\nu}(\partial_\rho \xi^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\xi^\sigma) + g_{\mu\rho}(\partial_\nu \xi^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma}\xi^\sigma)]\, u^\rho u^\nu \\
&= \quad \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\nabla_\rho \xi^\mu + g_{\mu\rho}\nabla_\nu \xi^\mu)\, u^\rho u^\nu \quad = \boldsymbol{u}\cdot[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{\xi}]
\end{aligned}
$$

以上より、測地線の接ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し

$$
g_{\mu\nu}\nabla_\rho \xi^\mu + g_{\mu\rho}\nabla_\nu \xi^\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{u}) = 0 \tag{8}
$$

(8)をKilling方程式、(8)を満たすベクトル場を**Killingベクトル場**と呼ぶ。

(8)の導出過程を振り返ると、(8)の左辺は局所座標で次のようにも表せることが分かる。

$$
g_{\mu\nu}\nabla_\rho \xi^\mu + g_{\mu\rho}\nabla_\nu \xi^\mu = (\partial_\rho \xi^\mu)\, g_{\mu\nu} + (\partial_\nu \xi^\mu)\, g_{\mu\rho} + \xi^\mu (\partial_\mu g_{\rho\nu}) \tag{9}
$$

<u>或る特定の局所座標を取った</u>とき、計量がその中の或る座標変数（仮にx^aとしよう）に対する依存性を持たなかったとする。

$$
\frac{\partial}{\partial x^a}\boldsymbol{g} = 0, \quad \boldsymbol{g} = (g_{\mu\nu})
$$

このとき $\boldsymbol{\xi} = (\xi^\mu),\;\; \xi^\mu = \delta^\mu_a = \begin{cases} 1 & (\mu = a) \\ 0 & (\mu \neq a) \end{cases}$ は (9)より明らかにKilling方程式を満たし、Killingベクトル場を与える。

■ **例8.7**

二次元ユークリッド平面で（敢えて）極座標を取って測地線を考える。

$$(dS)^2 = (dr)^2 + (r\,d\phi)^2 \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$\{\Gamma^\alpha{}_\beta\}$ のうち 0でない成分を書き出すと

$$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r, \quad \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi r} = \frac{1}{r}$$

方程式 (7) より $\dot{} \equiv \frac{d}{dS}$ として次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\phi^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2\,\frac{\dot{r}\,\dot{\phi}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

しかし、上の方程式を扱うよりは(10)から得られる保存則

$$(\dot{r})^2 + \left(r\,\dot{\phi}\right)^2 = 1 \tag{11}$$

と、計量が ϕ に依存しない $(\partial_\phi\, g_{\alpha\beta} = 0)$ことから (4) から得られる保存則

$$r^2\,\dot{\phi} = \ell\,(=\text{const.}) \tag{12}$$

を使う方が易しい。