■ p.243 Box 12.2 （p.258 問題17）

静止質量m の物体がSchwarzchildt半径 Rの位置に静止するのに必要な力を考える。Newtonの第二法則の曲がった時空への拡張は

$$f^\alpha = m\left(\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma\right), \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{1}$$

$\boldsymbol{f} = (f^\alpha)$ は $\boldsymbol{u}(\tau) = (u^\alpha(\tau))$ で与えられる運動を実現するための 4元力と解釈できる。ここで考えるのは静止状態なので

$$\boldsymbol{u} = (u^t, 0, 0, 0), \quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1 \text{ より } u^t = (-g_{tt})^{-1/2} = (1-2M/R)^{-1/2}$$

(1)式に代入し、半径方向の成分についてみると、$du^r/d\tau = 0$ より

$$\begin{aligned} f^r &= m\,\Gamma^r_{tt}\,(u^t)^2 \\ &\qquad \leftarrow \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}\,g^{rr}\,(2\,\partial_t\,g_{rt} - \partial_r\,g_{tt}) = -(g^{rr}\,\partial_r\,g_{tt})/2 = (1-2M/r)\,\frac{M}{r^2} \\ &\qquad\quad g^{rr} = (1-2M/r), \quad g_{tt} = -(1-2M/r) \\ &= \frac{m\,M}{R^2} \end{aligned}$$

となり、引力に抗するのに必要なNewton的な力と同じにみえる。しかし、物体と共にいる観測者からみる力は正規直交基底に関する座標成分（次式の $f^{\hat{r}}$）である。

$$f^\alpha\,\partial_\alpha = f^{\hat{\alpha}}\,\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}, \quad \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} = (\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})^\beta\,\partial_\beta \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}} = ((\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})^0, (\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})^1, (\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})^2, (\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})^3), \quad \boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{\beta}} = g_{\rho\sigma}\,(\boldsymbol{e}_{\hat{\alpha}})^\sigma\,(\boldsymbol{e}_{\hat{\beta}})^\sigma = \eta_{\hat{\alpha}\,\hat{\beta}}$$

$$f^r = f^{\hat{r}}\,(\boldsymbol{e}_{\hat{r}})^r, \quad \boldsymbol{e}_{\hat{r}} = \big(0, (g_{rr})^{-1/2}, 0, 0\big), \quad \therefore \quad f^{\hat{r}} = (g_{rr})^{1/2}\,f^r = \frac{m}{\sqrt{1-2M/R}}\,\frac{M}{R^2}$$

したがって、Rが事象の地平に近づくとき無限に大きくなる。

なお、方程式(1)と$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -1$ からは

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

が得られる。

共変微分を使うと式(1)は

$$\boldsymbol{f} = m\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}$$

$m\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = -m$ に$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)$ を作用させれば直ちに(2)を得る。

式(1)から直接計算すると（$d/d\tau = \dot{}$ と記す）

$$\begin{aligned} 0 = (\boldsymbol{u}\dot{\cdot}\boldsymbol{u}) &= \dot{g}_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta + 2\,g_{\alpha\beta}\,(\dot{u}^\alpha)\,u^\beta \\ &= u^\rho\,(\partial_\rho\,g_{\alpha\beta})\,u^\alpha\,u^\beta + 2\,g_{\alpha\beta}\,(f^\alpha/m - \Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma)\,u^\beta \\ &\qquad \leftarrow 2g_{\alpha\beta}\,\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\,u^\rho\,u^\sigma\,u^\beta = (\partial_\rho\,g_{\beta\sigma} + \partial_\sigma\,g_{\beta\rho} - \partial_\beta\,g_{\rho\sigma})\,u^\rho\,u^\sigma\,u^\beta = u^\sigma\,(\partial_\sigma\,g_{\beta\rho})\,u^\rho\,u^\beta \\ &= 2\,g_{\alpha\beta}\,(f^\alpha/m)\,u^\beta = 2(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u})/m \end{aligned}$$

■ 例12.2 Blackholeに落下する物体から発せられた光の赤方偏移 （p.247）

物体が光を放射しながらBlackholeへ半径方向に落下する場合[1]を考える。落下の軌道をEddinton-Finkelstein座標で

$$(v_E(\tau), r_E(\tau)) \quad \Rightarrow \text{あるいは } r_E \text{をパラメータとして} \Rightarrow \quad (v_E(r_E), r_E), \;\; \tau = \tau_E(r_E), \qquad \text{（添字}E\text{はemitの'E'）}$$

とする。ただし、座標は事象の地平$2M$を単位として測ることにする。$r/2M \to r,\; v/2M \to v$

物体が事象の地平を通過する（$r_E = 1$）とき、$v_E(r_E),\; \tau_E(r_E)$ にはなんの特異性もない。

$$r_E = 1 + a,\; a \ll 1 \quad \Rightarrow \quad v_E(r_E) \approx v_E(1) + v_E'(1)\,a, \quad \tau_E(r_E) \approx \tau_E(1) + \tau_E'(1)\,a \tag{3}$$

1. Hartleのテキストでは崩壊星の表面から放出された光としている。

$r_E \to 1$ での過程が解り易くなるように、落下軌道上に（$r_E - 1$の値が1/2ずつになる）次のような点列を取ってみよう。 $0 < a \ll 1$ を固定して

$$r_{E,0} = 1 + a, \quad r_{E,k} = 1 + a\,2^{-k}, \qquad v_{E,k} = v_E(r_{E,k}) \tag{4}$$

とする。時空点$(v_{E,k}, r_{E,k})$から放出された光の軌道は

$$v - 2\,(r + \log|r-1|) = C_k, \quad C_k = v_{E,k} - 2\,(r_{E,k} + \log|r_{E,k} - 1|) \tag{5}$$

この光を遠方の観測者が受信する。遠方ではShwarzchild座標(t, r)が使え、かつ近似的に平坦なので tを観測者の時間と考えてよい。

$$v = v(t, r) = t + r + \log(r-1)$$

遠方の観測者は、半径 $r_R \gg 1$ （r_R は固定、添字RはResieveの'R'）の地点で(5)の光信号を$(t_{R,k}, r_R)$で受信する。

$$C_k = t_{R,k} - r_R - \log(r_R - 1) \approx t_{R,k} - r_R - \log(r_R), \quad r_R \gg 1 \tag{6}$$

したがって

$$\begin{aligned} v_{E,k} - 2\,(r_{E,k} + \log(r_{E,k} - 1)) &= t_{R,k} - r_R - \log(r_R) \\ \log(r_{E,k} - 1) + r_{E,k} - v_{E,k}/2 &= -[t_{R,k} - r_R - \log(r_R)]/2 \\ \therefore \quad (r_{E,k} - 1)\,e^{r_{E,k} - v_{E,k}/2} &= \sqrt{r_R}\,e^{-(t_{R,k} - r_R)/2} \end{aligned} \tag{7}$$

(4)において $r_{E,0} - 1 = a \ll 1$ としているので、上式の左辺において

$$(r_{E,k} - 1)\,e^{r_{E,k} - v_{E,k}/2} \approx (r_{E,k} - 1)\,e^{1 - v_E(1)/2} = (r_{E,0} - 1)2^{-n}\,e^{1 - v_E(1)/2}$$

として構わない。したがって

$$r_{E,k} - 1 = e^{-t_{R,k}/2} \times \sqrt{r_R}\,e^{[r_R/2 - 1 + v_E(1)/2]}, \quad t_{R,k} = t_{R,0} + n \times 2\log 2 \tag{8}$$

$r_E - 1$ が1/2ずつになっていく過程が、遠方の観測者には等間隔の時間に引き伸ばされる。$t_R \underset{r_E \to 1}{\longrightarrow} \infty$.

式(7)を次のように書き直しておこう。

$$r_E - 1 \approx A_R\,e^{-t_R/2}, \quad \left(A_R \approx \sqrt{r_R}\,e^{[r_R/2 - 1 + v_E(1)/2]}\right) \tag{9}$$

時間間隔の関係としては

$$u^r \Delta\tau_E \approx -\frac{\Delta t_R}{2}\,A_R\,e^{-t_R/2} \qquad u^r = \frac{dr_E}{d\tau}$$

$|u^r|$ は $r_E \approx 1$で有限の値を持つので落下する物体が放つ角振動数 ω_* の光は、遠方の観測者には次式のように波長が無限に引き伸ばされてゆく赤方偏移として観測される。（$2M$を復活させて$t_R \to t_R/2M$とする）

$$\omega_*\,\Delta\tau_E = \omega_R(t_R)\,\Delta t_R, \quad \therefore \quad \omega_R(t_R) \approx \omega_*\,e^{-t_R/4M} \times B_R, \quad B_R = \frac{A_R}{2\,|u^t(r_E = 2M)|} \tag{10}$$

太陽質量程度のBlackholeにおいて(10)式の因子$e^{-t_R/4M}$を考えると、

$$\frac{t_R}{4M} = \frac{t_R}{4M_\odot}\left(\frac{M_\odot}{M}\right) = \frac{3.0 \times 10^8 \mathrm{m/s}}{4 \times 1.48 \times 10^3 \mathrm{m}} \times \left(\frac{M_\odot}{M}\right) t_R = \frac{M_\odot}{M} \times 5.07 \times 10^4/\mathrm{sec} \times t_R$$

したがって、遠方の観測者にとって一瞬（$\sim 10^{-5}$秒）の時間間隔で角振動数がスケールダウンしていく。