問題 5.3 (p. 95)

粒子の静止座標と慣性系との関係から

$$\left.\begin{array}{rcl} 0 &=& \gamma(x-Vt) \\ \tau &=& \gamma(t-Vx) \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \tau=\gamma(1-V^2)t=\gamma^{-1}t, \quad \gamma=\sqrt{1-V^2}$$

問題 5.4 (p. 95)

4元ベクトルと3元ベクトルの関係 ($c=1$とする。)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\gamma\,\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \quad , \quad \gamma=\frac{dt}{d\tau}=1/\sqrt{1-\vec{V}^{\,2}} \\ &= \gamma\,(1,\vec{V}\,) \\ \boldsymbol{a} &= \frac{d}{d\tau}\boldsymbol{u}=\gamma\frac{d}{dt}\{\gamma\,(1,\,\vec{V}\,)\} \\ &= \gamma\,(\frac{d\gamma}{dt})\,(1,\,\vec{V}\,)+\gamma^2(0,\,\vec{a}), \quad \vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{V} \\ & \quad \text{where,} \quad \tfrac{d}{dt}\gamma=-\tfrac{1}{2}\gamma^3\times-2(\vec{a}\cdot\vec{V}\,)=\gamma^3\,(\vec{a}\cdot\vec{V}\,) \\ &= \gamma^2\big(\,\gamma^2(\vec{a}\cdot\vec{V}\,),\,\vec{a}+\gamma^2(\vec{a}\cdot\vec{V}\,)\vec{V}\,\big) \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^3}\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u} &= (\vec{a}\cdot\vec{V}\,)+\gamma^2\,(\vec{a}\cdot\vec{V}\,)\vec{V}^{\,2}-\gamma^2(\vec{a}\cdot\vec{V}\,) \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{V}\,)\,\{1-\gamma^2(1-\vec{V}^{\,2})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

問題 5.6 (p. 95)

ある慣性系で粒子の速度が

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{g\,t}{\sqrt{1+(g\,t)^2}}$$

で与えられるとき、$\left|\frac{dx}{dt}\right|\stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow}1$ であるから速度が光速を越えることはない。

$\gamma=(1-v^2)^{-1/2}=\sqrt{1+(g\,t)^2}$ に注意すると、粒子の四元速度は問題5.4の結果から

$$\boldsymbol{u}=\gamma\,(1,v)=(\sqrt{1+(g\,t)^2},\,g\,t).$$

これは一定の加速度運動の相対論版である。粒子の軌跡に沿った固有時をτとすると

$$\gamma(t)=\frac{dt}{d\tau}=\sqrt{1+(g\,t)^2}, \quad \begin{aligned} \tau(t) &= \int_0^t \frac{d\tau}{dt}\,dt \\ &= \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{1+(g\,t)^2}}=\frac{1}{g}\int_0^{(\sinh^{-1}(gt))}d\theta \\ & \quad g\,t=\sinh\theta, \quad g\,dt=(\cosh\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{g}\sinh^{-1}(g\,t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad t(\tau) &= \frac{1}{g}\sinh(g\tau)\\
x(\tau)-x(0) &= \int_0^\tau \frac{dx}{dt}\gamma(t)\,d\tau = \int_0^\tau (g\,t)\,d\tau\\
&= \frac{1}{g}\int_0^\tau \sinh(g\tau')\,d\tau'\\
&= \frac{1}{g}\cosh(g\tau)\\
\therefore\quad (t,x) &= \frac{1}{g}\left(\sinh(g\tau),\,\cosh(g\tau)+\text{const.}\right)
\end{aligned}
$$

3元加速度(のx成分) $a_x=\frac{d^2x}{dt^2}$を計算すると、

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{g\,t}{\sqrt{1+(g\,t)^2}} = \gamma(t)^{-1}\,g-\gamma(t)^{-3}\,g\,(g\,t)^2\\
&= \gamma(t)^{-1}g\left(1-\frac{(g\,t)^2}{1+(g\,t)^2}\right)\\
&= \gamma(t)^{-3}\,g
\end{aligned}
$$

4元加速度は、4元速度が

$$
\boldsymbol{u}=(\gamma(t),g\,t,0,0)=(\sqrt{1+(g\,t)^2},g\,t,0,0)
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}=\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{u} &= \gamma(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}=\gamma\,(t)\left(\gamma(t)^{-1}g(g\,t),\,g\,,0,0\right),\quad \tfrac{d\gamma}{dt}=\tfrac{d}{dt}\sqrt{1+(g\,t)^2}=\gamma(t)^{-1}g(g\,t)\\
&= \left(g^2\,t,\gamma(t)\,g,0,0\right)=g\left(g\,t,\sqrt{1+(g\,t)^2},0,0\right)
\end{aligned}
$$

問題 5.7 (p. 95)

この問題は実は5.6と同じである。

以下、「4元」はローレンツ共変を意味する。問題自身は一次元運動である。

粒子の速度が0であるような瞬間慣性系での加速度が常に一定値gである時、瞬間慣性系での4元加速度は$\vec{v}'=0$なので、問題5.4の結果を使って

$$
\boldsymbol{a'}=(0,\,g)
$$

これをローレンツ変換により、観測をしている慣性系に変換すると

$$
\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a'}\gamma\begin{pmatrix}1 & v\\ v & 1\end{pmatrix}=(\gamma\,v\,g,\gamma\,g),\quad v=\frac{dx}{dt},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}
$$

一方、問題5.4より 4元加速度は、3元加速度$a=\frac{d}{dt}v=\frac{d^2x}{dt^2}$を使って

$$
\boldsymbol{a}=\gamma^2\left(\gamma^2a\,v,\,a+\gamma^2a\,v^2\right)
$$

従って、(問題5.6に現れた)次式を得る。

$$
g=\gamma^3\,a\,.
$$

これより、速度vについて、次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} a=\frac{dv}{dt} &= g\gamma^{-3} \\ &= g(\sqrt{1-v^2})^3 \end{aligned}$$

これを初期条件$v|_{t=0}=0$で解くと

$$\begin{aligned} gt &= \int_0^v \frac{dv}{(\sqrt{1-v^2})^3} \\ & \qquad v=\tanh\theta,\quad 1-v^2=1-\tanh^2\theta=\frac{1}{\cosh^2\theta},\quad dv=\frac{1}{\cosh^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^\theta \cosh\theta d\theta = \sinh\theta \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} &(gt)^2=\sinh^2\theta=\cosh^2\theta-1=\frac{1}{1-\tanh^2\theta}-1=\frac{1}{1-v^2}-1 \\ &v^2=1-\frac{1}{1+(gt)^2}=\frac{(gt)^2}{1+(gt)^2} \\ &\therefore\quad v=\frac{gt}{\sqrt{1+(gt)^2}} \end{aligned}$$

これは問題5.6で与えられた式であった。

問題 5.8 (p. 95)

○ Scheme による計算

$$\vec{V}=V(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4},0)=c(1/2,1/2,0),\quad V=\frac{c}{\sqrt{2}},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}=\sqrt{2}\,.$$

従って $\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{c}\gamma$ より、4元速度および4元運動量は

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\frac{\gamma}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\frac{\gamma}{c}(1,\vec{V})=(\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0),\quad \boldsymbol{p}=(mc^2)\boldsymbol{u}\,.$$

π^0中間子の静止質量135MeVは、上の計算より、kgに直すとおよそ2.4×10^{-28}kgということになる。因みに電子の静止質量は0.511MeVである。

問題 5.9 (p. 95)

○ Scheme による計算

40GeVのエネルギーを持つ電子の速度の大きさをv、線形加速器の長さをL、電子の静止系から見た長さをL_*とする。

$\beta=v/c,\ \gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$ とすると $L_*=L/\gamma$.

$$mc^2\gamma=E,\quad \therefore\quad L_*=\frac{1}{\gamma}L=\frac{mc^2}{E}L$$

上の計算では$L\approx3$kmとするとおよそL_*は僅か 4cm 程度ということになる。ちなみに上では $\beta=\sqrt{1-(\frac{mc^2}{E})^2}$ の値も計算している。

問題 5.12 (p. 95)

電子が電場から一定の力$\vec{F}=e\,\vec{E}$を受け加速される。力の方向をx軸に取れば問題は一次元的である。電子が最初、原点で停止しているとして位置を時間で表そう。(光速 $c=1$)

$$\frac{dp(t)}{dt}=F\,,\quad p=m\,\gamma(t)\,v(t)=\frac{m\,v(t)}{\sqrt{1-v(t)^2}},\quad v(0)=0.$$

$$d\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)=(F/m)\,dt,\quad v(0)=0 \qquad \Longrightarrow\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}=(F/m)\,t\,,$$
$$v^2=(a\,t)^2\,(1-v^2),\quad a=F/m$$
$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{a\,t}{\sqrt{1+(a\,t)^2}}=\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\sqrt{1+(a\,t)^2}$$

$$\therefore\quad x(t)=\frac{1}{a}(\,\sqrt{1+(a\,t)^2}-1),\quad x(0)=0.$$

光速 c を復活させると$1/a$ は長さの単位を持つので $1/a\Rightarrow(m\,c^2)/F$.

$$x(t)=\frac{m\,c^2}{F}\left(\sqrt{1+(\frac{F\,t}{m\,c})^2}\,-\,1\right)\quad \underset{|Ft|\ll mc}{\approx}\quad \frac{1}{2}(F/m)\,t^2$$

非相対論的な状況 $|F\,t|\ll m\,c$ では普通の力学での等加速度の式が得られる。

電子のエネルギーは上の結果の$v(t)$の式から

$$m\gamma=\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{(a\,t)^2}{1+(a\,t)^2}}}\,=\,m\,\sqrt{1+(a\,t)^2}\quad(\quad=m\,\{a\,x(t)+1\}\quad).$$

加速距離Lの後、エネルギーEを得るとすると、(光速cを復活させて)

$$E=m\,c^2\left(\frac{F}{m\,c^2}\,L+1\right)=F\,L+m\,c^2=e|\vec{E}\,|\,L+m\,c^2.$$

エネルギーは 「静止エネルギー」 + 「なされた仕事」 に他ならない。3kmで40GeVのエネルギーを得るには(電子の場合 $m\,c^2=0.5$MeV($\ll 40$GeV) 程度なので)、電場の強さは

$$|\vec{E}\,|\approx\frac{40\times10^9}{3\times10^3}\,\mathrm{Volt/m}\approx1.3\times10^7(\mathrm{Newton/coulomb})\,.$$

問題 5.13 (p. 96)

89p.のボックス記事の(a)式：衝突の前後における運動量の保存

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_\gamma+\boldsymbol{p}_p=\boldsymbol{p}_n+\boldsymbol{p}_\pi\\ \Longrightarrow\quad&2\,(\boldsymbol{p}_\gamma\cdot\boldsymbol{p}_p)-m_p^2=2\,(\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{p}_\pi)-(m_n^2+m_\pi^2)\leqslant-\,(m_n+m_\pi)^2\\ \Longrightarrow\quad&m_p^2-2\,(\boldsymbol{p}_\gamma\cdot\boldsymbol{p}_p)\,\geqslant\,(m_n+m_\pi)^2\,.\end{aligned}\tag{1}$$

ここで問題2の内容：任意の時間的4元ベクトルに対し

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,=\,-\,a\,b\cosh\theta\leqslant-\,a\,b,\quad a\overset{\mathrm{def}}{=}\sqrt{-\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\;,\;b\overset{\mathrm{def}}{=}\sqrt{-\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}\,.$$

を使った。ボックス記事では同じ不等式

$$(\boldsymbol{p}_n+\boldsymbol{p}_\pi)^2\leqslant-\,(m_n+m_\pi)^2$$

を重心系で考えることで簡単に論証している。

(1)の最後の式を陽子の静止系$\boldsymbol{p}_p=(E_p,\vec{p}_p)=(m_p,0)$で考え、$m_p\approx m_n$を使うと

$$2E_\gamma m_p \gtrsim 2m_n m_\pi + m_\pi^2 \quad\Longrightarrow\quad E_\gamma \gtrsim (m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m_p}).$$

このエネルギーは現在の加速器で実現可能だと思う。

問題 5.14 (p. 96)

観測される宇宙線のエネルギーで最も大きな値は10^{20}eVのオーダーである。eVをJourに直すと

$$10^{20}\mathrm{eV} \simeq 10^{20}\times 1.6\times 10^{-19} = 16\,\mathrm{Jour}\,.$$

高さ1mに持ち上げたm(kg)の重量の岩が持つ位置エネルギーは、重力加速度 $g\simeq 9.8\mathrm{m/s^2}$ を使って

$$1\,m\,g \simeq 9.8\times m\,(\mathrm{Jour}).$$

ほぼ同程度のエネルギーである。一つの素粒子がこれだけのエネルギーを持つのである。