人工衛星の高度、速度、周期

G (G)：重力定数

R_e (R_e)：地球半径，M_e (M_e)：地球質量

$V_{\rm sur}$ (V_sur)： 地球の自転による地表面の水平方向の速度

以下、基本的にMKS単位系

地球中心から半径Rで円軌道を廻る人工衛星の軌道方向の速度をvとすると

$$\frac{G\,M_e}{R^2} = \frac{v^2}{R}. \qquad \therefore\ v = \sqrt{\frac{G\,M_e}{R}}.$$

(v h)： 地上 h m上の軌道上にある人工衛星の軌道方向の速度．$v = \sqrt{(G\,M_e)/(h+R_e)}$.

(omega h)： 地上 h m上の軌道上にある人工衛星の軌道方向の角速度．$\omega = v/(h+R_e)$.

(T_hour h)： 地上 h m上の軌道上にある人工衛星の周期(単位：時間)．$T = (2\,\pi)/\omega$.

(height T_hour)： 周期 T_hour時間で廻る人工衛星の地表からの高度(m)

$$\begin{aligned} T/(2\,\pi) &= 1/\omega = (h+R_e)/v = \frac{(h+R_e)^{3/2}}{\sqrt{G\,M_e}} \\ \therefore\quad h &= \left(\frac{G\,M_e\,T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_e \end{aligned}$$

```
Scheme] (define PI (* 4.0 (atan 1.0)))
Scheme] (define c-ray 299792458)
Scheme] (define (square x) (* x x))
Scheme] (define G 6.67e-11)
Scheme] (define R_e 6378e3)
Scheme] (define M_e 5.97e24)
Scheme] (define (v h) (sqrt (/ (* G M_e) (+ R_e h))))
Scheme] (v 200e3)
  7780.42190597432
Scheme] (define V_sur (/ (* 2 PI R_e) (* 24 3600)))
Scheme] V_sur
  463.821248717493
Scheme] (define (omega h) (/ (v h) (+ R_e h)))
Scheme] (omega 200e3)  ;; in the case h = 200km
  0.0011827944521092
Scheme] (define (T_hour h) (/ (* 2 PI) (omega h) 3600))
Scheme] (T_hour 200e3)
  1.47559810487951
Scheme] (define (height T_hour) (- (expt (/ (* G M_e (square (* T_hour 3600)))
          4.0 PI PI) (/ 1. 3.)) R_e))
Scheme] (height 1.4756)  ;; consistency check
  200005.632111655
Scheme] (height 12)
  20223286.5014914
```

```
Scheme] (define v_s (v (height 12)))
Scheme] (+ (height 12) R_e)
```

```
26601286.5014914
```

```
Scheme] (define gamma (let ((w (- v_s V_sur))) (/ 1 (sqrt (- 1 (square (/ w c-
        ray))))))) ;;; gamma
Scheme] (define beta (let ((w (- v_s V_sur))) (/ w c-ray)))
Scheme] (list gamma beta)
```

```
(1.00000000006451 1.13584546566337e-5)
```

```
Scheme] (- v_s V_sur)
```

```
3405.17904059375
```

p.64 記述に見られるように、上の計算から周期12時間で廻る人工衛星の速度はおよそ4 km/sec, 地球中心から半径およそ2.7×10^4kmの軌道を廻っていることがわかる。

慣性系K'は慣性系Kに対してx方向に速度Vで移動しているとする。

$$
\begin{aligned}
&K:(x,t)\longleftrightarrow K':(x',t'), \qquad \left\{\begin{array}{ll} x' & =\gamma(x-\beta c t) \\ c t' & =\gamma(c t-\beta x)\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{ll} x & =\gamma(x'+\beta c t') \\ c t & =\gamma(c t'+\beta x')\end{array}\right. \\
&\text{ただし}\quad \beta = V/c, \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

周期12時間で巡る24機の人工衛星間の距離をL_*、地表からの軌道の高度をh_sとする。

計算から　$h_s \approx 2\times 10^4\,\mathrm{km},\ L(\approx L_*)\approx 7\times 10^3\,\mathrm{km}$ ほどとなる。

```
Scheme] (define h_s (height 12))
Scheme] (define L_* (/ (* 2 PI (+ h_s R_e)) 24))
Scheme] (define L (* gamma L_*))
Scheme] (list h_s L)
```

```
(20223286.5014914 6964200.52120948)
```

```
Scheme]
```

地表と人工衛星の静止系をそれぞれ慣性系と見なし、それぞれK系、K'系とする。人工衛星に積まれた時計は人工衛星の静止系で同期化されているとする。

地上の人が上空にある隣り合う人工衛星から同時刻の発信信号を受ける。二つの信号の発信と信号受信の事象をEvent1, 2, 3とする。これらの情報から座標値を次のように設定できる。

$$
\begin{array}{l} \text{Event 1:} \\ \text{Event 2:} \\ \text{Event 3:} \end{array}
\quad K'\text{系}\left\{\begin{array}{l} (0, -L_*/2, h_s) \\ (0, +L_*/2, h_s) \\ (t_3', 0, 0) \end{array}\right.
\longleftrightarrow \quad
K\text{系}\left\{\begin{array}{l} (t_1, -L/2, h_s) \\ (t_2, +L/2, h_s) \\ (t_3, x, 0) \end{array}\right.
$$

$$
0 = c(t_2-t_1)-\beta L, \quad L=\gamma L_* \qquad \Rightarrow \quad c\,\Delta t = \gamma\beta L_*, \quad \Delta t = t_2 - t_1
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} c\,(t_3-t_2)=\sqrt{(x-L/2)^2+h_s^2} \\ c\,(t_3-t_1)=\sqrt{(x+L/2)^2+h_s^2}\end{array}\right.
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
c\Delta t = \beta L &= \sqrt{(x+L/2)^2+h_s^2}-\sqrt{(x-L/2)^2+h_s^2} \\
&\approx \frac{L\,x}{\sqrt{L^2/4+h_s^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+(2h_s/L)^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad x \approx (\beta L/2)\sqrt{1+(2h_s/L)^2}
$$

```
Scheme] (define delta_t (/ (* beta L) c-ray))
Scheme] delta_t ;;; t_2 - t_1
```

```
   2.6385772466585e-7
Scheme] (define x (* beta (/ L 2) (sqrt (+ 1 (square (/ (* 2 h_s) L))))))
Scheme] x
   233.085436056406
Scheme] (define (fsub a b c) (sqrt (+ (square (+ a (/ b 2))) (square c))))
Scheme] (/ (- (fsub x L h_s) (faux x (- L) h_s)) c-ray)  ;;; check
   2.63857724645484e-7
Scheme]
```

以上の計算から分かるように、地上での受信位置は二つの人工衛星の真中ではなくて、真中から、先に進む衛星寄りに230mほど進んだ地点である。

地上での計算より、Event3を衛星の静止系で考えて、それを地上の系へ座標変換した方が簡単だったようだ。

$$\begin{aligned} c\,t'_3 &= \sqrt{(L_*/2)^2 + h_s^2}, \\ x &= \gamma\,(0 + \beta\,c\,t'_3) = \gamma\,\beta\,\sqrt{(L_*/2)^2 + h_s^2} \\ &= (\beta L/2)\,\sqrt{1 + (2\gamma\,h_s/L)^2}\,. \end{aligned}$$

この結果が正しいことは次のように確認できる。

双曲線についての補足事項

x, y に関する次の方程式を考えよう。

$$\sqrt{(a/2+x)^2+y^2} - \sqrt{(a/2-x)^2+y^2} = d, \quad a \geqslant d > 0$$

$a \geqslant d > 0$ より $x > 0$. 上の式を変形して双曲線の標準形にすることができる。

$$\begin{aligned} & d^2 + 2\,d\,\sqrt{(a/2-x)^2+y^2} - a\,x = a\,x \\ & (d^2 - 2a\,x)^2/(2\,d)^2 = (a/2-x)^2 + y^2 \\ & d^2/4 - a\,x + (a/d)^2 x^2 = a^2/4 - a\,x + x^2 + y^2 \\ & \{(a/d)^2 - 1\}x^2 - y^2 = (a^2 - d^2)/4 \\ & \left(\frac{x}{d/2}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{a^2-d^2}/2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

人工衛星の計算例に上の計算をを当てはめてみよう。

$a = L,\ d = \beta L,\ y = h_s$ より

$$a^2 - d^2 = (1-\beta^2)L^2 = (L/\gamma)^2 = L_*^2\,, \quad (a/d)^2 - 1 = 1/(\beta\gamma)^2\,.$$

上の計算過程より

$$\beta L = \sqrt{(x+L/2)^2 + h_s^2} - \sqrt{(x-L/2)^2+h_s^2} \quad \Rightarrow \quad x = \gamma\,\beta\,\sqrt{(L_*/2)^2 + h_s^2}$$

が分かる。

時計の遅れの導出(再訪)

K'系の固有時計に関する二つのイベント

$$\begin{aligned} &\text{Event1:}\ \ K'\!: (0, t'_1) \longleftrightarrow K\!: (x_1, t_1) \\ &\text{Event2:}\ \ K'\!: (0, t'_2) \longleftrightarrow K\!: (x_2, t_2) \end{aligned}$$

において二つの慣性系での時間間隔$\Delta t' = t'_1 - t'_2$と $\Delta t = t_1 - t_2$を比較する。

$\Delta x' = 0$より$\Delta x = \beta\,c\Delta t$. これより $c\,\Delta t' = \gamma(c\,\Delta t - \beta\,\Delta x) = c\,\gamma\,(1-\beta^2)\Delta t = \frac{c}{\gamma}\Delta t$.

$$\therefore \quad \Delta t' = \frac{1}{\gamma}\Delta t, \qquad \frac{\Delta t' - \Delta t}{\Delta t} = 1 - \frac{1}{\gamma}\,.$$