■ **p.286 問題1**

測地線方程式とスピン4元ベクトル$\boldsymbol{s}$に対するジャイロ方程式は $\boldsymbol{u}=(\dot{x}^\alpha),\quad \dot{} = \frac{d}{d\tau}$ として

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} &= 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{u}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,u^\beta\,u^\gamma = 0\\
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{s} &= 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{s}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,u^\beta\,s^\gamma = 0
\end{aligned}
$$

ジャイロスピンは測地線に沿って平行移動していく。

これより、共変微分に関するLeibniz則を使えば以下は明らか。

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s})=0,\quad (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u})=0$$

敢えて例えば $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u})$ を直接、座標成分を使って計算してみると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\,(s^\alpha\,u_\alpha) &= \dot{s}^\alpha\,u_\alpha + s^\alpha\,\dot{(g_{\alpha\beta}\,u^\beta)}\\
&= -u_\alpha\,\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,u^\beta\,s^\gamma + s^\alpha\left[u^\gamma\,(\partial_\gamma g_{\alpha\beta})\,u^\beta - g_{\alpha\beta}\,\Gamma^\beta{}_{\rho\gamma}\,u^\rho\,u^\gamma\right]\\
&= s^\alpha\,u^\beta\,u^\gamma\,(-g_{\beta\rho}\,\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\rho}\,\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma})\\
&= -s^\alpha\,u^\beta\,u^\gamma\,(\Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})\\
2\,\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma} = 2\,\partial_{[\alpha}\,g_{\beta]\gamma} + \partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} \quad \rightarrow \quad &= 0
\end{aligned}
$$