

■ Hawking放射

blackholeがHawking放射によって質量を失う時間的割合は次式となる¹。この式の導出はここでは問わないこととし、認めることにする。

$$\frac{dM}{dt} = -\alpha \frac{\hbar}{M^2} \quad \alpha \text{ は無次元の定数} \quad (1)$$

$$\int_0^M M^2 dM = \frac{1}{3} M^3 = -\alpha \hbar \int_{t^*}^t dt = \alpha \hbar (t^* - t) \\ \therefore M(t) = [3\alpha \hbar (t^* - t)]^{1/3} \quad (2)$$

blackholeの温度と質量の関係：blackholeからの放射は次式で与えられる温度の黒体放射と同じ

$$k_B T = \frac{\hbar}{8\pi M} \quad (3)$$

黒体の放射発散度 I （放射物体の単位表面から単位時間に放出される放射エネルギー）は Stefan-Boltzmannの法則により

$$I = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3} : \text{Stefan-Boltzmann定数} \quad (4)$$

(1)を事象の地平からの放射によるエネルギー損失と考えると、（事象の地平の面積は $A = 16\pi M^2$ なので）

$$I = \frac{-1}{16\pi M^2} \frac{dM}{dt} = \frac{\alpha \hbar}{16\pi M^4} \xrightarrow{(3)} \frac{\alpha \hbar}{16\pi} (8\pi k_B T / \hbar)^4 = \alpha \times \frac{4 \cdot 8^2 \pi^3}{\hbar^3} (k_B T)^4$$

これを(4)と比較すると（ $c=1$ としているので）(1)に現れる比例定数の値が一応得られる。

$$\alpha = \frac{\hbar^3}{4 \cdot 8^2 \pi^3} \frac{\sigma}{k_B^4} = \frac{\hbar^3}{4 \cdot 8^2 \pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{60 \hbar^3} = \frac{1}{15360 \pi}$$

この値自身はともかくとして、(1), (3)はStefan-Boltzmannの法則と形が整合している。

S_H をblackholeのエントロピーとして、blackholeに対する熱力学の第一法則を考える²と

$$dM = T dS_H \quad (5)$$

とする。一方、(1), (3)より

$$dM = d\left(\frac{\hbar}{8\pi k_B T}\right) = \frac{-\hbar}{8\pi k_B T^2} dT$$

(5)と合わせると

$$dS_H = \frac{-\hbar}{8\pi k_B T^3} dT = d\left(\frac{\hbar}{16\pi k_B T^2}\right) = d\left[\frac{\hbar k_B}{16\pi} \left(\frac{8\pi M}{\hbar}\right)^2\right] = d\left(\frac{4\pi k_B M^2}{\hbar}\right) \\ = d\left(\frac{k_B}{4\hbar} A\right) \\ \therefore S_H = \frac{k_B}{4\hbar} A, \quad S_H|_{A=0}=0 \text{ を仮定} \quad (6)$$

例13.2 blackholeの寿命：Hawking放射によってblackholeが消滅するとすると(2)よりその寿命 τ_{Hawk} は³

$$\tau_{\text{Hawk}} = \frac{M^3}{3\alpha \hbar} \Rightarrow G, c \text{ 復活} \Rightarrow \frac{M}{3\alpha \hbar} \left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 = \frac{1.75 \times 10^{-21}}{\alpha} \times \left(\frac{M}{1\text{kg}}\right)^3 \text{ 秒} = 8.4 \times 10^{-17} \times \left(\frac{M}{1\text{kg}}\right)^3 \text{ 秒}$$

1. テキストでは (1)の定数に文字 ν が使われているが、 ν は振動数を連想させるので α に変更した。

2. 何故ここで突如として熱力学が出てくるのか？ この章の議論だけではさっぱり分らない。

3. 単位換算：長さ $/c \rightarrow$ 時間, $[G/c^2] = [M^{-1} L]$, $G/c^2 \times$ 質量 \rightarrow 長さ, $G/c^2 = 7.42 \times 10^{-28} \text{ m/kg}$, $[\hbar] = [M L^2 T^{-1}]$, $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$