□ p.199 問題

問題3

半径方向に遠ざかる陽子の運動量は、Schwarzschild座標系で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m\,\boldsymbol{u} = m\left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, 0, 0\right) = (p^t, p^r, 0, 0) \\ m^2 = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} &= g_{tt}\,(p^t)^2 - g_{rr}\,(p^r)^2 \end{aligned}$$

Schwarzschild幾何学の半径Rの地点にとどまる観測者が測定する陽子のエネルギーEと運動量$\vec{P}$は、観測者の正規直交基底を使って

$$\begin{aligned} E &= -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{t}} = -\boldsymbol{p}\cdot\left((-g_{tt})^{-1/2}, 0, 0, 0\right) \\ &= -g_{tt}\,(p^t)\,(-g_{tt})^{-1/2} = (-g_{tt})^{1/2}\,(p^t) \\ \vec{P} &= (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{r}})\,\boldsymbol{e}_{\hat{r}} \\ &= \boldsymbol{p}\cdot\left(0, (g_{rr})^{-1/2}, 0, 0\right)\boldsymbol{e}_{\hat{r}} = (g_{rr})^{1/2}\,(p^r)\,\boldsymbol{e}_{\hat{r}}, \quad \left|\vec{P}\right| = (g_{rr})^{1/2}\,(p^r) \end{aligned}$$

したがって

$$m^2 = g_{tt}\,(p^t)^2 - g_{rr}\,(p^r)^2 = E^2 - \left|\vec{P}\right|^2, \quad i.e. \quad E^2 = m^2 + \left|\vec{P}\right|^2$$

また

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \left((-g_{tt})^{-1/2}\,E, (g_{rr})^{-1/2}\left|\vec{P}\right|, 0, 0\right) \\ &= \left(\frac{E}{\sqrt{1-2\,M/R}},\ \left|\vec{P}\right|\,\sqrt{1-2\,M/R},\ 0,\ 0\right) \end{aligned}$$

問題6

無限遠でエネルギー 0、半径方向に落下するので $e=1,\ \ell=0$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{M}{r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2\,M}{r}}$$

落下する観測者の時計の刻みは固有時間に等しいので、半径R_1の地点からR_2の地点$(R_1 > R_2)$に至るまでの観測者の測る時間は

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\tau}{dr}\,dr &= \frac{1}{\sqrt{2\,M}}\int_{R_2}^{R_1} \sqrt{r}\,dr = \frac{2}{3\,\sqrt{2\,M}}\left[r^{3/2}\right]_{R_2}^{R_1} \\ &= \frac{2}{3\,\sqrt{2\,M}}\left(R_2^{3/2} - R_1^{3/2}\right) \end{aligned}$$

題意の$R_1 = 6M,\ R_2 = 2M$ の場合

$$\frac{2}{3\,\sqrt{2}}\left(\sqrt{6^3} - \sqrt{8}\right)M = \frac{4\left(\sqrt{27}-1\right)}{3}\,M \approx 5.595\,M$$

仮にMが太陽程度の質量とするとこれは、2.76×10^{-5}(秒)

問題7

Schwarzschild半径Rの地点に静止している観測者が目の前を半径方向に通り過ぎる粒子の速度を観測するとき、観測する粒子の速さを考える。粒子の4元速度は $\boldsymbol{u} = (u^t, u^r, 0, 0) = (dt/d\tau, dr/d\tau, 0, 0)$

半径方向に落下する粒子なので $\ell = 0$ 、<u>観測者の位置では、</u>（ $h(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r}$ として ）

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{h(R)}, \quad u^r = \frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2M}{R}}$$

観測者が観測する粒子の速さは観測者の正規直交基底を使って（問題3と同様に）

$$\begin{aligned} \left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{r}}}{-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_{\hat{t}}}\right| &= \frac{(g_{rr})^{1/2}\,|u^r|}{(-g_{tt})^{1/2}\,|u^t|} = \frac{1}{h(R)}\left|\frac{u^r}{u^t}\right| \\ &= \frac{1}{e}\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2M}{R}} < 1, \quad \leftarrow \ 2M < R \end{aligned}$$

題意にあるように $R = 6M$ において、$e = 2$と$e = 1$ の速度を比べると

$$\frac{\sqrt{3+1/3}}{2}\Big/\sqrt{1/3} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.58 \text{ (倍)}$$