■ 9.3 p.179～：束縛軌道

$e,\ \ell$ を保存量として

$$
\begin{aligned}
e &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} && (1)\\
\ell &= r^2\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{d\tau} \quad\Rightarrow\quad \ell = r^2\frac{d\phi}{d\tau},\ \ \theta=\pi/2 && (2)\\
\frac{e^2-1}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right] && (3)
\end{aligned}
$$

単位質量当たりのエネルギー e は静止エネルギーの寄与を含むのでNewton力学のエネルギー$\mathcal{E}$と比較するためには

$$
e = 1+\mathcal{E},\quad \frac{e^2-1}{2}=\frac{(1+\mathcal{E})^2-1}{2}\approx\mathcal{E},\ \ \mathcal{E}\ll 1
$$

とする必要がある。Newton力学の場合と比較すべき有効ポテンシャルは

$$
V_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right]=-\frac{M}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{M\ell^2}{r^3} \tag{4}
$$

こうすると、Newton力学の場合の

$$
\mathcal{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+V_{\text{eff}}(r)
$$

と照応する。

さて、以下ではMを用いて r,ℓ を無次元量で書き直し、面倒なので無次元化したr,ℓに同じ記号を使う。

$$
r/M\to r,\quad \ell/M\to\ell,\quad \frac{d\phi}{d\tau}=\frac{\ell}{r^2}\to\frac{\ell}{Mr^2},\quad e\to e
$$

$$
V_{\text{eff}}(r)\to\quad V_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right]=-\frac{1}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{\ell^2}{r^3}
$$

$V_{\text{eff}}(r)$の極値

$$
\begin{aligned}
V'_{\text{eff}}(r) &= \frac{1}{r^2}-\frac{\ell^2}{r^3}+\frac{3\ell^2}{r^4}\\
&= \frac{1}{r^4}(r^2-\ell^2 r+3\ell^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{r^4}(r-r_+)(r-r_-), \quad 0<r_-<r_+ & ,\ \text{for}\ \ \ell^2\geq 12\\ >0 & ,\ \text{for}\ \ \ell^2<12\end{cases} && (5)
\end{aligned}
$$

$$
V'_{\text{eff}}(r_\pm)=0 \quad\Rightarrow\quad r_\pm=\frac{1}{2}\ell^2\left(1\pm\sqrt{1-12/\ell^2}\right),\quad V''_{\text{eff}}(r_\pm)\gtrless 0 \tag{6}
$$

[memo]

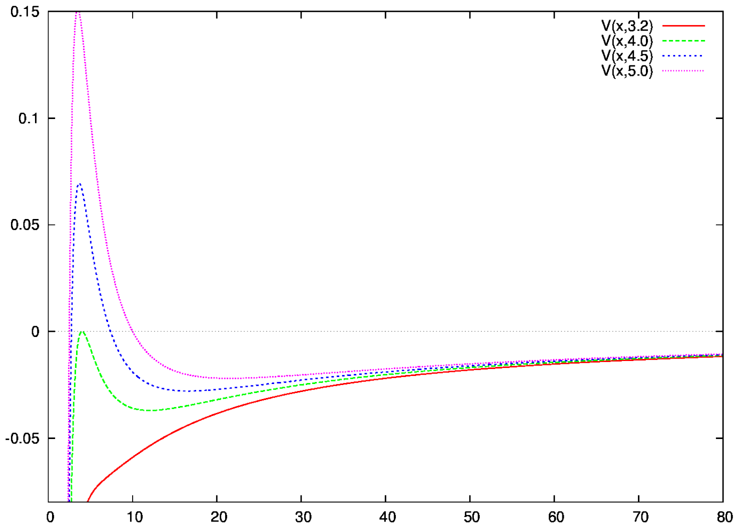
$$
\begin{aligned}
r_+ = \frac{1}{2}\ell^2\left(1+\sqrt{1-12/\ell^2}\right) &= \frac{\ell^2+\ell\sqrt{\ell^2-12}}{2} \quad \ell\geq\sqrt{12}\ \text{において単調増加}\\
r_- = \frac{1}{2}\ell^2\left(1-\sqrt{1-12/\ell^2}\right) &= \frac{\ell^2-\ell\sqrt{\ell^2-12}}{2}=\frac{\ell}{2}\left(\ell-\sqrt{\ell^2-12}\right)\\
&= \frac{6\lambda}{\ell+\sqrt{\ell^2-12}}=\frac{6}{1+\sqrt{1-12/\ell^2}} \quad \ell\ \text{について単調減少}
\end{aligned}
$$

ℓ	$\sqrt{12}$		4		∞
$r_+=\dfrac{\ell^2+\ell\sqrt{\ell^2-12}}{2}$	6	$\nearrow$	12	$\nearrow$	∞
$r_-=\dfrac{6}{1+\sqrt{1-12/\ell^2}}$	6	$\searrow$	4	$\searrow$	3

$\therefore\ \ 3\leq\ r_-\ \leq 6\ \leq\ r_+$

$V_{\text{eff}}(r)$ は$r=r_-$ で極大、 $r=r_+$ で極小となる。ℓを変化させると

$$
3<r_-\leq 6\leq r_+,\quad \ell\geq\sqrt{12} \tag{7}
$$



有効ポテンシャル：$V(r,l) = -1/r + \ell^2/r^2 - \ell^2/r^3$

■ 安定円軌道

式(7)より $6 \le r$ なる r について安定円軌道をとることができる。

そのためには eの値がちょうどV_{eff}の極小値の値に対応している必要がある。

$$\frac{e^2-1}{2} = V_{\mathrm{eff}}(r), \quad V'_{\mathrm{eff}}(r) = 0$$

そのためには、式(5)と式(3) より

$$\begin{aligned} V'_{\mathrm{eff}}(r) = 0 \;\Rightarrow\; \ell^2 &= \frac{r^2}{r-3} \\ \frac{e^2-1}{2} = V_{\mathrm{eff}}(r) \;\Rightarrow\; e^2 &= \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right) \overset{\text{上式}}{\Longrightarrow} \text{右辺} = \left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{1}{r-3}\right) = \frac{(r-2)^2}{r(r-3)} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\therefore \quad \frac{\ell}{e} = \frac{\sqrt{r^3}}{r-2} = \frac{\sqrt{r}}{1-2/r} \tag{9}$$

でなければならない。円軌道の半径rからその円軌道を実現するe,ℓの値も決まる。このとき

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\ell}{Mr^2} = \frac{1}{Mr\sqrt{r-3}}, \quad (\text{以下の式の}r,\ell\text{は無次元量であることに注意}) \\ \frac{dt}{d\tau} &= e/\left(1-\frac{2}{r}\right) = \sqrt{\frac{r}{r-3}} \\ \Omega \overset{\text{def}}{=} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{d\tau}\Big/\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{M}\left(\frac{\ell}{e}\right)\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2}{r}\right) = \frac{1}{M\sqrt{r^3}} \end{aligned} \tag{10}$$

Mを復活させて$r \to r/M$の置き換えをすると

$$\Omega^2 = \frac{M}{r^3}$$

ただし、”角速度” Ω はシュワツシルト座標時間 tに関するものである。

シュワツシルト座標時間 tは無限遠で固有時間と等しくなるので、$2\pi/\Omega$ は無限遠方にいる観測者がこの円運動を見たときの周期となる。

固有時間に対する角度変化 $\tilde{\Omega} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\phi}{d\tau}$を考えると、式(2),(8)より

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^2 = \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 &= \frac{\ell^2}{r^4} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{Mr^2}{r-3M}\right) \\ &= \frac{M}{r^2(r-3M)} \end{aligned}$$

■ 束縛軌道の形

軌道の形を知るためにはϕをrの関数として求める必要がある。再びMで無次元化した r, ℓ を使って

式(3)より

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= (e^2-1)-2\,V_{\rm eff}(r)\\ &= e^2-\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)\\ &= e^2-1+\frac{1}{r}-\frac{\ell^2}{2\,r^2}+\frac{\ell^2}{r^3}\\ &= \frac{1}{r^3}\left[(e^2-1)\,r^3+r^2-\frac{\ell^2}{2}\,r+\ell^2\right]\end{aligned}$$

式(2),(3)より

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\ell}{r^2}\\ \frac{dr}{d\tau} &= \pm\sqrt{e^2-\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)}=\pm\sqrt{(e^2-1)-2\,V_{\rm eff}(r)}\\ \frac{d\phi}{dr}=\frac{d\phi}{d\tau}\Big/\frac{dr}{d\tau} &= \pm\frac{\ell}{r^2}\left[e^2-\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)\right]^{-1/2}\end{aligned}$$

式(8)より$V_{\rm eff}(r)$の極値は、$r=r_\pm$ において

$$2\,V_{\rm eff}(r_\pm) = \frac{(r_\pm-2\,)^2}{r_\pm\,(r_\pm-3\,)}-1=\frac{-(r_\pm-4\,)}{r_\pm\,(r_\pm-3)}$$

束縛軌道となるためには $V_{\rm eff}(r)\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$ であることを考慮すると

$$\min\,(0,2\,V_{\rm eff}(r_-))>e^2-1>2\,V_{\rm eff}(r_+),\quad \ell\geq\sqrt{12}$$

軌道半径の転回点 $r_1, r_2,\ (r_1\leq r_2)$ は軌道上で $\frac{dr}{d\tau}=0$ となる場所であり、

$$e^2-1-V_{\rm eff}(r_i)=0,\ (i=1,2),\qquad r_1\leq r\leq r_2\ \Rightarrow\ (e^2-1)-2\,V_{\rm eff}(r)\geq 0$$

より定まる。

転回点からその転回点に戻るまでの ϕ の変化 $\Delta\phi$ は、転回点 r_1 から r_2 までの移動の間のϕの変化の2倍なので

$$\Delta\phi = 2\,\ell\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}\frac{1}{\sqrt{e^2-\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)}} \tag{11}$$

となる。

■ **Newton理論からの補正：近日点の移動**

Newton理論からの逸脱を近似的に考えるために、式(3)を、定数G, cを復活させて通常の単位系に戻して書いてみる。($\tau\to c\,\tau$ にも注意)

式(3)		置き換え後	
e	$\to$	$\frac{c^2+e_N}{c^2}$,	e_N：運動物体の質量当たりのエネルギー
$\frac{e^2-1}{2}$	$\to$	$\frac{e_N}{c^2}\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)$	
M	$\to$	$G\,M/c^2$	
ℓ	$\to$	ℓ/c,	ℓ：運動物体の質量当たりの角運動量　　$\ell=r^2\frac{d\phi}{d\tau}\overset{\tau\to c\tau}{\longrightarrow}\frac{r^2}{c}\frac{d\phi}{d\tau}=\frac{\ell}{c}$
$V_{\rm eff}(r)$	$\to$	$\frac{1}{c^2}\left(-\frac{G\,M}{r}+\frac{\ell^2}{2\,r^2}-\frac{G\,M\,\ell^2}{c^2\,r^3}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2\,G\,M}{c^2r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{c^2\,r^2}\right)-1\right]$	

結局、式(3)は

$$e_N\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\left(-\frac{GM}{r}+\frac{\ell^2}{2\,r^2}-\frac{GM\ell^2}{c^2\,r^3}\right)$$

ここで、Newton理論において物体が束縛軌道上を運動する場合には、物体の軌道方向の速度をvとしておおよそ

$$\frac{\ell}{c}\approx r\,\frac{v}{c},\quad \frac{GM}{r^2}\approx\frac{v^2}{r}\quad\therefore\ \frac{GM}{r}\approx\frac{\ell^2}{r^2}$$

であることから、$V_{\mathrm{eff}}(r)$ の第一と第二項は同程度なのに対して、第三項は

$$\text{第三項}\ \approx\ \text{第一項}\times\frac{\ell^2}{c^2\,r^2}\ \approx\ \text{第一項}\times\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

となっており、相対論的補正を与えるものであることが分かる。

式(11)をNewton理論からの補正として計算しよう。

補正項がよく分かるように c は残して $G\to 1,\ r/M\to r,\ \ell/M\to\ell$ とする。式(11)は

$$\begin{aligned}\Delta\phi\ &=\ 2\left(\frac{\ell}{c}\right)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2}{c^2r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{c^2r^2}\right)}} \qquad (12)\\ &=\ 2\left(\frac{\ell}{c}\right)\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)}},\quad u=\frac{1}{r},\ du=\frac{-dr}{r^2}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)}\ &=\ \sqrt{1-\frac{2\,u}{c^2}}\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)^{-1}-\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)}\\ \left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)^{-1/2}\ &=\ 1+\frac{u}{c^2}+\mathcal{O}(1/c^4)\\ \left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)^{-1}-\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)\ &=\ \left[1+\frac{2\,e_N}{c^2}+\left(\frac{e_N}{c^2}\right)^2\right]\left[1+\frac{2\,u}{c^2}+\left(\frac{2\,u}{c^2}\right)^2+(\text{higher order terms})\right]-\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)\\ &=\ \frac{1}{c^2}\left\{2\,e_N+2\,u-\ell^2u^2+\frac{1}{c^2}[\,(e_N)^2+4\,e_N u+4\,u^2]+\mathcal{O}(1/c^4)\right\}\\ &=\ \frac{1}{c^2}[\alpha+\beta\,u-\gamma^2u^2+\mathcal{O}(1/c^4)],\quad \alpha=e_N\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right),\ \beta=2\left(1+2\,\frac{e_N}{c^2}\right),\ \gamma^2=\ell^2-\frac{4}{c^2}\\ &=\ \frac{1}{c^2}[\gamma^2(u_1-u)\,(u-u_2)+\mathcal{O}(1/c^4)]\\ \gamma^{-1}\ &=\ \left(\ell^2-\frac{4}{c^2}\right)^{-1/2}\\ &=\ \frac{1}{\ell}\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^4)\right)\end{aligned}$$

上の式変形は、平方の中が$1/c^2$の一次項まで含めて u の二次式に収まるようになっていて巧妙である。

したがって式(12)において、被積分関数は

$$\begin{aligned}\frac{\ell/c}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)}}\ &=\ \frac{(\ell/c)\,[1+u/c^2+\mathcal{O}(1/c^4)]}{(\gamma/c)\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)+\mathcal{O}(1/c^4)}}\\ &=\ \frac{[1+2/(c^2\,\ell^2)]\,(1+u/c^2)}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\mathcal{O}(1/c^4)\\ &=\ \left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\frac{1}{c^2}\frac{u}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\mathcal{O}(1/c^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ \Delta\phi\ &=\ 2\int_{u_2}^{u_1}\frac{(\ell/c)\,du}{\sqrt{\left(1+\frac{e_N}{c^2}\right)^2-\left(1-\frac{2\,u}{c^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2u^2}{c^2}\right)}}\\ &=\ 2\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\frac{2}{c^2}\int_{u_2}^{u_1}\frac{u\,du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}}+\mathcal{O}(1/c^4)\end{aligned}$$

積分の計算をしよう。

$$
\begin{array}{lll}
z = \sqrt{\dfrac{u_1-u}{u-u_2}}, & (u-u_2)\,z^2 = u_1-u & \\
 & (1+z^2)\,u = u_1+u_2\,z^2 & \\
 & u = \dfrac{u_1+u_2\,z^2}{1+z^2} & \begin{array}{c|ccc} u & u_2 & \to & u_1 \\ \hline z & \infty & \to & 0 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlrcl}
\hline
\dfrac{dz}{du} = & \dfrac{1}{2\,z}\cdot\dfrac{-(u-u_2)-(u_1-u)}{(u-u_2)^2}, & u-u_2 = \dfrac{u_1-u_2}{1+z^2} & & \\
= & \dfrac{-(u_1-u_2)}{2\,z\,(u-u_2)^2} & \sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)} & = & z\,(u-u_2) \\
= & \dfrac{-(1+z^2)^2}{2\,z\,(u_1-u_2)} & & = & \dfrac{(u_1-u_2)\,z}{1+z^2} \\
du = & -2\,(u_1-u_2)\,\dfrac{z}{(1+z^2)^2}\,dz & \therefore\ \dfrac{du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}} & = & -2\,\dfrac{dz}{1+z^2} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}} &= 2\int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2} = 2\Big[\arctan z\Big]_0^{\infty} \\
&= \pi \\
\int_{u_2}^{u_1}\frac{u\,du}{\sqrt{(u_1-u)\,(u-u_2)}} &= 2\int_0^{\infty}\frac{u_1+u_2\,z^2}{(1+z^2)^2}\,dz \\
&\qquad \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty}\frac{dz}{1+z^2} = \left[\frac{z}{1+z^2}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{2\,z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\int_0^{\infty}\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\,dz \\
&\qquad \int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+z^2}-\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right]dz = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}\,(u_1+u_2)
\end{aligned}
$$

解と係数の関係から

$$
u_1+u_2 = \frac{\beta}{\gamma^2} = \frac{2\,(1+2\,e_N/c^2)}{\ell^2-4/c^2} = \frac{2}{\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^2)
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi &= 2\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)\times\pi + \frac{2}{c^2}\times\frac{\pi}{2}\,(u_1+u_2)+\mathcal{O}(1/c^4) \\
&= 2\,\pi\left(1+\frac{2}{c^2\,\ell^2}\right)+\frac{2\,\pi}{c^2\,\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^4) \\
&= 2\,\pi+\frac{6\pi}{c^2\,\ell^2}+\mathcal{O}(1/c^4)
\end{aligned}
$$

G, M を復活させると $\ell \to \ell/M \to \ell/(G\,M)$ であるので

$$
\Delta\phi = 2\,\pi + 6\,\pi\left(\frac{G\,M}{c^2}\right)^2\left(\frac{c}{\ell}\right)^2 + \text{higer order terms}
$$

第一項の $2\,\pi$ はNewton力学では一回転して軌道が閉じることを意味する。
近日点（=内側の転回点）から公転によって次に近日点に至るとき、完全には同じ位置ではなく

$$
\delta\phi_{\text{prec}} = \Delta\phi - 2\,\pi
$$

だけ移動することになる。
水星の軌道に関して数値的に見てみると

$$
\begin{aligned}
\frac{G\,M_{\text{sun}}}{c^2} &= 1.48\times 10^3\,(\text{m}) \\
\frac{\ell_{\text{mercury}}}{c} &= 9.05\times 10^6(\text{m}) \\
\delta\phi_{\text{prec}} &= 6\,\pi\left(\frac{G\,M_{\text{sun}}}{c^2}\right)^2\left(\frac{c}{\ell_{\text{mercury}}}\right)^2 = 2\,\pi\times 7.99\times 10^{-8}(/1\text{公転})
\end{aligned}
$$

また水星の公転周期より

$$
T_{\text{merc}} = 0.241(\text{year}),\quad 415.0(\text{公転}/\text{century}),\ \Longrightarrow\quad \delta\phi_{\text{prec}} \approx 43.0(\text{秒}/\text{century})
$$