■ **Kerr計量**

質量M、角運動量Jを持つKerr計量は次の通り。（Boyer-Lindquist座標での計量　$c=G=1$単位）

$$s^2 = -\left(1-\frac{2\,M\,r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4\,M\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2\,M\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{1}$$

$$a = \frac{J}{M}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta = r^2 - 2\,M\,r + a^2 \end{cases} \tag{2}$$

Mを単位として $s/M\to s,\ a/M\to a,\ r/M\to r,\ t/M\to t$ とし、s, t, r, a を無単位の量として書くと

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{3}$$

$$\begin{cases} \rho(r,\theta)^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta(r) = r^2 - 2\,r + a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_{tt} = -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right) \quad g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad g_{\phi\phi} = \left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \\ g_{t\phi} = -\frac{2\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2} \quad g_{\theta\theta} = \rho^2 \end{cases} \tag{4}$$

ゆっくり回転する場合の近似における漸近的振る舞いを調べる。$r \gg 1 \gg a$ として

$$\begin{aligned} r/\rho^2 &= \frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta} = \frac{1}{r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)} \\ &\approx \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3}\cos^2\theta + \cdots \\ \frac{\rho^2}{\Delta} &= \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2\,r+a^2} = \frac{1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}{1-\frac{1}{r}\left(2-\frac{a^2}{r}\right)} = \left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)\left(1+\frac{2}{r}-\frac{a^2}{r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2+\cdots\right) \\ &\approx 1 + \frac{2}{r} + \frac{1}{r^2}\,(2 - a^2\sin^2\theta) + \cdots \end{aligned}$$

$a^2,\ 1/r^2$ 補正の項を落とすと

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2}{r}\right)dr^2 + r^2\,d\theta^2 + + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2) - \frac{4\,a\sin^2\theta}{r}\,d\phi\,dt \tag{5}$$

最後の項が前章で取り上げられた「ゆっくりした回転」の効果。
単位に関して先ず長さ(m)の単位を復活させ、次に時間と質量(sec, kg)を復活させると、最後の項は

$$\begin{aligned} & ds^2 = \cdots - \frac{4\,a\sin^2\theta}{r}\,d\phi\,dt \\ r\to r/M,\ a\to a/M,\ t\to t/M,\ s\to s/M \ \Rightarrow\ & ds^2 = \cdots - M^2\times\frac{4\,(a/M)\sin^2\theta}{r/M}\,d\phi\,(dt/M) \\ & \quad = \cdots - \frac{4\,M\,a\sin^2\theta}{r}\,d\phi\,dt \\ t\to c\,t,\ M\to G\,M/c^2,\ a = J/M\to J/(c\,M) \ \Rightarrow\ & \quad = \cdots - \frac{4\,G\,J}{c^3\,r^2}\sin^2\theta\,(r\,d\phi)\,(c\,dt) \end{aligned}$$

となる。これは前章でSchwarzschild計量に加えた項に等しい。

■ **$\Delta = 0$ は見かけの座標特異点であること（p.304 問題3）**

以下Mを単位とした表記(3)で進める。

計量は $r=0,\ \theta=\pi/2$ において$\rho(r,\theta)=0$ となり特異的になる。また計量は $\Delta=0$ において特異的に見える。

$$\Delta(r) = r^2 - 2\,r + a^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad r = r_{\pm} \overset{\text{def}}{=} 1 \pm \sqrt{1-a^2},\ \ a \le 1$$

$r=r_+$ はヌル三次元曲面を形成し、事象の地平であることが以下で分かる。$r=r_+$ での特異性は見かけ上である。$a>1$ のときは地平が形成されず、 $r=0,\ \theta=\pi/2$ の特異点は地平に隠されず露わになる。

また、計量の g_{tt} 成分をみると（$\rightarrow$(4)）$r=r_+$曲面を外側で囲む曲面内において符号が代わり、<u>tが時間的でなくなっている</u>ことが分かる。

$$-g_{tt}\gtreqless 0 \ \Leftrightarrow\ \rho^2-2\,r=r^2-2\,r+a^2\cos^2\theta\gtreqless 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} r<1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta} \quad \text{or} \quad 1+\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}<r \\[1ex] 1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}< \ r \ <1+\sqrt{1-a^2\cos^2\theta} \end{cases}$$
$$1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}\le\ r_-,\quad r_+\ \le\ 1+\sqrt{1-a^2\cos^2\theta} \tag{6}$$

$\Delta=0$ の特異性が座標系依存であることをみるために次のような座標変換を行う。

$$(t,r,\phi)\rightarrow(v(t,r),r,\psi(r,\phi)),\quad \begin{cases} dt=dv-\dfrac{r^2+a^2}{\Delta}\,dr \\ d\phi=d\psi-\dfrac{a}{\Delta}\,dr \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} t=v-\displaystyle\int^r\frac{r^2+a^2}{(r-r_-)\,(r-r_+)}\,dr \\ \phi=\psi-a\displaystyle\int^r\frac{dr}{(r-r_-)\,(r-r_+)} \end{cases} \tag{7}$$

$f(\boldsymbol{x})$を時空間上の関数とするとき

$$\begin{array}{rcl} \tilde f(v,r,\psi,\theta) & = & \tilde f(v(t,r),r,\psi(r,\phi),\theta) \\ & \overset{\text{def}}{=} & f(t,r,\phi,\theta) \end{array},\quad \begin{cases} \partial_t f \ = \ (\partial_t v)\,\partial_v\tilde f \\ \partial_r f \ = \ \partial_r\tilde f+(\partial_r v)\,\partial_v\tilde f+(\partial_r\psi)\,\partial_\psi\tilde f \\ \partial_\phi f \ = \ (\partial_\phi\psi)\,\partial_\psi\tilde f \end{cases} \tag{8}$$

$a=0$ のとき(7)は Eddington-Finkelstein座標に一致する。

$$a=0 \ \Rightarrow\ r_+=2,\ r_-=0,\quad \therefore\quad \begin{array}{rcl} t & = & v-\displaystyle\int^r\frac{r\,dr}{r-2}\,, \\ & = & v-r-2\log|r-2|+\text{const.} \\ \phi & = & \psi \end{array}$$

これらを計量の式(3)に代入すると

$$\begin{aligned} ds^2 \ &= \ -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dt^2-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt+\frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2+\rho^2\,d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \\ &= \ -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)\left(dv-\frac{r^2+a^2}{\Delta}\,dr\right)^2-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\left(d\psi-\frac{a}{\Delta}\,dr\right)\left(dv-\frac{r^2+a^2}{\Delta}\,dr\right) \\ &\qquad +\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\left(d\psi-\frac{a}{\Delta}\,dr\right)^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2+\rho^2\,d\theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dr^2\text{ 項} \ &= \ \frac{-1}{\rho^2}\,(\rho^2-2\,r)\left[\frac{(r^2+a^2)}{\Delta}\right]^2-\frac{4\,a^2\,r(r^2+a^2)\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta^2}+\frac{a^2\,[\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta^2}+\frac{\rho^2}{\Delta} \\ &= \ \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\,[-(\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2)-4\,a^2\,r\sin^2\theta+a^2\,\rho^2\sin^2\theta]+2\,a^4\,r\sin^4\theta+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \ \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\left[\ -(\rho^2-2\,r)\,\underbrace{(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta)}_{=\rho^2}-2\,a^2\,r\sin^2\theta\ \right]+2\,a^4\,r\sin^4\theta+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \ \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\,[-(\rho^2-2\,r)\,\rho^2-2\,a^2\,r\sin^2\theta]+2\,a^4\,r\sin^4\theta+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \ \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{-(r^2+a^2)\,(\rho^2-2\,r)\,\rho^2+2\,a^2\,r\sin^2\theta\,\underbrace{[-(r^2+a^2)+a^2\sin^2\theta]}_{=-\rho^2}+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \ \frac{1}{\Delta^2}\left\{-\underbrace{[(r^2+a^2)\,(\rho^2-2\,r)+2\,a^2\,r\sin^2\theta]}_{=\rho^2\Delta}+\rho^2\,\Delta\right\} \end{aligned}$$

$$\downarrow\qquad \begin{array}{rcl} (r^2+a^2)\,(\rho^2-2\,r)+2\,a^2\,r\sin^2\theta & = & (\rho^2+a^2\sin^2\theta)\,(\Delta-a^2\sin^2\theta)+2\,a^2\,r\sin^2\theta \\ & = & \rho^2\,\Delta+(\Delta-\rho^2)\,a^2\sin^2\theta-a^4\sin^4\theta+2\,a^2\,r\sin^2\theta \\ & = & \rho^2\,\Delta+(-2\,r+a^2\sin^2\theta)\,a^2\sin^2\theta-a^4\sin^4\theta+2\,a^2\,r\sin^2\theta \\ & = & \rho^2\,\Delta \end{array} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 \\[1em]
dv\,dr\ \text{項} &= 2\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)\frac{r^2+a^2}{\Delta}+\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{a}{\Delta} \\
&= \frac{2}{\rho^2\,\Delta}\left[\,(\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2)+2\,a^2\,r\sin^2\theta\,\right] \\
(9)\ \rightarrow\quad &= 2 \\[1em]
dr\,d\psi\ \text{項} &= \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{r^2+a^2}{\Delta}-2\,\frac{a}{\Delta}\cdot\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \\
&= \frac{2\,a\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta}\left[2\,r\,(r^2+a^2)-\rho^2\,(r^2+a^2)-2\,r\,a^2\sin^2\theta\right] \\
&= -\frac{2\,a\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta}\left[(\rho^2-2\,r\,)(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta\right] \\
(9)\ \rightarrow\quad &= -2\,a\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$dv^2,\ dv\,d\psi,\ d\psi^2,\ d\theta^2$ については特に計算は必要ない。以上より

$$
\begin{aligned}
ds^2 \;=\; &-\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dv^2+2\,dv\,dr-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,dv\,d\psi-2\,a\sin^2\theta\,dr\,d\psi \\
&+\rho^2\,d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\psi^2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

最後の係数に現れる因子は次のようにも表せる

$$
\begin{aligned}
r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2} &= \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta\,\right] \\
(9)\ \rightarrow\quad &= \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,\Delta+2\,r\,(\Delta+2\,r)\right] \\
&= \Delta\cdot\left(1+\frac{2\,r}{\rho^2}\right)+\frac{4\,r^2}{\rho^2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

となって、$r=r_\pm$ における特異性は消失する。

■ 拡張Eddington-Finkelstein座標における計量

$$
(g_{\alpha\beta})=
\begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} v & r & \psi & \theta \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
g_{vv} & 1 & g_{v\psi} & \\
1 & 0 & g_{r\psi} & \\
g_{v\psi} & g_{r\psi} & g_{\psi\psi} & \\
 & & & g_{\theta\theta}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} v \\ r \\ \psi \\ \theta \end{array}
\end{array}
$$

(v,r,ψ) に関する部分を取り出し、計算上、表記を簡単にするために次のように記す。

$$
\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} v & r & \psi \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
g_{vv} & 1 & g_{v\psi} \\
1 & 0 & g_{r\psi} \\
g_{v\psi} & g_{r\psi} & g_{\psi\psi}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} v \\ r \\ \psi \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} v & r & \psi \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
\alpha & 1 & \beta \\
1 & 0 & \gamma \\
\beta & \gamma & \delta
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} v \\ r \\ \psi \end{array}
\end{array}
$$

ここで

$$
\left\{
\begin{aligned}
g_{vv} = \quad \alpha \quad &= -(\rho^2-2\,r)/\rho^2 \\
g_{v\psi} = \quad \beta \quad &= -2\,a\,r\sin^2\theta/\rho^2 \\
g_{r\psi} = \quad \gamma \quad &= -a\sin^2\theta \\
g_{\psi\psi} = \quad \delta \quad &= [\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta/\rho^2
\end{aligned}
\right.
\quad \overset{r=r_+\text{上}}{\Longrightarrow} \quad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha \quad &= a^2\sin^2\theta/\rho_+^2 \\
\beta \quad &= -2\,a\,r_+\sin^2\theta/\rho_+^2 \\
\gamma \quad &= -a\sin^2\theta \\
\delta \quad &= 4\,r_+^2\sin^2\theta/\rho_+^2
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left.\begin{pmatrix}
g_{vv} & 1 & g_{v\psi} \\
1 & 0 & g_{r\psi} \\
g_{v\psi} & g_{r\psi} & g_{\psi\psi}
\end{pmatrix}\right|_{r=r_+}
=\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}
\begin{pmatrix}
a^2 & 1 & -2\,a\,r_+ \\
1 & 0 & -a\,\rho_+^2 \\
-2\,a\,r_+ & -a\,\rho_+^2 & 4\,r_+^2
\end{pmatrix}
\tag{12}
$$

計量の逆行列を計算しよう。先ず

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} &= 2\beta\gamma-(\delta+\alpha\gamma^2) \\
&= \frac{4a^2 r\sin^4\theta}{\rho^2}-\left\{\frac{1}{\rho^2}[\rho^2(r^2+a^2)+2a^2 r\sin^2\theta]\sin^2\theta-\frac{(\rho^2-2r)}{\rho^2}a^2\sin^4\theta\right\} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left\{4a^2\cancel{r}\sin^2\theta-\left[\rho^2\underbrace{(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta)}_{=\rho^2}+4a^2\cancel{r}\sin^2\theta\right]\right\} \\
&= -\rho^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{-\rho^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}
\end{pmatrix} \\
\rightarrow \quad &= \frac{1}{-\rho^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -\gamma^2 & \beta\gamma-\delta & \gamma \\ \beta\gamma-\delta & \alpha\delta-\beta^2 & \beta-\alpha\gamma \\ \gamma & \beta-\alpha\gamma & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\beta\gamma-\delta &= \frac{2a^2\cancel{r}\sin^4\theta}{\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2(r^2+a^2)+2a^2\cancel{r}\sin^2\theta\right]\sin^2\theta \\
&\quad -(r^2+a^2)\sin^2\theta \\
\beta-\alpha\gamma &= =\frac{-2a\cancel{r}\sin^2\theta}{\rho^2}-\frac{(\rho^2-\cancel{2r})a\sin^2\theta}{\rho^2} \\
&= -a\sin^2\theta \\
\alpha\delta-\beta^2 &= -\frac{\sin^2\theta}{\rho^4}\{(\rho^2-2r)[\rho^2(r^2+a^2)+2a^2r\sin^2\theta]+(2ar)^2\sin^2\theta\} \\
&= -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(\rho^2-2r)(r^2+a^2)+2a^2r\sin^2\theta] \\
\downarrow \quad & \quad (\rho^2-2r)(r^2+a^2)+2a^2r\sin^2\theta \quad \begin{aligned} &=\rho^2(r^2+a^2)-2r(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta) \\ &=\rho^2(r^2+a^2)-2r\rho^2 \\ &=\rho^2(r^2+a^2-2r) \\ &=\rho^2\Delta \end{aligned} \\
&= -\Delta\cdot\sin^2\theta
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g^{vv} & g^{vr} & g^{v\psi} \\ g^{vr} & g^{rr} & g^{r\psi} \\ g^{v\psi} & g^{r\psi} & g^{\psi\psi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \beta \\ 1 & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-\rho^2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -\gamma^2 & \beta\gamma-\delta & \gamma \\ \beta\gamma-\delta & \alpha\delta-\beta^2 & \beta-a\gamma \\ \gamma & \beta-a\gamma & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta & r^2+a^2 & a \\ r^2+a^2 & \Delta & a \\ a & a & -1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (13)
\end{aligned}$$

$r=r_+$ 上では

$$\left.\begin{pmatrix} g^{vv} & g^{vr} & g^{v\psi} \\ g^{vr} & g^{rr} & g^{r\psi} \\ g^{v\psi} & g^{r\psi} & g^{\psi\psi} \end{pmatrix}\right|_{r=r_+} = \frac{1}{\rho_+^2}\begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta & 2r_+ & a \\ 2r_+ & 0 & a \\ a & a & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (14)$$

■ $\boldsymbol{r = r_+}$：回転ブラックホールの地平

テキストでは三次元曲面 $r = r_+$ 上の解析を計量(3)をそのまま使って行っているが、(3)は $r = r_+$ において特異的なので、座標系(v, r, θ, ψ) とその上の計量(10)で行うべきであろう。

ただし、この面上 $dr = 0$ においては座標変換(7)において $dt = dv,\ d\phi = d\psi$ なので、そこでの議論に誤りはないようだ。

$r = r_+$ 上の接ベクトルを

$$\boldsymbol{t} \;=\; (\overset{v}{t^v}, \overset{r}{0}, \overset{\theta}{t^\theta}, \overset{\psi}{t^\psi})$$

とする。この曲面がヌル曲面であることを示すために、ヌル接ベクトル $\boldsymbol{\ell}$ が存在するかを調べる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\ell} &= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}\,\ell^\alpha\,\ell^\beta \\
&= g_{vv}\,(\ell^v)^2 + 2\,g_{v\psi}\,\ell^v\,\ell^\psi + g_{\psi\psi}\,(\ell^\psi)^2 + g_{\theta\theta}\,(\ell^\theta)^2 \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,[\,a^2\,(\ell^v)^2 - 4\,a\,r_+\,\ell^v\,\ell^\psi + 4\,r_+^2\,(\ell^\psi)^2\,] + \rho_+^2\,(\ell^\theta)^2 \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,(a\,\ell^v - 2\,r_+\,\ell^\psi)^2 + \rho_+^2\,(\ell^\theta)^2
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\ell} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ell^\psi = \frac{a}{2\,r_+}\,\ell^v,\ \ \ell^\theta = 0, \qquad \boldsymbol{\ell} \;=\; \ell^v\ \ (\overset{v}{1}, \overset{r}{0}, \overset{\theta}{0}, \overset{\psi}{a/(2\,r_+)}) \tag{16}$$

となる。

$r = r_+$ 上の時空点$\boldsymbol{x}$から光が$\boldsymbol{\ell}$方向に少しだけ進んだとするとき、Boyer-Lindquist座標では

$$\begin{aligned}
t(\boldsymbol{x}) \;\to\; t(\boldsymbol{x} + \varepsilon\,\boldsymbol{\ell}) &= t(v + \epsilon\,\ell^v, r) = t(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^v\,(\partial_v\,t) \\
&= t(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^v \\
\phi(\boldsymbol{x}) \;\to\; \phi(\boldsymbol{x} + \varepsilon\,\boldsymbol{\ell}) &= \phi(r, \psi + \epsilon\,\ell^\psi) = \phi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^\psi\,(\partial_\psi\,\phi) \\
&= \phi(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\,\ell^\psi
\end{aligned}\quad ,\quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\ell^\psi}{\ell^v} = \frac{a}{2\,r} \tag{17}$$

光は角速度 $a/(2\,r)$ で座標に対し「回転」している、と言えるがしかし(6)でも見たように$r = r_+$ 上では t方向は空間的であることに注意したい。

$r = r_+$ 上では次の二つの接ベクトルが $\boldsymbol{\ell}$ に直交することが分かる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}\cdot(0,0,1,0) &= \sum_\alpha g_{\alpha\theta}\,\ell^\alpha = g_{\theta\theta}\,\ell^\theta = 0 \\
\boldsymbol{\ell}\cdot(0,0,0,1) &= \sum_\alpha g_{\alpha\psi}\,\ell^\alpha \\
&= g_{v\psi}\,\ell^v + g_{\psi\psi}\,\ell^\psi \\
&= \frac{2\,r_+\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,(-a\,\ell^v + 2\,r_+\,\ell^\psi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\ell}$ はヌル曲面 $r = r_+$ を形成する光線の方向を指す。

■ ヌル曲面 $\boldsymbol{r = r_+}$ 上 $\boldsymbol{\ell}$方向に発射された光がこのヌル曲面に留まること（**p.304 問題5**）

光の測地線方程式は測地線のパラメータをλとして

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda},\quad \frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,u^\beta\,u^\gamma = 0 \tag{18}$$

接続が計量を使って表されるとき（Levi-Civita接続）には、これは次の方程式に等しい事を思い起こそう。

$$\frac{d}{d\lambda}\,(g_{\alpha\beta}\,u^\beta) = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma \tag{19}$$

計量(10)を与える座標系(v,r,θ,ψ)で考える。計量$(g_{\alpha\beta})$には v,ψ の依存性がないので、(19)より

$$\sum_{\alpha} g_{v\alpha}\,u^{\alpha} = \text{const.},\quad \sum_{\alpha} g_{\psi\alpha}\,u^{\alpha} = \text{const.} \tag{20}$$

ここで初期値として、光は $r=r_+$ 上にあって

$$\boldsymbol{u}\propto\boldsymbol{\ell},\ \text{ i.e. }\ \boldsymbol{u}=(u^v,0,0,u^{\psi}),\quad u^{\psi}=\frac{a}{2\,r_+}\,u^v \tag{21}$$

を仮定し、さらにこの条件が測地線上でそのままに留まる

$$\frac{du^r}{d\lambda} = -\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^r{}_{\beta\gamma}\,u^{\beta}\,u^{\gamma}=0,\quad \frac{du^{\theta}}{d\lambda} = -\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^{\theta}{}_{\beta\gamma}\,u^{\beta}\,u^{\gamma}=0 \tag{22}$$

ことを示したい。

(20)は $u^r=0,\ u^{\theta}=0$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} g_{v\alpha}\,u^{\alpha} = g_{vv}\,u^v + g_{v\psi}\,u^{\psi} &= \frac{-1}{\rho^2}\,[(\rho^2-2\,r)\,u^v + (2\,a\,r\sin^2\theta)\,u^{\psi}] \\
&\xrightarrow{r=r_+} \frac{a\sin^2\theta}{\rho_+^2}\,(a\,u^v - 2\,r_+\,u^{\psi}) = 0
\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} g_{\psi\alpha}\,u^{\psi} = g_{\psi v}\,u^v + g_{\psi\psi}\,u^{\psi} &= \frac{1}{\rho^2}\,\{-(2\,a\,r\sin^2\theta)\,u^v + [\Delta\cdot(\rho^2+2\,r)+4\,r^2]\,u^v\} \\
\text{(11)より}\nearrow\ &\xrightarrow{r=r_+} \frac{2\,r_+}{\rho_+^2}\,(-a\,u^v + 2\,r_+\,u^{\psi}) = 0
\end{aligned}\tag{24}$$

(22)の右辺を計算しよう。初期値として $u^r=u^{\theta}=0$ であることに注意して、零とならずに寄与するLevi-Civita接続の成分は

$$\Gamma^r{}_{\alpha\beta} = g^{rr}\,\Gamma_{r\alpha\beta} + g^{rv}\,\Gamma_{v\alpha\beta} + g^{r\psi}\,\Gamma_{\psi\alpha\beta},\quad
\begin{array}{lll}
\Gamma_{rvv} = -\frac{1}{2}\,\partial_r\,g_{vv} & \Gamma_{rv\psi} = -\frac{1}{2}\,\partial_r\,g_{v\psi} & \Gamma_{r\psi\psi} = -\frac{1}{2}\,\partial_r\,g_{\psi\psi} \\
\Gamma_{vvv} = 0 & \Gamma_{vv\psi} = 0 & \Gamma_{v\psi\psi} = 0 \\
\Gamma_{\psi vv} = 0 & \Gamma_{\psi v\psi} = 0 & \Gamma_{\psi\psi\psi} = 0
\end{array}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^r{}_{\beta\gamma}\,u^{\beta}\,u^{\gamma} &= -\frac{1}{2}\,g^{rr}\,[(\partial_r\,g_{vv})\,(u^v)^2 + 2\,(\partial_r\,g_{v\psi})\,u^v\,u^{\psi} + (\partial_r\,g_{\psi\psi})\,(u^{\psi})^2] + \{u^r,u^{\theta}\text{ を含む項}\} \\
&\xrightarrow{r=r_+} 0 + \{u^r,u^{\theta}\text{ を含む項}\}\quad \because\ g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}
\end{aligned}\tag{25}$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\alpha\beta} = g^{\theta\theta}\,\Gamma_{\theta\alpha\beta},\quad \Gamma_{\theta vv} = -\frac{1}{2}\,\partial_{\theta}\,g_{vv}\quad \Gamma_{\theta v\psi} = -\frac{1}{2}\,\partial_{\theta}\,g_{v\psi}\quad \Gamma_{\theta\psi\psi} = -\frac{1}{2}\,\partial_{\theta}\,g_{\psi\psi}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\theta}\,g_{vv}\Big|_{r=r_+} &= \partial_{\theta}\left(g_{vv}\Big|_{r=r_+}\right) = a^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right) \\
\partial_{\theta}\,g_{v\psi}\Big|_{r=r_+} &= \partial_{\theta}\left(g_{v\psi}\Big|_{r=r_+}\right) = -2\,a\,r_+\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right) \\
\partial_{\theta}\,g_{\psi\psi}\Big|_{r=r_+} &= \partial_{\theta}\left(g_{\psi\psi}\Big|_{r=r_+}\right) = 4\,r_+^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta,\gamma}\Gamma^{\theta}{}_{\beta\gamma}\,u^{\beta}\,u^{\gamma} &= -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\,[(\partial_{\theta}\,g_{vv})\,(u^v)^2 + 2\,(\partial_{\theta}\,g_{v\psi})\,u^v\,u^{\psi} + (\partial_{\theta}\,g_{\psi\psi})\,(u^{\psi})^2] + \{u^r,u^{\theta}\text{ を含む項}\} \\
&\xrightarrow{r=r_+} -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\right][a^2\,(u^v)^2 - 4\,a\,r_+\,(\partial_{\theta}\,g_{v\psi})\,u^v\,u^{\psi} + 4r_+^2\,(u^{\psi})^2] + \{u^r,u^{\theta}\text{ を含む項}\} \\
&= -\frac{1}{2}\,g^{\theta\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{\rho_+^2}\right)\right](a\,u^v - 2\,r_+\,u^{\psi})^2 + \{u^r,u^{\theta}\text{ を含む項}\} \\
&= 0 + \{u^r,u^{\theta}\text{ を含む項}\}
\end{aligned}\tag{26}$$

以上、(23,24,25,26)より初期条件(21)で射出された光はそのまま地平$r=r_+$上に留まることが分かる。