■ Kerr計量

質量M、角運動量Jを持つKerr計量は次の通り。（$c=G=1$単位）

$$s^2 = -\left(1-\frac{2\,M\,r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4\,M\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2\,M\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{1}$$

$$a = \frac{J}{M}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta = r^2 - 2\,M\,r + a^2 \end{cases} \tag{2}$$

Mを単位として $s/M\to s$, $a/M\to a$, $t/M\to t$ とし、s,t,r,a を無単位の量として書くと

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{3}$$

$$\begin{cases} \rho(r,\theta)^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \\ \Delta(r) = r^2 - 2\,r + a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_{tt} = -\left(1-\dfrac{2\,r}{\rho^2}\right) & g_{rr} = \dfrac{\rho^2}{\Delta} & g_{\phi\phi} = \left(r^2+a^2+\dfrac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \\ g_{t\phi} = -\dfrac{2\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2} & g_{\theta\theta} = \rho^2 \end{cases} \tag{4}$$

ゆっくり回転する場合の近似における漸近的振る舞いを調べる。$r\gg 1\gg a$ として

$$\begin{aligned} r/\rho^2 &= \frac{r}{r^2+a^2\cos^2\theta} = \frac{1}{r\left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)} \\ &\approx \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3}\cos^2\theta + \cdots \\ \frac{\rho^2}{\Delta} &= \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2\,r+a^2} = \frac{1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta}{1-\frac{1}{r}\left(2-\frac{a^2}{r}\right)} = \left(1+\frac{a^2}{r^2}\cos^2\theta\right)\left(1+\frac{2}{r}-\frac{a^2}{r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2+\cdots\right) \\ &\approx 1+\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}\,(2-a^2\sin^2\theta)+\cdots \end{aligned}$$

a^2, $1/r^2$ 補正の項を落とすと

$$ds^2 \approx -\left(1-\frac{2}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2}{r}\right)dr^2 + r^2\,d\theta^2 + + r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\phi^2) - \frac{4\,a\sin^2\theta}{r}\,d\phi\,dt \tag{5}$$

最後の項が前章で取り上げられた「ゆっくりした回転」の効果。
単位に関して先ず長さ(m)の単位を復活させ、次に時間と質量(sec, kg)を復活させると、最後の項は

$$\begin{aligned} & & ds^2 &= \cdots - \frac{4\,a\sin^2\theta}{r}\,d\phi\,dt \\ r\to r/M,\ a\to a/M,\ t\to t/M,\ s\to s/M &\Rightarrow & ds^2 &= \cdots - M^2\times\frac{4\,(a/M)\sin^2\theta}{r/M}\,d\phi\,(dt/M) \\ & & &= \cdots - \frac{4\,M\,a\sin^2\theta}{r}\,d\phi\,dt \\ t\to c\,t,\ M\to G\,M/c^2,\ a=J/M\to J/(c\,M) &\Rightarrow & &= \cdots - \frac{4\,G\,J}{c^3\,r^2}\sin^2\theta\,(r\,d\phi)\,(c\,dt) \end{aligned}$$

となる。これは前章でSchwarzschild計量に加えた項に等しい。

■ $\boldsymbol{\Delta=0}$ は見かけの座標特異点であること（p.304 問題3）

以下Mを単位とした表記(3)で進める。
計量は $r=0$, $\theta=\pi/2$ において$\rho(r,\theta)=0$ となり特異的になる。また計量は $\Delta=0$ において特異的に見える。

$$\Delta(r) = r^2 - 2\,r + a^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad r = r_\pm \overset{\text{def}}{=} 1\pm\sqrt{1-a^2},\ \ a\le 1$$

$r=r_+$ はヌル三次元曲面を形成し、事象の地平であることが以下で分かる。$r=r_+$ での特異性は見かけ上である。$a>1$ のときは、 $r=0,\ \theta=\pi/2$ の特異点は地平に隠されない。

また、計量の g_{tt} 成分をみると（→(4)）$r=r_+$曲面を外側で囲む曲面内において符号が代わり、tが時間的でなくなっていることが分かる。

$$-g_{tt}\gtrless 0 \ \Leftrightarrow\ \rho^2-2\,r=r^2-2\,r+a^2\cos^2\theta\gtrless 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} r<1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta} \quad \text{or} \quad 1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}<r \\ 1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}<r<1+\sqrt{1-a^2\cos^2\theta} \end{cases} \tag{6}$$
$$1-\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}\le r_-, \quad r_+\ \le\ 1+\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}$$

$\Delta=0$ の特異性が座標系依存であることをみるために次のような座標変換を行う。

$$(t,r,\phi)\to(v,r,\psi),\quad \begin{cases} dt=dv-\dfrac{r^2+a^2}{\Delta}\,dr \\ d\phi=d\psi-\dfrac{a}{\Delta}\,dr \end{cases} \ \Leftarrow\ \begin{cases} t=v-\displaystyle\int^r \frac{r^2+a^2}{(r-r_-)\,(r-r_+)}\,dr \\ \phi=\psi-a\displaystyle\int^r \frac{dr}{(r-r_-)\,(r-r_+)} \end{cases} \tag{7}$$

$a=0$ のとき(7)は Eddington-Finkelstein座標に一致する。

$$a=0\ \Rightarrow\ r_+=2,\ r_-=0,\quad \therefore\quad \begin{aligned} t &= v-\int^r \frac{r\,dr}{r-2}\,, \\ &= v-r-2\log|r-2|+\text{const.} \\ \phi &= \psi \end{aligned}$$

これらを計量の式(3)に代入すると

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dt^2-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\phi\,dt+\frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2+\rho^2\,d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \\ &= -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)\left(dv-\frac{r^2+a^2}{\Delta}\,dr\right)^2-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\left(d\psi-\frac{a}{\Delta}\,dr\right)\left(dv-\frac{r^2+a^2}{\Delta}\,dr\right) \\ &\quad +\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\left(d\psi-\frac{a}{\Delta}\,dr\right)^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\,dr^2+\rho^2\,d\theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dr^2\ \text{項} &= \frac{-1}{\rho^2}\,(\rho^2-2\,r)\left[\frac{(r^2+a^2)}{\Delta}\right]^2-\frac{4\,a^2\,r(r^2+a^2)\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta^2}+\frac{a^2\,[\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta]\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta^2}+\frac{\rho^2}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\,[-(\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2)-4\,a^2\,r\sin^2\theta+a^2\,\rho^2\sin^2\theta]+2\,a^4\,r\sin^4\theta+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\left[\,-(\rho^2-2\,r)\,\underbrace{(r^2+a^2-a^2\sin^2\theta)}_{=\rho^2}-2\,a^2\,r\sin^2\theta\,\right]+2\,a^4\,r\sin^4\theta+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{(r^2+a^2)\,[\,-(\rho^2-2\,r)\,\rho^2-2\,a^2\,r\sin^2\theta\,]+2\,a^4\,r\sin^4\theta+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\rho^2\,\Delta^2}\left\{-(r^2+a^2)\,(\rho^2-2\,r)\,\rho^2+2\,a^2\,r\sin^2\theta\,\underbrace{[-(r^2+a^2)+a^2\sin^2\theta\,]}_{=-\rho^2}+\rho^4\,\Delta\right\} \\ &= \frac{1}{\Delta^2}\left\{-\underbrace{[\,(r^2+a^2)\,(\rho^2-2\,r)+2\,a^2\,r\sin^2\theta\,]}_{=\rho^2\Delta}+\rho^2\,\Delta\right\} \\ &\qquad (r^2+a^2)\,(\rho^2-2\,r)+2\,a^2\,r\sin^2\theta = (\rho^2+a^2\sin^2\theta)\,(\Delta-a^2\sin^2\theta)+2\,a^2\,r\sin^2\theta \\ \downarrow &\qquad\qquad = \rho^2\,\Delta+(\Delta-\rho^2)\,a^2\sin^2\theta-a^4\sin^4\theta+2\,a^2\,r\sin^2\theta \\ &\qquad\qquad = \rho^2\,\Delta+(-2\,r+a^2\sin^2\theta)\,a^2\sin^2\theta-a^4\sin^4\theta+2\,a^2\,r\sin^2\theta \\ &\qquad\qquad = \rho^2\,\Delta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} dv\,dr\ \text{項} &= 2\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)\frac{r^2+a^2}{\Delta}+\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{a}{\Delta} \\ &= \frac{2}{\rho^2\,\Delta}\,[\,(\rho^2-2\,r)\,(r^2+a^2)+2\,a^2\,r\sin^2\theta\,] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(8)\ \to\quad &= 2 \\
dr\,d\psi\ \text{項} &= \frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\cdot\frac{r^2+a^2}{\Delta} - 2\,\frac{a}{\Delta}\cdot\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \\
&= \frac{2\,a\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta}\left[2\,r\,(r^2+a^2)-\rho^2\,(r^2+a^2)-2\,r\,a^2\sin^2\theta\right] \\
&= -\frac{2\,a\sin^2\theta}{\rho^2\,\Delta}\left[(\rho^2-2\,r\,)(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta\right] \\
(8)\ \to\quad &= -2\,a\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$dv^2,\ dv\,d\psi,\ d\psi^2,\ d\theta^2$ については特に計算は必要ない。以上より

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1-\frac{2\,r}{\rho^2}\right)dv^2+2\,dv\,dr-\frac{4\,a\,r\sin^2\theta}{\rho^2}\,dv\,d\psi-2\,a\sin^2\theta\,dr\,d\psi \\
&\quad+\rho^2\,d\theta^2+\left(r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\psi^2
\end{aligned}
\tag{9}
$$

最後の係数に現れる因子は次のようにも表せる

$$
\begin{aligned}
r^2+a^2+\frac{2\,r\,a^2\sin^2\theta}{\rho^2} &= \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,(r^2+a^2)+2\,r\,a^2\sin^2\theta\,\right] \\
(8)\ \to\quad &= \frac{1}{\rho^2}\left[\,\rho^2\,\Delta+2\,r\,(\Delta+2\,r)\,\right] \\
&= \Delta\cdot\left(1+\frac{2\,r}{\rho^2}\right)+\frac{4\,r^2}{\rho^2}
\end{aligned}
$$

となって、$r=r_\pm$ における特異性は消失する。