第 4章 問題

ローレンツ変換

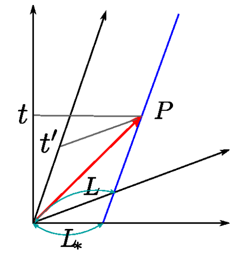
$$\beta = V/c,\ 1/\gamma = 1-\beta^2,\quad \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \gamma\,(x-\beta c t) \\ c t' &=& \gamma\,(c t-\beta x) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& \gamma\,(x'+\beta c t') \\ c t &=& \gamma\,(c t'+\beta x') \end{array}\right.$$

$$\gamma^2\,(1-\beta^2)=1,\ \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \gamma &=& \cosh\theta \\ \gamma\beta &=& \sinh\theta \end{array}\right. ,\quad \beta=\tanh\theta$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \gamma\,(x-\beta c t) \\ c t' &=& \gamma\,(c t-\beta x) \end{array}\right. \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cosh\theta - c t\sinh\theta \\ c t' &=& -x\sinh\theta + c t\cosh\theta \end{array}\right.$$

問題 4.2

座標原点から発信された光信号がロケットの先端に届いた事象が図の点Pである。



P:　地上：$(L_*, t) \longleftrightarrow$ ロケット：$(L, t'=L/c)$

ローレンツ変換から $c t = \gamma(c t' + \beta L) = \gamma(1+\beta)L.$

ロケットの速度が$V=4c/5$ のとき $\beta = 4/5,\ \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 5/3.$

$\therefore\quad t = 5/3\times 9/5\times L/c = 3L/c = 3t'$.

問題 4.3

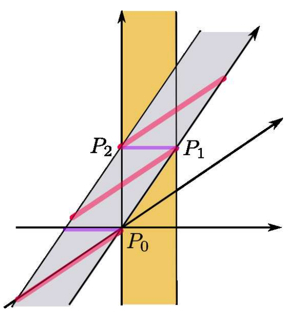
(静止系での長さL_*の)物体が、速度Vで等速運動するときには長さLに見える。

$$\begin{array}{lcl} (t, Vt+L) & \longleftrightarrow & (t_2', L_*) \\ (t, Vt) & \longleftrightarrow & (t_1', 0) \end{array} ,\quad L_* = \gamma L$$

静止系で20mの棒の長さが実験室系では10mになったという事から

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} = 2,\quad \beta = V/c = \sqrt{3}/2,\quad \therefore V = \sqrt{3}\,c/2.$$

走者の視点と、実験室では同時刻に見ている棒の実体が異なるのでパラドックスではない。時空図は次の通り。図では各視点で同時刻に見ている棒を示した。



P_0：棒の先端が小屋の表のドアに達した。

P_1：棒の先端が小屋の裏のドアに達した。

P_1：棒の後端が表のドアを通過した。

問題 4.5 (p. 69)

○ Schemeによる計算

上の計算より3C345はおよそ80光年の距離にある。

観測者が見る横方向の速さは光速のおよそ20倍に見える。

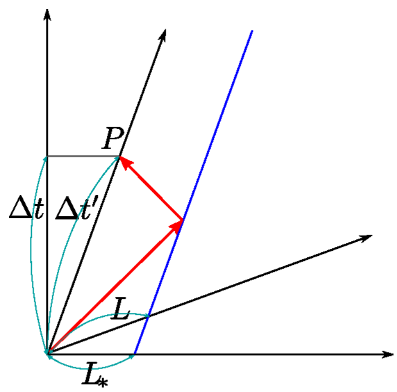
3C345が視線方向から角度θの方向に速度v, $(\beta = v/c\ )$で向かってくるとする。

$$1-\beta \ll \theta \approx 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{V_T}{c} = \frac{\beta \sin\theta}{1-\beta\cos\theta} \approx \frac{\beta\theta}{1-\beta+\beta\theta^2/2} = \frac{\theta}{\theta^2/2-(1-1/\beta)} \approx \frac{2}{\theta}$$

$$\frac{2}{\theta} \approx 20 \quad \Longrightarrow \quad \theta \approx 0.1(\mathrm{rad}) \approx 6(\mathrm{deg}).$$

問題 4.6

間隔Lで平行に置かれた向き合う二枚の鏡鏡を光が往復している。ある慣性系Kにおいて、この鏡の系が鏡面に垂直方向に速度Vで移動している。



鏡の静止系K'では一往復にかかる時間を $\Delta t'$とすると、当然

$$c\,\Delta t' = 2L.$$

一方、鏡が運動している元の慣性系でこれを考えると、ローレンツ収縮した間隔L_*の鏡の間を光が行き来する。鏡が速度Vで移動している事を考慮して、$\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ とすると

$$L_* = \frac{1}{\gamma}L, \quad c\,\Delta t = c\,L_* \left\{ \frac{1}{c-V} + \frac{1}{c+V} \right\} = \frac{2\,L_*}{1-\beta^2} = 2\,\gamma\,L.$$

したがって

$$\Delta t = \gamma \Delta t'\,(\geqslant \Delta t'\,).$$

この結果はK: $(\Delta x, \Delta t) \longleftrightarrow K'$: $(0, \Delta t')$ の間のローレンツ変換からも簡単に得られる。(この結果は既に得ている。)

問題 4.10

23光年彼方の星フォーマルハウト(Fomalhaut)。プロメテウス号は、地球時間で127年、宇宙船時間で10年の旅を経て地球に戻る。星での滞在期間をΔ年としよう。

$$2\,T + \Delta = 127\,\mathrm{year}\,, \quad 2\,T' + \Delta = 10\,.$$

片道で考えると

$$
\begin{aligned}
&cT' = \sqrt{(cT)^2 - L^2} = cT\sqrt{1-\beta^2} = \frac{c}{\gamma}T, \quad L = TV, \\
&T - T' = (1 - \frac{1}{\gamma})T = (1 - \frac{1}{\gamma}) \times \frac{L}{V} = \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}(L/c), \\
&a = \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} = \frac{\beta}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \text{ と置く。} \beta \leqslant 1 \text{より} a < 1 \text{ に注意。} \\
&(1 - a\beta)^2 = 1 - \beta^2 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{2a}{a^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
T - T' \approx (117/2)\,\mathrm{year}, \quad L/c \approx 23\,\mathrm{year} \quad \Longrightarrow \quad a \approx \frac{117}{46} > 1
$$

どうも数値的に辻褄が合わない。これだけの相対論的効果が出ているにもかかわらず、23光年の星に127年は時間がかかり過ぎである。

滞在期間Δは僅かであるとし、星までの距離を未知とする。

$$
T \approx 127/2\,\mathrm{year}, \quad T' \approx 5\,\mathrm{year}\,.
$$

こうすると

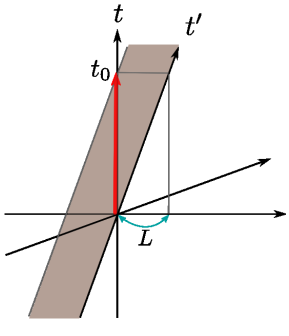
$$
1 - \frac{1}{\gamma} \approx \frac{127/2 - 5}{127/2} \approx 0.92 \quad \Longrightarrow \quad \beta \approx 0.997.
$$

その代り、星までの距離は $c\beta T \approx 63$ 光年となる。

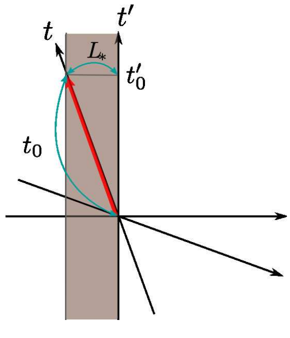
問題 17.

観測者の静止系で棒が速度vで移動する。観測者はある地点で棒の通過時間を計る。この時間を t_0としよう($\to$図1)。一方、棒の静止系から見れば、観測者は速度 $-v$で移動していく。観測者は棒の静止系の時計を使って棒の端から端まで移動した時間を計る($\to$図2)。この時間をt'_0とする。

(図1)



(図2)



t_0とt'_0の関係は$\beta = v/c$を使って

$$
c\,t_0 = \sqrt{(c\,t'_0)^2 - (v\,t'_0)^2} = c\,t'_0\sqrt{1-\beta^2} = c\,t'_0/\gamma.
$$

観測者はこれらの時間を使って棒の長さを測定する。移動している棒の長さをL, 静止系での棒の長さをL_*とすると、棒の長さの速度方向での収縮 $L = L_*/\gamma$ が次のように導かれる。

$$
L = v\,t_0\,, \quad L_* = v\,t'_0 = \gamma\,v\,t_0 = \gamma L \geqslant L\,.
$$