9.3 p.179～

$e,\ \ell$ を保存量として

$$
\begin{aligned}
e &= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} && (1)\\
\ell &= r^2\sin^2\theta\,\frac{d\phi}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad \ell=r^2\frac{d\phi}{d\tau},\ \theta=\pi/2 && (2)\\
\frac{e^2-1}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right] && (3)
\end{aligned}
$$

単位質量当たりのエネルギー e は静止エネルギーの寄与を含むのでNewton力学のエネルギー$\mathcal{E}$と比較するためには

$$
e=1+\mathcal{E},\quad \frac{e^2-1}{2}=\frac{(1+\mathcal{E})^2-1}{2}\approx\mathcal{E},\ \mathcal{E}\ll 1
$$

とする必要がある。Newton力学の場合と比較すべき有効ポテンシャルは

$$
V_{\text{eff}}(r)=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right)-1\right]=-\frac{M}{r}+\frac{\ell^2}{2r^2}-\frac{M\ell^2}{r^3} \tag{4}
$$

こうすると、Newton力学の場合の

$$
\mathcal{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+V_{\text{eff}}(r)
$$

と照応する。$V_{\text{eff}}(r)$の極値

$$
\begin{aligned}
V'_{\text{eff}}(r) &= \frac{M}{r^2}-\frac{\ell^2}{r^3}+\frac{3M\ell^2}{r^4}\\
&= \frac{M}{r^4}\left(r^2-\frac{\ell^2}{M}r+3\ell^2\right)=\begin{cases}\dfrac{M}{r^4}(r-r_+)(r-r_-), \quad 0<r_-<r_+ & ,\ \text{for}\ \ \ell^2\geq 12M^2\\ >0 & ,\ \text{for}\ \ \ell^2<12M^2\end{cases} && (5)
\end{aligned}
$$

$$
V'_{\text{eff}}(r_\pm)=0 \qquad \Rightarrow \qquad r_\pm=\frac{M}{2}\left(\frac{\ell}{M}\right)^2\left(1\pm\sqrt{1-12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right),\quad V''_{\text{eff}}(r_\pm)\gtrless 0 \tag{6}
$$

[memo]

$z=\ell/M$と置くと

$$
\left(\frac{\ell}{M}\right)^2\left(1+\sqrt{1-12\left(\frac{M}{\ell}\right)^2}\right)=z^2+z\sqrt{z^2-12}\ \geq 12
$$

は $z\geq\sqrt{12}$ において単調増加

$V_{\text{eff}}(r)$ は$r=r_-$ で極大、 $r=r_+$ で極小となる。ℓを変化させると

$$
6M\leq r_+,\quad \ell\geq\sqrt{12}\,M \tag{7}
$$

■ 安定円軌道

式(7)より $6M\leq r$ なる r について安定円軌道をとることができる。

そのためにはeの値がちょうどV_{eff}の極小値の値に対応している必要がある。

$$
\frac{e^2-1}{2}=V_{\text{eff}}(r),\quad V'_{\text{eff}}(r)=0
$$

そのためには、式(5)と式(3) より

$$V'_{\mathrm{eff}}(r)=0 \;\Rightarrow\; \ell^2 = \frac{r^2}{r/M-3}=\frac{M\,r^2}{r-3\,M} \tag{8}$$

$$\frac{e^2-1}{2}=V_{\mathrm{eff}}(r) \;\Rightarrow\; e^2 = \left(1-\frac{2\,M}{r}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{r^2}\right) \overset{\text{上式}}{\Longrightarrow} \left(1-\frac{2\,M}{r}\right)\left(1+\frac{M}{r-3\,M}\right)=\frac{(r-2\,M)^2}{r\,(r-3\,M)} \tag{9}$$

$$\therefore\quad \frac{\ell}{e} = \frac{\sqrt{M\,r^3}}{r-2\,M}=\frac{\sqrt{r\,M}}{1-2\,M/r} \tag{10}$$

でなければならない。このとき

$$\begin{aligned}\Omega\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{d\phi}{d\tau}\Big/\frac{dt}{d\tau} =\left(\frac{\ell}{e}\right)\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2\,M}{r}\right)\\ &= \sqrt{\frac{M}{r^3}}\\ \therefore\quad \Omega^2 &=\frac{M}{r^3}\end{aligned} \tag{11}$$

ただし、”角速度” Ω はシュワツシルト座標時間 tに関するものである。

シュワツシルト座標時間 tは無限遠で固有時間と等しくなるので、$2\,\pi/\Omega$ は無限遠方にいる観測者がこの円運動を見たときの周期となる。

固有時間に対する角度変化 $\tilde{\Omega}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{d\phi}{d\tau}$を考えると、式(2),(8)より

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}^2=\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 &= \frac{\ell^2}{r^4}=\frac{1}{r^4}\left(\frac{M\,r^2}{r-3\,M}\right)\\ &= \frac{M}{r^2\,(r-3\,M)}\end{aligned}$$

■ 束縛軌道の形