■ **問題 8.3 (p. 169)**

$$ds^2 = -\varphi(r)\,dt^2 + \varphi(r)^{-1}dr^2 + r^2\,d\phi^2, \quad \varphi(r) = 1 - \frac{2\,M}{r} \tag{1}$$

Lagrangean $L\big(t, r, \phi, \dot t, \dot r, \dot\phi\big)$, $\quad \left(\dot{} = \frac{d}{d\sigma}\right)$ は

$$L\big(t, r, \phi, \dot t, \dot r, \dot\phi\big) = \sqrt{\varphi(r)\,(\dot t\,)^2 - \varphi(r)^{-1}\,(\dot r)^2 - r^2\,(\dot\phi\,)^2} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\,\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\dot t}L\right) &= \frac{d}{d\,\sigma}\left(\frac{1}{L}\,\varphi\,\dot t\right) &&= 0 \\
\frac{d}{d\,\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\dot r}L\right) &= \frac{d}{d\,\sigma}\left(\frac{-1}{L}\,\varphi^{-1}\,\dot r\right) &&= \frac{\partial}{\partial r}L \;=\; \frac{1}{2\,L}\left\{\varphi'\left\{(\dot t\,)^2 + \frac{1}{\varphi^2}\,(\dot r)^2\right\} - 2\,r\,(\dot\phi\,)^2\right\} \\
\frac{d}{d\,\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\dot\phi}L\right) &= \frac{d}{d\,\sigma}\left(\frac{-1}{L}\,r^2\,\dot\phi\right) &&= 0
\end{aligned}$$

$L^{-1} = \frac{d\sigma}{d\tau}$ なので、両辺にさらに L^{-1} をかけると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\,(\varphi\,u^t) &= 0 \\
\frac{d}{d\tau}\,(-\varphi^{-1}\,u^r) &= L^{-1}\,\frac{\partial}{\partial r}L \;=\; \frac{1}{2}\varphi'\left\{(u^t)^2 + \frac{1}{\varphi^2}\,(u^r)^2\right\} - r\,(u^\phi)^2 \\
\frac{d}{d\tau}\,(-r^2\,u^\phi) &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{dt}{d\tau}\xrightarrow[r\to\infty]{} 1 \text{ とすれば } \quad \varphi(r)\,u^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = 1. \quad \therefore \quad u^t = \varphi^{-1} \tag{4}$$

$$r^2\,u^\phi = \ell\ (\text{const.}) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi'}{\varphi^2}\,(u^r)^2 - \frac{1}{\varphi}\,\frac{du^r}{d\tau} &= \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'}{\varphi^2}\{1 - (u^r)^2\} - \frac{\ell^2}{r^3} \\
\therefore \quad \frac{1}{\varphi}\,\frac{du^r}{d\tau} &= \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'}{\varphi^2}\{1 - (u^r)^2\} - \frac{\ell^2}{r^3}
\end{aligned} \tag{6}$$

クリストッフェル記号の 0でない成分は、(3)より

$$\begin{aligned}
\frac{du^t}{d\tau} &= -\varphi'\,u^r\,u^t && \Rightarrow\ \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2}\,\varphi' \\
\frac{d\,u^r}{d\tau} &= \frac{1}{2}\varphi'\left\{(u^t)^2 - \frac{1}{\varphi^2}\,(u^r)^2\right\} - r\,(u^\phi)^2 && \Rightarrow\ \Gamma^r_{tt} = -\frac{1}{2}\,\varphi', \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'}{\varphi^2}, \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = r \\
\frac{du^\phi}{d\tau} &= 2\,r\,u^r\,u^\phi && \Rightarrow\ \Gamma^\phi_{r\phi} = -r
\end{aligned}$$

ここで、φ, φ' は

$$\varphi = 1 - \frac{2\,M}{r}, \qquad \frac{1}{2}\,\varphi' = \frac{M}{r^2}$$

■ **問題 8.4 (p. 169)**

(a) 極座標

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
y\,dx - x\,dy &= r\sin\theta\,\{\sin\phi\,(\sin\theta\,\cancel{\cos}\,\phi\,dr + r\cos\theta\,\cancel{\cos}\,\phi\,d\theta - r\sin\theta\sin\phi\,d\phi) \\
&\qquad -\ \cos\phi\,(\sin\theta\,\cancel{\sin}\,\phi\,dr + r\cos\theta\,\cancel{\sin}\,\phi\,d\theta + r\sin\theta\cos\phi\,d\phi)\} \\
&= -(r\sin\theta)^2\,d\phi
\end{aligned}$$

与えられた線素は

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -[1 - \Omega^2\,(x^2 + y^2)]\,dt^2 + 2\,\Omega\,(y\,dx - x\,dy)\,dt + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= -[1 - \Omega^2\,(r\sin\theta)^2]\,dt^2 - 2\,\Omega\,(r\sin\theta)^2\,d\phi\,dt + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + (r\sin\theta)^2\,d\phi^2 \\
&= -dt^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 + (r\sin\theta)^2\,(d\phi - \Omega\,dt)^2
\end{aligned}$$

すなわち、平坦時空の線素を極座標で表して、$\phi \to \phi - \Omega t$ の置き換えを行ったものに等しい。

すなわち、考えている座標系はϕ の増加方向に対して<u>反対回りに角速度Ωで回転する座標系</u>であることが分かる。

(b) 一般に測地線方程式は

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}(g_{\alpha\beta}u^\beta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma})u^\beta u^\gamma, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}}$$

0 でない寄与を与える項を書き出すと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(g_{xx}u^x + g_{xt}u^t) &= \frac{1}{2}(\partial_x g_{tt})(u^t)^2 + (\partial_x g_{yt})u^t u^y \\
\frac{d}{d\tau}(g_{yy}u^y + g_{yt}u^t) &= \frac{1}{2}(\partial_y g_{tt})(u^t)^2 + (\partial_y g_{xt})u^t u^x \\
\frac{d}{d\tau}(g_{zz}u^z) &= 0 \\
\frac{d}{d\tau}(g_{tt}u^t + g_{tx}u^x + g_{ty}u^y) &= 0
\end{aligned}$$

計量の具体形は

$$g_{tt} = -[1 - \Omega^2(x^2+y^2)],\ g_{xt} = g_{tx} = \Omega y,\ g_{yt} = g_{ty} = -\Omega x,\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = 1$$

なので、$\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ として

$$\begin{aligned}
\dot{u}^x + \Omega\frac{d}{d\tau}(y u^t) &= \Omega^2 x(u^t)^2 - \Omega u^t u^y \\
\dot{u}^y - \Omega\frac{d}{d\tau}(x u^t) &= \Omega^2 y(u^t)^2 + \Omega u^t u^x \\
\dot{u}^z &= 0 \\
\frac{d}{d\tau}\{-[1 - \Omega(x^2+y^2)]u^t + \Omega(y u^x - x u^y)\} &= 0
\end{aligned}$$

ここで非相対論的極限

$$\tau \to c\tau,\ t \to ct,\ \Omega \to \Omega/c \text{ の置き換えをした後に } c \to \infty$$

を取る。結局、$\tau = t,\ u^t = 1$ としてよい。

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \Omega^2 x - 2\Omega\dot{y} \\
\ddot{y} &= \Omega^2 y + 2\Omega\dot{x} \\
\ddot{z} &= 0 \\
2\Omega^2(x\dot{x} + y\dot{y}) + \Omega(y\ddot{x} - x\ddot{y}) &= 0
\end{aligned}$$

四番目の式は最初の二つから得られる。

$\vec{r} = (x, y, z),\ \vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 1),\ \vec{n}\times\vec{r} = (-y, x, 0)$ とすると

$$\ddot{\vec{r}} = \Omega^2\vec{r} + 2\Omega\vec{n}\times\vec{v}$$

右辺第一項は遠心力、第二項はコリオリ力である。

■ 問題 8.6

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) &= \left(\frac{d}{d\tau}g_{\mu\nu}\right)u^\mu u^\nu + 2u_\rho\frac{du^\rho}{d\tau} \\
\text{測地線方程式}\rightarrow\quad &= u^\rho(\partial_\rho g_{\mu\nu})u^\mu u^\nu - 2u_\rho(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}u^\mu u^\nu) \\
&= u^\rho(\partial_\rho g_{\mu\nu})u^\mu u^\nu - u^\rho(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})u^\mu u^\nu \\
&= u^\rho u^\mu u^\nu(2\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\mu g_{\rho\nu}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

■ 問題 8.7

$$dS^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2), \quad y \geq 0$$

(a) (a,ε)と(a,b)を結ぶ経路$\mathcal{P}$に沿った距離を$D(\mathcal{P})$とすると

$$D(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} \ \geq \ \int_{\varepsilon}^{b} \frac{dy}{y} = \log\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

(b) 測地線方程式は $\dot{} = \frac{d}{dS}$ として

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS}(g_{xx}\dot{x}) &= 0 \\ \frac{d}{dS}(g_{yy}\dot{y}) &= \frac{1}{2}\{(\partial_y g_{xx})\dot{x}^2 + (\partial_y g_{yy})\dot{y}^2\} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{d}{dS}(\dot{x}/y^2) &= 0 \\ \frac{d}{dS}(\dot{y}/y^2) &= -\frac{1}{y^3}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \end{aligned}$$

しかし、測地線を知るには Sの定義と上の第一式を使った方が簡単。

第一式より $\dot{x}/y^2 = \mathrm{const.}$ 右辺の定数が 0 の場合は、<u>測地線は y軸に平行な半直線</u>。$\neq 0$ の場合には $=1/a$ とおいて

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}\left\{\left(\dfrac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dS}\right)^2\right\} = 1 \\ \qquad\qquad \dfrac{dx}{dS}/y^2 = 1/a \ (=\mathrm{const.}) \end{cases}$$

$$\left(\frac{dy}{dS}\right)^2 = y^2 - y^4/a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dS} = \pm y\sqrt{1-(y/a)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \pm\frac{y/a}{\sqrt{1-(y/a)^2}} = \mp a\frac{d}{dy}\sqrt{1-(y/a)^2}$$

$$\therefore \quad x - x_0 = \mp a\sqrt{1-(y/a)^2} \quad i.e. \quad (x-x_0)^2 + y^2 = a^2, \ \ y \geq 0$$

<u>測地線は x軸上に中心を持つ半円</u>となる。

■ 問題 8.14

屈折率 $n(\vec{x})$ の点近傍で光が $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{\triangle x}$ 進むのに要する時間 $\triangle t$は、

$$\triangle t = |\vec{\triangle x}|\, n(\vec{x})/c$$

したがって

$$dS_{\mathrm{ferma}}^2 \equiv n(\vec{x})^2\, dS^2$$

とするとき

$$\int |dS_{\mathrm{ferma}}| = \int n\, dS$$

を最小にする。したがって光路は、 dS_{ferma}^2 で与えられる計量の下での測地線となる。

測地線の方程式は（簡単のため光路パラメータとして S_{ferma}の代わりに s と記す）

$$\frac{d}{ds}\left(n^2\frac{dx^i}{ds}\right) = n\frac{\partial n}{\partial x^i}\left|\frac{d\vec{x}}{ds}\right|^2, \ \ i = 1,2,3$$

■ 問題 8.15 (Luneberg lens)

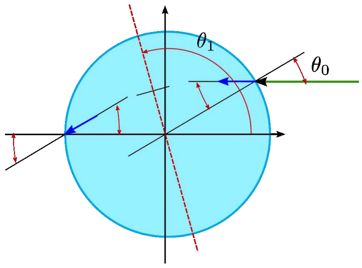
レンズが半径 Rの球であって、球内の屈折率が半径距離 rの点に対し、次式

$$n(r) = \left[2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}$$

で与えられる、というレンズ。

z軸に平行な光がこのレンズに入射する場合を考える。入射点 Pは xz平面上にあるとしよう。

球表面での屈折率は 1なので入射直後の光の方向はそのまま z軸に平行な方向を向く。



$$d\sigma^2 \equiv n^2(r)\,(dr^2 + r^2\,d\theta^2), \quad n^2(r) = 2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

$\dot{} = \frac{d}{d\sigma}$ として

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{d}{d\sigma}\left(n^2\,r^2\,\dot{\theta}\right) = 0 \quad \leftarrow \text{計量が } \theta \text{に依存していない} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dot{\theta} = \dfrac{a}{n^2\,r^2}, \quad a = \text{const.} \\ \dot{r}^2 = \dfrac{1}{n^2}\left(1 - \dfrac{a^2}{n^2\,r^2}\right) \end{array}\right. \tag{7}$$

(r, θ) の初期値を (R, θ_0) とする。入射方向は z軸に平行なので

$$\frac{d}{d\sigma}\,(r\sin\theta)\bigg|_{(R,\theta_0)} = \frac{dr}{d\sigma}\bigg|_{(R,\theta_0)}\sin\theta_0 + R\cos\theta_0\,\frac{d\theta}{d\sigma}\bigg|_{(R,\theta_0)} = 0$$

したがって

$$\frac{dr}{d\theta}\bigg|_{(R,\theta_0)} = -R\cot\theta_0 \tag{8}$$

(7)より

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{dr}{d\sigma}\Big/\frac{d\theta}{d\sigma} \\ &= \pm\frac{1}{a}\,r^2\sqrt{n^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} = \frac{1}{a}\,r^2\sqrt{2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^2} \\ &= \pm\frac{r}{a}\sqrt{(R^2 - a^2) - R^2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2} \end{aligned}$$

初期条件(8)より

$$a = R\sin\theta_0\,, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r}{a}\sqrt{(R^2 - a^2) - R^2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}$$

$$\int_R^r \frac{dr}{\frac{r}{R}\sqrt{(R^2 - a^2) - R^2\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}} = -\frac{R}{a}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \tag{9}$$

$$1 - (r/R)^2 = t, \ dr = \frac{-R\,dt}{2\,(r/R)}$$

$$\int_0^t \frac{dt}{(1-t)\sqrt{c^2 - t^2}} = \frac{2\,R}{a}\,(\theta - \theta_0) = \frac{2\,(\theta - \theta_0)}{\sin\theta_0}, \quad c \equiv 1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2 = \cos\theta_0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} t = c\sin\xi,\ (0 \le \xi \le \pi/2),\quad \int_0^t \frac{dt}{(1-t)\sqrt{c^2 - t^2}} &= \int_0^{\xi}\frac{d\xi}{1 - c\sin\xi} \\ \tan(\xi/2) = \eta,\ \sin\xi = \frac{2\,\eta}{1+\eta^2},\ d\xi = \frac{2\,d\eta}{1+\eta^2} \quad \to \quad &= \int_0^{\eta}\frac{2\,d\eta}{1+\eta^2 - 2\,c\,\eta} = \int_0^{\eta}\frac{2\,d\eta}{(\eta - c)^2 + 1 - c^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-c^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c-\eta}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

$\sqrt{1-c^2}=\sin\theta_0$ に注意すると

$$\tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\right)=\tan^{-1}(\cot\theta_0)=\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\theta_0,\quad 0\le\theta_0\le\frac{\pi}{2}$$

これと (10),(11)より

$$\begin{aligned}&\theta=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta_0-\eta}{\sin\theta_0}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\eta=\cos\theta_0-\sin\theta_0\cdot\cot\theta\\&\theta|_{\eta=1}\equiv\theta_1=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\tan\frac{-\theta_0}{2}\right)=\frac{\theta_0+\pi}{2}\end{aligned}\tag{12}$$

を得る。積分変数の関係を整理すると

r	R	$\to$	$r_{\min}$
$\frac{1}{R}\frac{dr}{d\theta}$	$-\cot\theta_0,\ (<0)$	$\to$	0
t	0	$\to$	$\cos\theta_0$
η	0	$\to$	1
θ	θ_0	$\to$	$\theta_1=(\theta_0+\pi)/2$

$1-(r_{\min}/R)^2=\cos\theta_0=1-2\sin^2(\theta_0/2)$

$\therefore\quad r_{\min}=\sqrt{2}\,R\sin(\theta_0/2)\ \ (\le R,$ 等号 $\theta_0=\pi/2\,)$

$R\to r_{\min}$ では $\frac{dr}{d\theta}<0$ であるが、$r_{\min}\to R$ では $\frac{dr}{d\theta}>0$ となり、積分(9)の右辺で符号を変える必要がある。

r	R	$\to$	$r_{\min}$	$\to$	R
$\frac{dr}{d\theta}$		<0	0	>0	
θ	θ_0	$\to$	θ_1	$\to$	θ_2

$$\int_R^{r_{\min}}\left|\frac{dr}{d\theta}\right|d\theta=-\int_{\theta_0}^{\theta_1}d\theta,\quad\int_{r_{\min}}^{R}\left|\frac{dr}{d\theta}\right|dr=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta,\quad\therefore\ \theta_1-\theta_0=\frac{\pi-\theta_0}{2}=\theta_2-\theta_1,\quad\therefore\ \theta_2=\pi$$

以上より、球(Luneberg lens)に北極方向から軸に平行に入射した光は南極に集まることが分かる。
変数ηを rで表し、光路曲線を求めてみよう。

$$\begin{aligned}t&=\frac{2c\eta}{1+\eta^2}\\0&=\eta^2-2(c/t)\,\eta+1\\\eta&=\frac{c-\sqrt{c^2-t^2}}{t},\quad\left(\eta\xrightarrow[t\to0]{}0\right)\\&=\frac{\cos\theta_0-\sqrt{\cos^2\theta_0-[1-(r/R)^2]^2}}{1-(r/R)^2}\end{aligned}$$

$\theta_0\le\theta\le\theta_1=\frac{\pi+\theta_0}{2}$ では

$$\begin{aligned}&c-\sqrt{c^2-t^2}=t\,(c-s\cot\theta),\quad c\equiv\cos\theta_0,\ s\equiv\sin\theta_0\\&\{c(1-t)+t\,s\cot\theta\}^2=c^2-t^2\\&c^2(t^2-2t)+t^2+2\,s\,c\,t\,(1-t)\cot\theta+t^2s^2\cot^2\theta=0\\&c^2(t-2)+t+2\,s\,c\,(1-t)\cot\theta+t\,s^2\cot^2\theta=0\\&(1-t)\,(-c^2-1+2\,s\,c\cot\theta-s^2\cot^2\theta)=c^2-1-s^2\cot^2\theta\\&(1-t)\,\{1+(c-s\cot\theta)^2\}=s^2(1+\cot^2\theta)=s^2/\sin^2\theta\\&(r/R)^2=\frac{1}{1+(\cos\theta_0-\sin\theta_0\cot\theta)}\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r&=\frac{R}{\sqrt{1+(\cos\theta_0-\sin\theta_0\cot\theta)}}\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\right)\\&=\frac{R\sin\theta_0}{\sin\theta\sqrt{1+\sin(\theta-\theta_0)/\sin\theta}},\qquad\begin{array}{c|ccc}\theta&\theta_0&\to&\theta_1\\\hline r&R&\to&r_{\min}\end{array}\end{aligned}$$ を確認できる

$\theta\ge\theta_1$ の光路は直線 $\theta=\theta_1$ で軸対称に折り返したものとなる。