単位球面から平面への立体射影

単位球面Sから平面Hへの立体射影は次式で与えられる。

$$\vec{n}=(x,y,z)\in S\,,(|\vec{n}\,|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1)\ \Longrightarrow\ (\xi,\eta)=(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z})$$

球面上の微小円の像

球面S上の微小円の平面H上での像を考えよう。

平面H上にあって$\vec{n}$と垂直な単位ベクトルを$\vec{t}$、$\vec{n}$とZ軸を含む平面上にあって、$\vec{n}$に垂直な単位ベクトルを$\vec{s}$とすると

$$\begin{aligned}
\vec{t}=\frac{\vec{i_z}\times\vec{n}}{|\vec{i_z}\times\vec{n}\,|}\ &=\ (\frac{-y}{w},\frac{x}{w},0),\quad w=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-z^2}\\
\vec{s}=\frac{\vec{t}\times\vec{n}}{|\vec{t}\times\vec{n}\,|}\ &=\ (\frac{x\,z}{w},\frac{y\,z}{w},\frac{-x^2-y^2}{w})=(\frac{x\,z}{w},\frac{y\,z}{w},-w),\quad (\,|\vec{t}\times\vec{n}\,|=1\text{ に注意}\,)
\end{aligned}$$

$\vec{n}$を中心とする微小円は、εを微小量として

$$\vec{n}+\varepsilon(\vec{s}\,\cos\phi+\vec{t}\,\sin\phi)\ =\ \vec{n}+\varepsilon/w\begin{pmatrix} z\,x\cos\phi-y\sin\phi\\ z\,y\cos\phi+x\sin\phi\\ -w^2\cos\phi\end{pmatrix},\quad 0\leqslant\phi<2\,\pi$$

と表せる。立体射影による像は

$$\vec{n}+\Delta\vec{n}\quad\Longrightarrow\quad(\xi+\Delta\xi,\eta+\Delta\eta)$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\Delta\xi\\ \Delta\eta\end{pmatrix}\ &\Rightarrow\ \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+\frac{\Delta z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\
&=\ \frac{\varepsilon}{1-z}\left\{1/w\begin{pmatrix}z\,x\cos\phi-y\sin\phi\\ z\,y\cos\phi+x\sin\phi\end{pmatrix}+\frac{-w\cos\phi}{1-z}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}\\
&=\ \frac{\varepsilon}{(1-z)\,w}\begin{pmatrix}-x\cos\phi-y\sin\phi\\ -y\cos\phi+x\sin\phi\end{pmatrix},\quad \frac{z(1-z)-w^2}{w\,(1-z)}=-1/w\text{ に注意}\\
&=\ \frac{\varepsilon}{1-z}\{-\vec{e}_1\cos\phi+\vec{e}_2\sin\phi\},\quad \vec{e}_1=\frac{1}{w}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\frac{1}{w}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix},\quad \vec{e}_1\perp\vec{e}_2,\quad |\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1
\end{aligned}$$

これより、球面上Sの半径 ε の微小円は、半径 $\varepsilon/(1-z)$ の微小円に写されることが分かる。

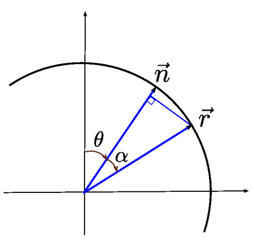
微小円が微小円に写されることから、球面上の一般の円も円に写されることが類推される。次にこれを直接示すことにしよう。

球面上の円の像

単位球面上の円の表現を考えよう。一般に、動径ベクトル$\vec{r}$を単位ベクトル$\vec{n}$方向に右ネジ回りに角度ϕだけ回転させた結果$\vec{r_\phi}$は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\vec{r}\ &\Rightarrow\ \vec{r_\phi}\\
&=\ (\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n}+\{\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n}\,\}\cos\phi+(\vec{n}\times\vec{r}\,)\sin\phi \qquad (1)
\end{aligned}$$

$\vec{r}$として単位ベクトルを選べば、その終点は 球面上の円を描く。$\vec{r}$,$\vec{n}$ をZX平面上に選んでも一般性を失わないので、



$$\vec{n}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ 0\\ \cos\theta\end{pmatrix},\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}\sin(\theta+\alpha)\\ 0\\ \cos(\theta+\alpha)\end{pmatrix}$$

と選ぶことにする。

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\cdot\vec{n} &= \cos\alpha \\
\vec{n}\times\vec{r} &= (0, \cos\theta\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta\cos(\theta+\alpha), 0)^t \\
&= (0, \sin\alpha, 0)^t \\
\vec{r} - (\vec{r}\cdot\vec{n})\vec{n} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta+\alpha) \\ 0 \\ \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix} - \cos\alpha \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

に注意すると、(1)式に従って

$$
\begin{aligned}
\vec{r_\phi} &= \cos\alpha \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \cos\phi\sin\alpha \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix} + \sin\phi \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha\sin\theta + \cos\phi\sin\alpha\cos\theta \\ \sin\phi\sin\alpha \\ \cos\alpha\cos\theta - \cos\phi\sin\alpha\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1c_2 + c_1s_2\cos\phi \\ s_2\sin\phi \\ c_1c_2 - s_1s_2\cos\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

θ, αは固定して考えているので、

$$
\begin{cases} \cos\theta = c_1 \\ \sin\theta = s_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos\alpha = c_2 \\ \sin\alpha = s_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(\theta+\alpha) = c_+ \\ \sin(\theta+\alpha) = s_+ \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos(\theta-\alpha) = c_- \\ \sin(\theta-\alpha) = s_- \end{cases}.
$$

は定数である。立体射影により $\vec{r_\phi}$ は

$$
\begin{aligned}
\vec{r_\phi} &\Rightarrow (\xi_\phi, \eta_\phi) \\
&= \frac{1}{1 - c_1c_2 + s_1s_2\cos\phi}(s_1c_2 + c_1s_2\cos\phi,\ s_2\sin\phi)
\end{aligned}
$$

と写される。(ξ_ϕ, η_ϕ) が円のパラメータ表示を与えていることを示そう。

$\phi = 0, \pi$ でのξの値は

$$
\xi_0 = \frac{s_1c_2 + c_1s_2}{1 - c_1c_2 + s_1s_2} = \frac{s_+}{1 - c_+}, \quad \xi_\pi = \frac{s_1c_2 - c_1s_2}{1 - c_1c_2 - s_1s_2} = \frac{s_-}{1 - c_-}.
$$

となり、さらに

$$
\begin{aligned}
a \overset{\text{def}}{=} \frac{\xi_0 + \xi_\pi}{2} &= \frac{s_+ + s_- - s_+c_- - c_+s_-}{(1 - c_+)(1 - c_-)} \\
&= \frac{2s_1}{c_2 - c_1} \\
\rho \overset{\text{def}}{=} \frac{\xi_\pi - \xi_0}{2} &= \frac{s_- - s_+ + s_+c_- - c_+s_-}{(1 - c_+)(1 - c_-)} \\
&= \frac{2s_2}{c_2 - c_1}
\end{aligned}
$$

と計算できる。分子、分母の計算は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
s_- - s_+ + s_+c_- - c_+s_- &= -2c_1s_2 + \sin(2\alpha) = -2c_1s_2 + 2s_2c_2 \\
&= 2s_2(c_2 - c_1) \\
s_+ + s_- - s_+c_- - c_+s_- &= 2s_1c_2 - \sin(2\theta) = 2s_1c_2 - 2s_1c_1 \\
&= 2s_1(c_2 - c_1) \\
(1 - c_+)(1 - c_-) &= 1 - c_+ - c_- + c_+c_- \\
&= 1 - 2c_1c_2 + (c_1^2c_2^2 - s_1^2s_2^2) \\
&= 1 - 2c_1c_2 + c_1^2c_2^2 - (1 - c_1^2)(1 - c_2^2) \\
&= c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \\
&= (c_1 - c_2)^2
\end{aligned}
$$

さて、以上より

$$(\xi_\phi - a)^2 + \eta_\phi^2 = \rho^2$$

を示せばよい。

gnuplotのコード “sp1.plot”

```
set parametric
set size square
d2r=pi/180.0
c1=cos(30.0*d2r)
s1=sin(30.0*d2r)
den(a,t,n)=1-c1*cos(n*a)+s1*sin(n*a)*cos(t)
xn(a,t,n)=s1*cos(n*a)+c1*sin(n*a)*cos(t)
yn(a,t,n)=sin(n*a)*sin(t)
w=5.0*d2r
x1(t)=xn(w,t,1)/den(w,t,1)
y1(t)=yn(w,t,1)/den(w,t,1)
x2(t)=xn(w,t,2)/den(w,t,2)
y2(t)=yn(w,t,2)/den(w,t,2)
x3(t)=xn(w,t,3)/den(w,t,3)
y3(t)=yn(w,t,3)/den(w,t,3)
set xrange [2.0:8.0]
set yrange [-3.0:3.0]
plot [0:2*pi] x1(t), y1(t), x2(t),y2(t), x3(t), y3(t)
```

```
  This is a TeXmacs interface for GNUplot.
GNUplot] load "/home/dhoshu/study/phys/memo/gravity/tm/sp1.plot"
```