

■ 測地線方程式 (p.161)

x_A から x_B への経路に対する固有時間 τ_{AB}

$$\begin{aligned}\tau_{AB} &= \int_0^1 d\sigma L(x(\sigma), \dot{x}(\sigma)), \quad x(\sigma=0)=x_A, \quad x(\sigma=1)=x_B, \quad \cdot \equiv \frac{d}{d\sigma} \\ &= \int_0^1 d\sigma (-g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{1/2}, \quad L(x(\sigma), \dot{x}(\sigma)) = (-g_{\alpha\beta}(x(\sigma)) \dot{x}^\alpha(\sigma) \dot{x}^\beta(\sigma))^{1/2}\end{aligned}\quad (1)$$

τ_{AB} に関して Lagrange 方程式を立てる。

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{-1}{L} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{-1}{2L} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \\ \therefore \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \right) &= \frac{1}{2L} \partial_\alpha (g_{\beta\gamma}) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma\end{aligned}\quad (3)$$

$\frac{d\sigma}{d\tau} = L^{-1}$ に注意し、 L^{-1} を両辺に掛けると

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} u^\beta) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma}) u^\beta u^\gamma, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (4)$$

左辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} (g_{\alpha\beta} u^\beta) &= g_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau} + (\partial_\gamma g_{\alpha\beta}) u^\beta u^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma}) u^\beta u^\gamma\end{aligned}\quad (5)$$

したがって

$$g_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) u^\beta u^\gamma = 0 \quad (6)$$

ここで次の Christoffel 記号を導入する。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma}) \\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= g^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (\partial_\gamma g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\rho\gamma} - \partial_\rho g_{\beta\gamma})\end{aligned}$$

($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$) は添字に関して次の対称性を持つことに注意。

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$$

Christoffel 記号を使うと、(6) は

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma = 0, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (7)$$

■ 例 8.7

二次元ユークリッド平面で（敢えて）極座標を取って測地線を考える。

$$(dS)^2 = (dr)^2 + (r d\phi)^2 \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$\{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\}$ のうち 0 でない成分を書き出すと

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}$$

方程式 (7) より $\dot{} \equiv \frac{d}{dS}$ として次の方程式を得る。

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r} &= 0\end{aligned}$$

しかし、上の方程式を扱うよりは(8)から得られる保存則

$$(\dot{r})^2 + (r\dot{\phi})^2 = 1 \tag{9}$$

と、計量が ϕ に依存しない ($\partial_\phi g_{\alpha\beta} = 0$)ことから (4) から得られる保存則

$$r^2 \dot{\phi} = \ell (= \text{const.}) \tag{10}$$

を使う方が易しい。