

□ 9.4 p.189～：光の経路

光の経路はパラメータ λ によって

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (1)$$

$$\ell = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda} \Rightarrow \ell = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$(\text{ヌル条件}) \Rightarrow 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (3)$$

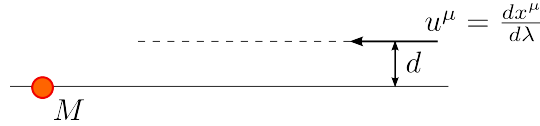
第一、二式の保存則は固有時間 τ がパラメータ λ に変わっていることを除いては、粒子の場合に同じ。

第一、二式を第三式に代入して

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\ell^2}{r^2}$$

$$\therefore \left(\frac{e}{\ell}\right)^2 = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (4)$$

$|\ell/e|$ は衝突パラメータ d に等しい。



実際、 $r \gg M$ において¹

$$\phi \approx d/r, \quad \frac{d\phi}{dr} \approx -\frac{d}{r^2} \quad \text{一方} \quad \left| \frac{d\phi}{dr} \right| = \frac{|d\phi/d\lambda|}{|dr/d\lambda|} \stackrel{r \gg M}{\approx} \frac{\ell/r^2}{e}, \quad \therefore d = \frac{\ell}{e}$$

したがって式(4)は

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{\text{eff}}(r), \quad W_{\text{eff}}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (5)$$

$$W'_{\text{eff}}(r) = \frac{-2}{r^4} (r - 3M), \quad W'_{\text{eff}}(r) = 0 \Rightarrow r = 3M$$

r	0	$2M$	$3M$	∞
W_{eff}	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{1}{27M^2} \text{ (極大)}$	$\searrow 0$

■ 例9.2 p.193 どれだけの光が無遠慮に脱出できるか

赤道面($\theta = \pi/2$)上、半径 R , ($2M < R < 3M$) の位置にいる観測者が赤道面に沿って、半径方向から角度 ψ 方向に外側に向かって光線を放つ。

観測者の位置の正規直交基底は、

$$\{e_{\hat{\alpha}}\} = \{e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}\}, \quad \begin{cases} e_{\hat{t}} = ((g_{tt})^{-1/2}, 0, 0, 0) \\ e_{\hat{r}} = (0, (g_{rr})^{-1/2}, 0, 0) \\ e_{\hat{\theta}} = (0, 0, (g_{\theta\theta})^{-1/2}, 0) \\ e_{\hat{\phi}} = (0, 0, 0, (g_{\phi\phi})^{-1/2}) \end{cases} \quad \begin{cases} \leftarrow g_{rr} = \frac{1}{1 - 2M/r} = -g_{tt}^{-1} \\ \leftarrow g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} = R^2, \quad (\theta = \pi/2) \end{cases}$$

1. 少し脱線して、光ではなく物質粒子の場合は

$$\phi \approx d/r, \quad \frac{d\phi}{dr} \approx -\frac{d}{r^2} \quad \text{一方} \quad \left| \frac{d\phi}{dr} \right| = \frac{|d\phi/d\tau|}{|dr/d\tau|} \stackrel{r \gg M}{\approx} \frac{\ell/r^2}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad \therefore d = \frac{\ell}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

光線の方向ベクトルを $\mathbf{u} = \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right)$, $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \phi)$ とすると、次に示す ψ, R と衝突パラメータ d の関係を得る。

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\hat{\phi}}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\hat{r}}} = \frac{g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} (g_{\phi\phi})^{-1/2}}{g_{rr} \frac{dr}{d\lambda} (g_{rr})^{-1/2}} = \frac{R \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)}{\frac{1}{\sqrt{1-2M/R}} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)} \\ &= \frac{R \cdot R^{-2} \ell}{\frac{1}{\sqrt{1-2M/R}} \cdot \ell \sqrt{1/d^2 - W_{\text{eff}}(R)}} \\ &= \frac{\sqrt{1-2M/R}}{R \sqrt{1/d^2 - W_{\text{eff}}(R)}} \end{aligned}$$

R を固定して考えると ($2M < R \leq 3M \Rightarrow 0 < W_{\text{eff}}(R) \leq \frac{1}{27M^2}$ であることに注意して)

$$\left. \begin{array}{c|c} \psi & 0 \nearrow \psi_{\text{crit}} \nearrow \pi/2 \\ d & 0 \nearrow \sqrt{27}M \nearrow \frac{1}{\sqrt{W_{\text{eff}}(R)}} \end{array} \right\}, \quad \tan \psi_{\text{crit}} = \frac{\sqrt{1-2M/R}}{R \sqrt{\frac{1}{27M^2} - W_{\text{eff}}(R)}}$$

ここで ψ_{crit} は $d = \sqrt{27}M$ に対応する。

角度 ψ を $0 \rightarrow \psi_{\text{crit}}$ と広げていくとき、 $\frac{1}{d^2}$ は次第に減少して、角度 ψ_{crit} で $W_{\text{eff}}(r)$ の極大値 $W_{\text{eff}}(3M) = \frac{1}{27M^2}$ と等しくなり、角度 ψ_{crit} を超えると光線はポテンシャル W_{eff} の壁に阻まれて外側に出られなくなる。

この議論を $R > 3M$ の側で考えると、半径方向と ψ の角度で内側（中心方向）に向けて光線を放つとき、 ψ_{crit} を超えると中心に補足されなくなり、光線は角度を変えて無限遠へ向かうことが分かる。

■ 光の湾曲

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{\frac{d\phi}{d\lambda}}{\frac{dr}{d\lambda}} = \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\pm \ell \sqrt{1/d^2 - W_{\text{eff}}(r)}} \\ &= \frac{\pm 1}{r^2 \sqrt{1/d^2 - W_{\text{eff}}(r)}}, \quad W_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \end{aligned}$$

衝突パラメータが

$$1/d^2 < 1/(27M^2), \text{ i.e. } d > \sqrt{27}M$$

である場合に、

$$1/d^2 - W_{\text{eff}}(r) = 0$$

は $r > 0$ で実数解の一つを持つ（解を $r = r_1$ とする）。

このとき無限遠から来た光は方向を中心質量により方向を曲げられて無限遠に飛び去る。無限遠から無限遠に至る位置の全角度変化を $\Delta\phi$ とすると

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\phi}{dr} dr \\ &= 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1/d^2 - W_{\text{eff}}(r)}} \\ &= 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{dr/d}{(r/d)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{d}{r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2M}{d}\right)\left(\frac{d}{r}\right)\right]}} \\ w = \frac{d}{r} \rightarrow &= 2 \int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2(1 - 2aw)}}, \quad a \equiv \frac{M}{d} \end{aligned}$$

相対論的効果がどこに入っているかを考えてみよう。大雑把には

$$a = \frac{M}{d} \xrightarrow{(c, G \text{ を復活})} d \times \frac{GM}{d^2} \times \frac{1}{c^2} \ll 1, \quad \Rightarrow \quad w_1 = d/r_1 \approx 1$$

$a \ll 1$ の下で被積分関数を次のように近似する。（物質粒子の場合と同様の計算法）

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-w^2(1-2aw)}} &= \frac{1}{\sqrt{1-2aw}} \frac{1}{\sqrt{(1-2aw)^{-1}-w^2}} \\ &= \frac{1+aw}{\sqrt{1+2aw-w^2}} + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2aw-w^2}} + \frac{aw}{\sqrt{1-w^2}} + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+2aw-w^2 &\equiv (w+w_2)(w_1-w) \\ &\approx [w+(1-a)][(1+a)-w], \quad w_1 \approx 1+a, \quad w_2 \approx 1-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= \sqrt{\frac{w_1-w}{w+w_2}}, \quad 1+z^2 = \frac{w_1+w_2}{w+w_2}, \quad \frac{w}{z} \Big|_{\sqrt{w_1/w_2}}^0 \nearrow \frac{w_1}{0} \\ \frac{dz}{dw} &= \frac{1}{2z} \cdot \frac{-(w+w_2)-(w_1-w)}{(w+w_2)^2} = \frac{-1}{2z} \cdot \frac{w_1+w_2}{(w+w_2)^2} \\ &= \frac{-(1+z^2)}{2z(w+w_2)} \\ &= \frac{-(1+z^2)}{2\sqrt{(w_1-w)(w+w_2)}} = \frac{-(1+z^2)}{2\sqrt{1+2aw-w^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{1+2aw-w^2}} &= 2 \int_0^{\sqrt{w_1/w_2}} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= 2 \left[\arctan z \right]_0^{\sqrt{w_1/w_2}} \\ &= 2 \arctan(\sqrt{w_1/w_2}) \\ &\leftarrow \sqrt{w_1/w_2} \approx \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \approx 1+a, \quad \arctan(1+a) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + a + \mathcal{O}(a^2) \\ \int_0^{w_1} \frac{w dw}{\sqrt{1-w^2}} &= \left[-\sqrt{1-w^2} \right]_0^{w_1} = -\sqrt{1-w_1^2} \\ &= 1 + \mathcal{O}(a)\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 2 \int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2(1-2aw)}} \\ &= 2 \int_0^{w_1} \left[\frac{1}{\sqrt{1+2aw-w^2}} + \frac{aw}{\sqrt{1-w^2}} + \mathcal{O}(a^2) \right] dw \\ &= 2 \left[\frac{\pi}{2} + 2a + \mathcal{O}(a^2) \right] = \pi + 4a \\ &= \pi + \frac{4M}{d}\end{aligned}$$

$\Delta\phi$ は位置に関する角度変化なので、光線の方向変化を $\delta\phi$ とすると

$$\delta\phi = \Delta\phi - \pi = \frac{4M}{d} + (\text{ } M/d \text{ の高次項 })$$

太陽の縁をかすめる光線の場合、

$$w_1 = \frac{d}{R_s} \approx 1 + \frac{M_s}{d}, \quad d \approx R + M_s$$

光線の方向変化は単位をMKS単位に戻して計算すると

$$\phi \approx \frac{4GM}{c^2 d} \approx \frac{4GM}{c^2 R_s} \approx 8.49 \times 10^{-6} (\text{rad}) \approx 1.75 (\text{秒角})$$