■ 測地線方程式（p.161）

x_A から x_B への経路に対する固有時間 τ_{AB}

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{AB}} &= \int_0^1 d\sigma\, L(x(\sigma),\dot{x}(\sigma)), \quad x(\sigma=0)=x_A,\ x(\sigma=1)=x_B, \quad \dot{} \equiv \frac{d}{d\sigma} \\ &= \int_0^1 d\sigma\, (-g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta)^{1/2}, \quad L(x(\sigma),\dot{x}(\sigma)) = (\,-g_{\alpha\beta}(x(\sigma))\,\dot{x}^\alpha(\sigma)\,\dot{x}^\beta(\sigma)\,)^{1/2} \end{aligned} \tag{1}$$

τ_{AB} に関して Lagrange方程式を立てる。

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} &= \frac{-1}{L}\, g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{-1}{2\,L}\,\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\,\dot{x}^\beta\,\dot{x}^\gamma \\ \therefore \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{L}\, g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^\beta\right) &= \frac{1}{2\,L}\,\partial_\alpha(g_{\beta\gamma})\,\dot{x}^\beta\,\dot{x}^\gamma \end{aligned} \tag{3}$$

$\frac{d\sigma}{d\tau} = L^{-1}$ に注意し、L^{-1}を両辺に掛けると

$$\frac{d}{d\tau}\,(g_{\alpha\beta}\,u^\beta) = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{4}$$

左辺は

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\,(g_{\alpha\beta}\,u^\beta) &= g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{d\tau} + (\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta})\,u^\beta\,u^\gamma \\ &= g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2}\,(\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma \end{aligned} \tag{5}$$

したがって

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{du^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2}\,(\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma \;=\; 0 \tag{6}$$

ここで次の Christoffel記号 を導入する。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} &\equiv \frac{1}{2}\,(\partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} + \partial_\beta\,g_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma}) \\ \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} &= g^{\alpha\rho}\,\Gamma_{\rho\beta\gamma} \;= \frac{1}{2}\,g^{\alpha\rho}\,(\partial_\gamma\,g_{\rho\beta} + \partial_\beta\,g_{\rho\gamma} - \partial_\rho\,g_{\beta\gamma}) \end{aligned}$$

$(\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma})$ は添字に関して次の対称性を持つことに注意。

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}$$

Christofffel記号を使うと、(6) は

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}u^\beta\,u^\gamma = 0, \quad u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{7}$$

また、測地線に沿って、$\boldsymbol{u} = (u^\alpha)$ のノルムは保存する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\,(u_\alpha\,u^\alpha) &= \frac{d}{d\tau}\,(g_{\alpha\beta}\,u^\alpha\,u^\beta) \\ &= \frac{d}{d\tau}\,(g_{\alpha\beta}\,u^\beta)\,u^\alpha + (g_{\alpha\beta}\,u^\beta)\,\frac{du^\alpha}{d\tau} \\ (4) \nearrow \quad &= \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma\,u^\alpha - (g_{\alpha\beta}\,u^\beta)\,\Gamma^\alpha{}_{\rho\gamma}u^\rho\,u^\gamma \\ &= \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})\,u^\beta\,u^\gamma\,u^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\,u^\alpha\,u^\beta\,u^\gamma \\ &= \frac{1}{2}\,[(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma}) - (\partial_\beta\,g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma\,g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\,g_{\beta\gamma})]\,u^\alpha\,u^\beta\,u^\gamma \\ &= [(\partial_\alpha\,g_{\beta\gamma}) - (\partial_\gamma\,g_{\beta\alpha})]\,u^\alpha\,u^\beta\,u^\gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

■ **例8.7**

二次元ユークリッド平面で（敢えて）極座標を取って測地線を考える。

$$(dS)^2=(dr)^2+(r\,d\phi)^2 \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\phi} \\ g_{\phi r} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$\{\Gamma^{\alpha}{}_{\beta}\}$ のうち 0でない成分を書き出すと

$$\Gamma^{r}{}_{\phi\phi}=-r, \quad \Gamma^{\phi}{}_{r\phi}=\Gamma^{\phi}{}_{\phi r}=\frac{1}{r}$$

方程式 (7) より $\dot{} \equiv \frac{d}{dS}$ として次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{r}-r\phi^2 &= 0 \\ \ddot{\phi}+2\,\frac{\dot{r}\,\dot{\phi}}{r} &= 0 \end{aligned}$$

しかし、上の方程式を扱うよりは(8)から得られる保存則

$$(\dot{r})^2+\left(r\,\dot{\phi}\right)^2=1 \tag{9}$$

と、計量が ϕ に依存しない $(\partial_{\phi}\,g_{\alpha\beta}=0)$ことから (4) から得られる保存則

$$r^2\,\dot{\phi}=\ell\,(=\text{const.}) \tag{10}$$

を使う方が易しい。