9.2 p.176-177 の説明は今ひとつしっくりと来ない。

光のヌル測地線 $x(\sigma)$ のアフィンパラメータを σ とし測地線の接線ベクトルを s^μ とする。

測地線に沿った関数微分は

$$\frac{d}{d\sigma} f(x(\sigma)) = s^\mu(\sigma)\,(\partial_\mu f)(x(\sigma)), \quad s^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$$

光子の4元運動量 $\boldsymbol{p} = (p^\mu)$=4元波数ベクトルは光のヌル測地線に沿って平行移動するものと考えられる。

$$s^\nu\,\nabla_\nu p^\mu = \frac{dp^\mu}{d\sigma} + s^\rho\,\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\,p^\sigma = 0$$

（変分原理から測地線方程式を導いた過程を逆に辿ると）

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}(g_{\mu\nu}p^\nu) &= s^\rho\,(\partial_\rho g_{\mu\nu})\,p^\nu + g_{\mu\nu}\frac{dp^\nu}{d\sigma} \\
&= s^\rho\,(\partial_\rho g_{\mu\nu})\,p^\nu - s^\rho\,\Gamma_{\mu\rho\sigma}\,p^\sigma \\
&= \left\{(\partial_\rho g_{\mu\sigma}) - \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\rho} + \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\mu g_{\rho\sigma})\right\} s^\rho\,p^\sigma \\
&= \frac{1}{2}\{(\partial_\mu g_{\rho\sigma}) + (\partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho})\}\,s^\rho\,p^\sigma \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\rho\sigma})\,s^\rho\,p^\sigma + \frac{1}{2}(\partial_\rho g_{\mu\sigma})\,(s^\rho\,p^\sigma - s^\sigma\,p^\rho)
\end{aligned}$$

ヌル測地線の接ベクトルと光子の波数ベクトルは平行なので最後の項は落ちる。したがって

$$\frac{d}{d\sigma}(g_{\mu\nu}p^\nu) = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\rho\sigma})\,s^\rho\,p^\sigma$$

Schwarzschild幾何学の場合、計量は時間座標 t に依存しないので、

$$g_{tt}\,p^t = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)p^t = \text{const.} \equiv -p^t_\infty$$

静止観測者の系を表現するtetrad を

$$\{\boldsymbol{e}_a = (e_a)^\mu\}, a = 0,1,2,3, \quad \boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{e}_b = g_{\mu\nu}\,e^\mu_a\,e^\nu_b = \eta_{ab}$$

とする。Hartleのテキストでは $\boldsymbol{e}_0$ を $\boldsymbol{u}_{\text{obs}}$ と記している。

観測者が測定するエネルギー（振動数）は、（ $p^\mu = \hat{p}^a\,e^\mu_a$ と展開した $\hat{p}^0 = -\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{p}$）

$$\begin{aligned}
h\,\omega &= -e_0\cdot p, \quad (e^\mu_0) = \big(|g_{tt}|^{-1/2}, 0, 0, 0\big) \\
&= -g_{tt}\,|g_{tt}|^{-1/2}\,p^t \\
&= |g_{tt}|^{-1/2}\,p^t_\infty \\
\therefore\quad \omega_\infty &= |g_{tt}|^{1/2}\,\omega = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}\omega, \quad p^t_\infty = h\,\omega_\infty
\end{aligned}$$

発光源が質量中心の近く（半径 R）であるとするとき、その光を遠くで観測する観測者には振動数が小さく観測される。（重力赤方偏移）