波数ベクトルの変換性

この本では波数ベクトル$\boldsymbol{k}=(w,\vec{k})$の変換性を、4元運動量$\boldsymbol{p}$との量子論的な関係$\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$を持ち出すことによって暗黙のうちに導入している。

波数ベクトルが4元ベクトルになることは、波数ベクトル$\vec{k}$を持つ平面波の位相が$\vec{k}$の垂直面において同期(一致)しているとするとき、時空点$\boldsymbol{x}=(t,\vec{x})$での振動子の位相が時空原点$(0,0)$での振動子の位相に対して

$$-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$$

だけ進んでおり、時空点での位相は固有な事象なので座標系に依らず不変な意味を持つ、つまり$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$がスカラー量であることから導かれる。

以下では運動方向を一次元的としてローレンツブーストに対する波数ベクトル$(\omega,\quad k)$の変換性をもう少し直接的な議論から導いてみよう。

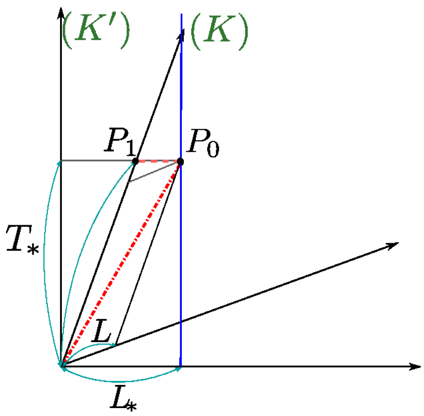
振動源が座標原点にある慣性系をKとする。波は振動源から速度v, 波数ベクトル$(\omega,\quad k)$で伝播する。ここで$kv=\omega$.

上記の振動源に対して速度$-V$で移動する慣性系をK'とする。K系とK'系の間の座標変換は

$$K:(t,x)\longleftrightarrow K':(t',x')\,,\quad \begin{cases} t' &=\gamma(t+Vx)\\ x' &=\gamma(x+Vt)\end{cases}\,,\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\,.$$

波数の変換：

K'系で波数ベクトルがどのようになるかを考えよう。



K系で時刻0で原点から進んだ波は距離L進んで時空点P_0に達する。

$$K:P_0(L/v,L)\longleftrightarrow K':P_0(T_*,L_*)\,,\quad \begin{cases} T_* &=\gamma(1/v+V)\,L\\ L_* &=\gamma(1+V/v)\,L\end{cases}\,.$$

K'系では波の先頭がP_0に到達した同時刻に振動源はP_1に位置する。P_1のK系での時刻を$\tilde{T}$とすると

$$K:P_1(\tilde{T},0)\longleftrightarrow K':P_1(T_*,VT_*),\quad \tilde{T}=\gamma\,(T_*-V(VT_*))=\frac{1}{\gamma}T_*=(1/v+V)\,L \tag{1}$$

K'系でP_0P_1間に横たわる波には、$\omega\tilde{T}=\frac{\omega}{\gamma}T_*$ 回の振動が刻まれているはずである。

K'系でのP_0P_1間の距離は

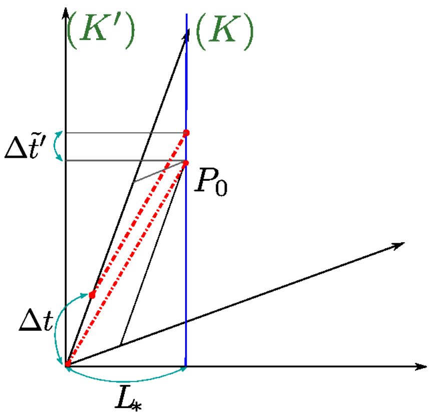
$$L_*-VT_*=\gamma L\{(1+V/v)-(1/v+V)\,V\}=\frac{1}{\gamma}L. \tag{2}$$

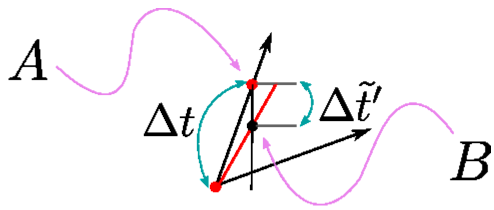
なのでK'系での波数をk'とすると(1), (2)より次式を得る。

$$\begin{aligned}\omega\tilde{T}=(L_*-VT_*)\,k' &\implies \gamma\,(1/v+V)\,\omega=k'\\ &\implies \gamma\,(k+V\omega)=k',\quad \because\quad \omega/v=k\end{aligned} \tag{3}$$

振動数の変換：

K'系で原点から空間距離L_*離れた地点で波の山をカウントしよう。





上の図において、P_0から始まる$\boldsymbol{K'}$**系での**$\boldsymbol{\Delta\tilde{t}'}$**間の時間の間に**$\boldsymbol{\omega\Delta t}$**回の振動をカウントするはずである。**したがってK'系での振動数をω'とすると

$$\omega'\,\Delta\tilde{t}' = \omega\,\Delta t. \tag{4}$$

$\Delta\tilde{t}'$は右図のAB間のK'での時間間隔に等しい。

$$K\colon A(\Delta t, 0) \longleftrightarrow K'\colon A(\gamma\Delta t, \gamma V\Delta t)$$

Bの座標はK系での時刻をΔt_2とすると

$$K\colon B(\Delta t_2, v\,\Delta t_2) \longleftrightarrow K'\colon B(\gamma\Delta t - \Delta\tilde{t}', \gamma V\,\Delta t)$$

これよりΔt_2を消去すると

$$\begin{aligned}
&v\,\Delta t_2 = v\gamma\left\{(\gamma\Delta t - \Delta\tilde{t}') - \gamma V^2\Delta t\right\} = \gamma\left\{\gamma V\Delta t - V(\gamma\Delta t - \Delta\tilde{t}')\right\}\\
&\Longrightarrow\quad \gamma v\,(1-V^2)\,\Delta t = (v+V)\Delta\tilde{t}',\quad 1-V^2=\gamma^{-2}\\
&\Longrightarrow\quad \Delta\tilde{t}' = \frac{v}{\gamma(v+V)}\,\Delta t.
\end{aligned}$$

これを(4)に代入すると

$$\begin{aligned}
\omega' &= \gamma\,(1+V/v)\,\omega\\
&= \gamma\,(\omega+Vk)\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

式(3)と(5)は波数ベクトル(ω, k)がローレンツ変換に従うことを示している。