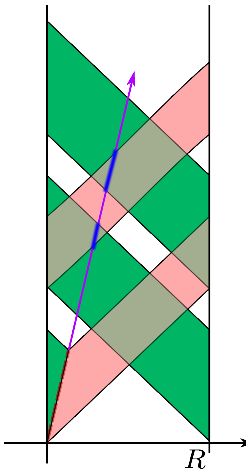
Sagnac効果（p.151 問題3）

半径R上のリングの上を干渉計が角速度Ωで回転している。干渉計からは両側にリングに沿って光のパルスが放たれ、互いに反対方向に巡って干渉計で検出される。



光源(干渉計)が静止しているときの角振動数をω_0とすると、干渉計が速度vで移動する慣性系では

$$\omega_0|_{(d\tau,0)} \;\longleftrightarrow\; \omega_0|_{(dt,v dt)}, \quad \omega_0\,d\tau=\omega_0\sqrt{1-v^2}\,dt=\omega\,dt$$

干渉計から互いにリングに沿って反対方向に放たれる光パルスの位相は、$\phi=\Omega\,t$のとき定数項を除いて$\omega\,t$となるべきであるから

$$\Psi_+(t,\phi)=\omega\,\frac{t-R\,\phi}{1-R\,\Omega}+C,\quad \Psi_-(t,\phi)=\omega\,\frac{t+R\,\phi}{1+R\,\Omega}+C \tag{1}$$

反対方向に進むパルスが干渉しあう時空点での位相差は

$$\begin{aligned}\Psi_- - \Psi_+ &= \omega\left(\frac{t+R\,\phi_-}{1+R\,\Omega}-\frac{t-R\,\phi_+}{1-R\,\Omega}\right)\\ &= \frac{\omega}{1-(R\,\Omega)^2}\{(1-R\,\Omega)\,(t+R\,\phi_-)-(1+R\,\Omega)\,(t-R\,\phi_+)\}\\ &= \frac{\omega}{1-(R\,\Omega)^2}\{\,R\,(\phi_++\phi_--2\,\Omega\,t)+R^2\,\Omega\,(\phi_+-\phi_-)\,\}\end{aligned} \tag{2}$$

パルスが干渉計で検出されるとき

$$\phi_+=2\,\pi+\Omega\,t,\quad \phi_-=-2\,\pi+\Omega\,t. \tag{3}$$

したがって干渉計で検出される二つの波の位相差は

$$\frac{4\,\pi\,R^2\,\Omega}{1-(R\,\Omega)^2}\cdot\omega \tag{4}$$

干渉計とともに回っている系で

光源・検出器が静止している座標系をとる。$(t,r,\phi)\to(t,r,\phi')$

$$\phi=\phi'+\Omega\,t \tag{5}$$

この座標系での線素は

$$\begin{aligned}ds^2 &= -dt^2+dr^2+r^2\,d\phi^2\\ &= -(1-r^2\,\Omega^2)\,dt^2+dr^2+r^2\,d\phi'^2+2\,r^2\,\Omega\,d\phi\,dt \qquad \Leftarrow\; d\phi=d\phi'+\Omega\,dt\\ &= -\kappa^2(dt-\alpha\,r\,d\phi'/\kappa)\,(dt+r\,d\phi'/(\kappa\,\alpha)),\\ &\quad \begin{cases}\kappa=\sqrt{1-r^2\,\Omega^2}\\ \alpha-1/\alpha=2\,r\,\Omega/\kappa\end{cases}\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= r\,\Omega/\kappa\pm\sqrt{1+(r\,\Omega/\kappa)^2}=\frac{1}{\kappa}\left(r\,\Omega\pm\sqrt{\kappa^2+(r\,\Omega)^2}\right)\\ &= (r\,\Omega\pm 1)/\kappa\\ 1/\alpha(r) &= \kappa/(r\,\Omega\pm 1)=(r\,\Omega\mp 1)\,\kappa/(-\kappa^2)=-(r\,\Omega\mp 1)/\kappa\end{aligned} \tag{7}$$

αとしてはどちらの符号をとるべきか？ 以下では $\alpha = (r\,\Omega + 1)/\kappa > 0$ とする。

半径Rのリング上では

$$r = R\ (\text{一定})\ \Rightarrow\ dr = 0.$$

以下、α, κ は $r = R$ における値とする。

リング上に位置する原点から、反対方向に放たれる光の光路は

$$\kappa\,t - \alpha\,R\,\phi' = 0, \quad \kappa\,t + R\,\phi'/\alpha = 0.$$

原点(光源・干渉計)から互いに逆方向に進む波の位相$\Psi_\pm$は、光源静止系での角振動数をω_0として

$$\Psi_+ = \omega_0\,(\kappa\,t - \alpha\,R\,\phi'_+) + C, \quad \Psi_- = \omega_0\,(\kappa\,t + R\,\phi'_-/\alpha) + C \tag{8}$$

となるだろう。同一時空点で二つの波が干渉する際の位相差は

$$\begin{aligned}\Psi_- - \Psi_+ &= \omega_0\,R\,(\phi'_-/\alpha + \alpha\,\phi'_+)\\ &= \frac{\omega_0\,R}{\kappa}\,\{-(R\,\Omega - 1)\phi_- + (R\,\Omega + 1)\phi'_+\}\\ &= \frac{\omega_0\,R}{\kappa}\,\{(\phi'_+ + \phi'_-) + R\,\Omega\,(\phi'_+ - \phi'_-)\}\end{aligned} \tag{9}$$

光源から反対方向に放たれたパルスが一周して光源にある干渉計で検出されるものとすると、この場合、$\phi'_+ = -\phi'_- = 2\,\pi$. また、元々の慣性系での角振動数は$\omega = \omega_0\,\kappa$

したがって検出される位相差は

$$4\,\pi\,R^2\,\Omega\,\omega/\kappa^2 = \frac{4\,\pi\,R^2\,\Omega}{1 - (R\,\Omega)^2}\cdot\omega \tag{10}$$