■ **Exer12-18 (p.258)**

球対称に崩壊する球殻についての時空幾何学を知るには、球対称ではあるが時間に依存するEinstein方程式の解を考える必要がある。その結果が問題の仮定のようになるのかはここでは考えない。

球面上の変化は考えず、半径方向の変化のみを考える。また、時間、長さは$2M$を単位として測ることにする。 $(r/2M \to r,\ v/2M \to v)$

Eddington-Finkelstein 座標系(v,r) での世界線は

$$ds^2 = -2\,h(r)\,dv^2 + 2\,dv\,dr, \quad 2h(r) = 1 - 1/r, \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} g_{vv} & g_{vr} \\ g_{rv} & g_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

正規直交基底$\boldsymbol{e}_0,\ \boldsymbol{e}_1$を見出そう。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0^t \\ \boldsymbol{e}_1^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{vv} & g_{vr} \\ g_{rv} & g_{rr} \end{pmatrix} (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} g_{vv} & g_{vr} \\ g_{rv} & g_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0^t \\ \boldsymbol{e}_1^t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)^{-1} \tag{2}$$

$(g_{\alpha\beta})$の固有値を求めよう。

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2h & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2h\lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{h^2+1} - h \overset{\text{def}}{=} \pm\lambda_\pm, \quad \lambda_\pm = \sqrt{h^2+1} \mp h \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} -2h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\lambda_\pm \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\beta \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2h & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- & \lambda_+ \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_-(\lambda_-^2+1) & 0 \\ 0 & \lambda_+(\lambda_+^2+1) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_\pm^2 + 1 = (h^2+1) \mp 2h\sqrt{h^2+1} + h^2 + 1 = 2\,\lambda_\pm\sqrt{h^2+1} \quad \nearrow \quad = 2\sqrt{h^2+1} \begin{pmatrix} -\lambda_-^2 & 0 \\ 0 & \lambda_+^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_-(\lambda_-^2+1)}} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(h^2+1)^{1/4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_+ \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_+(\lambda_+^2+1)}} \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,(h^2+1)^{1/4}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \leftarrow \ \lambda_+\lambda_- = 1 \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}\,(h^2+1)^{1/4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(h^2+1)^{1/4}} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ \lambda_+ & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

この結果を踏まえて

$$\begin{pmatrix} d\rho \\ d\xi \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)^{-1} \begin{pmatrix} dv \\ dr \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(h^2+1)^{1/4}} \begin{pmatrix} \lambda_-\,dv - dr \\ \lambda_+\,dv + dr \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dv \\ dr \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_0\,d\rho + \boldsymbol{e}_1\,d\xi \tag{5}$$

と置く。当然ながら

$$\begin{aligned} (d\rho)^2 - (d\xi)^2 &= \frac{1}{2\sqrt{h^2+1}} \left[(\lambda_-\,dv - dr)^2 - (\lambda_+\,dv + dr)^2 \right] \\ \lambda_+ \pm \lambda_- = \begin{cases} 2\sqrt{h^2+1} \\ -2h \end{cases} \quad \searrow \quad &= \frac{1}{2\sqrt{h^2+1}} \left[(\lambda_+^2 - \lambda_-^2)\,(dv)^2 - 2\,(\lambda_+ + \lambda_-)\,dv\,dr \right] \\ &= -2\,h\,(dv)^2 - 2dv\,dr \end{aligned} \tag{6}$$

崩壊する球殻の内側は平坦であるとしているので、球殻上で式 (5,6) で接続し、球殻の内側で平坦な座標(ρ,ξ)が取れればよい。球殻の外側はSchwarzschild幾何学なので、大域的な座標(ρ,ξ)は存在しない。

崩壊する球殻の世界線が、固有時間によって $(v(\tau), r(\tau)) = (f(\tau), g(\tau))$ によって与えられているとしよう。

$dv/d\tau = f'(\tau),\ dr/d\tau = g'(\tau)$ と(5)式を用いて、次のような方程式を考える。

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}\,[h(g(\tau))^2+1]^{1/4}} \left[\lambda_-(g(\tau))\,f'(\tau) - g'(\tau) \right] \tag{7}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}\,[h(g(\tau))^2+1]^{1/4}} \left[\lambda_+(g(\tau))\,f'(\tau) + g'(\tau) \right] \tag{8}$$

この方程式を解いて $(\rho(\tau), \xi(\tau))$ が求まったとする。これを ρ-ξ 平面で表せば球殻内部の平坦座標の上で崩壊球殻の世界線を描いたことになる。

この問題自身は球殻の世界線はある有限の固有時で 0 になる時間的曲線であれば何でも良いとしているが、具体的に考えるために、球殻の世界線を以前に求めた自由落下のものとしてみる。

$$
\begin{aligned}
r(\tau) &= (3/2)^{2/3}(\tau_* - \tau)^{2/3} \\
\tilde{t}(r) &= v(r) - r \qquad\qquad , \quad v|_{r=0} = 0 \\
&= -(2/3)\, r^{3/2} - 2\, r^{1/2} + 2\log\left(1 + r^{1/2}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{\sqrt{r}} \tag{10}
$$

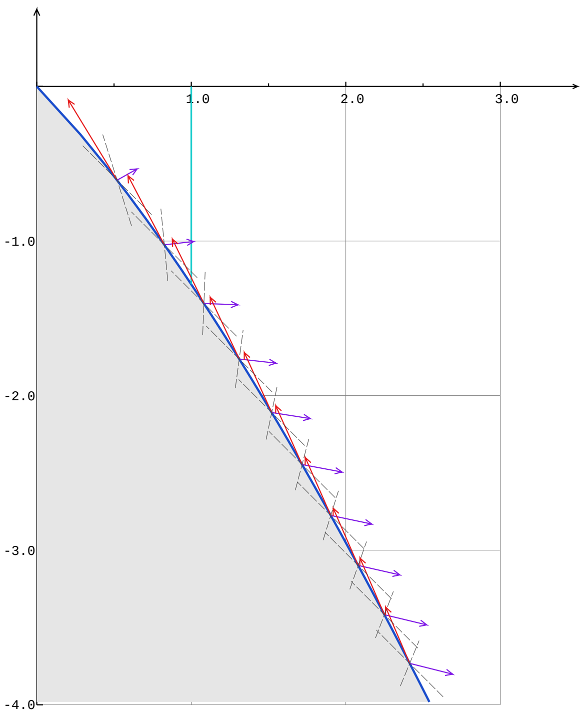
$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dr} &= 1 - r^{1/2} - r^{-1/2} + \frac{r^{-1/2}}{1+r^{1/2}} = 1 - r^{1/2} + r^{-1/2}\left(-1 + \frac{1}{1+r^{1/2}}\right) \\
&= 1 - r^{1/2} - \frac{1}{1+r^{1/2}} \\
&= \frac{-r}{1+r^{1/2}}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{d\tau} &= \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{d\tau} = \frac{-r}{1+r^{1/2}}\cdot\frac{-1}{r^{1/2}} \\
&= \frac{\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

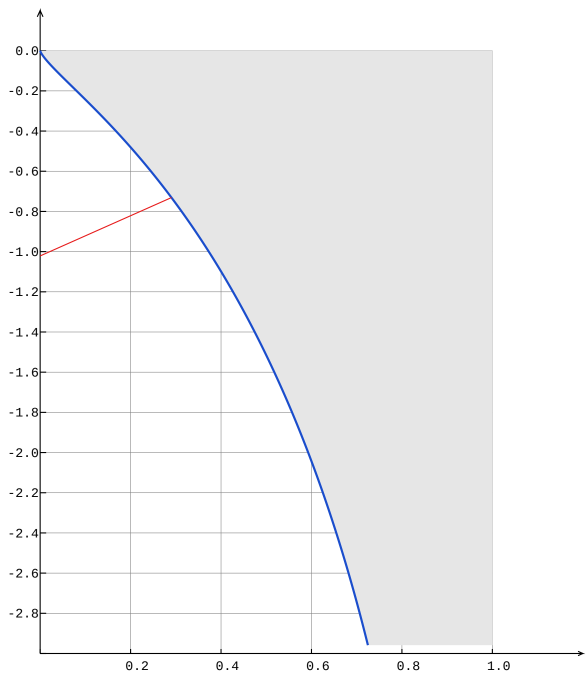
最後の式は

$$
\begin{aligned}
(d\tau)^2 &= -(ds)^2 = 2\, h(r)\,(dv)^2 - 2dv\,dr \\
1 &= \frac{dv}{d\tau}\cdot\left[\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{dv}{d\tau} - 2\,\frac{dr}{d\tau}\right]
\end{aligned}
$$

からも整合性を確認できる。(3)および(7,8)に(10,12)を代入して数値的に計算した結果を以下に示す。



球殻の外側のSchwarzschildt幾何学を$\tilde{t}$-r座標で描いている。
球殻上に時間方向と空間方向の正規直交基底を適当にスケールして描いている。光円錐の方向が破線で示されている。



球殻の世界線上で外側と接続する内部の平坦時空。
事象の地平を形成する、球の中心から出た光の進路を示す。
平坦時空なので、中心から直線上に進む。