Ex 7.9

点 x_Pの近傍で（x_Pを座標原点とする）座標系変換 $\{x\} \rightarrow \{\tilde{x}\}$を考える。

計量と座標変換関数を x_p の周りでテイラー展開すると（和記号省略）

$$
\begin{aligned}
x^\alpha(\tilde{x}) &= A^\alpha_\mu \tilde{x}^\mu + \frac{1}{2} B^\alpha_{\mu\nu} \tilde{x}^\mu \tilde{x}^\nu + \cdots, \quad B^\alpha_{\mu\nu} = B^\alpha_{\nu\mu} \\
\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\beta} &= A^\alpha_\beta + B^\alpha_{\beta\gamma} \tilde{x}^\gamma + \cdots \\
g_{\mu\nu}(x) &= g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu,\alpha} x^\alpha + \frac{1}{2} g^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + \cdots \\
&= g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu,\alpha} A^\alpha_\beta \tilde{x}^\beta + \cdots
\end{aligned}
$$

計量を新しい座標で一次まで見ると

$$
\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \left(g^{(0)}_{\rho\sigma} + g^{(1)}_{\rho\sigma,\alpha} A^\alpha_\beta \tilde{x}^\beta + \cdots \right) (A^\rho_\mu + B^\rho_{\mu\gamma} \tilde{x}^\gamma + \cdots)(A^\sigma_\nu + B^\sigma_{\nu\delta} \tilde{x}^\delta + \cdots) \tag{1}
$$

0次では $\{A^\mu_\nu\}$の自由度を使って

$$
\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \Big|_{x_P} = g^{(0)}_{\rho\sigma} A^\rho_\mu A^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}
$$

とできる。以下、既に $g^{(0)}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ であるとしよう。したがって $A^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$. 式(1) は$\{\tilde{x}\}$の一次までみると

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= \left(\eta_{\rho\sigma} + g^{(1)}_{\rho\sigma,\alpha} \tilde{x}^\alpha + \cdots \right) (\delta^\rho_\mu + B^\rho_{\mu\gamma} \tilde{x}^\gamma + \cdots)(\delta^\sigma_\nu + B^\sigma_{\nu\delta} \tilde{x}^\delta + \cdots) \\
&= \eta_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu,\alpha} \tilde{x}^\alpha + \eta_{\mu\rho} B^\rho_{\nu\alpha} \tilde{x}^\alpha + \eta_{\rho\nu} B^\rho_{\mu\alpha} \tilde{x}^\alpha + \cdots \\
&= \eta_{\mu\nu} + \left(g^{(1)}_{\mu\nu,\alpha} + \eta_{\mu\rho} B^\rho_{\nu\alpha} + \eta_{\rho\nu} B^\rho_{\mu\alpha} \right) \tilde{x}^\alpha + \cdots
\end{aligned}
$$

そこで $B^\alpha_{\mu\nu} = B^\alpha_{\nu\mu}$ を考慮して

$$
B^\rho_{\mu\alpha} = \frac{-1}{2} \eta^{\rho\gamma} \left(g^{(1)}_{\gamma\mu,\alpha} + g^{(1)}_{\gamma\alpha,\mu} - g^{(1)}_{\mu\alpha,\gamma} \right)
$$

と置くと

$$
\begin{aligned}
\eta_{\mu\rho} B^\rho_{\nu\alpha} + \eta_{\rho\nu} B^\rho_{\mu\alpha} &= \frac{-1}{2} \left(g^{(1)}_{\mu\nu,\alpha} + g^{(1)}_{\mu\alpha,\nu} - g^{(1)}_{\nu\alpha,\mu} \right) + \frac{-1}{2} (\mu \leftrightarrow \nu) \\
&= -g^{(1)}_{\mu\nu,\alpha}
\end{aligned}
$$

となり

$$
\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\alpha} (\tilde{x}) \Big|_{x_P} = 0
$$

とすることができる。

計量の微係数が 0になるための条件の数と座標変換の自由度を数えてみよう。nを次元の数として

	条件の数	座標変換の自由度
$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$	$n(n+1)/2 \underset{n=4}{\longrightarrow} 10$	$n^2 \underset{n=4}{\longrightarrow} 16$
$\partial \tilde{g}_{\alpha\beta} / \partial \tilde{x}^\gamma = 0$	$n^2(n+1)/2 \underset{n=4}{\longrightarrow} 40$	$n^2(n+1)/2 \underset{n=4}{\longrightarrow} 40$
$\partial^2 \tilde{g}_{\alpha\beta} / \partial \tilde{x}^\gamma \partial \tilde{x}^\delta = 0$	$[n(n+1)/2]^2 \underset{n=4}{\longrightarrow} 100$	$n \times ({}_nC_1 + {}_nP_2 + {}_nC_3) \underset{n=4}{\longrightarrow} 80$

したがって、二次微分を座標変換によってすべて消すことはできない。

$n = 4$ の場合、 0次の残りの自由度6 は計量 $\eta_{\alpha\beta}$ を不変にするisometryの自由度、二次の残りの自由度20は曲率テンソルの自由度に等しい。これは一般の nについて正しい。

$$
\begin{aligned}
[n(n+1)/2]^2 - n \times ({}_nC_1 + {}_nP_2 + {}_nC_3) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - n \left[n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right] \\
&= \frac{n^2}{12} \{ 3(n+1)^2 - [12n + 2(n-1)(n-2)] \} \\
&= \frac{n^2(n^2-1)}{12} = [\text{曲率テンソルの自由度}]
\end{aligned}
$$