Лабораторная работа 5.

Задание 5.1.
Создать класс RMCode. Объявить и инициализировать поля
r и **m** (тип: целочисленные значения, $0 \le r \le m$).
число информационных (исходных) разрядов $k = \sum_{i=0}^{r} C_m^i$ (тип: целочисленное значение)
длина закодированного сообщения $n = 2^m$ (тип: целочисленное значение)

Задание 5.2.
Сформировать матрицу кода Рида-Маллера в канонической форме.

5.2.1 Создать список подмножеств $\{J \mid J \subseteq Z_m, |J| \le r\}$ (см. стр. 9 лекций).
Проверка: для `RM(2,4)` список подмножеств должен иметь вид (порядок важен!): {Ø, {3}, {2}, {1}, {0}, {2,3}, {1,3}, {0,3}, {1,2}, {0,2}, {0,1}}.

5.2.2 Создать список двоичных представлений для разрядов от 0 до $n = 2^m$ (см. стр. 3 лекций).
Проверка: для `RM(2,4)` список двоичных представлений должен иметь вид (порядок важен!): {0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110, 0001, 1001, 0101, 1101, 0011, 1011, 0111, 1111}.

5.2.3 Создать матрицу кода Рида-Маллера, каждой строке которой соответствует элемент списка подмножеств, а каждому столбцу – элемент списка двоичных представлений (с сохранением порядка).
Значение элемента матрицы равно 1, если в двоичном представлении соотвествующего столбца все разряды, входящие в подмножество соответствующего столбца, равны нулю.
Пример 1. Строке соответствует подмножество {2}, столбцу – представление 1011. В разряде 2 представления находится 1, следовательно, соответствующий элемент матрицы равен 0.
Пример 2. Строке соответствует подмножество $\{2,3\}$, столбцу – представление 1100. В обоих разрядах (2 и 3) представления находятся 0, следовательно, соответствующий элемент матрицы равен 1.

Проверка: для `RM(2,4)` матрица имеет вид (для (4,4) можно посмотреть в лекциях):

```
[[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]
 [1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0]
 [1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0]
 [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]
 [1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0]]
```

5.2.4 Закодировать сообщение кодом Рида-Маллера с использованием сформированной матрицы.
Проверка: При кодировании слова `[1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0]` кодом Рида-Маллера RM(2,4) должно получиться слово `[0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1]`.

Задание 5.3.
Реализовать алгоритм декодирования кода Рида-Маллера с использованием мажоритарного принципа декодирования.

5.3.1 Составить список проверок для каждого элемента из списка подмножеств $\left\{J \mid J \subseteq Z_m, |J| \le r\right\}$. Для каждого подмножества J выполнить следующие вычисления

5.3.1.1 Сформировать комплементарное подмножество $J_c = Z_m \setminus J$.
Пример: Для J={0}, J_c={1,2,3}.
Пример: Для J={1,3}, J_c={0,2}.

5.3.1.2 Сформировать базовый вектор **b**, соответствующий комплементарному подмножеству (формируется аналогично строкам матрицы).
Пример: Для J={1,3}, J_c={0,2},
b = `[1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]`.

5.3.1.3 Сформировать все допустимые двоичные представления сдвигов (в лекциях t), присвоив нули разрядам, входящим в множество J.
Пример: Для J={1,3}, J_c={0,2},
t = {0000, 1000, 0010, 1010}.

5.3.1.4 Сформировать проверочные векторы (в лекциях $v_{Jc,t}$) из базового посредством сдвига влево (интерпретируя элементы из множества t как двоичные представления сдвигов)
Пример:
Пример: Для J={1,3}, J_c={0,2},
b = `[1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]`.
t = {0000, 1000, 0010, 1010}.
shifts = {0, 1, 4, 5}

$v_{\{0,2\},0000}$ = `[1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0]`.
$v_{\{0,2\},1000}$ = `[0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0]`.
$v_{\{0,2\},0010}$ = `[0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0]`.
$v_{\{0,2\},1010}$ = `[0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1]`.

5.3.2 Реализовать алгоритм мажоритарного декодирования.

Пусть принято сообщение w. Необходимо получить исходное сообщение.

Шаг 1. Присвоить i = r, w(r) = w.
Шаг 2. Для всех $\left\{J \mid J \subseteq Z_m, \left|J\right| = i\right\}$ вычислить скалярное произведение w(i) и проверочных векторов $v_{Jc,t}$ по модулю 2.
Если для конкретного J число нулей среди полученных скалярных произведений превышает число единиц, присваиваем соответствующему разряду исходного (искомого) сообщения ноль.
Если для конкретного J число единиц среди полученных скалярных произведений превышает число нулей, присваиваем соответствующему разряду исходного (искомого) сообщения единицу.
Если число единиц и нулей равно, исправление ошибки невозможно.
Шаг 3. Если i > 0, вычисляем w(i - 1) = w(i) + сумма всех строк матрицы, соответствующих разрядам исходного сообщения, которым была присвоена единица на предыдущем шаге (более математически строгий алгоритм см. стр. 25 лекций)

Пример. Пусть принято сообщение для кода RM(2,4)
w = [1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1]

w(2) = w

<u>Для i = 2.</u>
J = {0,1}, Jc = {2,3},
b = [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0].
t = {0000, 0010, 0001, 0011}.
shifts = {0, 4, 8, 12}

$v_{\{2,3\},0000}$ = [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0].
$v_{\{2,3\},0010}$ = [0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0].
$v_{\{2,3\},0001}$ = [0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0].
$v_{\{2,3\},0011}$ = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1].

Скалярные произведения с w(2) равны
$\langle w(2), v_{\{2,3\},0000}\rangle = 0$.
$\langle w(2), v_{\{2,3\},0010}\rangle = 1$.
$\langle w(2), v_{\{2,3\},0001}\rangle = 0$.
$\langle w(2), v_{\{2,3\},0011}\rangle = 0$.
Нулей больше, чем единиц. Соответствующий разряд исходного сообщения равен нулю:
m = [* * * * * * * * * * 0].

Аналогично, для
J = {0,2},
$\langle w(2), v_{\{1,3\},0000}\rangle = 0$.
$\langle w(2), v_{\{1,3\},0100}\rangle = 1$.
$\langle w(2), v_{\{1,3\},0001}\rangle = 1$.
$\langle w(2), v_{\{1,3\},0101}\rangle = 1$.
Единиц больше, чем нулей. Соответствующий разряд исходного сообщения равен единице:
m = [* * * * * * * * * 1 0].

И так далее: **m** = [* * * * * 0 0 0 0 1 0].

После вычисления всех возможных произведений для i = 2 вычисляем w(1).
На последнем шаге единица была в разряде $\mathbf{m}_{\{0,2\}}$, поэтому
$w(1) = w(2) + v_{\{0,2\}}$ = [0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1].

Продолжаем процедуру для i = 1.

Получаем:
И так далее: **m** = [* 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0].

w(0) = w(1) + $v_{\{3\}}$ = [1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1].

И после последней итерации для i = 0:

m = [1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0].

Ещё один пример решения можно посмотреть в лекциях.