

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт информатики, математики и электроники
Факультет информатики
Кафедра технической кибернетики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

по курсу
Оптическая информатика

Группа 6410-010302D

Студент _____ Д.С. Борисов
(подпись)

Преподаватель,
к.ф.-м.н. _____

А.П. Порфирьев
(подпись)

Самара 2020

ЗАДАНИЕ

- Выбрать в качестве входного сигнала $f(x) = \exp(ix/10)$.
- В соответствии с вариантом (таблица 1) реализовать численный расчёт интегрального преобразования над одномерным сигналом по формулам (7) или (10), везде принять равным 1. Числа m и n можно задать равными 1000.
- Построить график исходного оптического сигнала (здесь и далее: подразумевается, что строить нужно амплитуду и фазу на отдельных изображениях).
- Построить график результата преобразования.
- Варьируя различные параметры (число точек дискретизации, область интегрирования, $\alpha > 0$), исследовать, как меняется исходная функция и результат преобразования. В тех вариантах, где область интегрирования $[a, b]$ полностью неотрицательна, не менять её так, чтобы она содержала отрицательные значения. Привести несколько графиков для подкрепления выводов.
- Сформировать выводы о проделанной работе. Выводы должны быть содержательными и не должны являться описанием процесса работы.

Таблица 1 – Исходные данные на ЛР № 1

№	Ядро $K(\xi, x)$	Параметры	Исполнитель
4	$\frac{\sin(\pi\alpha(x-\xi))}{\pi(x-\xi)}$	$[a, b] = [-200, 200]$ $[p, q] = [-2, 2]$	Д.С. Борисов

РЕФЕРАТ

Отчет по лабораторной работе: 20 с., 9 рисунков, 1 таблица, 8 источников, 1 приложение.

ОПТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА, ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, АМПЛИТУДА, ФАЗА, ЯДРО

В данной работе исследуется зависимость графиков ядра и результата интегрального преобразования от различных параметров.

Цель работы: исследовать влияние различных параметров на графики ядра и результата интегрального преобразования.

В результате исследований было экспериментально проверено влияние частоты дискретизации, области интегрирования и значения констант на графики исследуемых функций.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАНИЕ	2
РЕФЕРАТ	3
1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	5
2 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	<u>8</u>
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	20
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	<u>21</u>
ПРИЛОЖЕНИЕ А	22

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Интегральное преобразование

Пусть имеется некоторая комплексная функция действительного аргумента $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Рассмотрим следующий линейный оператор T :

$$F(\xi) = T[f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi, x) f(x) dx, \quad (1)$$

где $F(\xi)$ – результат, получившийся после действия оператора. Данное преобразование является интегральным. Функция $K(\xi, x)$ называется ядром интегрального преобразования (не следует путать с ядром оператора $\ker T$).

Не всегда преобразования определяются в бесконечных пределах. Некоторые преобразования (например, преобразование Ханкеля) предусматривают интегрирование по полупрямой, а некоторые – только на конечной области. Более того, любую бесконечную область можно ограничить, получив новый интегральный оператор. Будем называть интегральным преобразованием в конечных пределах следующий оператор:

$$F(\xi) = T[f(x)](\xi) = \int_a^b K(\xi, x) f(x) dx, \quad (2)$$

где $a < b$.

Численное интегрирование

Рассмотрим, как осуществляется численная реализация интегральных преобразований от простого к сложному.

Предположим, что требуется численно найти значение интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (3)$$

где f – некоторая непрерывная на отрезке $[a, b]$ действительная функция. Тогда её интеграл может быть найден численно. Далее будет рассмотрен наиболее простой метод численного интегрирования – метод левых прямоугольников.

Разобьём (т.е. проведём дискретизацию) отрезок интегрирования на n равных отрезков $(x_k, x_{k+1}), k = \overline{0, n-1}$. Заметим, что $a = x_0$ и $b = x_n$. Обозначим длину каждого такого отрезка через $h_x = x_{k+1} - x_k = (b-a)/n$ (шаг разбиения), тогда $x_k = a + kh_x$. Значения интегрируемой функции в точках разбиения обозначим $f_k = f(x_k)$.

Воспользовавшись свойством аддитивности интеграла, получаем представление для выражения (3):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx. \quad (4)$$

Значение интеграла на отрезке (x_k, x_{k+1}) приблизительно равно значению площади прямоугольника $S_k = f_k(x_{k+1} - x_k) = f_k h_x$ (рисунок 1).

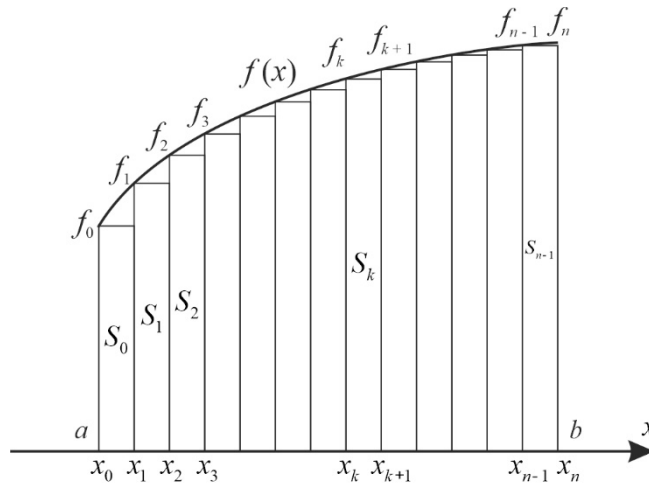


Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация численного интегрирования.

Тогда, в соответствии с (4), значение интеграла (3) приближённо равно:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot h_x. \quad (5)$$

Формула (7) остаётся справедливой и для комплекснозначных функций вещественной переменной, т.е. функций вида $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, что позволяет применять метод для расчёта интегральных преобразований в конечных пределах. Перепишем формулу (2) в соответствии с приближением:

$$F(\xi) = \int_a^b K(\xi, x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} K(\xi, x_k)f_k \cdot h_x, \quad (6)$$

где n – количество интервалов разбиения, $h_x = (b - a) / n$, $x_k = a + kh_x$, $f_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$. Формула (6) позволяет вычислить приближённое значение $F(\xi)$ интегрального преобразования (2) в каждой выбранной точке ξ . Для того чтобы получить вид функции $F(\xi)$ на некотором отрезке $[p, q]$, необходимо вычислить преобразования для всех точек данного отрезка. Мы можем лишь пробежаться по конечному множеству точек, поэтому определим разбиение и для отрезка $[p, q]$.

Пусть m – количество интервалов разбиения, $h_\xi = (q - p) / m$, $\xi_l = p + lh_\xi$, $l = \overline{0, m}$. Легко убедиться, что $\xi_0 = p$, $\xi_m = q$. Значения преобразования $F(\xi_l)$ в точке ξ_l приближённо равно:

$$F(\xi_l) \approx \sum_{k=0}^{n-1} K(\xi_l, x_k) f_k \cdot h_x, l = \overline{0, m}. \quad (7)$$

Обозначим через F_l значение выражения справа в (7):

$$F_l = \sum_{k=0}^{n-1} K(\xi_l, x_k) f_k \cdot h_x, l = \overline{0, m}. \quad (8)$$

Важно помнить, что $F_l \neq F(\xi_l)$. Выражение (8) может быть легко преобразовано в матричную форму. Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = (K(\xi_l, x_k))_{l=0, k=0}^{m, n}. \quad (9)$$

Тогда формула (8) может быть переписана в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{f} \cdot h_x. \quad (10)$$

Примечание: выражение (8) содержит в себе сумму до элемента с номером $n - 1$, в то время как формула (10) просуммирует все $n + 1$ элементов. Иными словами, мы получим другой результат. При больших n разница будет незначительной.

2 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В начале найдем амплитуду и фазу входного сигнала $f(x) = \exp(i x/10)$, результат виден на рисунке 2.

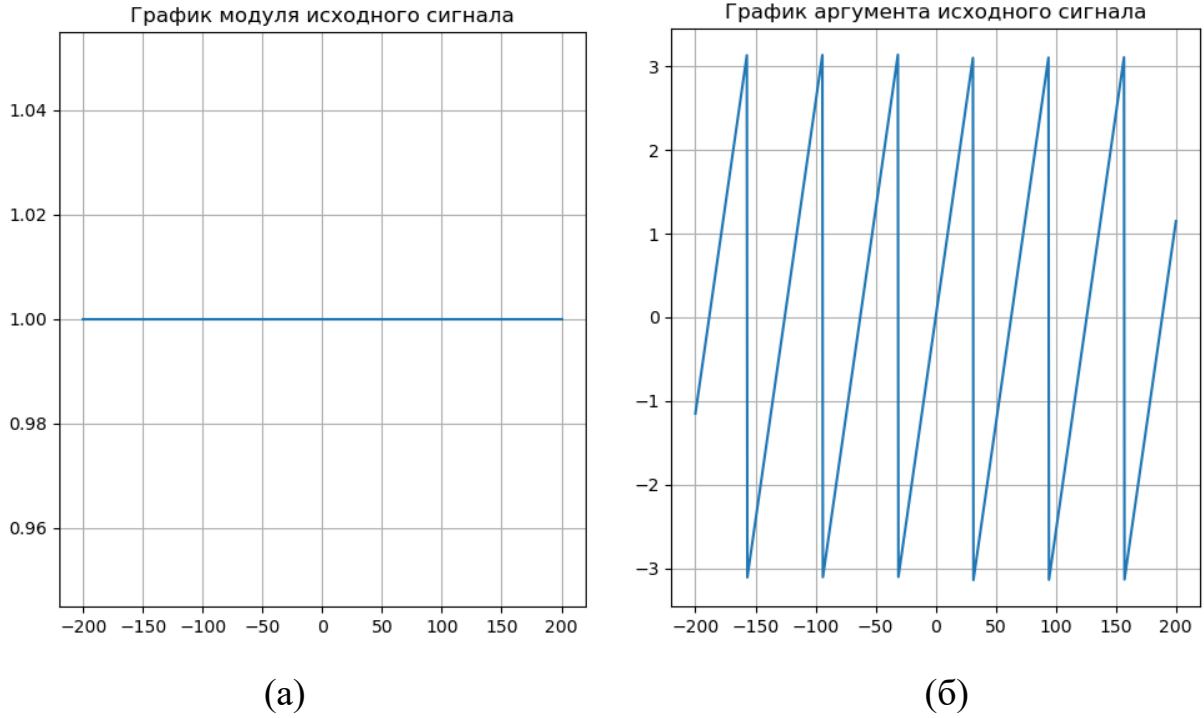


Рисунок 2 – Амплитуда (а) и фаза (б) входного сигнала.

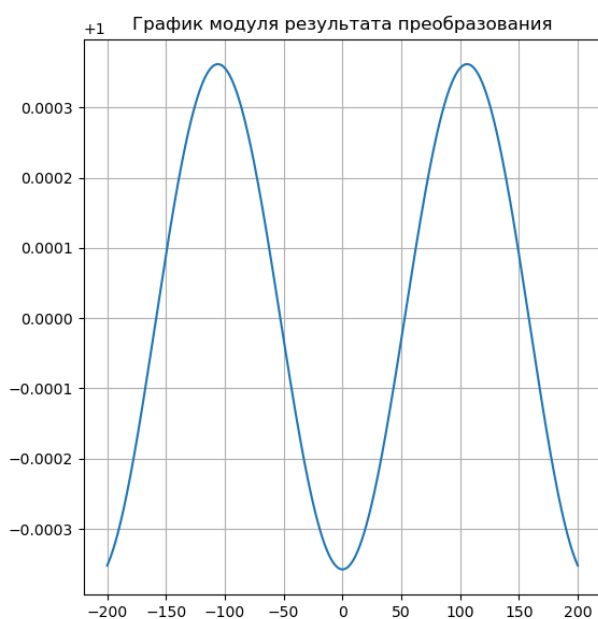
Так как входным сигналом является экспонента, то очевидно, что амплитуда, изображённая на рисунке 1 (а), такого входного сигнала всегда будет равна 1.

Фаза входного сигнала, изображённая на рисунке 1 (б), равна $\frac{x}{10}$.

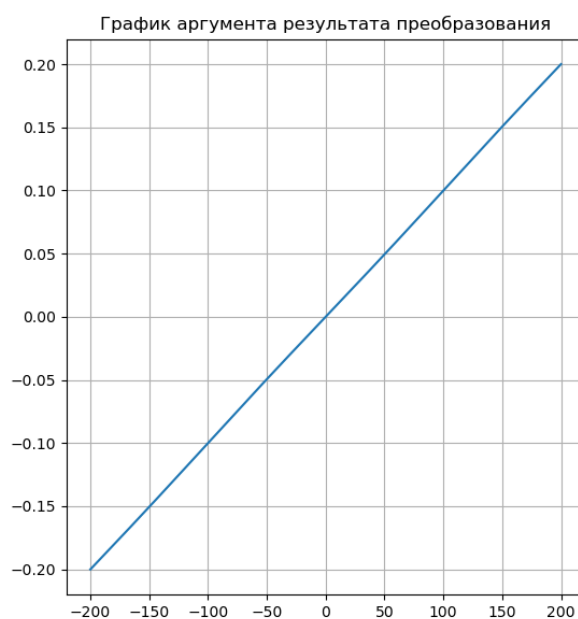
Далее построим график амплитуды и фазы преобразования, используя ядро $K(\xi, x) = \frac{\sin(\pi\alpha(x-\xi))}{\pi(x-\xi)}$ в формуле $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{f} \cdot h_x$. Те же графики построим и для ядра. Используем следующие обозначения:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = (K(\xi_l, x_k))_{l=0, k=0}^{m,n}.$$

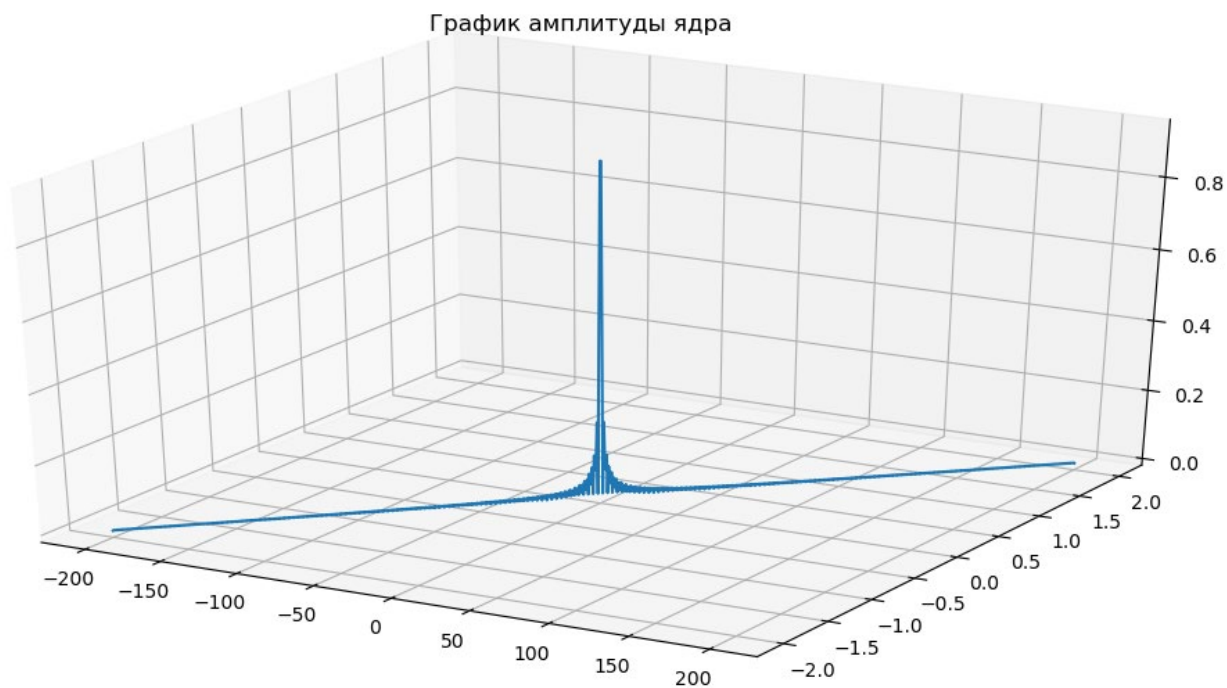
Область интегрирования $[a, b] = [-200, 200]$, $[p, q] = [-2, 2]$, количество интервалов $n = 1000$, $m = 1000$ и $\alpha = 1$. Результат виден на рисунке 3. На фрагменте (а) рисунка 3 представлена амплитуда выходного сигнала в качестве синусоидального распределения. На фрагменте (б) рисунка 3 представлен график фазы выходного сигнала, имеющего практически прямолинейное распределение. На фрагменте (в) рисунка 3 представлен трёхмерный график амплитуды ядра, достигающий максимальное значение при $x=\xi=0$. На фрагменте (г) рисунка 3 представлен график фазы ядра, имеющий ступенчатый вид.



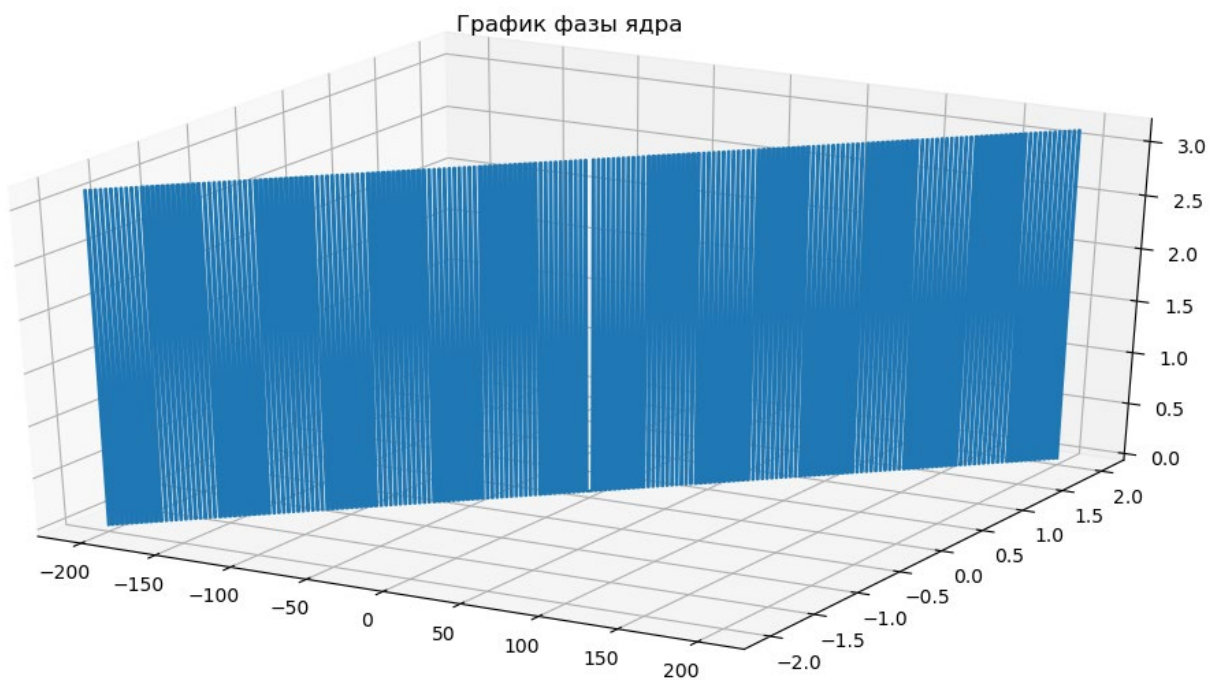
(а)



(б)



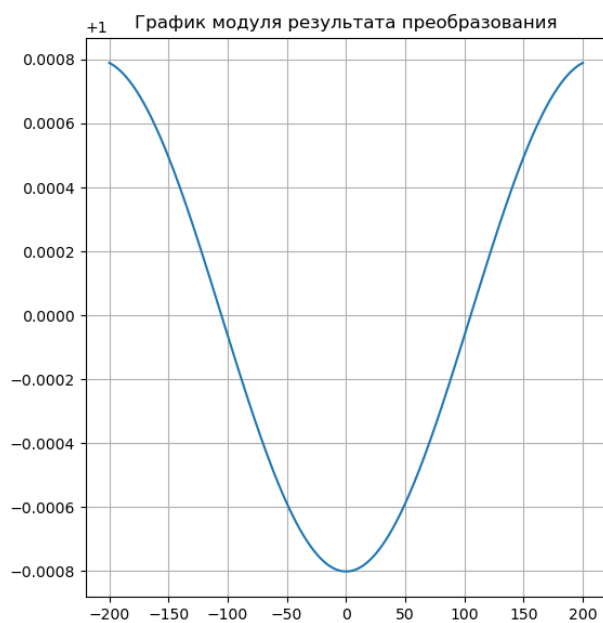
(в)



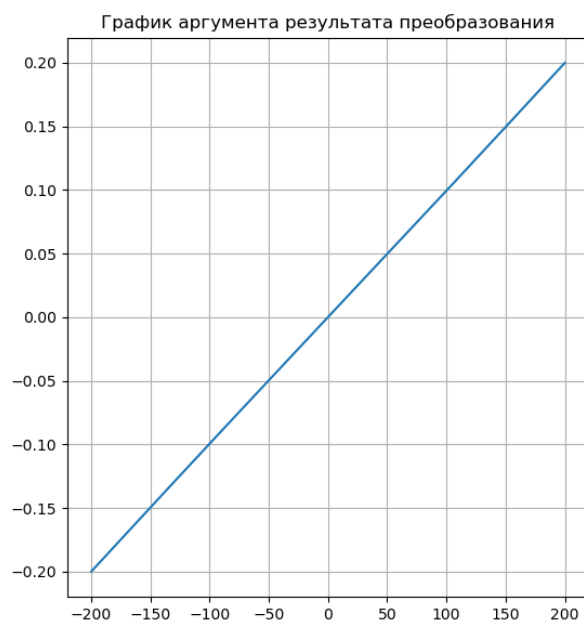
(г)

Рисунок 3 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра.

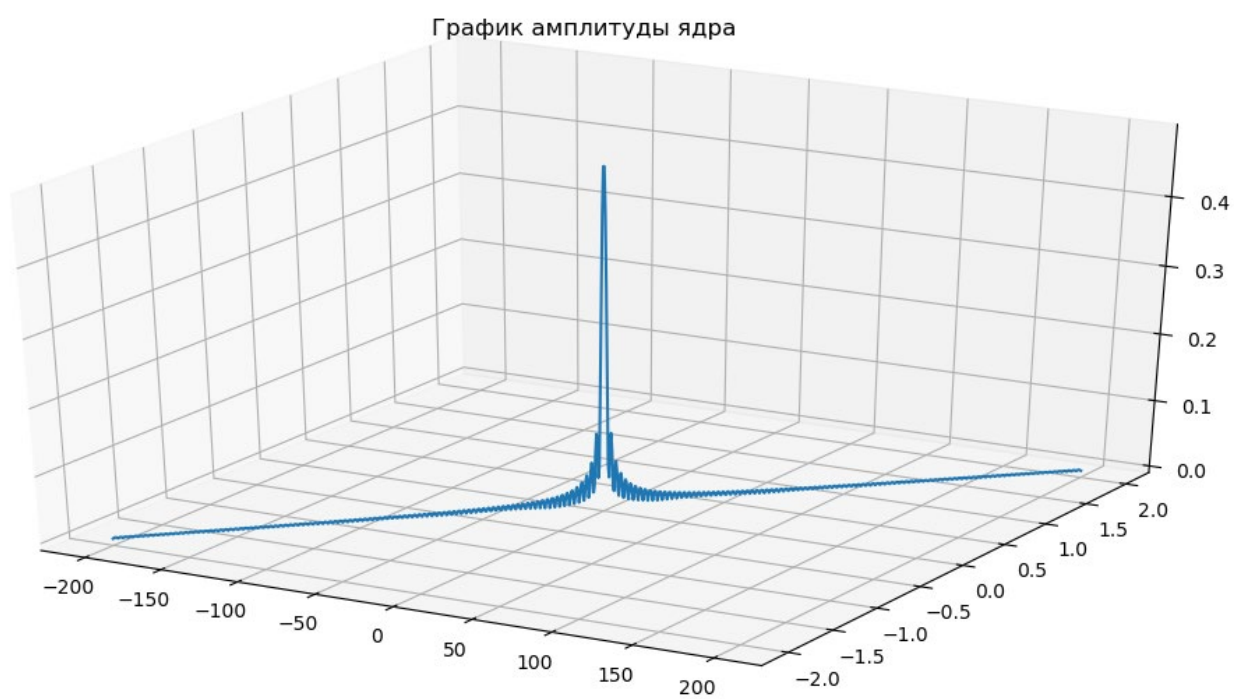
Теперь изменяем параметр α на $\alpha = 0.5$ и результат отобразим на рисунке 4. При уменьшении параметра α наблюдается расширение графиков по оси абсцисс.



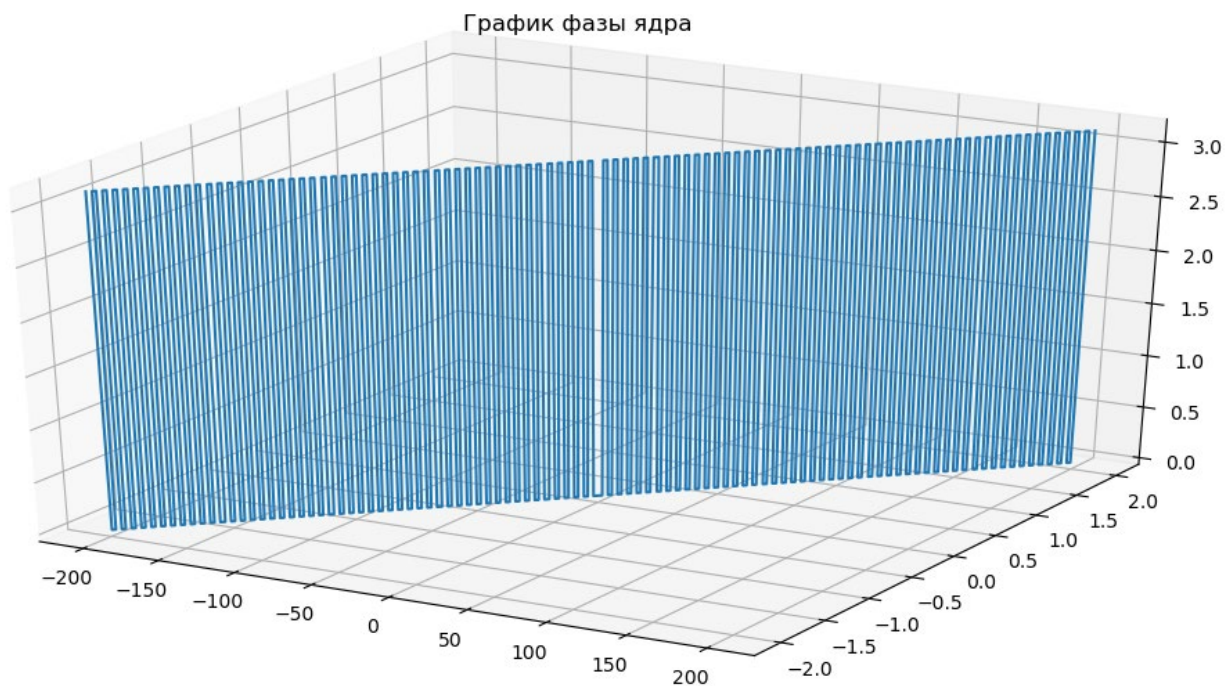
(а)



(б)



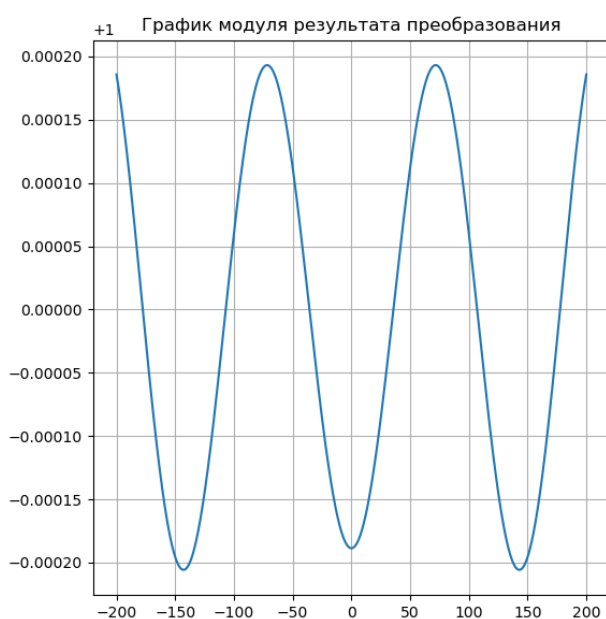
(в)



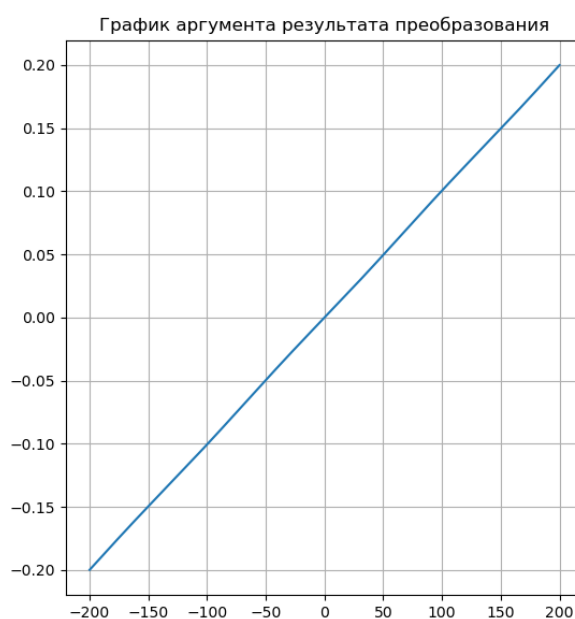
(г)

Рисунок 4 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра при $\alpha = 0,5$.

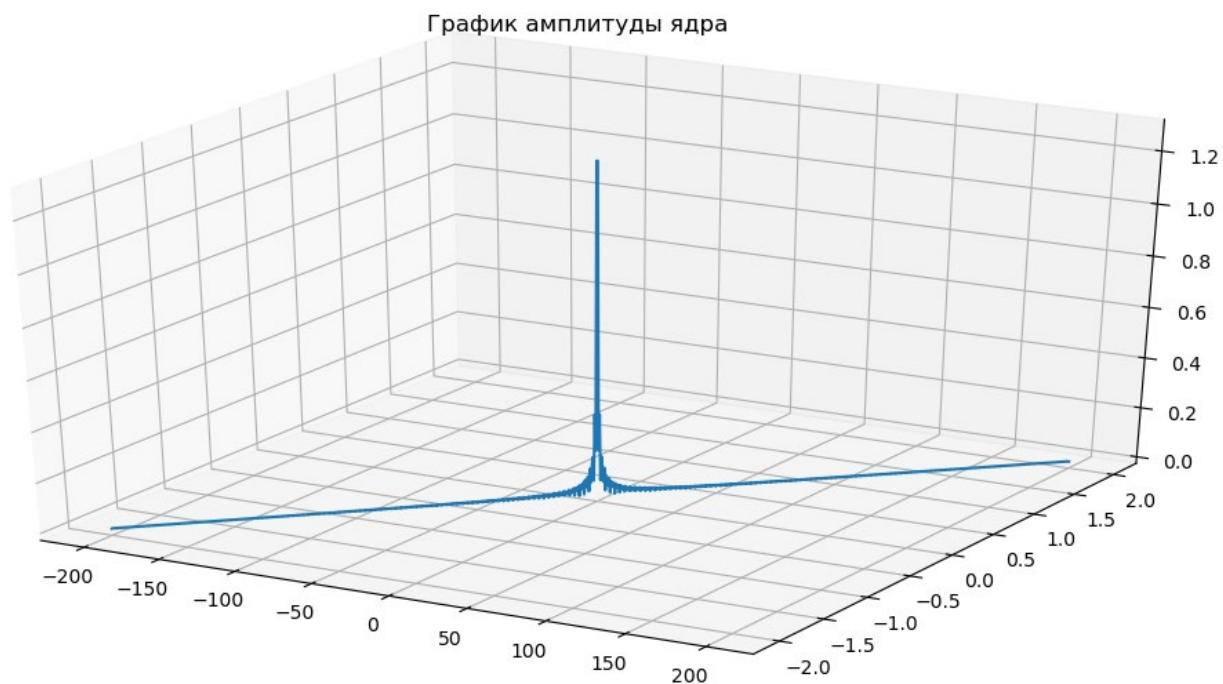
Теперь изменим α на $\alpha = 1.5$ и результат отобразим на рисунке 5. При увеличении параметра α наблюдается сужение графиков.



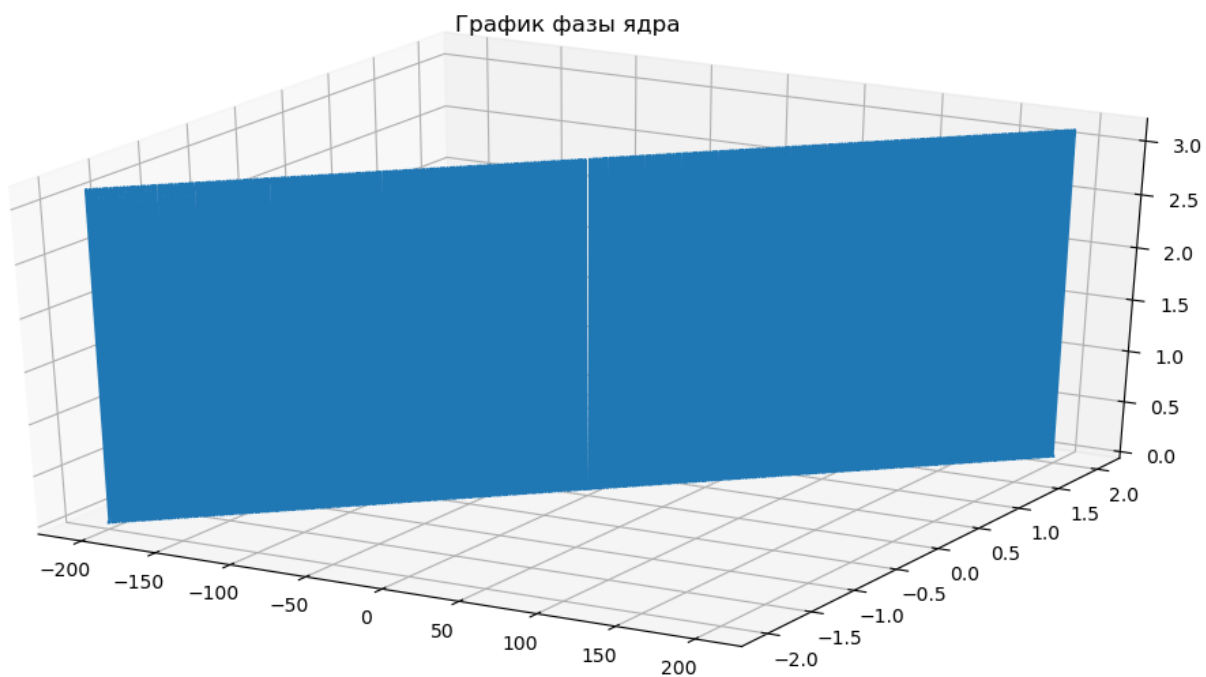
(а)



(б)



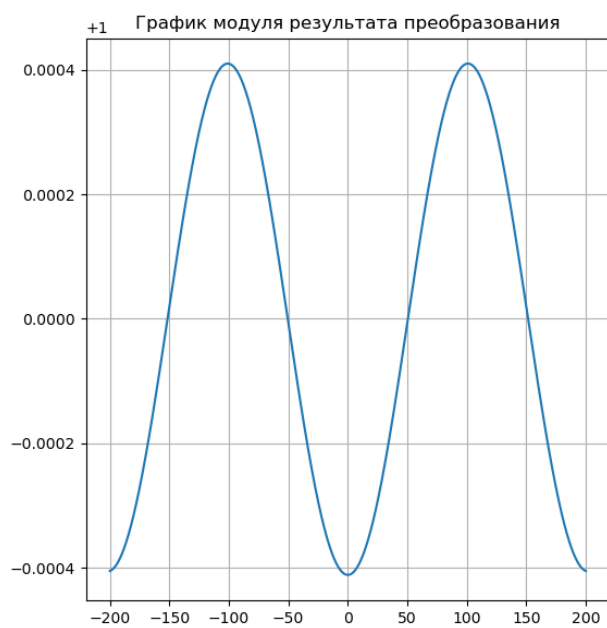
(в)



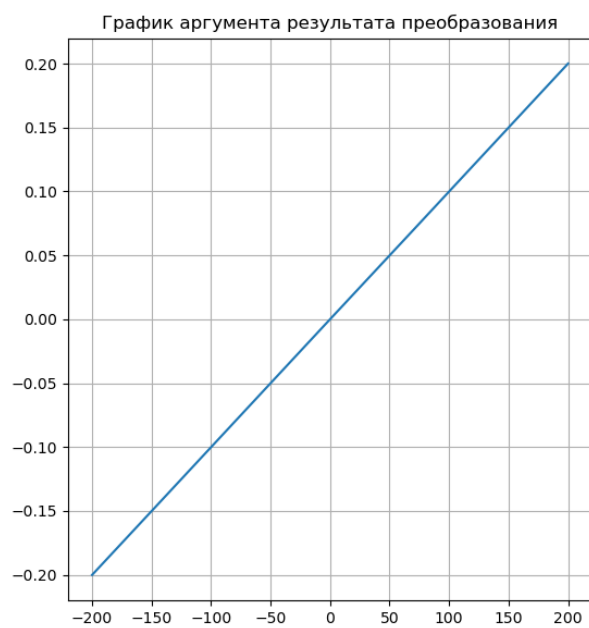
(г)

Рисунок 5 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра при $\alpha = 1,5$.

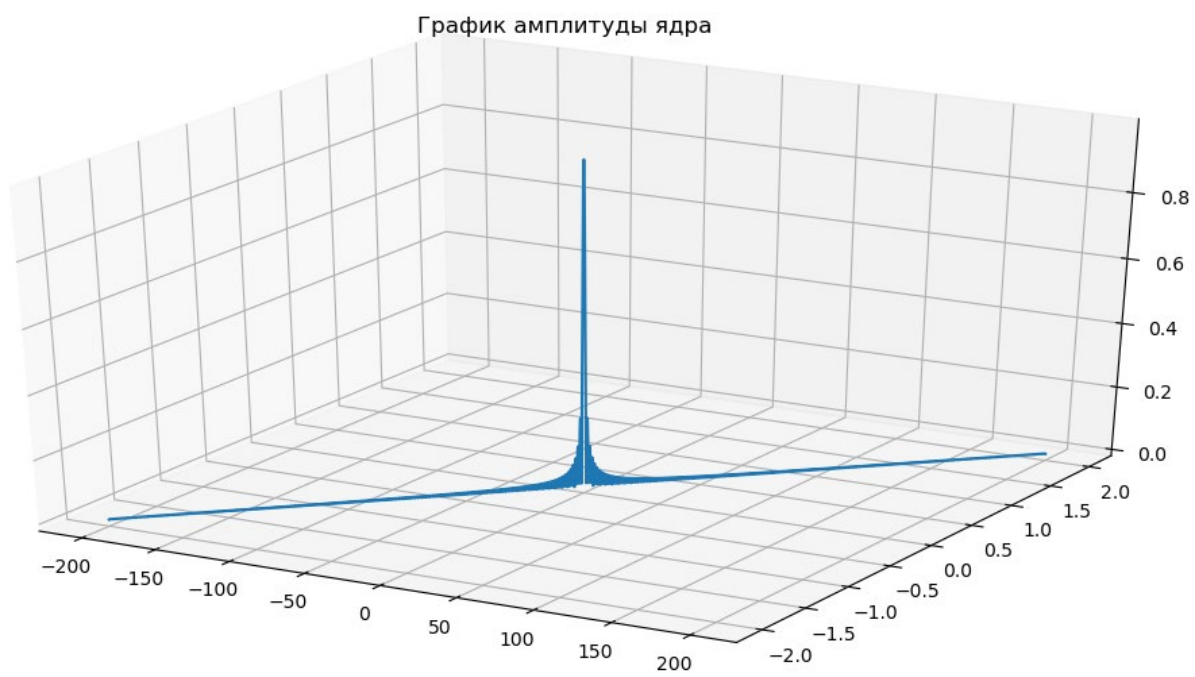
Теперь изменим количества точек дискретизации n и m на значения $n=5000$ и $m=5000$ и результат отобразим на рисунке 6. При увеличении n и m графики становятся более плавными.



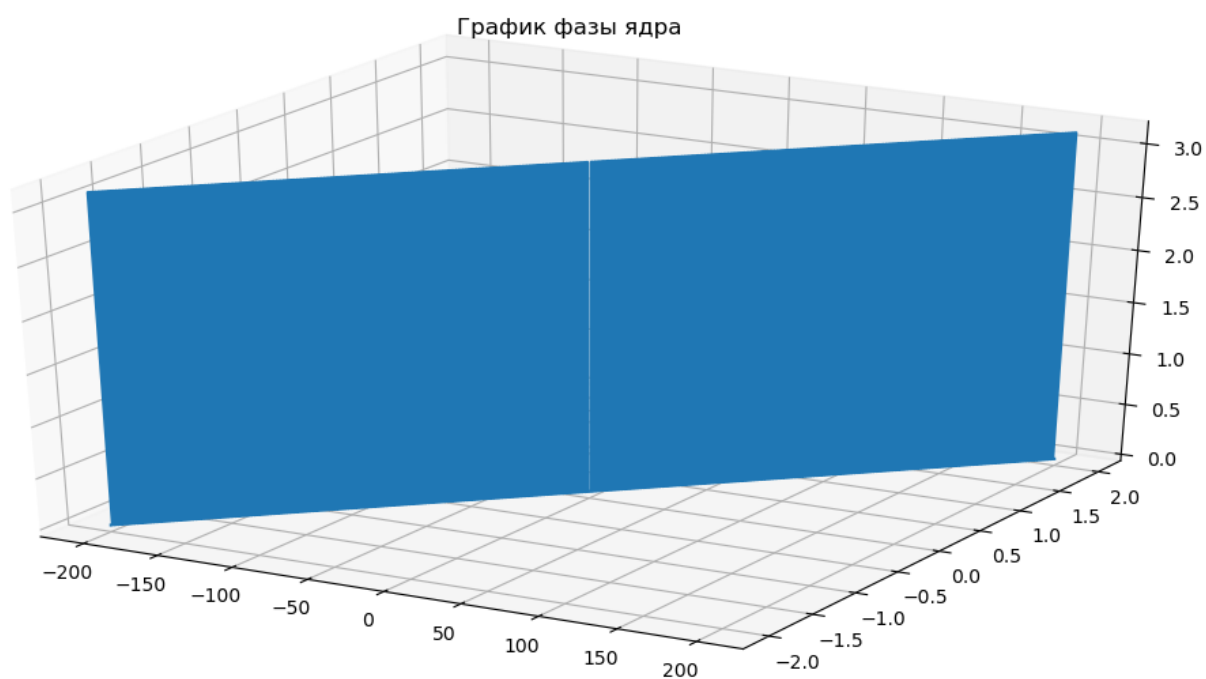
(a)



(б)



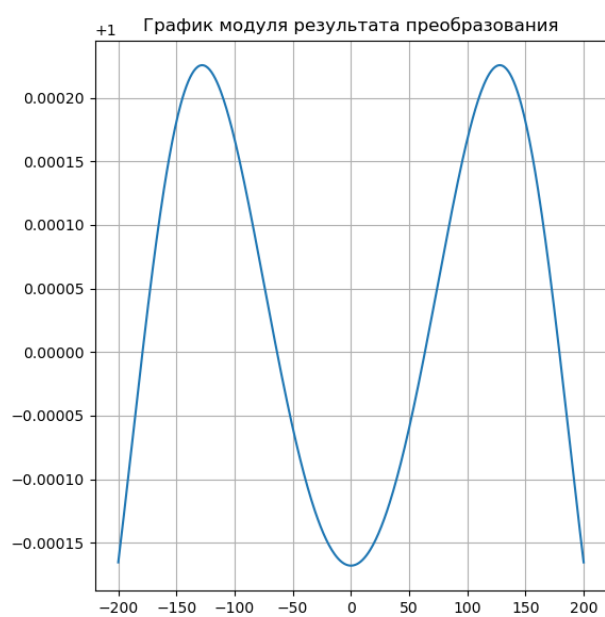
(в)



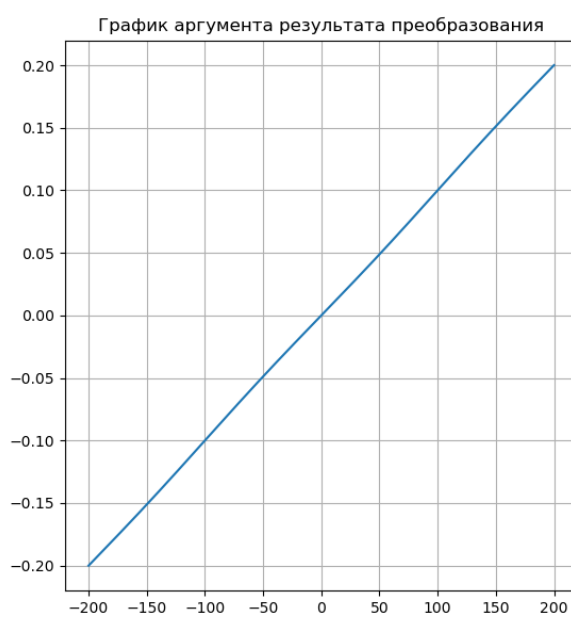
(г)

Рисунок 6 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра при $n=5000$ и $m=5000$.

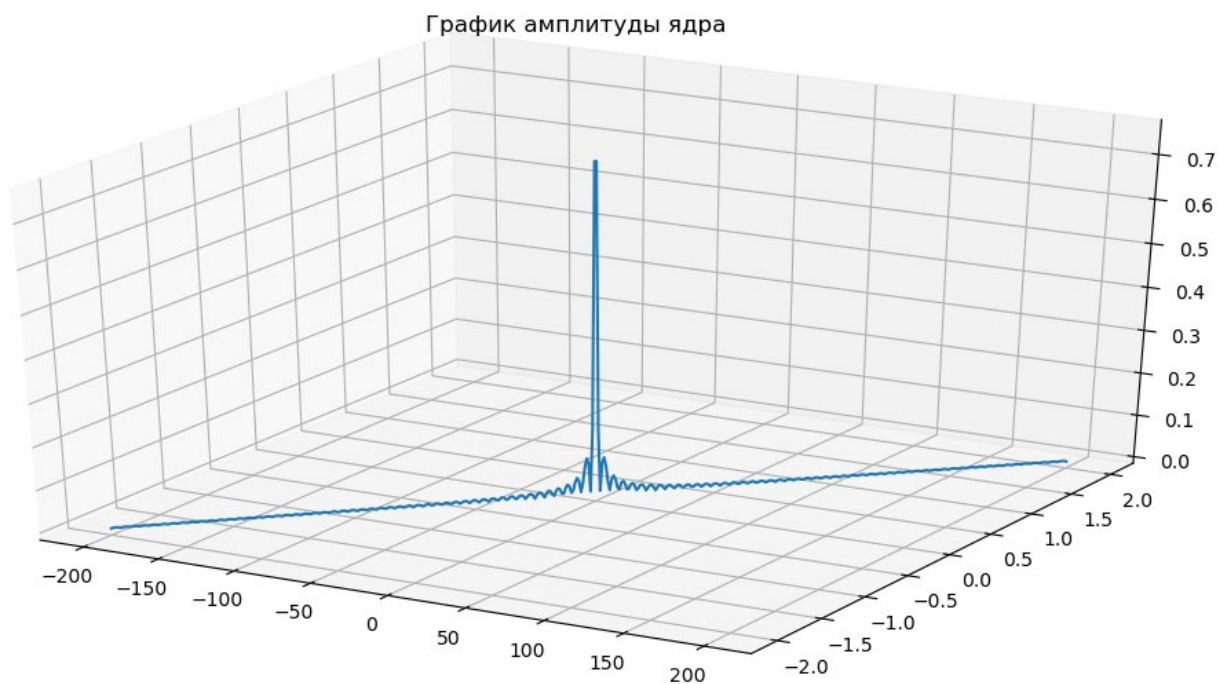
Теперь изменим количества точек дискретизации n и m на значения $n=500$ и $m=500$ и результат отобразим на рисунке 7. При уменьшении n и m графики становятся более неточными и скачкообразными.



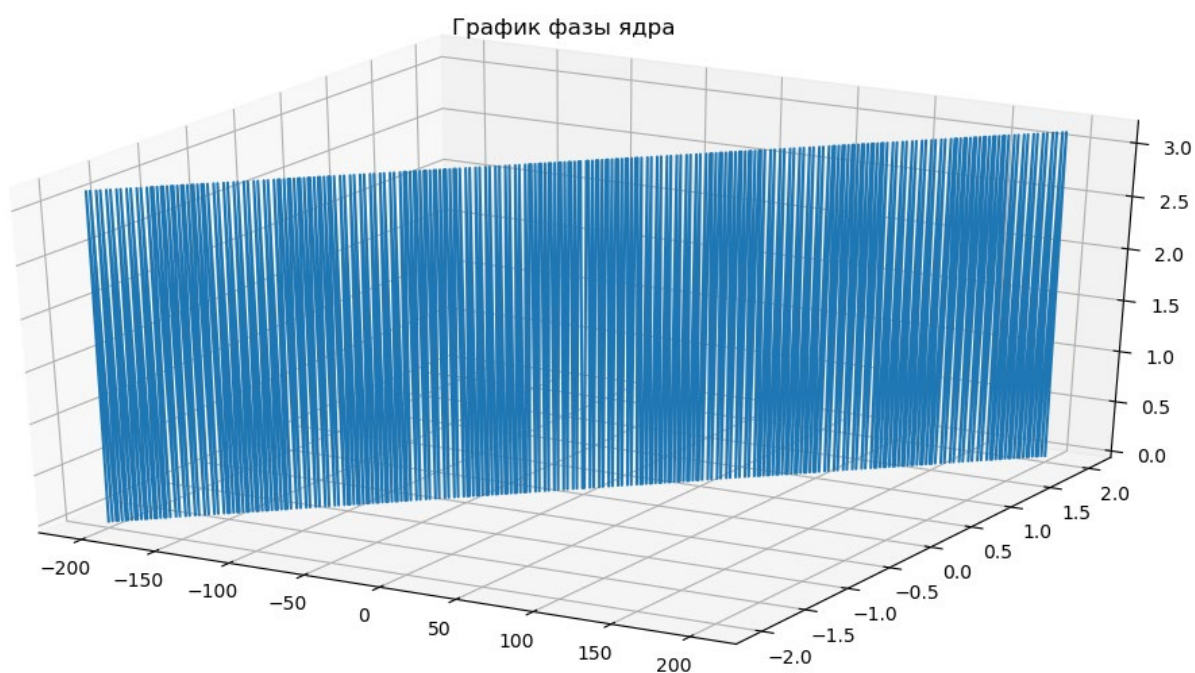
(а)



(б)



(в)

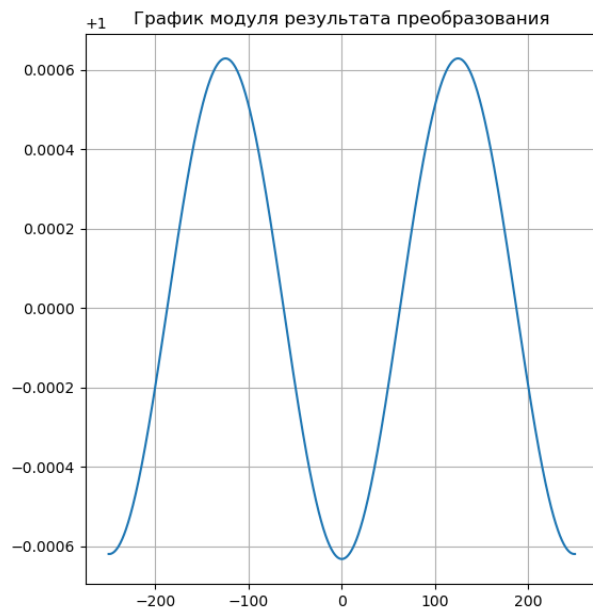


(г)

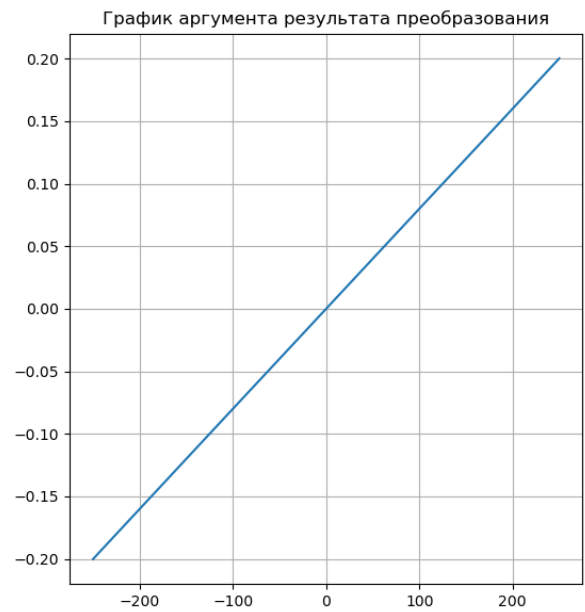
Рисунок 7 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра при $n=500$ и $m=500$.

Теперь изменим область интегрирования $[a, b]$ с $[-200, 200]$ на $[-250, 250]$ и результат отобразим на рисунке 8. При увеличении области интегрирования наблюдаются изменения в максимальных и минимальных

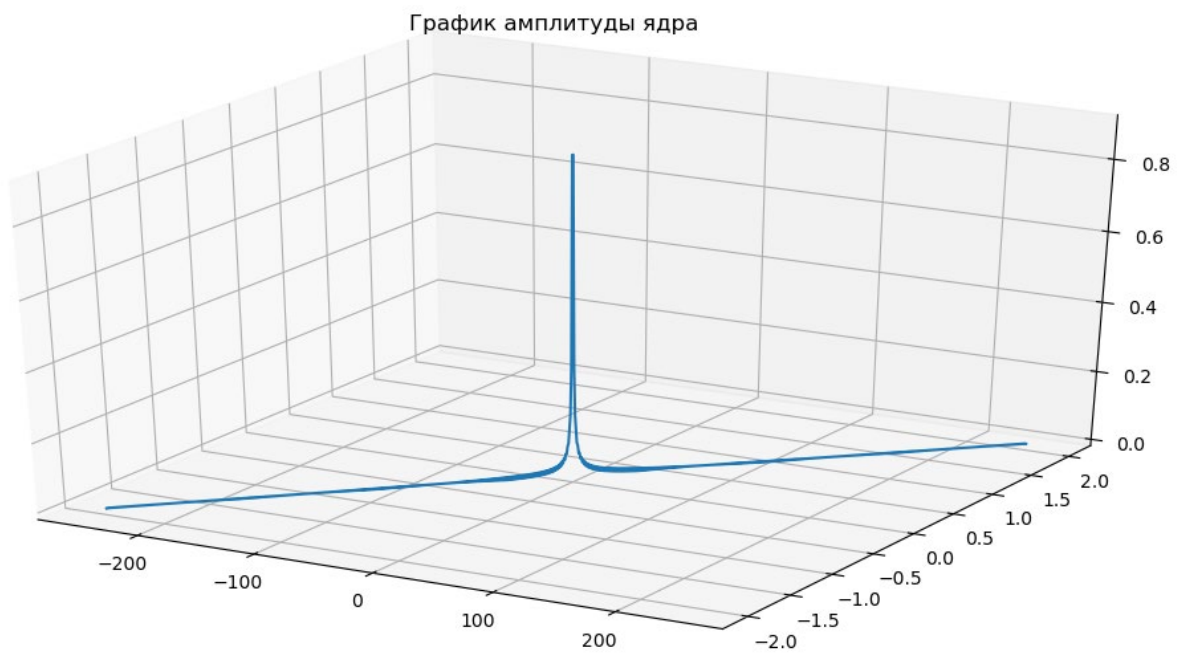
значениях по оси ординат амплитуды выходного сигнала и сужение амплитуды ядра по оси z .



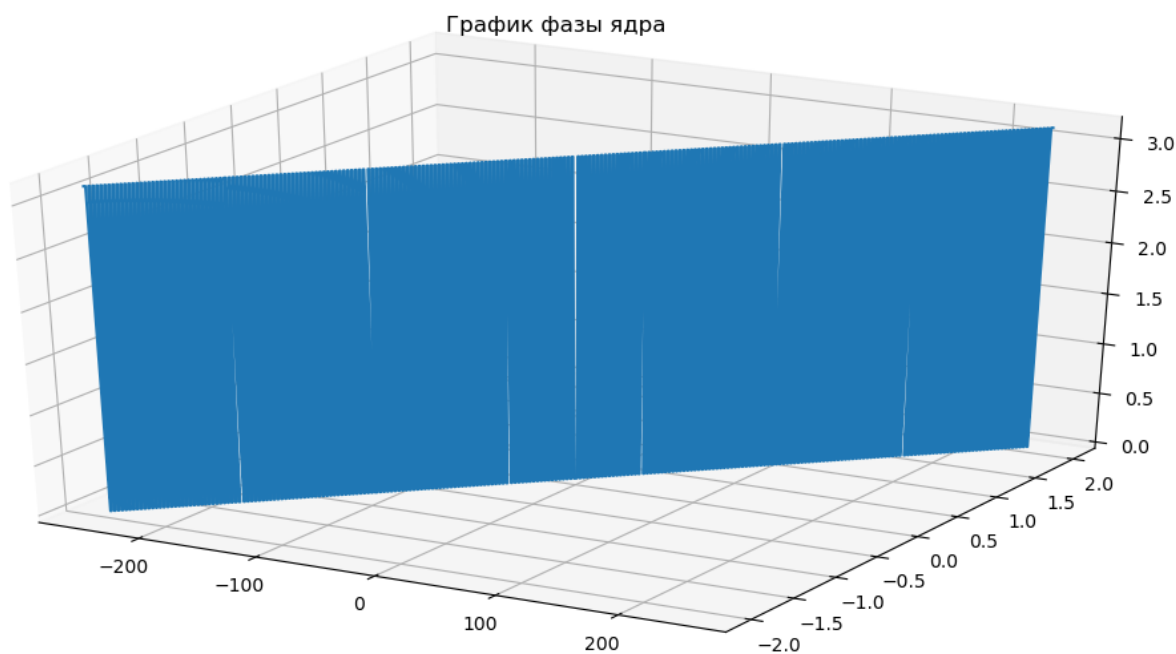
(a)



(б)



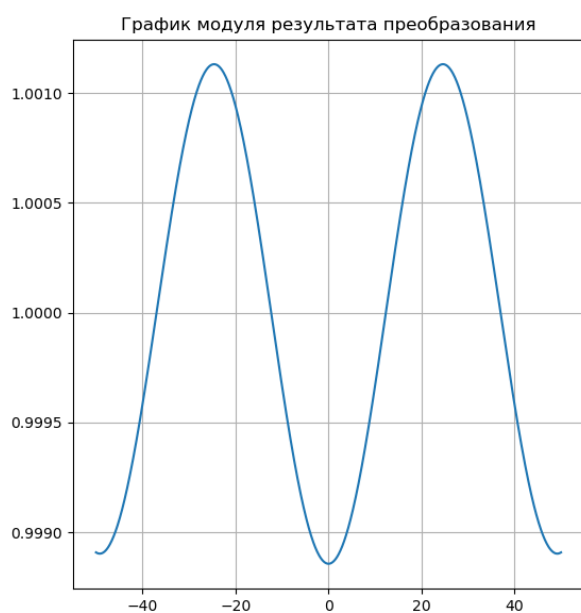
(в)



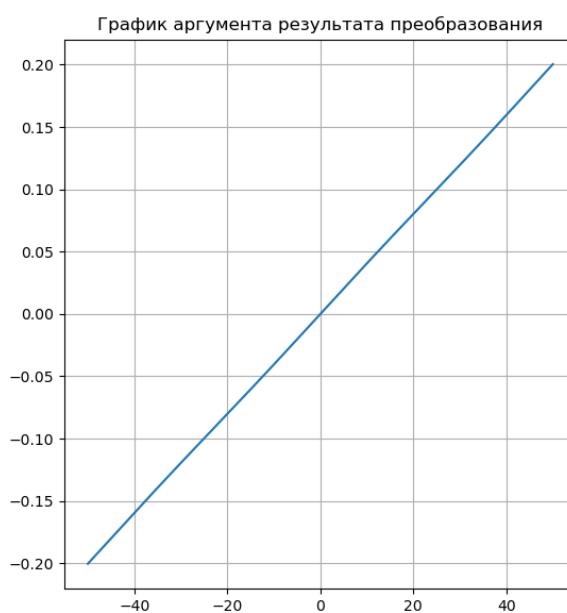
(г)

Рисунок 8 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра при $[a, b] = [-250, 250]$.

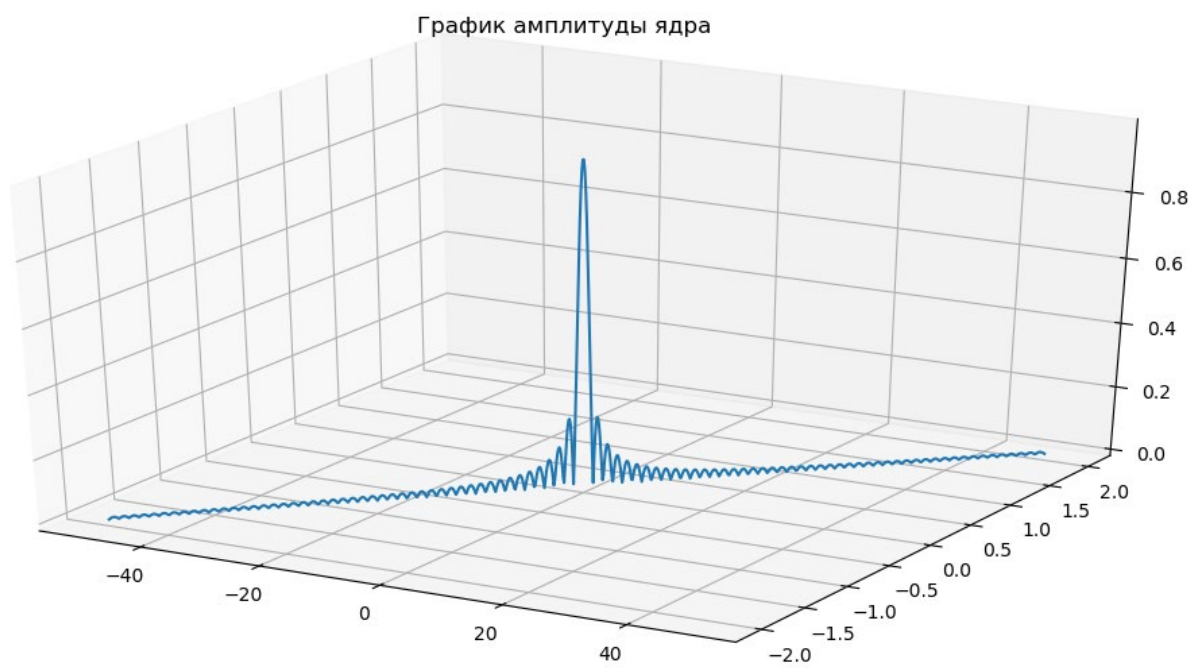
Теперь изменим область интегрирования $[a, b]$ с $[-200, 200]$ на $[-50, 50]$ и результат отобразим на рисунке 9. При увеличении области интегрирования наблюдаются изменения в максимальных и минимальных значениях по оси ординат амплитуды выходного сигнала, а графики ядра стали более скачкообразными.



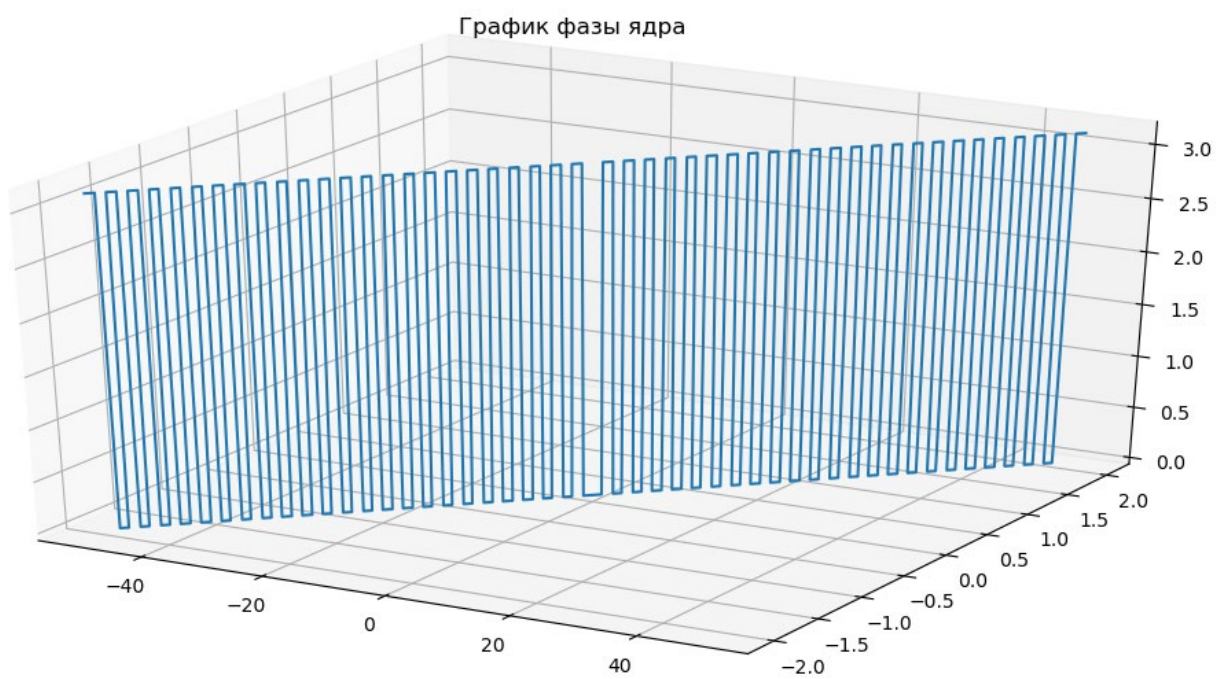
(а)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 9 – Амплитуда (а, в) и фаза (б, г) результата преобразования и ядра при $[a, b] = [-50, 50]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной лабораторной работе была создана программа на языке программирования Python, которая позволяет определять выходной сигнал с различными параметрами с помощью интегрального преобразования в конечных пределах.

При изменении различных параметров были сделаны следующие выводы:

1. При уменьшении или увеличении параметра α наблюдается расширение или сужение графиков ядра и выходного сигнала соответственно.
2. Увеличение или уменьшение количества точек дискретизации для входного сигнала и ядра влечёт за собой уменьшение или увеличение скачкообразности графиков ядра и выходного сигнала соответственно.
3. При изменении области интегрирования наблюдаются изменения в максимальных и минимальных значениях по оси ординат амплитуды выходного сигнала, а графики ядра становятся более скачкообразными при уменьшении области интегрирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, том I. – М.: Наука, 1968. – 440с.
- 2 Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1980. – 309с.
- 3 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
- 4 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
- 5 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009. 272 с.
- 6 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
- 7 Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Лань, 2010. 368 с.
- 8 Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 524 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def func(x):
    return np.exp(x * 1j/10)

def kernel(x, eps, alpha=1.0):
    return np.sin(np.pi * alpha * (x - eps)) / (np.pi*(x - eps))

def Fs(xs, epss, alpha=1.0):
    h_x = xs[1] - xs[0]
    matrix_A = kernel(xs[None, :], epss[:, None], alpha)
    vector_f = func(xs)
    Fs = np.dot(matrix_A, np.transpose(vector_f)) * h_x
    return Fs

def plots_f(xs):
    f = func(xs)
    fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))
    axes[0].set_title('График модуля исходного сигнала')
    axes[0].plot(xs, np.abs(f))
    axes[0].grid()
    axes[1].set_title('График аргумента исходного сигнала')
    axes[1].plot(xs, np.angle(f))
    axes[1].grid()
    plt.show()

def plots_F(xs, epss, alpha=1.0):
    F = Fs(xs, epss, alpha)
    fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))
    axes[0].set_title('График модуля результата преобразования')
    axes[0].plot(xs, np.abs(F))
    axes[0].grid()

    axes[1].set_title('График аргумента результата преобразования')
    axes[1].plot(xs, np.angle(F))
    axes[1].grid()
    plt.show()

def plots_K(xs, epss, alpha=1.0):
    K = kernel(xs, epss, alpha)
    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')
    ax.plot(xs, epss, np.abs(K))
    plt.title('График амплитуды ядра')
    plt.show()
    plt.close(fig)
    fig = plt.figure()
    ax = fig.gca(projection='3d')
    ax.plot(xs, epss, np.angle(K))
    plt.title('График фазы ядра')
    plt.show()
```

```
a = -200
b = 200
n = 1000
p = -2
q = 2
m = 1000
alpha = 1
xs = np.linspace(a, b, n)
h_x = xs[1] - xs[0]
epss = np.linspace(p, q, m)
plots_f(xs)
plots_F(xs, epss, alpha)
plots_K(xs, epss, alpha)
```