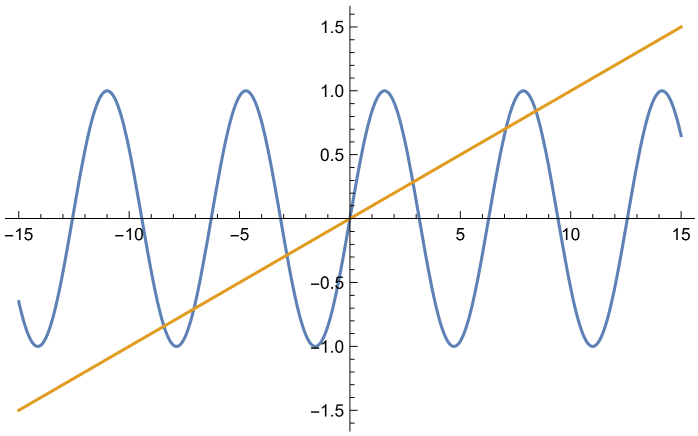
Методы решения нелинейных уравнений

In[∘]:=
```
Plot[{Sin[x], 0.1 x}, {x, -15, 15}]
```
граф⋯ синус

Out[∘]=



Опр. Корнем x уравнения f(x)=0 кратности k называется x* такой что $f(x^*) = 0,\ f'(x^*) = 0,\ \ldots,$ $f^{(k-1)}(x^*) = 0,\ \ f^{(k)}(x^*) \neq 0.$

Опр. Корень кратности 1 называется простым.

1. Решение методом бисекции (деление отрезка пополам)

2. Module (*Все переменные функции защищены от изменений)

```
myfun[f_, {x_, a_, b_}, e_] := Module[{c = x, t = a, z = b}, c + t + z]
```
программный модуль

In[∘]:=
```
f[x_] := 1;
```

In[∘]:=
```
myfun[f, {1, 2, 3}, 1]
```

Out[∘]= 6

3. Метод Ньютона

$y_k = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$

$x_1 : y_1 = 0 \quad ; \quad f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$

$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0\ ;\ x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1\ ;\ \ldots$

4. Метод простой итерации

f(x) = 0

x + f(x) = x

x+f(x) это ϕ(x)

x = ϕ(x)

x_0 − начальное приближение

$x_{n+1} = \phi(x_n)$

Опр. Функция g называется сжимающей, если ∃ q ∈(0, 1): any x, y ∈ R |g(x) - g(y)| ≤ q|x-y|

Теорема.
Если функция $\phi(x)$ непрерывная и сжимающая, то
$\exists\,!\; x^* : \phi(x^*) = x^*$ и $x^* = \mathrm{Lim}_{n\to\mathrm{Inf}}[x_n]$ for any $x_0 \in R$

Доказательство.
Пусть m > n ∈ N
$| x_m - x_n| - | \phi(x_{m-1}) - \phi(x_{n-1}) | \le q | x_{m-1} - x_{n-1} | \le q^n | x_{m-n} - x_0 |$ (далее на фото)

Пусть $m > n \in N$

$|x_m - x_n| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{n-1})| \le$

$\le q|x_{m-1} - x_{n-1}| \le q^n |x_{m-n} - x_0| \le \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1|$

$|x_{m-n} - x_0| = |x_0 - x_{m-n}| = |x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \ldots + x_{m-n-1} - x_{m-n}| \le$

$\le |x_0 - x_1| + \underbrace{|x_1 - x_2|}_{|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| \le q|x_0-x_1|} + \ldots + |x_{m-n-1} - x_{m-n}| \le$

$\le |x_0-x_1| + q|x_0-x_1| + q^2|x_0-x_1| + \ldots + q^{m-n-1}|x_0-x_1| =$

$= |x_0-x_1|(1+q+q^2+\ldots+q^{m-n-1}) \le$

$\le |x_0-x_1|(1+q+q^2+\ldots) = |x_0-x_1|\frac{1}{1-q}$

$\Rightarrow x_n$ − посл. Коши $\Rightarrow \exists\, x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(x^*)$ (послед Коши - по опр.)

Пусть $\exists\, x^*$ и $\bar{x}^*$: $x^* = \varphi(x^*)$, $\bar{x}^* = \varphi(\bar{x}^*)$

$|x^* - \bar{x}^*| > 0$

$|x^* - \bar{x}^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(\bar{x}^*)| < q|x^* - \bar{x}^*|$

$1 < q$ − противореч

Оценка погрешности на n-ом шаге

$$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \le q\,|x_{n-1} - x^*| \le \dots \le q^n |x_0 - x^*|$$

$$x_{n+1} - x^* = \underline{\varphi(x_n)} - \varphi(x^*) = \varphi(x^*) + \underline{\varphi'(x^*)}(x_n - x^*) + \dots - \varphi(x^*) = \{x^* - \text{простой корень}\} =$$

$$= \frac{\varphi''(x^*)}{2!}(x_n - x^*)^2 + \dots =$$

$$|x_{n+1} - x^*| \le \frac{M}{2!}|x_n - x^*|^2 \qquad M = const$$