Київський національний університет
імені Т.Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи 3-4
з предмету Нейронні мережі та нейрообчислення
«Мережі Кохонена»

Студента четвертого курсу
Групи ТК-42
Факультету комп'ютерних наук
та кібернетики
Мальованого Дмитра

Київ*2023*

Алгоритм роботи:

Нехай є набор із M образів, який необхідно класифікувати, тобто, розбити на K класів.

Кожний образ будем описувати деяким вектором $X^m=[x^m_1,x^m_2,...,x^m_N]$,
де x^m_i - дійсні числа, m=1,2…M.

Навчати будемо вагові коефіцієнти $W^k=[w^k_1,w^k_2,...,w^k_N]$,
k=1,2,...,K, де K – кількість класів на які розбиваємо початкові образи.

Нормування початкових векторів.

$$X^m=[x^m_1,x^m_2,...,x^m_N]$$

Обчислюємо $Max_n=max_{m(}x^m_{n)}$, $Min_n=min_{m(}x^m_{n)}$.

Позначимо $a_n=(Max_n-Min_n)^{-1}$, $b_n=-Min_n(Max_n-Min_n)^{-1}$.

Нормуємо $x^m_n=a_nx^m_n+b_n$, n=1,...,N.

1. Ініціалізуємо ваги випадковим чином значеннями від 0.1 до 0.3.

$W^k=[w^k_1,w^k_2,...,w^k_N]$,

2. Вибираємо коефіцієнт навчання $\lambda=0.3$, $\Delta\lambda=0.05$.

3. Поки $\lambda>0$ виконуємо кроки 4-5-6

4. Повторити 10 раз кроки 5-6

5. Для кожного X^m шукаємо найближчий вектор W^k і для знайденого вектора W^k корегуємо компоненти:

$w^k_n=w^k_n+\lambda(x^m_n-w^k_n)$.

6. Зменшуємо коефіцієнти навчання $\lambda=\lambda-\Delta\lambda$, $\Delta\lambda=0.05$. На крок 4.

7. Кінець роботи.

Мережа навчена.

Тепер будь-який вектор X потрібно нормувати та знайти найближчий вектор W^k, де номер k і буде номером класу.

Оскільки ініціалізували ваги випадковим чином, то номери класів ролі не грають, важливе лише групування образів по класах.

Якщо до ваг W^k примінити процедуру обернену до нормування, то коефіцієнти ваг для кожного класу вкажуть середні значення компонент для класу.

Реалізація

```python
import random
import numpy as np

def normalize(X):
    """
    Функція нормалізації вхідного вектора X.
    """
    maxn = np.max(X)
    minn = np.min(X)
    an = 1.0 / (maxn - minn)
    bn = -minn / (maxn - minn)
    return (X - minn) * an + bn

def kohonen_network(X, K, num_iterations=10, learning_rate=0.3, learning_rate_decay=0.05):
    """
    Реалізація алгоритму Кохонена.
    X - масив векторів вхідних даних форми (M, N), де M - кількість зразків, а N - кількість ознак.
    K - кількість класів.
    num_iterations - кількість ітерацій навчання.
    learning_rate - коефіцієнт навчання.
    learning_rate_decay - швидкість зменшення коефіцієнта навчання з кожною ітерацією.
    """
    M, N = X.shape
    # ініціалізуємо випадковими значеннями від 0.1 до 0.3
    W = np.random.uniform(0.1, 0.3, (K, N))
    for iteration in range(num_iterations):
        for m in range(M):
            x = normalize(X[m])
            # шукаємо найближчий вектор Wk
            distances = np.linalg.norm(W - x, axis=1)
            k = np.argmin(distances)
            # корегуємо компоненти вектора Wk
            W[k] += learning_rate * (x - W[k])
        # зменшуємо коефіцієнт навчання
        learning_rate -= learning_rate_decay
    # повертаємо класи для кожного вхідного вектора
    classes = np.zeros(M)
    for m in range(M):
        x = normalize(X[m])
        distances = np.linalg.norm(W - x, axis=1)
        k = np.argmin(distances)
        classes[m] = k
    return classes


if __name__ == "__main__":
    # приклад використання
    X = np.random.uniform(0, 1, (50, 4))
    print(f"Випадкові данні: {X}")
    classes = kohonen_network(X, 5)
    print(f"Класи: {classes}")
```

Результат:

Протестуємо реалізацію на декількох випакдових данних:
Випадкові данні: [[3.97330747e-01 2.65730902e-01 9.88834598e-01
5.73564815e-01]
[4.42934210e-01 5.95093460e-01 8.97158615e-01 2.13418214e-01]
[9.64468451e-01 4.23218981e-01 7.79164542e-01 8.81917640e-01]
[3.84158472e-01 2.60696397e-01 3.63357898e-04 9.07857068e-01]
[8.45427427e-02 6.58306062e-01 4.98740152e-01 9.55782537e-01]
[1.98921317e-01 3.35334306e-01 1.46191037e-01 8.54921692e-02]
[7.83739061e-01 1.75995529e-01 5.84216761e-01 3.20443933e-01]
[9.17377469e-01 4.47453477e-01 8.57098694e-01 7.91859112e-01]
[1.67668382e-01 3.92807797e-02 1.83432535e-01 7.17448931e-01]
[3.25163298e-01 3.67955247e-01 8.41640282e-01 6.02905263e-01]
[5.82074352e-01 8.23017842e-01 5.58111403e-01 7.65692010e-01]
[6.29040981e-01 1.53321485e-01 9.58519939e-01 8.25773144e-02]
[1.11367449e-01 8.39636521e-01 4.77342322e-02 9.10825348e-01]
[1.40527017e-01 8.89225275e-01 8.03963514e-01 8.42866154e-01]
[9.58758497e-01 2.24035284e-01 9.98763135e-01 8.76823064e-01]
[4.50043045e-01 1.31949573e-03 6.56454570e-01 3.83902060e-01]
[9.78289013e-01 1.74605254e-01 7.37695140e-01 3.72253543e-03]
[6.41813707e-01 9.88544521e-01 8.76500987e-01 9.44652513e-02]
[4.25737805e-01 9.79302092e-01 6.69054349e-01 2.46371379e-02]
[1.57245087e-02 3.83247621e-01 2.13837498e-01 7.90600474e-01]
[3.06188192e-01 3.42082033e-01 7.43098466e-01 9.60959673e-01]
[3.93423123e-01 8.61105771e-01 9.35520436e-01 7.74853468e-01]
[2.59228853e-01 4.61512812e-01 7.95703423e-01 2.80042347e-01]
[5.12857162e-01 4.29168375e-01 6.09732762e-01 8.82709102e-01]
[2.14157178e-01 9.07953352e-01 8.16936814e-01 6.53494402e-01]
[3.24052447e-01 8.80113292e-02 3.52939091e-01 9.76419627e-01]
[7.71852013e-01 3.84541472e-02 4.60724268e-01 6.54816770e-01]
[9.61571010e-01 8.00279196e-01 2.63597462e-01 9.88925987e-01]
[6.04475953e-01 1.08888302e-01 3.16025196e-01 4.50820018e-01]
[4.51725184e-01 2.12969731e-01 3.02084932e-01 4.07088386e-01]
[6.07403394e-01 3.19687407e-01 3.01875628e-01 1.95568444e-01]
[3.74292901e-03 9.83422771e-01 4.40245608e-01 7.56980733e-01]
[8.95491104e-01 8.70803186e-01 1.24229107e-01 7.92814871e-01]
[6.77572444e-01 9.53329447e-01 4.06347579e-01 8.24918779e-02]
[3.09275096e-01 5.77792073e-01 3.36256068e-01 7.30904034e-01]
[1.89756956e-01 4.11550656e-01 8.57538507e-01 6.16440156e-01]
[3.42667098e-01 7.90836360e-02 2.60094070e-01 1.63410377e-01]
[4.60262875e-01 1.29361411e-01 8.73003752e-01 4.68424206e-01]

[6.65421735e-01 5.12062100e-01 7.43949252e-01 6.40861517e-01]
[3.74569636e-01 4.72976385e-01 5.45316150e-01 3.82736079e-01]
[3.67268918e-01 8.29973173e-01 3.80780759e-01 8.02012357e-01]
[8.47233723e-01 1.84927492e-01 6.91994788e-01 3.69943142e-01]
[6.35386365e-01 1.22207193e-01 3.87063539e-01 6.05535276e-01]
[6.15381047e-01 9.93122994e-01 1.17105798e-02 1.73389783e-01]
[1.46914857e-01 7.46701975e-01 6.15801529e-01 6.27792579e-01]
[2.13955371e-01 5.71152081e-01 4.42088273e-01 4.97442407e-01]
[7.96897870e-01 3.64850840e-01 9.12609066e-01 6.86863242e-01]
[7.20901764e-02 3.85268138e-01 7.16703115e-01 4.52348010e-01]
[5.02676841e-01 1.05952800e-01 1.57473873e-01 8.85537515e-01]
[5.70305675e-01 5.48621652e-01 7.58072969e-01 5.03245834e-01]]

Класи: [2. 2. 3. 2. 2. 2. 2. 0. 2. 0. 0. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 1. 1. 2. 0.
2. 2. 3. 2. 3. 0. 2. 2. 2. 2. 1. 2. 2. 2. 0. 0. 1. 2. 3. 2. 2. 1. 2. 2.
3. 0.]

Самоорганізуючі карти Кохонена

Алгоритм роботи:

Нехай вихідні вектора, за якими ми будемо будувати карту представляють собою N-мірні вектора

$$X=[x_1,x_2,...,x_N].$$

Карта Кохонена є набором нейронів, які розташовані на площині, наприклад, прямокутної сітки. При цьому важливо, що для кожної пари цих нейронів можна обчислити геометричну відстань. Будемо вважати, що таких нейронів є M.

Кожен нейрон, крім свого геометричного положення, описується N-мірним числовим вектором

$$W^m=[w^m_1,w^m_2,...,w^m_N],$$

де w^m_n - дійсні числа.

Алгоритм навчання мережі:

1. Ініцілізуємо вектора W^m випадковими числами, бажано, щоб ці числа були порядку тих, що в початкових даних.
2. Покладемо параметр часу t = 1.
3. Вибираємо довільний вектор з початкових даних X.
4. Знаходим нейрон, який найближчий до вектора X. Найближчий по метриці N-мірного вектора. Позначимо цей нейрон через W^{m*}, де m*- номер цього нейрона.

5. Корегуємо всі коефіцієнти за формулою

$w^m_n = w^m_n + \eta(t)h(t, \rho(m, m^*))[x_n - w^m_n]$,

де $\eta(t) = \eta_0 \exp(-at)$,

$h(t, \rho) = \exp[-(\rho^2) / (2\sigma(t))]$,

$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-bt)$.

Через $\rho(m, m^*)$ позначено відстань в геометрії розміщення нейронів на площині для нейрона с номером m и m*.

6. t = t + 1

7. Якщо перевищено максимальний час, то виходимо із алгоритму.

8. Перехід до уроку 3.

Після побудови карти SOM її потрібно градувати. Для цього потрібно вибрати еталонні значення вхідних даних (необов'язково з тих, що використовувалися в навчанні) і накласти їх на карту. Накласти на карту означає знайти нейрон, який буде ближче всього еталонного значення.

Після градування карти її можна використовувати. Для будь-якого вектора X визначаємо найближчий нейрон і його розташування покаже область, до якої відноситься цей вектор

Реалізація:

```python
import numpy as np

def kohonen_map(X, M, max_time=100, learning_rate=0.1, initial_radius=1.0,
                time_constant=10.0):
    """
    Навчання мережі Кохонена на вхідних даних X з M нейронами.

    Параметри:
        X: numpy.ndarray, вхідні дані розміру (num_samples, num_features).
        M: int, кількість нейронів у мережі.
        max_time: int, максимальний час для навчання.
        learning_rate: float, коефіцієнт навчання η₀.
        initial_radius: float, початковий радіус σ₀.
        time_constant: float, константа часу для експоненційного зменшення
            радіуса σ(t) і коефіцієнта навчання η(t).

    Повертає:
        W: numpy.ndarray, матриця вагів розміру (M, num_features),
            що містить вектора Wm для кожного нейрона.
    """
    num_samples, num_features = X.shape
    # Ініціалізуємо матрицю вагів випадковими числами.
    W = np.random.rand(M, num_features) * X.max()
    # Початковий час.
    t = 1
    while t <= max_time:
        # Вибираємо випадковий вхідний вектор.
        x = X[np.random.choice(num_samples)]
        # Знаходимо нейрон, який найближчий до вектора x.
        distances = np.linalg.norm(W - x, axis=1)
        closest_neuron_index = np.argmin(distances)
        # Обчислюємо параметри навчання.
        learning_rate_t = learning_rate * np.exp(-t / time_constant)
        radius_t = initial_radius * np.exp(-t / time_constant)
        # Оновлюємо ваги всіх нейронів.
        for i in range(M):
            distance_to_winner = np.linalg.norm(i - closest_neuron_index)
            h = np.exp(-(distance_to_winner ** 2) / (2 * radius_t ** 2))
            W[i] += learning_rate_t * h * (x - W[i])
        # Збільшуємо час на одиницю.
        t += 1
    return W


```

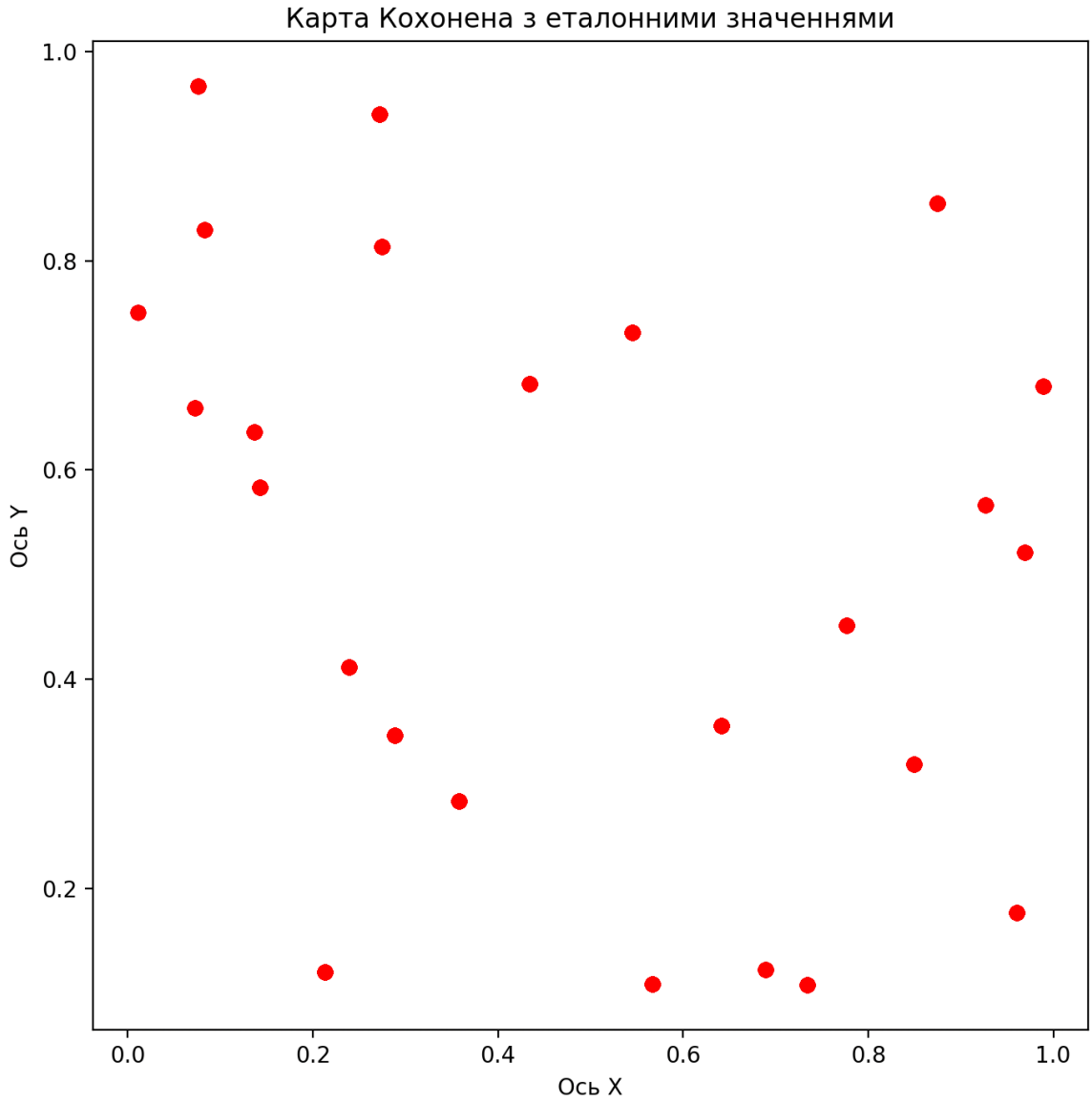
Функція kohenen_map будує карту Кохонена для заданого набору даних. Ця функція ініціалізує нейронну мережу з випадковими значеннями ваг, після чого вона тренує мережу за допомогою алгоритму навчання Кохонена. Після закінчення тренування функція повертає розташування нейронів на карті Кохонена.

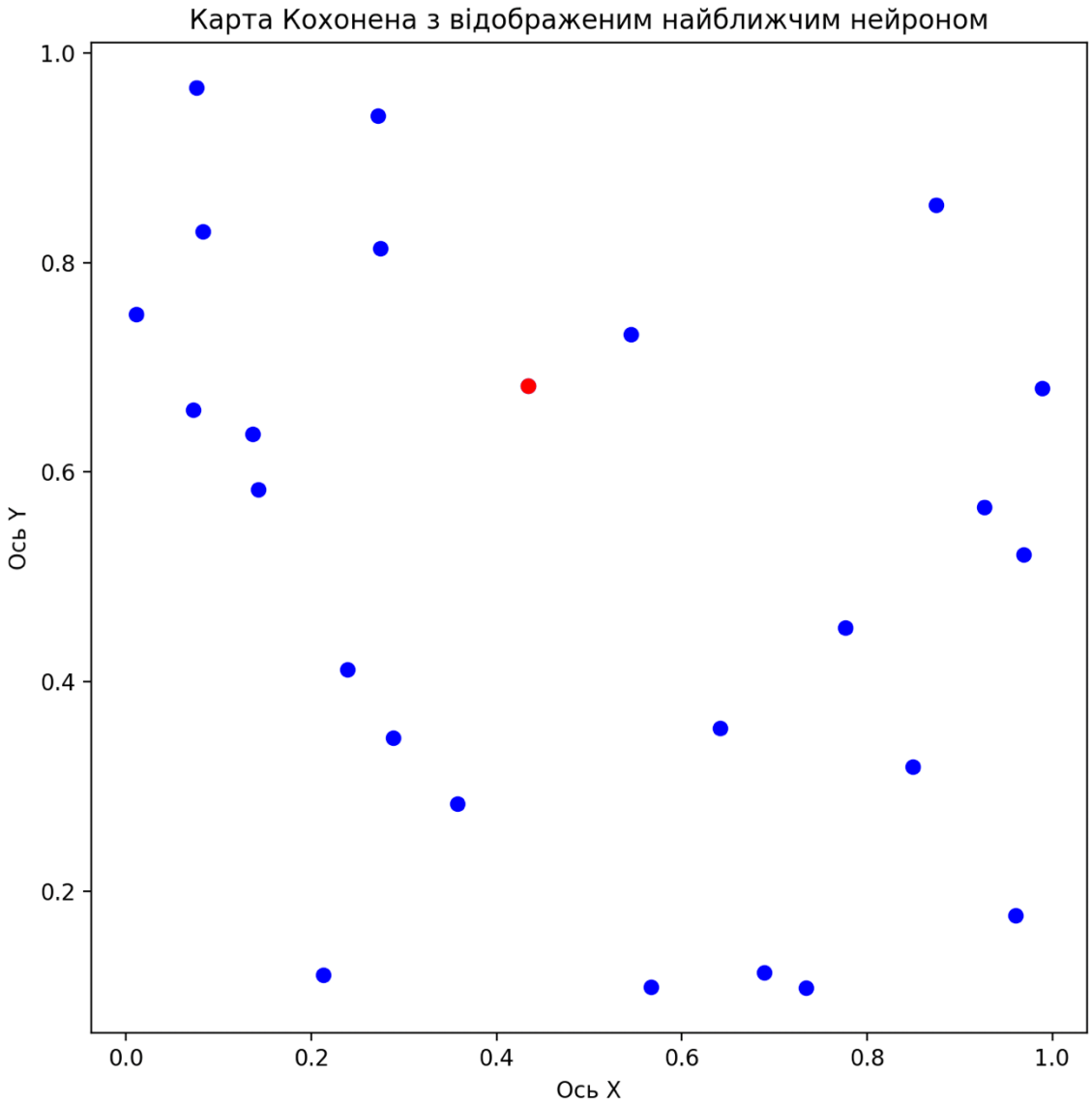
Значення ваг нейронів на карті Кохонена відображають структуру даних, на яких тренувалась мережа. Градація кольорів на карті Кохонена може вказувати на зони, в яких знаходяться подібні дані. Наприклад, у зеленій зоні можуть знаходитися дані, що містять велику кількість зелених компонент.

Градуюємо SOM:

```
    # Згенеруємо випадкові дані.
    num_samples = 1000
    num_features = 2
    X = np.random.rand(num_samples, num_features)

    # Задамо параметри для мережі Кохонена.
    M = 25
    max_time = 100
    learning_rate = 0.1
    initial_radius = 1.0
    time_constant = 10.0

    # Навчаємо мережу Кохонена на випадкових даних.
    W = kohonen_map(X, M, max_time, learning_rate, initial_radius, time_constant)

    # Накладаємо еталонні значення на карту.
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 8))
    ax.scatter(W[:, 0], W[:, 1], color='b')

    for i in range(num_samples):
        x = X[i]
        distances = np.linalg.norm(W - x, axis=1)
        closest_neuron_index = np.argmin(distances)
        ax.scatter(W[closest_neuron_index, 0], W[closest_neuron_index, 1], color='r')

    ax.set_title('Карта Кохонена з еталонними значеннями')
    ax.set_xlabel('Ось X')
    ax.set_ylabel('Ось Y')

    plt.show()

    # Визначаємо найближчий нейрон для вектора X.
    X_test = np.array([0.4, 0.6])
    distances = np.linalg.norm(W - X_test, axis=1)
    closest_neuron_index = np.argmin(distances)

    # Відображаємо результат на карті Кохонена.
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 8))
    ax.scatter(W[:, 0], W[:, 1], color='b')
    ax.scatter(W[closest_neuron_index, 0], W[closest_neuron_index, 1], color='r')
    ax.set_title('Карта Кохонена з відображеним найближчим нейроном')
    ax.set_xlabel('Ось X')
    ax.set_ylabel('Ось Y')

    plt.show()
```

Результат роботи:


Карта Кохонена з еталонними значеннями
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
Ось Y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Ось X



Весь код за посиланням:
https://github.com/DiMalovanyy/University_Term9/tree/main/NeurNet/Lab3