UFMS DIGITAL

Estatística e Probabilidade

Prof. Dr. Rogers Barros de Paula

Módulo 3 - Variáveis aleatórias e modelos probabilísticos

Prof. Dr. Rogers Barros de Paula

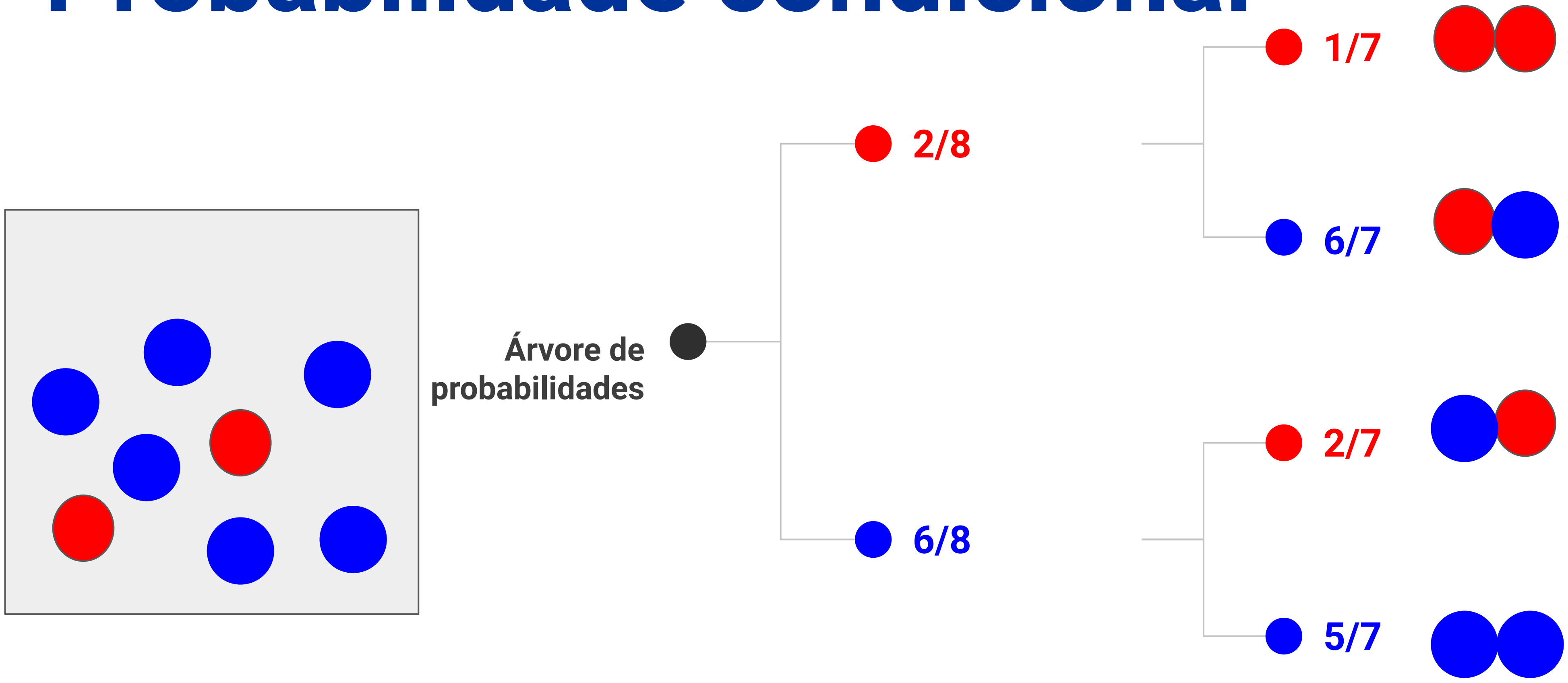
Variáveis aleatórias e modelos probabilísticos

- Definição formal de probabilidade;
- Definição de variáveis aleatórias;
- Modelos probabilísticos discretos e contínuos.

Probabilidade condicional

Numa urna existem duas bolas vermelhas e seis azuis. Sorteando-se duas bolas **SEM REPOSIÇÃO**, qual a probabilidade de ambas serem vermelhas?

Probabilidade condicional



$2/8 \times 1/7 = 2/56$

$2/8 \times 6/7 = 12/56$

$6/8 \times 2/7 = 12/56$

$6/8 \times 5/7 = 30/56$

Variável aleatória

- Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas obtidas em duas extrações SEM REPOSIÇÃO":

X = 2 — 2/8 x 1/7 = 2/56

X = 1 — 2/8 x 6/7 = 12/56

X = 1 — 6/8 x 2/7 = 12/56

X = 0 — 6/8 x 5/7 = 30/56

Variável aleatória

- Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas obtidas em duas extrações SEM REPOSIÇÃO":

X	P(X)
0	30/56
1	24/56
2	2/56

Variável aleatória

- É um experimento aleatório;
- Os resultados variam;
- Alguns resultados são mais prováveis que outros;
- O somatório é um.

X	P(X)
0	30/56
1	24/56
2	2/56

Definição de probabilidade

Consideremos um espaço amostral Ω finito, isto é, $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. A cada evento elementar a_i vamos associar um número real, indicado por $p(a_i)$ ou p_i, chamado de *probabilidade do evento* a_i, satisfazendo as condições:

i) $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$

ii) $\sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$

Dizemos que os números reais $p_1, p_2, \dots, p_k$ definem uma *distribuição de probabilidades* sobre Ω.

Seja A um evento qualquer de Ω. Definimos probabilidade do evento A, e indicamos por $P(A)$, da seguinte forma:

i) Se $\mathrm{A} = \emptyset$, então $P(A) = 0$

ii) Se $\mathrm{A} \neq \emptyset$, então $\mathrm{P(A)} = \sum_{a_i \in A} p_i$

Alguns modelos probabilísticos

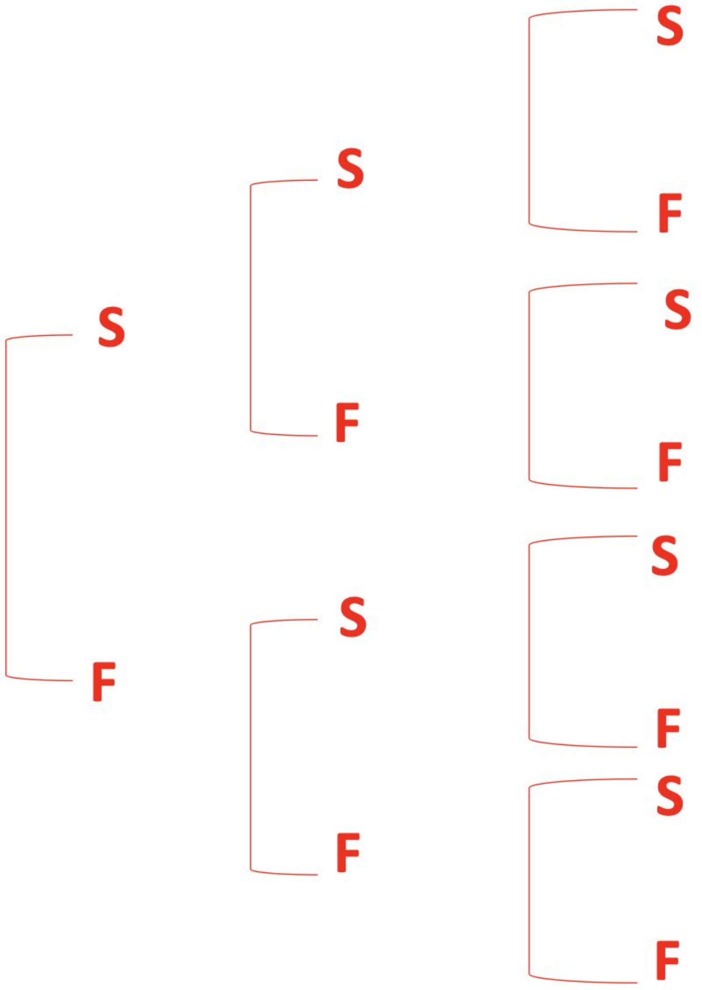
- Dependendo do tipo de variável, os modelos se dividem em modelos discretos e contínuos.
- Modelos discretos: Bernoulli, binomial, geométrica, hipergeométrica e Poisson.
- Modelos contínuos: uniforme constante, exponencial e Normal.

Modelos binomial e de Poisson

Distribuição	Resumo	Fórmulas
Binomial	Condições: i. O experimento é repetido por um número fixo (n) de tentativas independentes; ii. Há somente dois resultados possíveis para cada tentativa. Cada resultado pode ser classificado como um sucesso ou um fracasso. iii. A probabilidade de um sucesso deve permanecer constante para cada uma das tentativas. iv. A variável aleatória X é a contagem do número de tentativas bem-sucedidas em um total de n tentativas. v. Parâmetros n e p.	k = número de sucessos em n tentativas p = é a probabilidade de sucesso em uma tentativa q = é a probabilidade de fracasso em uma tentativa $(q = 1 - p)$ $P(X = k) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$
Poisson	A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta de probabilidade que determina a probabilidade x de ocorrências de um evento durante um intervalo especificado de tempo, área ou volume. O parâmetro é μ.	x = número de ocorrências no intervalo de tempo determinado μ = número médio de ocorrências em uma determinada unidade de tempo ou espaço. $P(x) = \frac{\mu^x . e^{-\mu}}{x!}$

Exemplo

Um dado é lançado três vezes. Obtenha a probabilidade de sair exatamente um 6.



S=1/6
F=5/6

Exemplo

Um dado é lançado três vezes. Obtenha a probabilidade de sair exatamente um 6.

Número de sucessos	Probabilidade
SSS – 3 sucessos	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$
SSF – 2 sucessos	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{216}$
SFS – 2 sucessos	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$
SFF – 1 sucesso	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$
FSS – 2 sucessos	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$
FSF – 1 sucesso	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$
FFS – 1 sucesso	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$
FFF – 0 sucesso	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

Exemplo

Um dado é lançado três vezes. Obtenha a probabilidade de sair exatamente um 6.

Número de sucessos	Probabilidade
SFF – 1 sucesso	$\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$
FSF – 1 sucesso	$\frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$
FFS – 1 sucesso	$\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} = \frac{25}{216}$
Total – 1 sucesso	$\frac{25}{216} + \frac{25}{216} + \frac{25}{216} = \frac{75}{216} \approx 0{,}347$

Exemplo

Um dado é lançado três vezes. Obtenha a probabilidade de sair exatamente um 6.

- k = número de sucessos em n tentativas $(k = 1)$ $(n = 3)$
- p = é a probabilidade de sucesso em uma tentativa $\left({}^{1}/_{6}\right)$
- q = é a probabilidade de fracasso em uma tentativa $(q = 1 - p)$ $\left(q = {}^{5}/_{6}\right)$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$
- $P(X = 1) = \binom{3}{1} . \left(\frac{1}{6}\right)^1 . \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}$
- $P(X = 1) = 3 . \frac{1}{6} . \frac{25}{36} = \frac{25}{72} \approx 0{,}347.$

Exemplo

- O número médio de acidentes mensais de um determinado cruzamento é 3. Qual é a probabilidade de que em um determinado mês ocorram quatro acidentes no cruzamento?

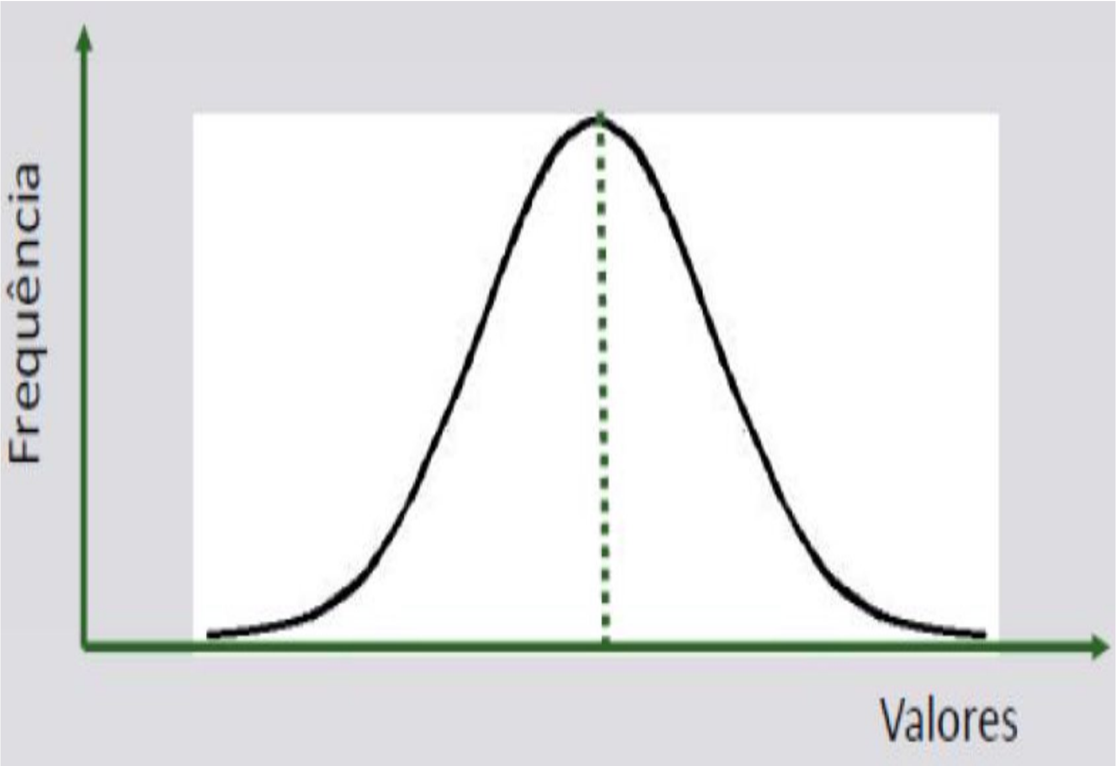
- x = número de ocorrências no intervalo de tempo determinado $(x = 4)$
- μ = número médio de ocorrências em uma determinada unidade de tempo ou espaço. $(\mu = 3)$

- $P(x) = \frac{\mu^x . e^{-\mu}}{x!} = \frac{3^4 . e^{-3}}{4!} \approx 0{,}168$

Modelo normal

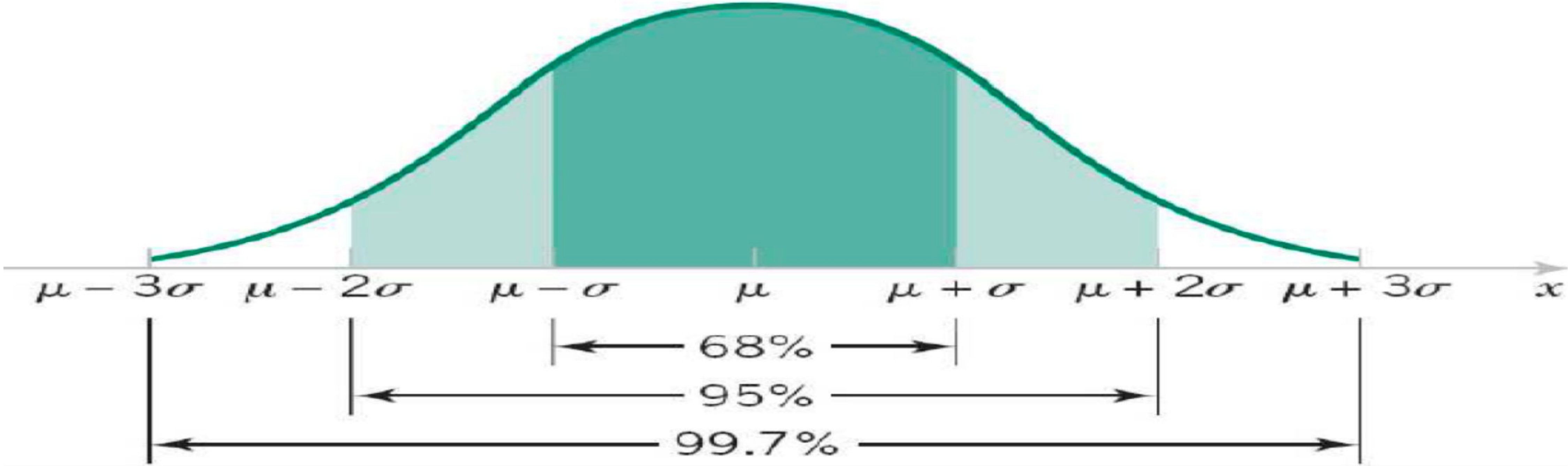
Algumas variáveis contínuas exibem um comportamento muito particular quando visualizamos a distribuição de frequências de seus valores.

- Concentração de valores em torno um valor central;
- Simetria em torno do valor central;
- Frequência pequena de valores extremos.



Modelo normal

- Parâmetro: média e desvio padrão

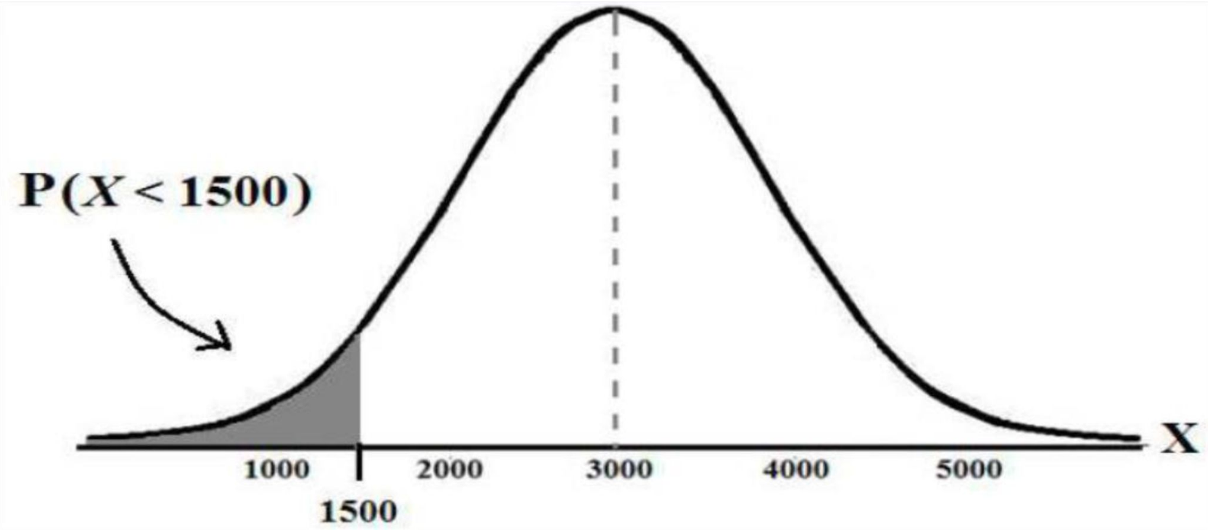


Exemplo

Suponha que X é o peso de bebês ao nascer, e que, em certa população, X tem distribuição de probabilidades que pode ser considerada normal com μ=3000g e σ=1500g. Qual é a probabilidade de um bebê nascer com peso abaixo de 1500g?

Exemplo

Suponha que X é o peso de bebês ao nascer, e que, em certa população, X tem distribuição de probabilidades que pode ser considerada normal com μ=3000g e σ=1500g. Qual é a probabilidade de um bebê nascer com peso abaixo de 1500g?



Veja que 1500 g está a um desvio padrão da média. Pelo gráfico anterior...

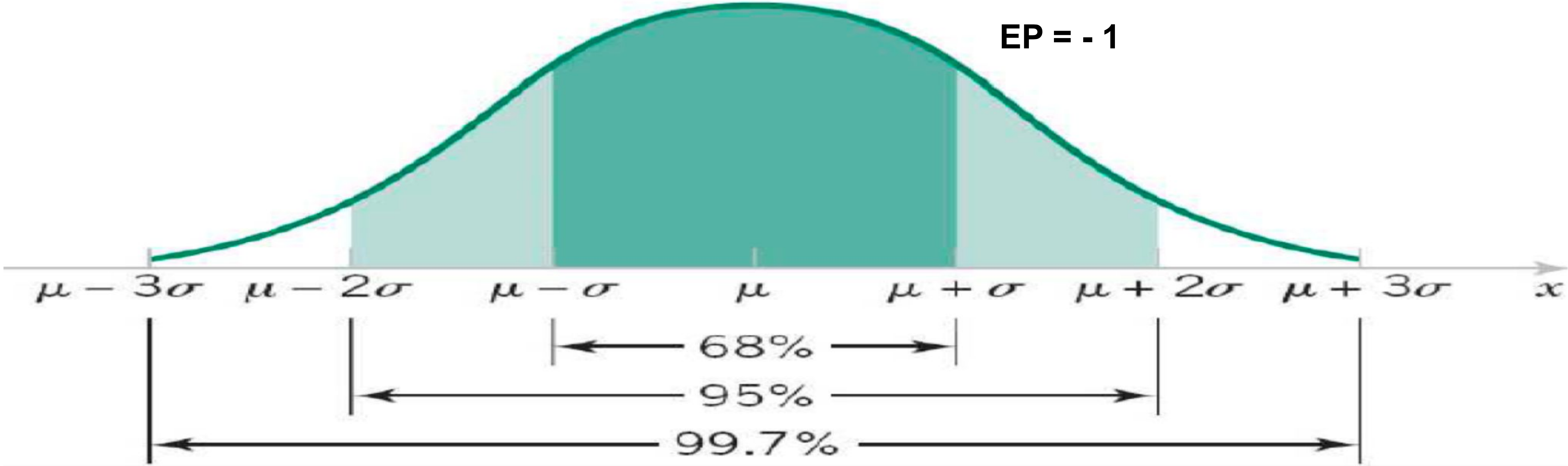
Modelo normal

- Parâmetro: média e desvio padrão

EP = (xi - м)/σ

EP = (1500 - 3000)/1500

EP = - 1



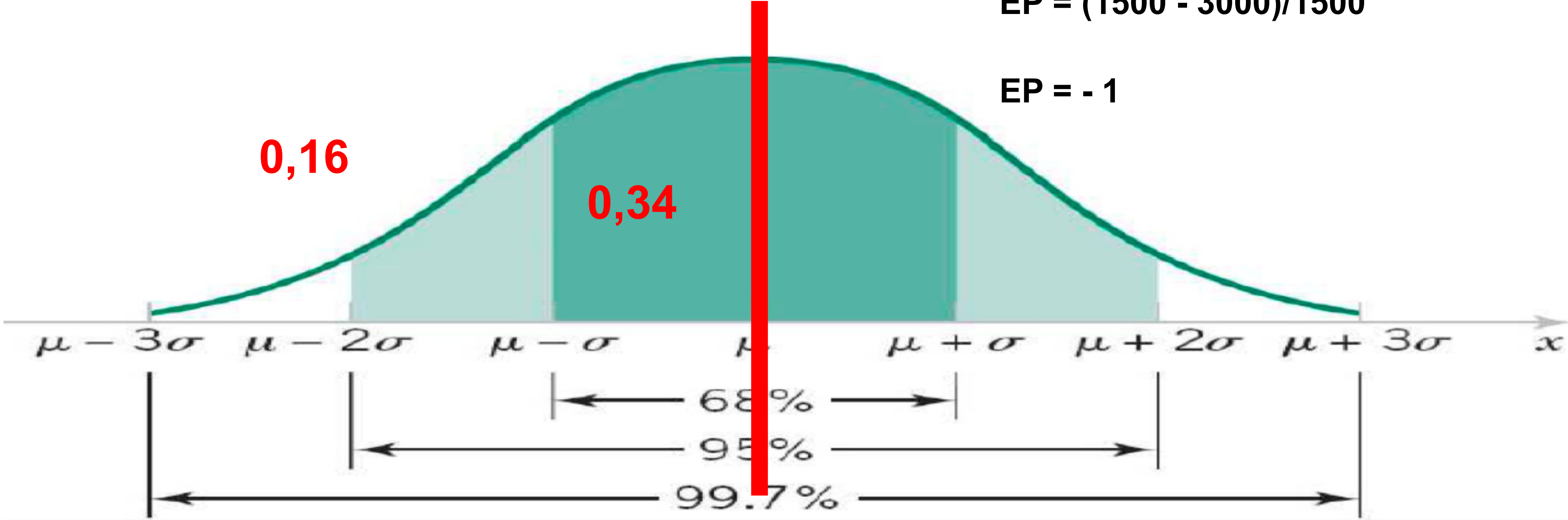
Modelo normal

- Parâmetro: média e desvio padrão

EP = (xi - м)/σ

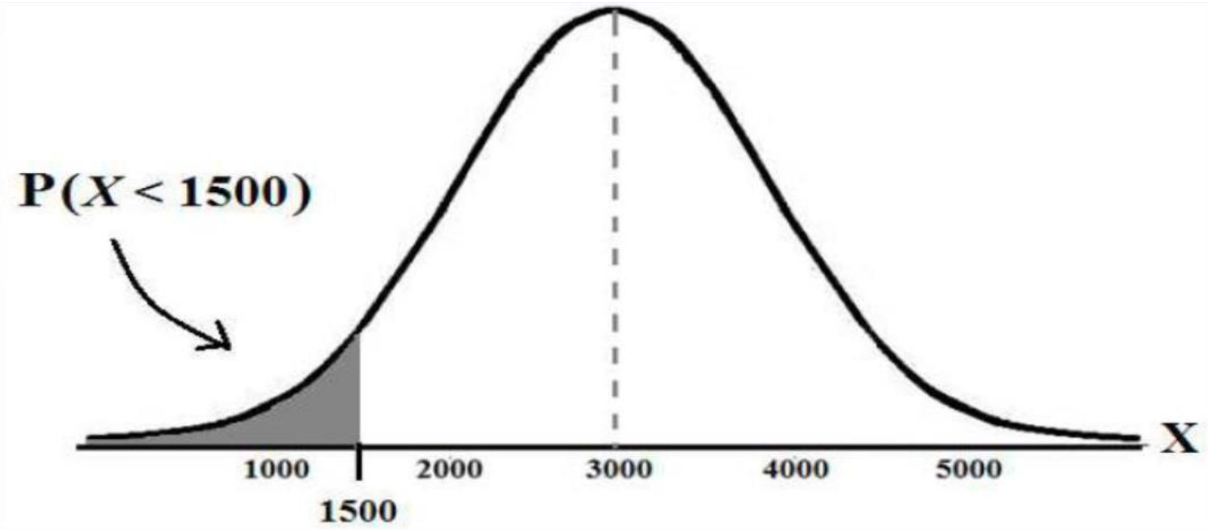
EP = (1500 - 3000)/1500

EP = - 1



Exemplo

Suponha que X é o peso de bebês ao nascer, e que, em certa população, X tem distribuição de probabilidades que pode ser considerada normal com μ=3000g e σ=1500g. Qual é a probabilidade de um bebê nascer com peso abaixo de 1500g?



Veja que 1500 g está a um desvio padrão da média. A probabilidade é 0,16.

Considerações finais

- Definição formal de probabilidade;
- Definição de variáveis aleatórias;
- Alguns modelos probabilísticos discretos e contínuos.

Licenciamento