Lý thuyết Đồ thị

TS. Nguyễn Đình Hiển
Đại học Công Nghệ Thông Tin, ĐHQG-HCM

1

Hien D. Nguyen

Personal Information

Email: hiennd@uit.edu.vn
Hometown: Ho Chi Minh city, VN

Working

- 2008 - now: Lecturer at Computer Science Faculty, UIT, VNU-HCM
- March. 2017 – Sept. 2017: researcher at National Institute of Informatics (NII), Japan
- Jan. 2018 – Feb. 2018: researcher at Artificial Intelligence lab., Wakayama University, Japan

Research areas

Knowledge engineering, intelligent problem solver, intelligent software, expert system.

2

2

Nội dung

3

Định nghĩa

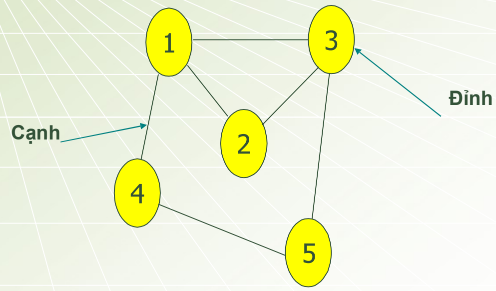
- V, E là các tập hữu hạn và không rỗng các phần tử nào đó và $E \subseteq V \times V$

  G = (V,E) gọi là đồ thị hữu hạn.
- Mỗi phần tử $v \in V$ gọi là một đỉnh của đồ thị
- Mỗi phần tử $e = (x,y) \in E$ gọi là một cạnh của đồ thị
- V gọi là tập các đỉnh, E gọi là tập các cạnh
- $n = |V|$, $m = |E|$

4

Ví dụ

G = (V, E)



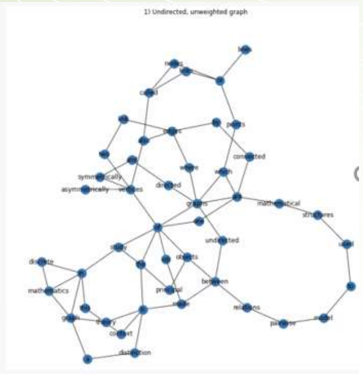
V = {1, 2, 3, 4, 5}

E = { (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,5), (4,5) }

Ứng dụng

Biểu diễn ngữ nghĩa của văn bản

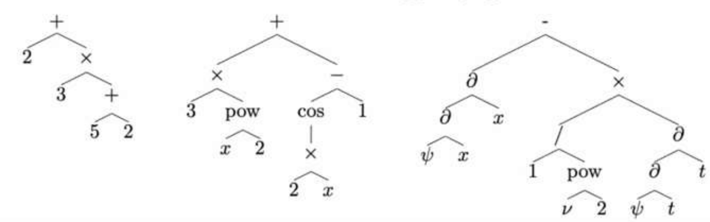
In mathematics, graph theory is the study of graphs, which are mathematical structures used to model pairwise relations between objects. A graph in this context is made up of vertices, also called nodes or points, which are connected by edges, also called links or lines. A distinction is made between undirected graphs, where edges link two vertices symmetrically, and directed graphs, where edges link two vertices asymmetrically. Graphs are one of the principal objects of study in discrete mathematics.



Ứng dụng

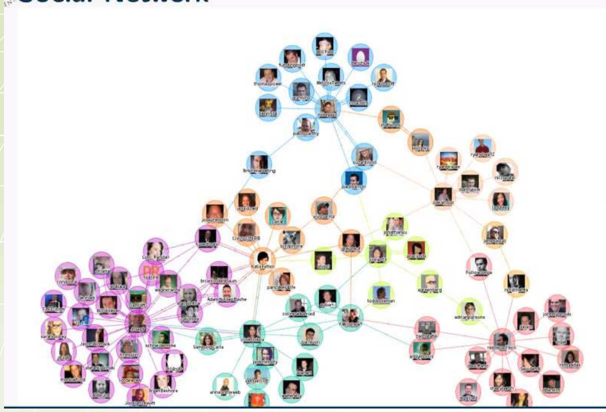
Biểu diễn các biểu thức toán học

expressions $2 + 3 \times (5 + 2)$, $3x^2 + \cos(2x) - 1$, and $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$:



Ứng dụng

Social Network

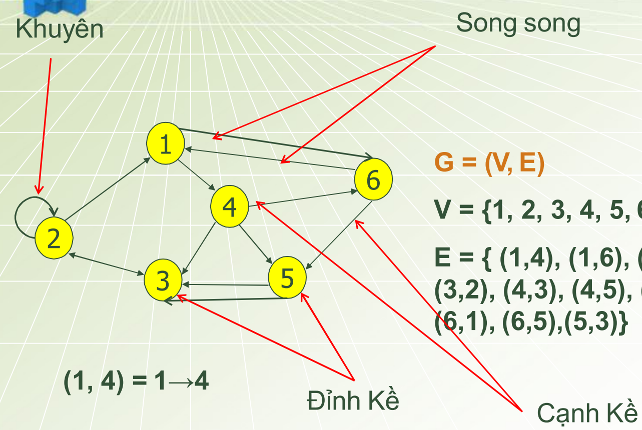


Đồ thị có hướng

- G = (V,E) là đồ thị có hướng nếu với mọi cạnh e=(x,y) $\in$ E có phân biệt thứ tự các đỉnh x và y, có hướng x đến y, hay (x,y) $\neq$ (y,x)

- Đối với một cung e = (x, y):
  - x là đỉnh đi (gốc,đầu)
  - y là đỉnh đến(ngọn, cuối)
  - Cung e đi từ x và đến y

Đồ thị có hướng



G = (V, E)

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

E = { (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (3,2), (4,3), (4,5), (4,6), (5,3), (6,1), (6,5),(5,3)}

10

Đồ thị có hướng

- Cho **G=(V,E)** là một đồ thị có hướng và **e=**$(v_i,v_j) \in E$ **:**
  - $\mathbf{v_j}$ được gọi là **đỉnh sau** của v_i
  - v_i là một **đỉnh trước** của v_j
- Tập các đỉnh sau và đỉnh trước của v_i lần lượt được kí hiệu là $\Gamma(v_i)$ và $\Gamma^{-1}(v_i)$

  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid (x,y) \in E\}$

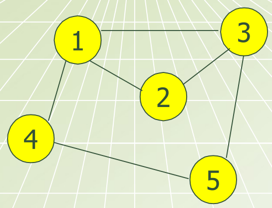
- G=(V,E) = (V, Γ)

11

Đồ thị vô hướng

- G = (V,E) là đồ thị vô hướng nếu với mọi cạnh e=(x,y) $\in$ E không phân biệt thứ tự các đỉnh x và y, tức là từ x đến y không kể hướng, hay (x,y) = (y,x)

Đồ thị vô hướng



G = (V, E)

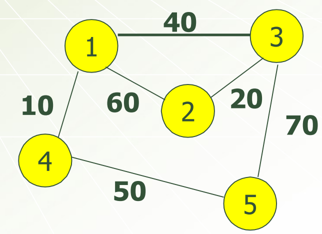
V = {1, 2, 3, 4, 5}

E = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,5), (4,5)}

- cạnh song song, khuyên?
- $\Gamma(x) = \{y \in V \mid (x,y) \in E\}$

Đồ thị có trọng số

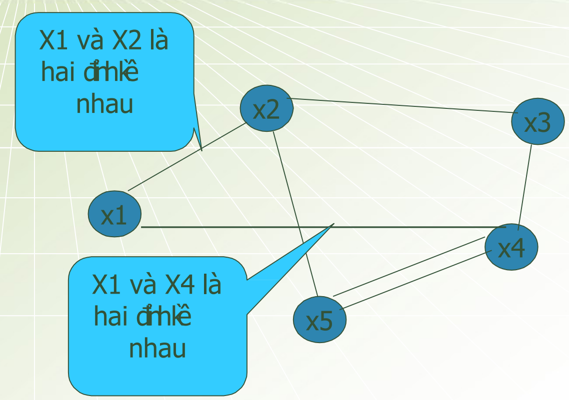
- Một đồ thị G = (V,E) gọi là có trọng lượng hay trọng số nếu mỗi cạnh(hoặc cung) được gán 1 số,
- nghĩa là có một ánh xạ ω: $E \rightarrow R$.
- Khi đó $\omega(e)$ gọi là trọng lượng của e.



Kề nhau

- Cho G = (V,E) và e =(x,y) $\in$ E là một cạnh nối đỉnh x và y. Khi đó ta nói
  - e là cạnh chứa đỉnh x,y hoặc x,y là các đỉnh thuộc cạnh e.
  - x,y được gọi là hai đỉnh kề nhau
- Hai cạnh kề nhau nếu giữa chúng có đỉnh chung
  - Ví dụ với u=(x,y) và v =(y,z) thì u,v là hai cạnh kề nhau

Kề nhau

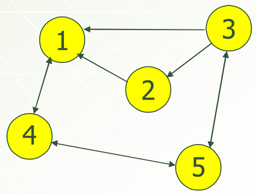


Bậc của đỉnh

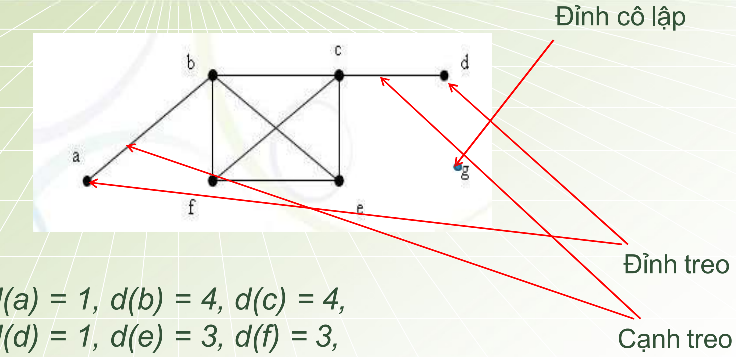
- G=(V,E) có hướng và $v_i \in V$
  - nửa bậc trong(nửa bậc vào) = số các cung kết thúc tại (hay đi vào) v_i : $d^-(v_i) = |\Gamma^{-1}(v_i)|$
  - nửa bậc ngoài (nửa bậc ra) = số các cung khởi đầu từ(hay đi ra từ) v_i : $d^+(v_i) = |\Gamma(v_i)|$
  - bậc của v_i : $d(v_i) = d^-(v_i) + d^+(v_i)$

Nửa Bậc vào của 1 là 3

Nửa Bậc ra của 1 là 1



Bậc của đỉnh



d(a) = 1, d(b) = 4, d(c) = 4,
d(d) = 1, d(e) = 3, d(f) = 3,
d(g) = 0

Bậc của đỉnh

- Sự liên hệ giữa đỉnh và cạnh
  - Nếu G có hướng thì

$$m = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^+(v_i)$$

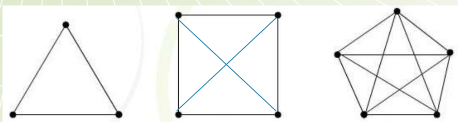
  - $$2m = \sum_{v_i \in V} d(v_i)$$
  - Số đỉnh bậc lẻ là số chẵn

Đơn đồ thị, đa đồ thị

- Đồ thị G = (V,E) gọi là đồ thị đơn nếu giữa hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bởi không quá một cạnh và không có khuyên
- Đồ thị G = (V,E) gọi là đa đồ thị nếu nó có ít nhất một cặp đỉnh được nối với nhau bởi hai cạnh trở lên và không có khuyên

Đồ thị đủ (vô hướng) K_n

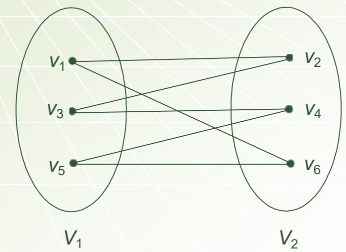
- Là đơn đồ thị cấp n và giữa 2 đỉnh bất kỳ đều có một cạnh(mỗi đỉnh của đồ thị được nối đến tất cả các đỉnh khác trong đồ thị)



- Một đồ thị đủ có n đỉnh sẽ có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh
- Một đồ thị có hướng G gọi là đủ nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là đầy đủ

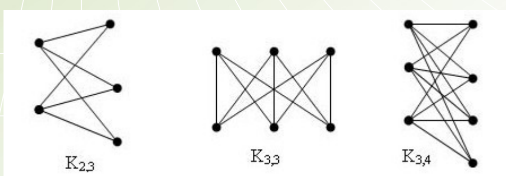
Đồ thị lưỡng phân

- G gọi là lưỡng phân nếu V có thể phân hoạch thành V_1, V_2 sao cho mọi cạnh của G đều nối 1 đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2



Đồ thị lưỡng phân

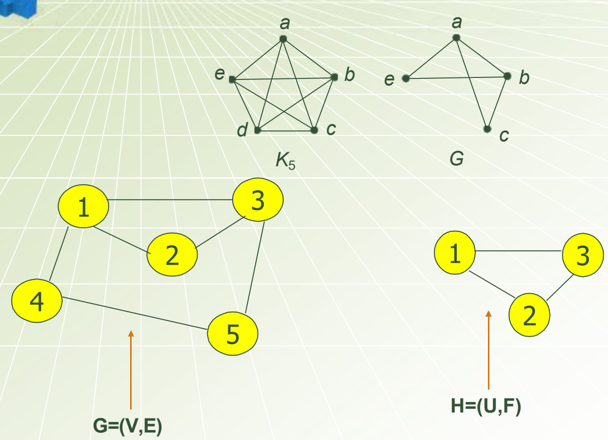
- Nếu G đơn và mọi đỉnh trong V_1 đều nối với tất cả các đỉnh trong V_2 thì G gọi là đồ thị lưỡng phân đủ, ký hiệu $K_{n,m}$ với $n=|V_1|$ và $m=|V_2|$.
- Đặc biệt $K_{1,m}$ gọi là đồ thị ngôi sao



Đồ thị con

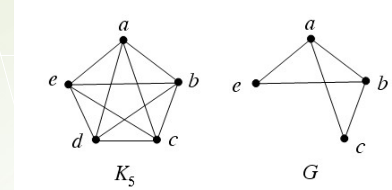
- Nếu trong đồ thị ta bỏ đi một số đỉnh nào đó và các cạnh chứa đỉnh đó thì phần còn lại của đồ thị được gọi là đồ thị con của đồ thị đã cho.
- Nếu trong đồ thị ta bỏ đi một số cạnh giữ nguyên các đỉnh thì phần còn lại của đồ thị được gọi là đồ thị bộ phận của đồ thị đã cho.

Ví dụ



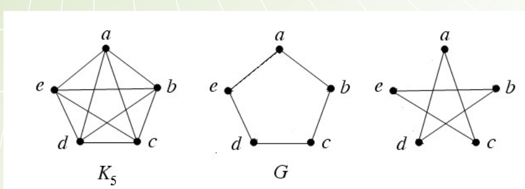
Đồ thị con

- Cho G = (V,E) và G′ = (V′,E′) là 2 đồ thị cùng có hướng hoặc cùng không có hướng
  - G’ được gọi là đồ thị con của G, kí hiệu $G' \leq G$ nếu $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ và $(v_i,v_j) \in E' \rightarrow v_i, v_j \in V'$
  - Nếu $G' \leq G$ với V’=V thì G’ gọi là *đồ thị bộ phận* hay *đồ thị khung* của G.
  - Nếu V’=V và E’=E – {e}, $e \in E$ thì G’ được viết là G – e



Đồ thị bù

- Cho K_n = (V, E) và G = (V, E_1) là đồ thị khung của K_n
- Đặt $\overline{G}$ = (V, E_2) với $E_2 = E - E_1$ thì $\overline{G}$ gọi là *đồ thị bù* của G
- $K_n = (V, E_1 \cup E_2)$ và $E_1 \cap E_2 = \varnothing$



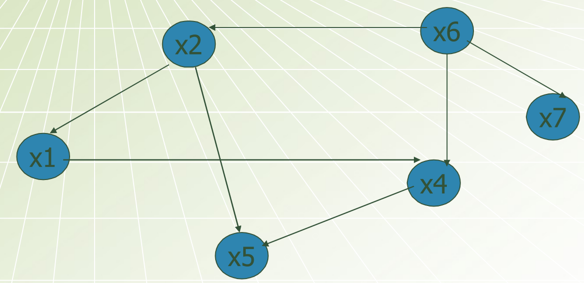
Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn hình học
- Biểu diễn bằng ma trận liên kết đỉnh cạnh
- Biểu diễn bằng ma trận kề
- Biểu diễn bằng danh sách kề

Biểu diễn hình học

- Mỗi đỉnh v ∈ V ta đặt tương ứng với mỗi điểm trên một mặt phẳng.
- Với G =(V,E) là đồ thị có hướng. Trong trường hợp này nếu e =(x,y) ∈ E thì trong mặt phẳng sẽ có một cung có hướng đi từ đỉnh x đến đỉnh y
- Nếu (x,x) ∈ E thì tại đỉnh x sẽ có một khuyên có hướng vào chính nó

Biểu diễn hình học



Ma trận liên kết đỉnh cạnh

- Cho G=(V,E)
  - $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
  - $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$
- Ma trận liên kết đỉnh cạnh của G là ma trận $A = (a_{ij})_{n \times m}$ định bởi:

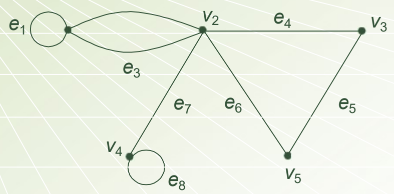
Ma trận liên kết đỉnh cạnh

- Nếu G vô hướng

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ không kề với cạnh } e_j \\ 1 & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ kề với cạnh } e_j \text{ không là khuyên} \\ 2 & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ kề với khuyên } e_j \end{cases}$$

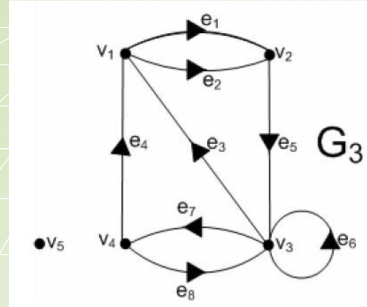
- G có hướng

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu đỉnh } v_i \text{ không kề với cung } e_j \\ 1 & \text{nếu } v_i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \text{ không là khuyên} \\ -1 & \text{nếu } v_i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \text{ không là khuyên} \\ 2 & \text{nếu } v_i \text{ là đỉnh của khuyên } e_j \end{cases}$$



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
v_1	2	1	1	0	0	0	0	0
v_2	0	1	1	1	0	1	1	0
v_3	0	0	0	1	1	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	1	2
v_5	0	0	0	0	1	1	0	0

33



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

34

Ma trận kề

- Cho G=(V,E)
  - $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
  - $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$
- Ma trận kề của G là ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ định bởi:

35

Ma trận kề

- Nếu G vô hướng

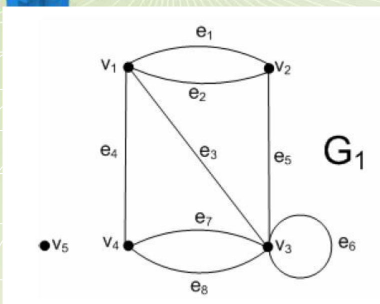
$$a_{ij} = \begin{cases} \text{Số cạnh kề với hai đỉnh } v_i \text{ và } v_j \text{ nếu } i \neq j; \\ \text{Hai lần số khuyên kề với đỉnh } v_i \text{ nếu } i = j. \end{cases}$$

- G có hướng

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{Số cung đi từ đỉnh } v_i \text{ đến đỉnh } v_j \text{ nếu } i \neq j; \\ \text{Số khuyên kề với đỉnh } v_i \text{ nếu } i = j. \end{cases}$$

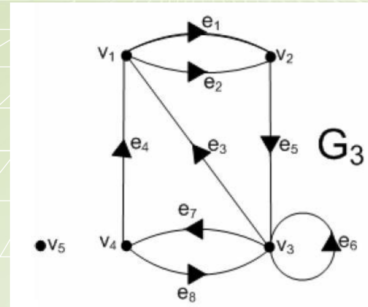
36

Ví dụ



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

37



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

38

Đẳng cấu đồ thị

- Hai đồ thị G = (V,E) và G′ = (V′,E′) gọi là đẳng cấu với nhau nếu :
  - có một phép tương ứng 1 – 1(song ánh) giữa 2 tập V, V’
  - và có một phép tương ứng 1 – 1 giữa 2 tập hợp E, E’

  Sao cho:

  nếu cạnh e = (v,w) ∈ E tương ứng với cạnh e’ = (v’,w’) ∈ E’ thì cặp đỉnh v, w ∈ V cũng là tương ứng của cặp đỉnh v’, w’ ∈ V
- G, G′ đẳng cấu nếu tồn tại một song ánh φ: V→V′ sao cho: (i, j) ∈ E (φ(i), φ(j)) ∈ E′.

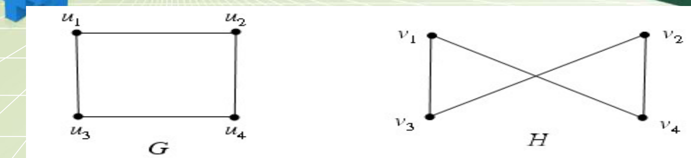
39

Đẳng cấu đồ thị

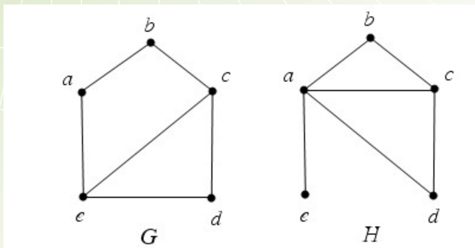
- Nếu G, G′ là đẳng cấu qua ánh xạ φ thì hai đồ thị:
  - Có cùng số đỉnh, tức là |V| = |V’|
  - Có cùng số cạnh: |E| = |E’|
  - Có cùng số đỉnh với bậc cho sẵn
  - Số đỉnh kề với đỉnh i ∈ V và φ (i) ∈ V’ là như nhau.

40

Ví dụ



Với ánh xạ f thỏa $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, $f(u_4) = v_2$ thì G,H là đẳng cấu

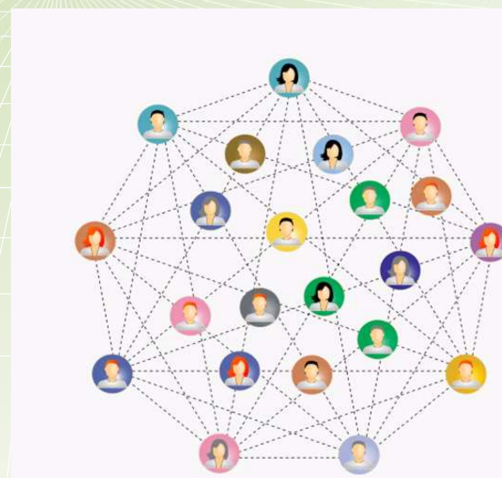


Bài toán cơ bản trên đồ thị

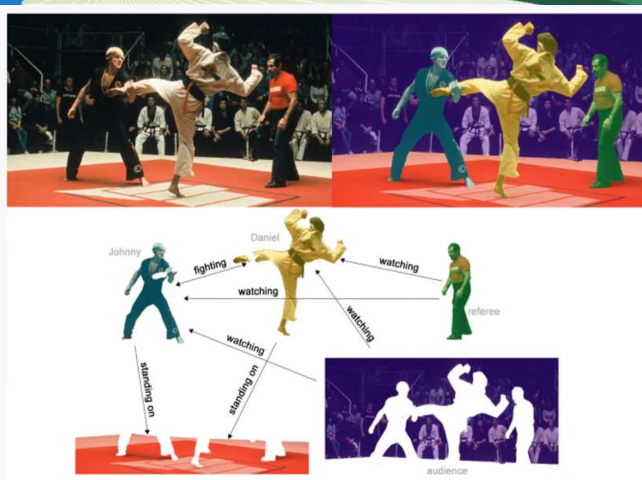
- ❖Duyệt đồ thị
  - ❖Duyệt đồ thị theo chiều sâu
  - ❖Duyệt đồ thị theo chiều rộng
- ❖Tìm đường đi ngắn nhất
  - ❖Thuật toán Dijkstra
  - ❖Thuật toán Ford-Bellman
  - ❖Thuật toán Floyd
  - ❖Thuật giải sử dụng các heuristic

Graph-level

Node-level



Edge-level



Tài liệu tham khảo

[1] Do, N., Nguyen, H., Hoang, L. (2020). *Some Techniques for Intelligent Searching Ontology-based Knowledge domain in E-learning*. KEOD 2020, Nov. 2020.

[2] Nguyen, H., Do, N., Pham, V., Selamat, A., Herrera-Viedma, E. (2020). *A method for knowledge representation to design Intelligent Problems Solver in mathematics based on Rela-Ops model*. IEEE Access 8: 76991–77012.

[3] Q. Tran, H. D. Nguyen, T. Huynh, K. Nguyen, S. Hoang, and V. Pham. (2021), "Measuring the influence and amplification of users on social network with unsupervised behaviors learning and efficient interaction-based knowledge graph." Journal of Combinatorial Optimization.

[4] N. Zhao, H. Zhang, M. Wang, R. Hong, and T.-S. Chua, "Learning content–social influential features for influence analysis," Int. J. Multimed. Inf. Retr., vol. 5, no. 3, pp. 137–149, 2016.

[5] Quan M. Tran, Hien D. Nguyen, Binh T. Nguyen, Vuong T. Pham, Trong T. Le. (2021). *Influence Prediction on Social Media Network through Contents and Interaction Behaviors using Attention-based Knowledge Graph*, Proceedings of 13th IEEE International Conference on Knowledge and Systems Engineering (KSE 2021), Bangkok, Thailand, Nov. 2021

Thank You !