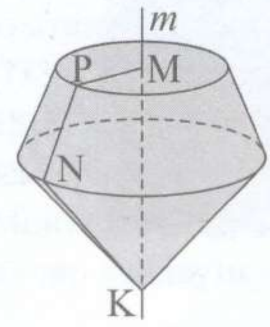
Тақырыпты оқу барысында:

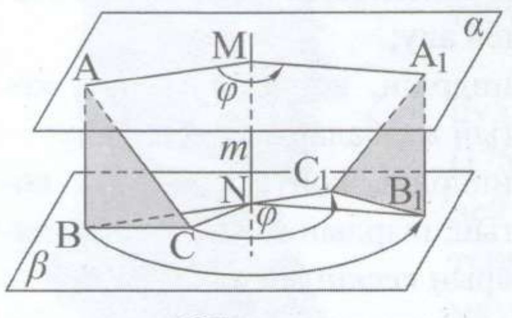
- айналу денелері ұғымдарын білесіңдер;
- цилиндрдің, оның элементтерінің анықтамаларын білесіңдер;
- цилиндрді және оның қималарын кескіндей аласыңдар;
- цилиндрдің элементтерін табуға берілген есептерді шығарасыңдар.



106-сурет

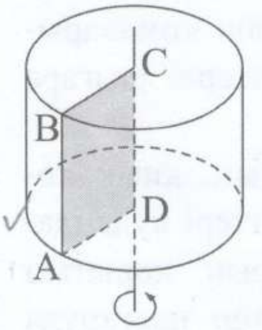
Жазық фигураны түзуден айналдырғанда пайда болған дене айналу денесі деп аталады. Мұндағы түзу *айналу осі* деп аталады. Мысалы, $MPNK$ төртбұрышын m осінен айналдырғанда, 106-суретте кескінделген айналу денесі шығады.

Айналу денесі ұғымы кеңістіктегі фигуралардың бұру деп аталатын қозғалыс түрімен тікелей байланысты.



107-сурет

m түзуінен айналдыра φ бұрышына бұру деп кеңістіктегі m түзуіне перпендикуляр әрбір жазықтықты оның m түзуімен қиылысу нүктесінен айналдыра φ бұрышына бұру орындалатын қозғалысты атайды (107-сурет). Бұру оның сағат тілі бағытымен немесе сағат тіліне қарсы бағытта саналатын бұру бұрышымен беріледі. Мысалы, есіктің немесе дөңгелектің осьтен айнала бұрылуы осылай орындалады. Кеңістіктегі осьтік симметрия – симметрия осінен айналдыра 180°-қа бұру.

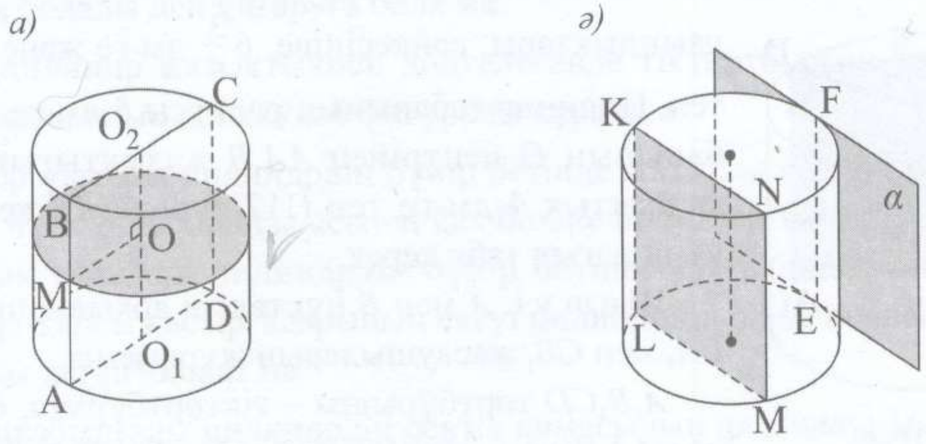


108-сурет

Цилиндр деп тіктөртбұрышты оның қабырғасынан айналдырғанда шығатын фигура аталады. Мысалы, 108-суретте $ABCD$ тіктөртбұрышын оның CD қабырғасынан айналдырғанда шыққан цилиндрдің кескіні берілген. Бұл ретте оның CB мен DA қабырғалары параллель жазықтықтарда жататын тең дөңгелектер сызады. Осы дөңгелектер – цилиндрдің **табандары**. Айналу осін қамтитын түзу (немесе цилиндр табандарының центрлерін қосатын кесінді) **цилиндрдің осі** деп аталады. Цилиндрдің *CD* осіне параллель *AB* қабырғасы цилиндрдің **бүйір беті** деп аталатын бетті сызады.

Цилиндрдің табандары мен бүйір бетінен тұратын фигура **цилиндрдің толық беті** деп аталады. Цилиндрдің бір табанының кез келген нүктесінен екінші табанына жүргізілген перпендикуляр цилиндрдің **биіктігі** деп аталады. Осы биіктіктің ұзындығын да цилиндрдің биіктігі деп атайды. Цилиндрдің биіктігі оның табан жазықтықтарының арақашықтығына тең. *AB* кесіндісі және бүйір бетінің *CD* осіне параллель әрбір кесіндісі – цилиндрдің **жасаушылары**.

Цилиндрдің осіне перпендикуляр қимасы оның табанына тең дөңгелек болады (109, *а*-сурет). Бұл цилиндрдің *AB* жасаушысының кез келген *M* нүктесі оның осінен цилиндрдің табанының радиусына тең қашықтықта болатынынан шығады.

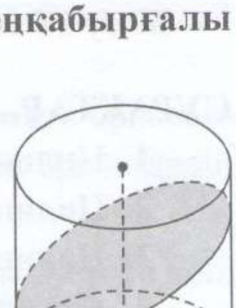


109-сурет

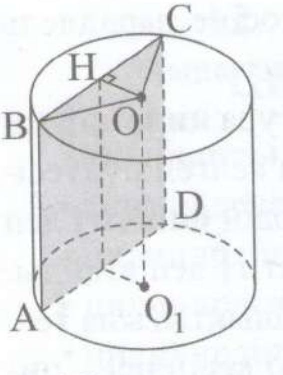
Цилиндрдің табанына перпендикуляр қимасы тіктөртбұрыш болады (мысалы, 109-суреттегі *ABCD* немесе *MNKL*). Мұны өздігінен негіздеңдер. Цилиндрдің табанына перпендикуляр және оның центрінен өтетін қима оның **осьтік қимасы** деп аталады (мысалы, 109, *а*-суреттегі *ABCD* тіктөртбұрышы). Осьтік қимасы шаршы болатын цилиндр **теңқабырғалы цилиндр** деп аталады.

Цилиндрдің жасаушысын қамтитын және цилиндрмен одан басқа ортақ нүктесі болмайтын жазықтық *цилиндрге жанама жазықтық* деп аталады (109, *ә*-суреттегі *α* жазықтығы).

Цилиндрдің бүйір бетінің оның табанына параллель емес жазықтықпен қимасы эллипс болады (110-сурет). Мысалы, цилиндр пішінді көлбеу стақандағы судың беті шекарасы эллипс болатын фигураны құрайды.



110-сурет



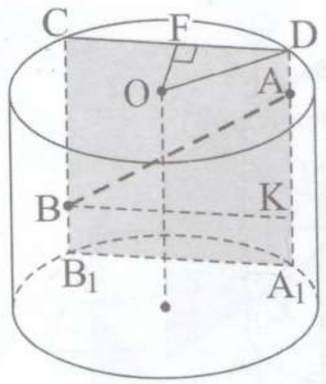
111-сурет

1-есеп. Цилиндрдің биіктігі 8 см-ге, ал табанының радиусы 5 см-ге тең. Оның осіне параллель шаршы болатын қимасы жүргізілген. Цилиндрдің осі мен осы қима жазықтығының арасындағы қашықтықты табу керек.

Шешуі. $ABCD$ шаршысы – берілген қима, ал OO_1 түзуі цилиндрдің осі болсын (111-сурет). Сонда OBC үшбұрышының OH биіктігі ізделінді қашықтық болады, себебі ол OO_1 түзуі мен оған параллель $ABCD$ жазықтығының арақашықтығы. Есептің шарты бойынша $AB = BC = 8$ см, демек, $BH = HC = 4$ см, ал $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Жауабы. 3 см.

2-есеп. Цилиндрдің бүйір бетінің A және B нүктелерінен оның табан жазықтығының біріне жүргізілген AA_1 және BB_1 перпендикулярларының ұзындықтары, сәйкесінше, $6\frac{3}{4}$ дм-ге және $2\frac{1}{4}$ дм-ге тең. Цилиндр табанының радиусы 5 дм-ге, ал сол табанының O центрінен AA_1B жазықтығына дейінгі қашықтық 4 дм-ге тең (112-сурет). AB кесіндісінің ұзындығын табу керек.



112-сурет

Шешуі. A мен B нүктелері арқылы цилиндрдің DA_1 мен CB_1 жасаушыларын жүргіземіз.

A_1B_1CD төртбұрышы – тіктөртбұрыш. O нүктесінен AA_1B жазықтығына дейінгі қашықтық OF кесіндісінің ұзындығына тең, мұндағы F – CD кесіндісінің ортасы. Тікбұрышты AA_1B_1B трапециясының BK биіктігін жүргіземіз, $BK \parallel B_1A_1$.

Тікбұрышты ΔABK-да $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2}$. $AK = 6\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = 4{,}5$ (дм), $BK = B_1A_1 = 2FD = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$ (дм) болғандықтан, $AB = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = 7{,}5$ (дм).

Жауабы. 7,5 дм.

СҰРАҚТАР

1. Цилиндр дегеніміз не?
2. Цилиндрдің жасаушысы, табаны, биіктігі деп нені атайды?
3. Цилиндрдің бүйір беті және толық беті деп нені атайды?
4. Қай жағдайда цилиндрдің жазықтықпен қимасы: а) дөңгелек; ә) тіктөртбұрыш болады?
5. Цилиндрдің осьтік қимасы дегеніміз не?
6. Қандай цилиндрді теңқабырғалы цилиндр деп атайды?

Тақырыпты оқу барысында:

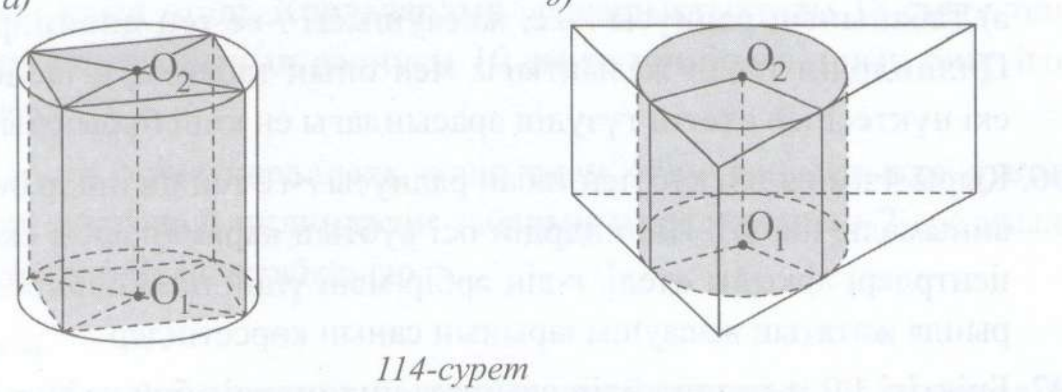
• цилиндрдің бүйір және толық беті, цилиндрдің жазбасы ұғымдарын білетін боласыңдар;

• цилиндрдің бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер призманың табандары цилиндрдің табандарына іштей сызылған болса, *призма цилиндрге іштей сызылған* (ал цилиндр призмаға сырттай сызылған) деп аталады. Табанын цилиндрдің табанына іштей сызуға болатын тік призманы ғана цилиндрге іштей сызуға болады. Мысалы, 114, *а*-суретте цилиндрге іштей сызылған тікбұрышты параллелепипед кескінделген.

Егер призманың табандары цилиндрдің табандарына сырттай сызылған болса, призма *цилиндрге сырттай сызылған* (ал цилиндр призмаға іштей сызылған) деп аталады. Табанын цилиндрдің табанына сырттай сызуға болатын тік призманы ғана цилиндрге сырттай сызуға болады. Мысалы, 114, *ә*-суретте үшбұрышты тік призма цилиндрге сырттай сызылған.

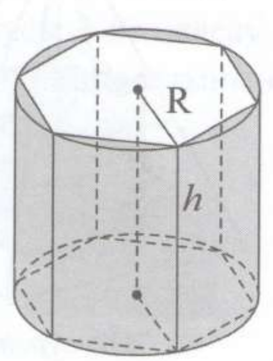


114-сурет

Цилиндрдің бүйір бетінің ауданына оған іштей сызылған дұрыс призманың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде призманың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Т е о р е м а. **Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығы мен оның биіктігінің көбейтіндісіне тең:** $S_{б.б.} = 2\pi Rh$, мұндағы R – табанының радиусы, h – цилиндрдің биіктігі.

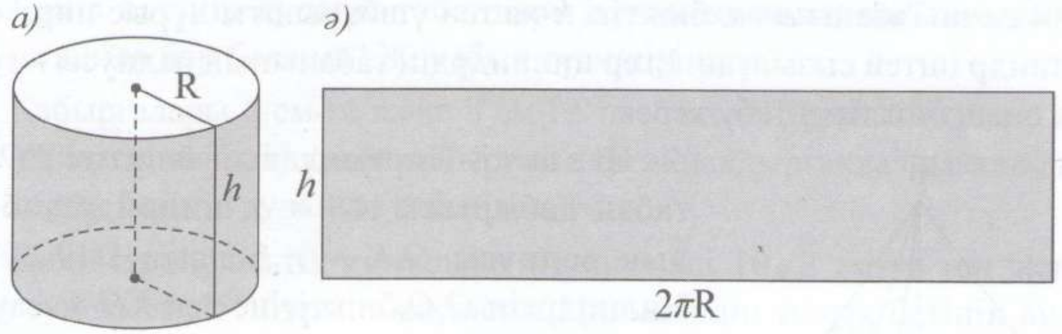
Д ә л е л д е у і. Цилиндрге іштей дұрыс n-бұрышты призма сызайық (115-сурет). Оның биіктігі цилиндрдің биіктігіне, ал осы призманың бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең. Призманың табаны шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыш болғандықтан, оның табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде көпбұрыштың периметрі шеңбердің $2\pi R$ ұзындығына ұмтылады. Сонда призманың бүйір бетінің ауданы $2\pi Rh$-қа тең шамаға ұмтылады. Демек, цилиндрдің бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = 2\pi Rh$ болады.



115-сурет

Цилиндрдің толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің ауданы мен табандары аудандарының қосындысы аталады. **Цилиндрдің толық бетінің ауданы табан шеңберінің ұзындығын табанының радиусы мен цилиндр биіктігінің қосындысына көбейткенге тең:**

$$\boldsymbol{S_{т.б.} = 2\pi R(R + h).}$$

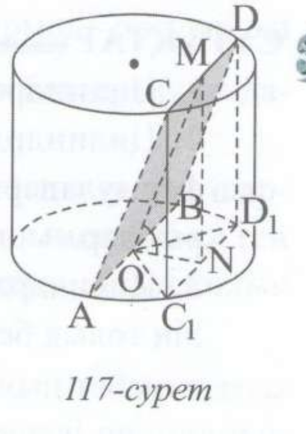


116-сурет

Егер цилиндрді оның бүйір бетінің (116, *а*-сурет) жасаушысы бойымен қиып, барлық жасаушылары бір жазықтықта жататындай етіп жазсақ, онда цилиндрдің бүйір бетінің *жазбасы* деп аталатын тіктөртбұрышты аламыз (116, *ә*-сурет).

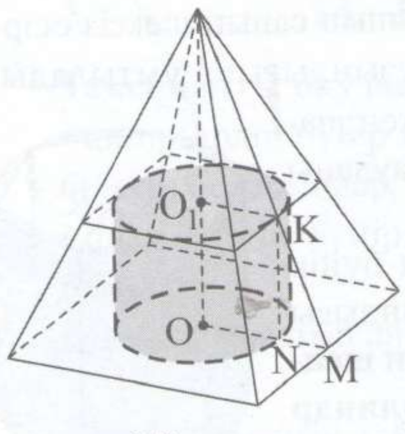
1 - е с е п. Цилиндрдің төменгі табанының центрі арқылы өтетін жазықтық оған $60°$ бұрышпен көлбеген. Осы жазықтық цилиндрдің жоғарғы табанын $90°$-тық доғаны керетін, ұзындығы 10 см-ге тең хорда бойымен қияды. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Қима жазықтық цилиндрдің табандарын AB және CD хордалары бойымен қиятын болсын, сонда $AB \parallel CD$ (117-сурет). $C_1D_1 = CD$ хордасын салайық және N мен M нүктелері осы хордалардың орталары болсын. Сонда MN – цилиндрдің биіктігі, OD_1 – табанының радиусы, $\angle MOH = 60°$, $\angle C_1OD_1 = 90°$. Тікбұрышты C_1OD_1 мен MON үшбұрыштарынан $ON = ND_1 = 5$ см, $OD_1 = 5\sqrt{2}$ см, $MN = ON \cdot \text{tg}\,60° = 5\sqrt{3}$ см шығады. Сонда цилиндрдің бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = 2\pi \cdot OD_1 \cdot MN = 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\pi\sqrt{6}$ (см^2).



117-сурет

Ж а у а б ы. $50\pi\sqrt{6}$ см^2.

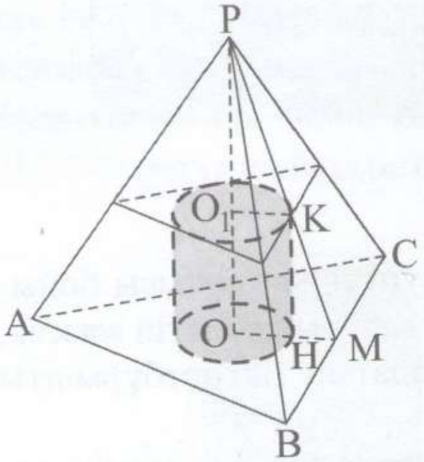


118-сурет

Егер цилиндрдің бір табаны пирамиданың табанына тиісті, ал басқасы пирамиданың әр бүйір жағымен жанасатын болса, онда *цилиндр пирамидаға іштей сызылған* (немесе пирамида цилиндрге сырттай сызылған) деп аталатынын атап өтелік.

Пирамиданың табанына параллель қимасы оған ұқсас болады. Егер осы қимаға іштей шеңбер сызуға болса, онда пирамидаға іштей цилиндр сызуға болады. Мысалы, 118-суретте цилиндр табаны ромб болатын төртбұрышты пирамидаға іштей сызылған.

2 - е с е п. Табаны a-ға, биіктігі h-қа тең үшбұрышты дұрыс пирамидаға цилиндр іштей сызылған. Егер цилиндрдің табанының радиусы r-ге тең болса, оның биіктігін табу керек.



119-сурет

Ш е ш у і. Пирамиданың биіктігі $PO = h$, табан қабырғасы $AB = a$, цилиндр табанының радиусы $O_1K = r$ болсын (119-сурет). Цилиндрдің O_1O биіктігіне тең KH жасаушысының ұзындығын x деп белгілейік. POM және PO_1K тікбұрышты үшбұрыштарының ұқсастығынан $\frac{PO}{PO_1} = \frac{OM}{O_1K}$, яғни $\frac{h}{h-x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{r}$ аламыз. Бұдан $h \cdot r = (h-x) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $h - x = \frac{6hr}{a\sqrt{3}}$,

$x = h - \frac{2hr\sqrt{3}}{a}$.

Ж а у а б ы. $h - \frac{2hr\sqrt{3}}{a}$.

СҰРАҚТАР

1. Цилиндр бетінің ауданы деп нені атайды?

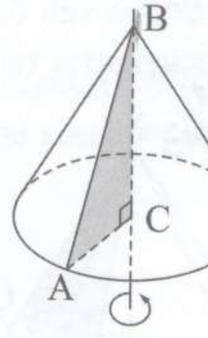
2. Цилиндрдің бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады? Осы формулаларды қорытып шығарыңдар.

3. Цилиндрдің бүйір бетінің жазбасы не болып табылады? Цилиндрдің толық бетінің жазбасын кескіндеңдер.

Тақырыпты оқу барысында:

- конустың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;
- конусты және оның жазықтықпен қимасын кескіндейсіңдер;
- конустың элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

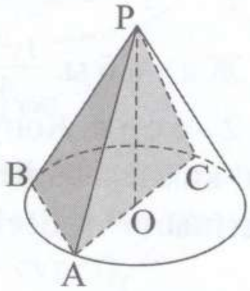
Тікбұрышты үшбұрышты оның катетінен айналдырғанда шығатын дене конус деп аталады. Конустың айналу осін қамтитын түзу (немесе оның төбесін табанының центрімен қосатын кесінді) **конустың осі** деп аталады. Мысалы, 122-суретте тікбұрышты ΔABC-ны оның BC катетінен айналдырғанда шыққан конустың кескіні берілген. B нүктесі **конустың төбесі** деп аталады. BA гипотенузасы конустың **жасаушысы** деп аталып, оның **бүйір бетін** сызады. CA катеті конустың **табанын** – дөңгелекті сызады. Конустың төбесінен оның табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр конустың **биіктігі** деп аталады. Осы кесіндінің ұзындығы да конустың биіктігі деп аталады. Конустың бүйір беті мен табанының бірігуінен тұратын фигура конустың **толық беті** деп аталады.



122-сурет

Конустың төбесін қамтитын барлық қималары теңбүйірлі үшбұрыштар болады (мысалы, 123-суреттегі ΔPAB немесе ΔPAC).

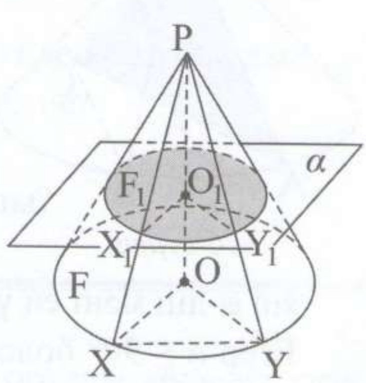
Конустың төбесі мен табанының центрін қамтитын қимасы конустың **остік қимасы** деп аталады. Остік қимасы теңқабырғалы үшбұрыш болатын конус **теңқабырғалы конус** деп аталады.



123-сурет

Т е о р е м а. **Конустың оның табанына параллель жазықтықпен қимасы дөңгелек болады.**

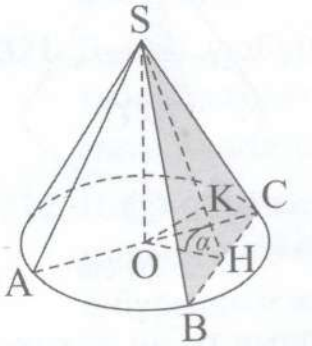
Д ә л е л д е у і. Конустың табаны F, оған параллель қимасы – F_1, O_1 – PO биіктігінің қима жазықтығымен қиылысу нүктесі (124-сурет). F_1 және F фигуралары ұқсас болатынын дәлелдейік. Шынымен де, конустың F табанының қайсыбір X нүктесіне PX кесіндісі мен қима жазықтығының X_1 қиылысу нүктесі, ал Y нүктесіне Y_1 нүктесі сәйкес келетін болсын. Сонда $POXY$ пирамидасының



124-сурет

оның табанына параллель жазықтықпен қимасының қасиеті бойынша: $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{PO_1}{PO} = k$, мұндағы k – тұрақты сан. Конустың F табанының кез келген X және Y нүктелері мен F_1 қимасының оларға сәйкес келетін нүктелері үшін $\frac{X_1Y_1}{XY} = k$ теңдігі ақиқат болатындықтан, $F_1 \sim F$. Демек, конустың табанына параллель жазықтықпен қимасы дөңгелек болады.

1 - е с е п. Теңқабырғалы конустың төбесі мен табанының хордасы арқылы өтетін жазықтық табанымен 60° бұрыш жасайды. Конустың жасаушысы l-ге тең болса, оның табанының центрінен осы жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек.

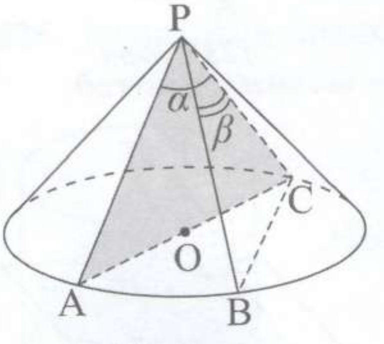


125-сурет

Ш е ш у і. ΔSBC конустың көрсетілген жазықтықпен қимасы, ал ΔASC оның осьтік қимасы болсын, сонда $AS = SC = AC = l$ болады (125-сурет). Конустың биіктігі: $SO = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. SBC жазықтығының табанына көлбеулік бұрышы SHO-ға тең, мұндағы H – BC хордасының ортасы, ал O нүктесінен SBC жазықтығына дейінгі қашықтық – ΔSOH-тың OK биіктігі (неге екенін түсіндіріңдер). ΔOKH-тан $OK = OH \cdot \sin\alpha$ болғандықтан, ΔSOH-тан $OH = SO \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$ болады, бұдан $OK = SO \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \sin\alpha = SO \cdot \cos\alpha = \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$.

Ж а у а б ы. $\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

2 - е с е п. Конустың оның P төбесін қамтитын, ауданы ең үлкен болатын қимасы салынған. Конустың жасаушысы 8 см-ге, ал оның осьтік қимасының P төбесіндегі бұрышы α-ға (α – айнымалы шама) тең болса, осы қиманың ауданын табу керек.



126-сурет

Ш е ш у і. ΔPAC конустың осьтік қимасы болсын, сонда $\angle APC = \alpha$ болады. Конустың төбесін қамтитын басқа қимасы – ΔPBC, $\angle BPC = \beta$ болсын (126-сурет). Конустың екі жасаушысы арқылы өтетін кез келген қимасының ауданы: $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\varphi$, мұндағы l – конус жасаушысының ұзындығы, φ – жасаушылардың арасындағы бұрыш.

$\sin\varphi$-дің мәні ең үлкен болғанда S-тің мәні ең үлкен болады.

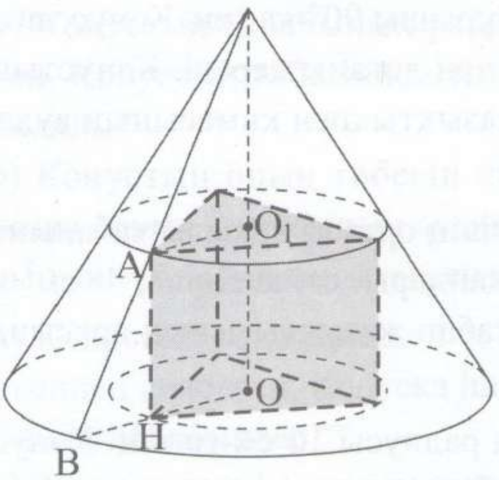
Егер $\alpha \le 90°$ болса, онда конустың осьтік қимасының ауданы ең үлкен болады, себебі $\sin\alpha > \sin\beta$. $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin\alpha = 32\sin\alpha$ (см^2).

Егер $90° < \alpha < 180°$ болса, онда конустың арасындағы бұрышы 90°-қа тең екі жасаушысы табылады. Сонда осы екі жасаушыны қамтитын ауданы ең үлкен болады, себебі $\sin 90° > \sin \alpha$. $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \sin 90° = \frac{1}{2}l^2 = 32$ (см^2).

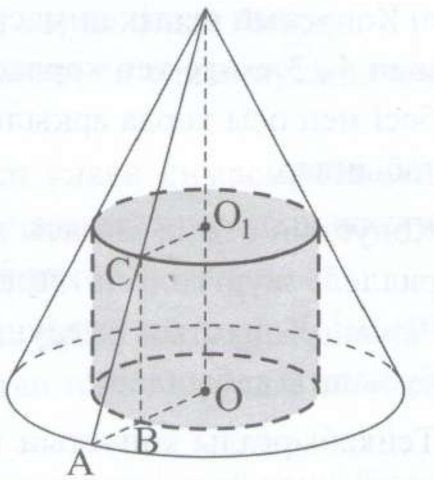
Ж а у а б ы. Егер $0° < \alpha \leq 90°$ болса, $32\sin\alpha$ см^2; егер $90° < \alpha < 180°$ болса, 32 дм^2.

Бір табаны конустың табанында, ал басқа табанының төбелері оның бүйір бетінде жататын призманы конусқа *іштей сызылған призма* (ал конус – призмаға сырттай сызылған) деп атайды.

Конустың оның табанына параллель қимасы дөңгелек болады, сондықтан, егер осы дөңгелекке іштей n-бұрыш сызуға болса, онда конусқа іштей n-бұрышты призма сызуға болады (127-сурет).



127-сурет



128-сурет

Бір табаны конустың табанында, ал басқа табанының шеңбері конустың бүйір бетінде жататын цилиндрді конусқа *іштей сызылған цилиндр* (ал конус цилиндрге сырттай сызылған) деп атайды (128-сурет).

СҰРАҚТАР

1. Конус дегеніміз не?
2. Конустың төбесі, жасаушысы, табаны, биіктігі деп не аталады?
3. Конустың бүйір беті және толық беті дегеніміз не?
4. Конустың осьтік қимасы дегеніміз не?
5. Қандай конус теңқабырғалы конус деп аталады?

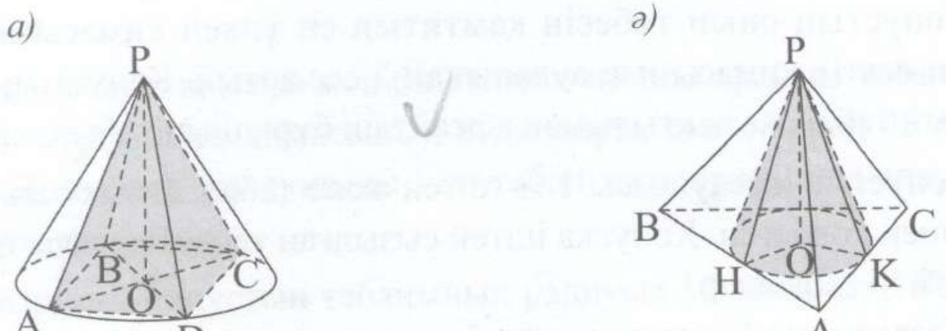
Тақырыпты оқу барысында:

• конустың бүйір және толық беті, конустың жазбасы ұғымдарын білесіңдер;

• конустың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табанына іштей сызылған көпбұрыш болса, онда *пирамида конусқа іштей сызылған* (немесе конус пирамидаға сырттай сызылған) деп аталады. Конусқа бүйір қырлары тең кез келген пирамиданы іштей сызуға болады (129, *а*-сурет). Бұл ретте пирамиданың бүйір қырлары конустың жасаушылары болады.



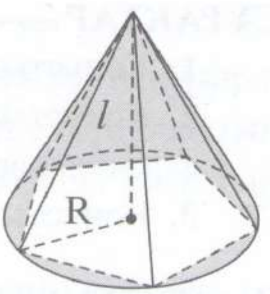
129-сурет

Егер пирамиданың төбесі конустың төбесімен беттессе, ал пирамиданың табаны конустың табанына сырттай сызылған болса, онда *пирамида конусқа сырттай сызылған* (ал конус пирамидаға іштей сызылған) деп аталады. Бұл ретте пирамиданың барлық бүйір жақтарының жазықтықтары конустың бүйір бетімен жанасады (129, *ә*-сурет).

Конустың бүйір бетінің ауданы ретінде оған іштей сызылған дұрыс пирамиданың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде пирамиданың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

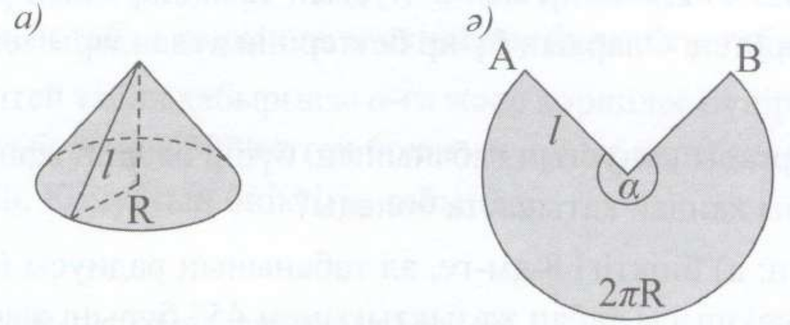
Т е о р е м а. **Конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңбері ұзындығының жартысы мен жасаушысының көбейтіндісіне тең:** $S_{б.б.} = \pi Rl$, мұндағы R – конустың табанының радиусы, l – жасаушысының ұзындығы.

Д ә л е л д е у і. Конусқа іштей дұрыс n-бұрышты пирамида салайық (130-сурет). Осы пирамиданың бүйір бетінің ауданы табанының жарты периметрі мен оның апофемасының көбейтіндісіне тең. Пирамиданың табан қабырғаларының n санын шексіз өсіргенде, оның бүйір бетінің ауданы πRl-ге тең шамаға ұмтылады. Демек, конустың бүйір бетінің ауданы: $S_{б.б.} = \pi Rl$.



130-сурет

Егер конустың бүйір бетін оның жасаушысы бойымен қиып (131, *а*-сурет), барлық жасаушылары бір жазықтықта жататындай етіп жазсақ, онда конустың бүйір бетінің *жазбасы* деп аталатын дөңгелек сектор шығады (131, *ә*-сурет).



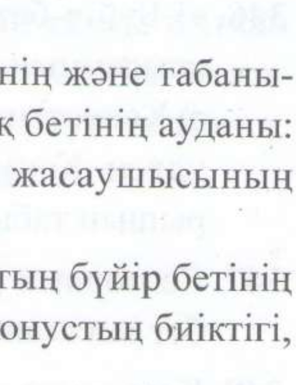
131-сурет

Конустың бүйір беті жазбасының ауданы конустың бүйір бетінің ауданына тең. Сектордың ауданының формуласы бойынша $\boldsymbol{S_{кон.б.б.} = \dfrac{\pi l^2 \cdot \alpha}{360^\circ}}$, мұндағы l – жасаушының ұзындығы, α – AB доғасының градустық өлшемі немесе оның центрлік бұрышының өлшемі.

Конустың толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің және табанының аудандарының қосындысын айтады. Конустың толық бетінің ауданы: $\boldsymbol{S_{т.б.} = \pi R(R + l)}$, R – конустың табанының радиусы, l – жасаушысының ұзындығы.

Е с е п (конустың бүйір бетінің ауданы туралы). Конустың бүйір бетінің ауданы $\boldsymbol{S_{б.б.} = 2\pi hd}$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы h – конустың биіктігі, d – конустың жасаушысына жүргізілген, бір ұшы жасаушыда, екіншісі – конустың осінде жататын орта перпендикуляр кесіндісінің ұзындығы.

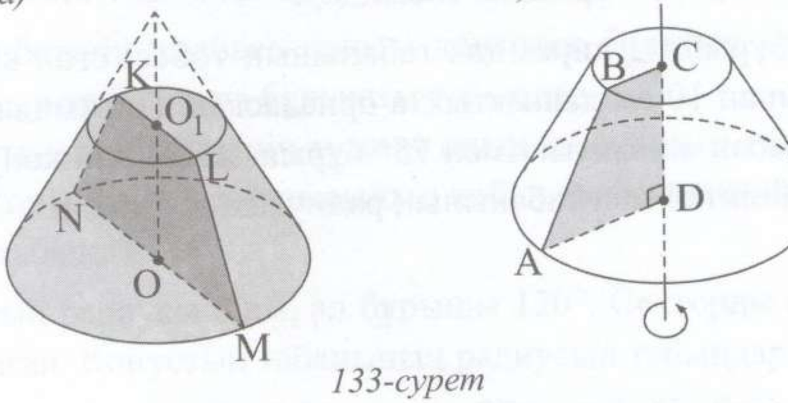
Д ә л е л д е у і. $S_{кон.б.б.} = \pi Rl$, мұндағы $l = 2AD$, $R = BC$ (132-сурет). AB жасаушысына жүргізілген орта перпендикулярдың кесіндісі $DO = d$, конустың биіктігі $AC = h$. ABC мен AOD үшбұрыштары ұқсас болғандықтан, $\angle ABC = \angle AOD = \varphi$, сонда $BC = AC \cdot \operatorname{ctg}\varphi = h \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, $AD = DO \cdot \operatorname{tg}\varphi = d \cdot \operatorname{tg}\varphi$. Демек, $S_{кон.б.б.} = 2\pi \cdot BC \cdot AD = 2\pi h \cdot \operatorname{ctg}\varphi \cdot d \cdot \operatorname{tg}\varphi = 2\pi hd$.



132-сурет

Тақырыпты оқу барысында:
• қиық конустың анықтамасын, оның элементтерін білесіңдер;
• қиық конусты және оның жазықтықпен қимасын кескіндей аласыңдар;
• қиық конустың элементтерін табуға есептер шығарасыңдар.

Конустың табаны мен осы табанына параллель жазықтықпен қимасының арасындағы бөлігі қиық конус деп аталады (133, *а*-сурет). Бұл ретте конустың табаны мен оның көрсетілген жазықтықпен қимасы қиық конустың **табандары** деп аталады. Қиық конустың бір табанының кез келген нүктесінен екінші табан жазықтығына жүргізілген перпендикуляр қиық конустың **биіктігі** деп аталады. Осы перпендикулярдың ұзындығы да қиық конустың биіктігі деп аталады. Конустың жасаушысында жататын және ұштары қиық конустың табандарының шеңберлерінде болатын кесінді қиық конустың **жасаушысы** деп аталады. Қиық конустың екі жасаушысын қамтитын кез келген қимасы теңбүйірлі трапеция болады. Қиық конустың барлық жасаушыларынан тұратын фигура оның *бүйір беті* деп, ал табандары мен бүйір бетінің бірігуінен тұратын фигура *қиық конустың толық беті* деп аталады.

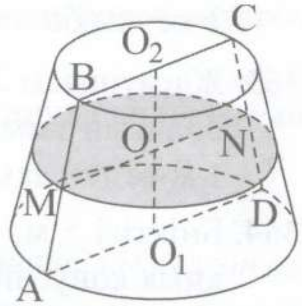


133-сурет

Тікбұрышты трапецияны оның кіші бүйір қабырғасынан айналдыру арқылы қиық конусты алуға болады. Мысалы, 133, *ә*-суретте тікбұрышты *ABCD* трапециясын оның кіші *CD* бүйір қабырғасынан айналдырғанда шыққан қиық конустың кескіні берілген. Трапецияның *BC* мен *AD* табандары қиық конустың табандарының дөңгелектерін, ал *AB* кесіндісі оның бүйір бетін сызады. Қиық конустың табандарының центрлерінен өтетін түзуді (немесе осы центрлерді қосатын кесіндіні) қиық конустың **осі** деп атайды. Қиық конустың осін қамтитын кез келген қима қиық конустың **осьтік қимасы** деп аталады. 133, *а*-суреттегі *MNKL* теңбүйірлі трапециясы – қиық конустың осьтік қимасы.

Е с е п. Қиық конустың табандарының аудандары 4 см^2 және 16 см^2. Оның биіктігінің ортасы арқылы қиық конустың табандарына параллель жазықтық жүргізілген. Конустың осы жазықтықпен қимасының ауданын табу керек.

Ш е ш у і. Көрсетілген қима – диаметрі қиық конустың остік қимасы болатын $ABCD$ трапециясының MN орта сызығына тең дөңгелек (134-сурет). $MN = 0{,}5(AD + BC) = AO_1 + BO_2$. Есептің шарты бойынша $4 = \pi \cdot BO_2^2$, $16 = \pi \cdot AO_1^{\,2}$ болғандықтан, $BO_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $AO_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$. Демек, $MN = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, $MO = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$. Сонда $S_{\text{қима}} = \pi \cdot MO^2 = \pi \cdot \frac{9}{\pi} = 9$ (см^2).



134-сурет

Ж а у а б ы. 9 см^2.

СҰРАҚТАР

1. Қиық конус дегеніміз не?
2. Қиық конустың жасаушысы, табандары, биіктігі деп нені атайды?
3. Қиық конустың бүйір беті және толық беті дегеніміз не?
4. Қиық конустың остік қимасы дегеніміз не?

Тақырыпты оқу барысында:

• қиық конустың бүйір және толық беті, қиық конустың жасаушысы ұғымдарын білесіңдер;

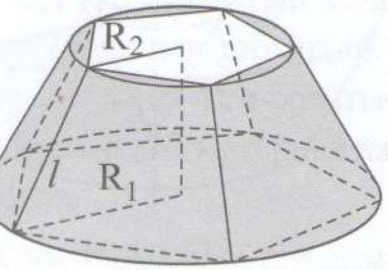
• қиық конустың бүйір және толық беті аудандарының формулаларын білесіңдер;

• оларды қорытып шығарасыңдар және есептер шығаруда қолданасыңдар.

Қиық конустың бүйір бетінің ауданы ретінде оған іштей сызылған дұрыс қиық пирамиданың табан қабырғаларының санын шексіз өсіргенде қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы ұмтылатын шама алынады.

Теорема. **Қиық конустың бүйір бетінің ауданы табан шеңберлерінің ұзындықтары қосындысының жартысы мен жасаушысының көбейтіндісіне тең: $S_{б.б.} = \pi l(R_1 + R_2)$**, мұндағы R_1, R_2 – қиық конустың табандарының радиустары, l – жасаушысының ұзындығы.

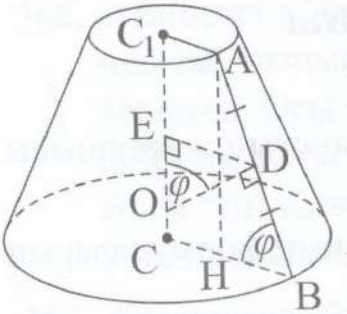
Дәлелдеуі. Қиық конусқа іштей дұрыс n-бұрышты қиық пирамида сызайық (135-сурет). Қиық пирамиданың бүйір бетінің ауданы табандарының жарты периметрлерінің қосындысы мен апофемасының көбейтіндісіне тең. Қиық пирамиданың табан қабырғаларының n санын шексіз өсіргенде, оның табандарының периметрлері $2\pi R_1$ және $2\pi R_2$ шамаларына, ал қиық пирамиданың апофемасының ұзындығы қиық конустың жасаушысының ұзындығына ұмтылады. Сонда оның бүйір бетінің ауданы $\pi l(R_1 + R_2)$ шамасына ұмтылады. Демек, қиық конустың бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = \pi l(R_1 + R_2)$ болады.



135-сурет

Қиық конустың толық бетінің ауданы деп оның бүйір бетінің және табандары аудандарының қосындысын айтады. Қиық конустың толық бетінің ауданы: $S_{т.б.} = \pi R_1^2 + \pi l(R_1 + R_2) + \pi R_2^2$, мұндағы R_1, R_2 – қиық конустың табандарының радиустары, l – жасаушысының ұзындығы.

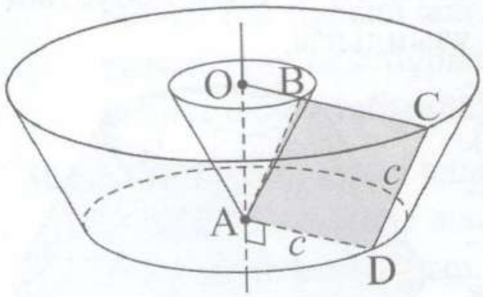
1-есеп (қиық конустың бүйір бетінің ауданы туралы). Қиық конустың бүйір бетінің ауданы $S_{б.б.} = 2\pi hd$ болатынын дәлелдеңдер, мұндағы h – қиық конустың биіктігі, d – қиық конустың жасаушысына жүргізілген, бір ұшы жасаушыда, екіншісі қиық конустың осінде жататын орта перпендикулярдың кесіндісінің ұзындығы.



136-сурет

Д ә л е л д е у і. $S_{\text{қ.к.б.б.}} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2)$, мұндағы $l = AB$, $R_1 = BC$, $R_2 = AC_1$ (136-сурет). AB жасаушысына жүргізілген орта перпендикулярдың кесіндісі $DO = d$, қиық конустың биіктігі $CC_1 = h$. $AH \perp BC$ және $DE \perp CC_1$ жүргіземіз, сонда $\angle ABC = \angle DOE = \varphi$ (қабырғалары өзара перпендикуляр бұрыштар ретінде) және $AH = CC_1 = h$. ΔABH-тан $AB = \frac{AH}{\sin\varphi} = \frac{h}{\sin\varphi}$ аламыз. $ABCC_1$ трапециясында орта сызығының қасиеті бойынша: $BC + AC_1 = 2DE$. ΔDOE-ден $DE = DO \cdot \sin\varphi = d \cdot \sin\varphi$ аламыз. Демек, $S_{\text{қ.к.б.б.}} = \pi \cdot AB \cdot 2DE = \pi \cdot \frac{h}{\sin\varphi} \cdot 2d \cdot \sin\varphi = 2\pi hd$. Дәлелдеу керегі де осы еді.

2 - е с е п. Қабырғасы c-ға, бұрышы 60°-қа тең ромб оның қабырғасына перпендикуляр болатын және сүйір бұрышының төбесінен өтетін осьтен айналады. Айналу денесі бетінің ауданын табу керек.



137-сурет

Ш е ш у і. Бұл айналу денесінің беті табандарының радиустары AD, OC және жасаушысы CD болатын қиық конустың бүйір бетінен, табан радиусы OB және жасаушысы AB болатын конустың бүйір бетінен, радиусы AD болатын дөңгелектен және радиустары OC мен OB болатын сақинадан тұрады (137-сурет).

$S_{\text{қ.к.б.б.}} = \pi \cdot l \cdot (R_1 + R_2) = \pi c(c + c + 0{,}5c) = 2{,}5c^2\pi$, мұндағы $l = CD = c$, $R_2 = OC = BC + OB = c + 0{,}5c$, себебі, ΔABO-да $\angle A = 30°$ және $OB = 0{,}5AB = 0{,}5c$.

$S_{\text{кон.б.б.}} = \pi Rl = 0{,}5c^2\pi$, мұндағы $l = AB = c$, $R = OB = 0{,}5c$.

$S_{\text{дөңг.}} = \pi c^2$.

$S_{\text{сақина}} = \pi(OC^2 - OB^2) = \pi((1{,}5c)^2 - (0{,}5c)^2) = 2\pi c^2$.

Сонда ізделінді аудан: $2{,}5c^2\pi + 0{,}5c^2\pi + \pi c^2 + 2\pi c^2 = 6\pi c^2$.

Ж а у а б ы. $6\pi c^2$.

СҰРАҚТАР

1. Қиық конустың толық бетінің ауданы дегеніміз не?
2. Қиық конустың бүйір бетінің және толық бетінің аудандарын қандай формулалармен табуға болады?