

LEPL1110 Introduction aux éléments finis : Rapport de projet

Nicolas BOUREZ
EPL
UCLouvain
Louvain-la-Neuve, Belgium
2846 2000

Aurélien LIVIN
EPL
UCLouvain
Louvain-la-Neuve, Belgium
3877 2000

Abstract—Le présent rapport a pour objectif d'étudier l'élasticité linéaire d'un mousqueton d'escalade dans sa position ouverte et fermée à l'aide de la méthode des éléments finis.

INTRODUCTION

L'étude de l'élasticité linéaire d'un mousqueton d'escalade par la méthode des éléments finis en 2 dimensions est une mission cruciale pour garantir la sécurité des grimpeurs en escalade. L'élasticité linéaire d'un mousqueton détermine la façon dont le mousqueton répond à une force appliquée, en particulier lorsqu'il est soumis à une charge de traction. Les mousquetons étant des éléments de sécurité essentiels, leur comportement mécanique doit être compris et étudié en détail pour minimiser les risques d'accidents. En effet, ils sont souvent utilisés dans des environnements hostiles et soumis à des forces extrêmes, il est donc impératif de comprendre comment ils se comportent sous différentes conditions de charge et de positionnement.

Dans cette étude, nous avons appliqué la méthode des éléments finis en 2 dimensions pour modéliser le comportement mécanique d'un mousqueton d'escalade en position ouverte et fermée sous différentes conditions de charge. Nous avons utilisé des techniques d'optimisation pour garantir des temps de calcul raisonnables et une précision suffisante pour répondre aux exigences de sécurité en escalade.

Nous allons commencer par décrire le problème physique en détail et expliciter les différentes hypothèses émises. Ensuite, nous allons exposer les détails du code informatique employé pour résoudre le problème étudié. Enfin, nous analyserons les résultats obtenus en comparant la cas ouvert et fermé.

Cette étude fournira des informations précieuses pour les ingénieurs et les fabricants de mousquetons, ainsi que pour les grimpeurs et les instructeurs d'escalade qui utilisent ces équipements au quotidien.

I. PROBLÈME PHYSIQUE

Le problème physique que nous étudions ici concerne l'élasticité linéaire du mousqueton. Dans le cas du mousqueton d'escalade, l'élasticité linéaire détermine la façon dont le mousqueton répond à un effort en traction.

Lorsqu'un mousqueton d'escalade est fermé, la charge peut se répartir sur l'ensemble du mousqueton. Selon la norme EN

12275, la résistance à la rupture doit être de 2200-3000 kg quand le doigt est fermé. Lorsqu'il est ouvert, on constate une augmentation significative de la déformation du mousqueton. En effet, la résistance mécanique du mousqueton est considérablement réduite, due à une localisation de la charge et une augmentation de la flexibilité de la lame. En position ouverte, une même charge conduira plus vite à une déformation excessive voire une rupture du mousqueton. Selon la norme EN 12275, on s'attendra à une résistance à la rupture de 700-1000 kg quand le doigt est ouvert.



Fig. 1. À gauche un mousqueton avec le doigt ouvert et à droite un mousqueton avec le doigt fermé



Fig. 2. Relais et maillon rapide

II. HYPOTHÈSES

Pour représenter, notre mousqueton sous forme de maillage nous allons simplifier la forme de ce dernier à un ovale.

Une approximation tout à fait acceptable car les mousquetons symétriques (moins utilisés de nos jours car moins pratiques pour les manipulations) ont cette forme, tout comme les maillons rapides. Les maillons rapides sont utilisés à la fin de la voie, appelé relais, pour se mettre en sécurité avant de redescendre au sol voir Figure 2.

De plus, nous ne nous intéressons uniquement à l'effort en traction et pas au cisaillement.

Enfin, nous utilisons les paramètres suivant pour notre mousqueton en aluminium.

- 1) Module d'élasticité: $E = 2.11 \times 10^{11} [\text{N/m}^2]$
- 2) Coefficient de Poisson: $\nu = 0.3$
- 3) Densité: $\rho = 7.85 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$

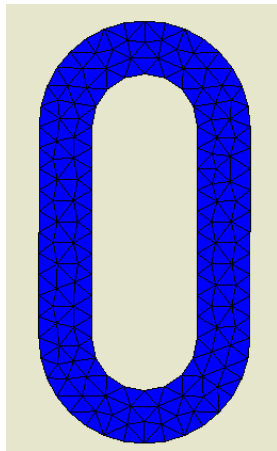


Fig. 3. Maillage du mousqueton après approximation

III. CODE INFORMATIQUE

Pour optimiser notre code, nous avons utilisé un solveur bande associé à un algorithme de renumérotation. Nous nous sommes concentré sur le gain en performance de la résolution de notre système, plutôt que sur une optimisation de l'utilisation de la mémoire.

A. Matrice CSR

Avant la résolution de notre système linéaire, nous utilisons le format CSR pour stocker notre matrice creuse. En effet, le format CSR ne stocke que les éléments non nuls de la matrice, ce qui permet de réduire considérablement l'espace de stockage nécessaire. Cependant, nous utilisons ce format pour simplifier l'utilisation de l'algorithme RMC (voir sous-section suivante) et de ce fait ne supprimons pas la matrice pleine, il n'y donc pas de réel gain de stockage.

B. Algorithme de Reverse Cuthill-mcKee (RMC)

Après avoir transformé notre matrice en format CSR, nous utilisons l'algorithme RCM afin de réduire la taille de la bande de notre matrice creuse. Pour la situation du problème du mousqueton ouvert, vous pouvez observer ci-dessous notre matrice avant et après avoir appliqué l'algorithme RMC. On aperçoit clairement une diminution drastique de la bande du système.

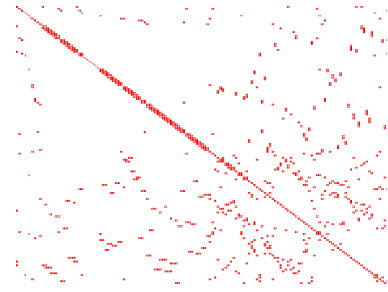


Fig. 4. Matrice creuse

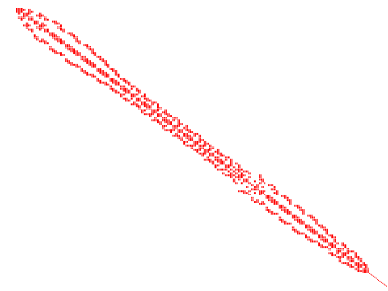


Fig. 5. Matrice bande après RMC

Le graphe suivante nous montre le rapport entre la largeur de la bande initiale et la largeur de la bande après application de l'algorithme pour 4 géométries de tailles différentes :

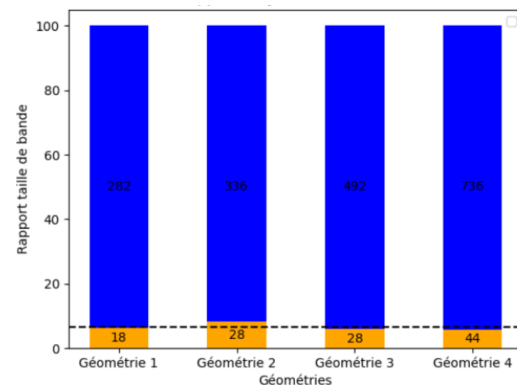


Fig. 6. Moyenne de la taille de la bande

En moyenne (ligne en pointillée), l'algorithme diminue la bande de 93.5%.

C. Solveur bande

Ensuite, après avoir réduit la bande de notre matrice, nous utilisons un solveur bande pour résoudre notre système linéaire.

Le graphe suivant compare le temps d'exécution entre le solveur bande (après renumérotation) et le solveur full en fonction de différentes tailles de bande¹:

¹bande initiale du système plein, pas celle obtenue après application de l'algorithme

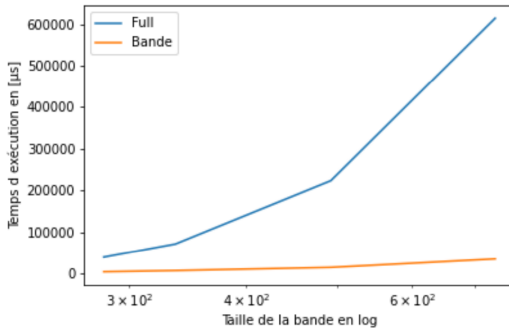


Fig. 7. Temps d'exécution en fonction de la taille de la bande

Pour de petites bandes initiales (~ 300), on remarque que le système est résolu 10 fois plus rapidement avec notre solveur bande. Le gain de vitesse augmente avec la taille initiale de la bande.

IV. RÉSULTATS

Pour appliquer nos conditions aux frontières, nous appliquons des conditions de Dirichlet homogène en X et Y sur la partie supérieure intérieure du mousqueton et contrainte de Neuman normale non nulle sur la partie inférieure intérieure du mousqueton (voir figure suivante pour plus de clarté).

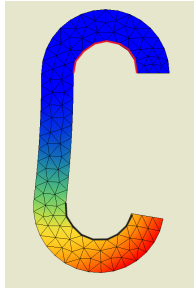


Fig. 8. Mousqueton déformé doigt ouvert avec condition de Neuman(noir) et condition de Dirichlet(rouge)

Vous pouvez voir dans les figures suivantes les résultats de différents tests en traction dans les 2 cas, ouvert et fermé:

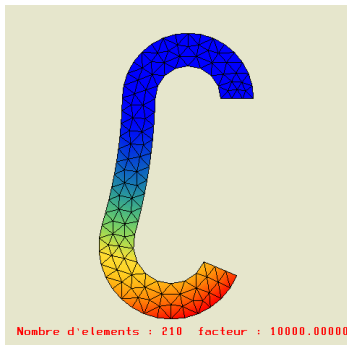


Fig. 9. Mousqueton déformé doigt ouvert sous une force de 10.000 [N]

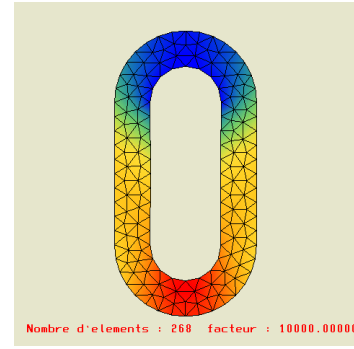


Fig. 10. Mousqueton déformé doigt fermé sous une force de 10.000 [N]

On remarque dans le premier essai que pour une même contrainte appliquée, la déformation du mousqueton ouvert est bien plus grande que celle du mousqueton fermé.

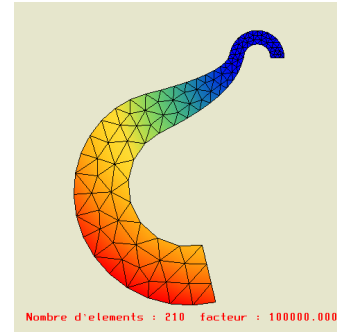


Fig. 11. Mousqueton déformé doigt ouvert sous une force de 80.000 [N]

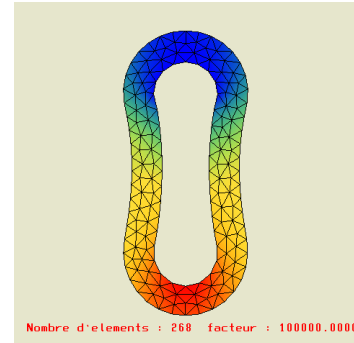


Fig. 12. Mousqueton déformé doigt fermé sous une force de 80.000 [N]

Dans le 2e cas, le mousqueton fermé se déforme légèrement et le mousqueton ouvert sort de sa région élastique.

Ensuite, vous pouvez observer dans l'animation en copie la déformation du mousqueton en position fermée supportant une force de 16.000 [N] à 160.000 [N] avec un facteur de visualisation de 10^5 .

Ensuite, l'animation semblable dans le cas ouvert avec une force appliqué de 1000 [N] à 50.000 [N] avec un facteur de visualisation de 10^4 .

On remarque encore une fois que dans le cas ouvert, la déformation est plus grande que le cas fermé alors qu'on

applique une force moindre et un facteur de visualisation 10 fois plus petit.

Enfin, nous voulions tester nos résultats expérimentalement, mais les mousquetons étaient trop robustes pour constater une déformation mesurables, ce qui était prévisible. En effet, il était possible de voir une légère déformation à l'oeil nu mais ce n'était pas suffisant pour pouvoir effectuer des mesures précises. Voir figures ci-dessous.

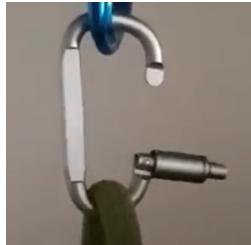


Fig. 13. Mousqueton avant déformation expérimental doigt ouvert

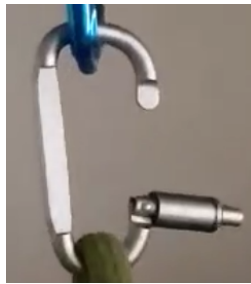


Fig. 14. Mousqueton après déformation expérimentale doigt ouvert sous une force de 700 [N]

CONCLUSION

Cette étude a permis de modéliser le comportement mécanique d'un mousqueton d'escalade en utilisant la méthode des éléments finis en 2 dimensions. L'objectif principal était d'analyser l'élasticité linéaire du mousqueton dans sa position ouverte et fermée, en se concentrant principalement sur la résistance à la traction.

Grâce à l'application de techniques d'optimisation telles que le format CSR pour la matrice creuse et l'algorithme RCM pour réduire la bande, nous avons pu améliorer l'efficacité du code informatique et réduire le temps de calcul nécessaire pour résoudre le système linéaire.

Les résultats obtenus ont montré que la position du doigt du mousqueton (ouvert ou fermé) affecte considérablement sa résistance à la traction. En position fermée, la répartition de la charge sur l'ensemble du mousqueton permet une résistance plus élevée, conformément aux normes de sécurité. En revanche, en position ouverte, la résistance est significativement réduite en raison de la localisation de la charge et de la flexibilité accrue de la lame.

Ces résultats permettent de comprendre le comportement mécanique du mousqueton d'escalade et mettent en évidence

la nécessité de prendre des précautions appropriées lors de son utilisation.

REFERENCES

- [1] Girousse, L. (2018, 14 décembre). Version 2 : Relais redondant. Grimper, https://www.cisco.com/c/dam/en_us/about/ac123/ac147/archived_issues/ipj_7-3/ipj_7-3.pdf, consulté le 09/05/2023.
- [2] Petzl. (n.d.). Exemples de sollicitations dangereuses des mousquetons, consulté le 09/05/2023.
- [3] Altibag. (n.d.). Les mousquetons , consulté le 08/05/2023.
- [4] Wikipedia, (2023, avril 27), Mousqueton , consulté le 05/05/2023.
- [5] Tournier, P.-H. (2021). Cours de Mathématiques et Informatique pour la Modélisation en Mécanique (5MM30)., consulté le 10/05/2023.
- [6] Ronak Doshi, Reverse Cuthill Mckee Algorithm , consulté le 10/05/2023.