Aufgabe 1

1) Wieso sind positive Gewichte wichtig für die Konvergenz $\lim_{n \to \infty} Q_n[f, w] = I[f, w]$?

Antwort: Weil es sonst zu Auslöschung führen könnte

2) Was ist das Ziel der Gauß-Kronrod-Quadratur ?
Antwort: Eine Quadratur mit Exaktheitsgrad $2N+1$

3) Wie lautet die Iterationsformel des Newton-Verfahrens?
Antwort: $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k)$

4) Wann ist ein Iterationsverfahren lokal konv. ?
Antwort: lokal konv. gegen $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, wenn es eine Umgebung U von $\hat{x}$ gibt, sodass für alle Startwerte in dieser Umgebung $(x_0 \in U)$ die zugrundeliegende Folge wohldefiniert & gegen $\hat{x}$ konvergent ist.

5) Wann ist ein Verfahren global konvergent ?
Antwort: Wenn die Umgebung $U = \mathbb{R}^n$, dh. alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konv. gegen $\hat{x}$.

Aufgabe 2

$$\kappa := \limsup_{k \to \infty} \varepsilon_k^{1/k}$$

(i) $$\limsup_{n\to\infty} \left(n^{-10}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} n^{-\frac{10}{n}} \to \limsup_{n\to\infty} n^{0} = 1 \longrightarrow \text{subl. konv.}$$

$\xrightarrow{n\to\infty} 0$

(ii) $$\limsup_{n\to\infty} \left(10^{-n}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} 10^{-1} = \frac{1}{10} \longrightarrow \text{lin. konv.}$$

(iii) $$\limsup_{n\to\infty} \left(10^{-n^2}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} 10^{-n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0 \longrightarrow \text{supl. konv.}$$

(iv) $$\limsup_{n\to\infty} \left(n^{10} 3^{-n}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left(n^{\frac{10}{n}} \cdot 3^{-1}\right) = \frac{1}{3} \longrightarrow \text{lin. konv.}$$

$\to 0$

(v) $$\limsup_{n\to\infty} \left(10^{-3\cdot 2^n}\right)^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left(10^{-\frac{3\cdot 2^n}{n}}\right)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{10^{\frac{3\cdot 2^n}{n}}}\right)$$

$\to \infty$ der Zähler wächst schneller als der Nenner, da er n im Exponenten hat

$$\longrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{1}{10^k}$$

$$= 0 \quad \to \text{supl. konv.}$$

Aufgabe 4

$n+1 \to n$

$$P_n = \frac{1}{n} (2(n-1)+1) x P_{n-1}(x) - (n-1) P_{n-2}(x)$$

$$= \frac{1}{n} ((2n-1) x P_{n-1}(x) - (n-1) P_{n-2}(x))$$

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \frac{1}{n} ((2n-1)(P_{n-1}(x) + x P'_{n-1}(x)) - (n-1) P'_{n-2}(x))$$