Aufgabe 2

Satz 2.23. *Sei $f \in C[a,b]$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, d.h.,*

$$\forall x, y \in [a,b]: \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Dann gilt für den interpolierenden linearen Spline $s \in S_{1,\Delta}$

$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i]: \qquad |f(x) - s(x)| \leq \frac{L}{2}|x_i - x_{i-1}|.$$

$j = i-1$

$\hookrightarrow x \in [j, j+1]$

$$\begin{aligned}
s(x) &= f(x_{i-1})\, \Lambda_{i-1}(x) + f(x_i)\, \Lambda_i(x) \\
&= f(x_{i-1})\, \Lambda_j(x) + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\
&= f(x_{i-1}) \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\
&= f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\
&= f(x_{i-1})\, k + f(x_i)\, (1-k)
\end{aligned}$$

$$1 - \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x_i - x_{i-1} - x_i + x}{x_i - x_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

setze $k = \dfrac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}$

Sei $h = x_i - x_{i-1}$

$$|f(x)-s(x)| = |f(x) - f(x_{i-1})\, k - f(x_i)\,(1-k) + f(x)\cdot k - f(x)k|$$

$$= |k(f(x) - f(x_{i-1})) + (1-k)(f(x) - f(x_i))|$$

$$\leq |k(f(x) - f(x_{i-1}))| + |(1-k)(f(x) - f(x_i))|$$

$$\leq |k| \cdot L \cdot |x - x_{i-1}| + |1-k| \cdot L\, \underbrace{|x - x_i|}_{= |x_i - x|}$$

$$= L \cdot |k \cdot (1-k) \cdot h| + L \cdot |(1-k) \cdot k \cdot h|$$

$$= 2L\, |k \cdot (1-k)|\, |h|$$

$$= 2L\, |k - k^2|\, |h| \qquad |k - k^2| = \left|\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + k - k^2\right|$$

$$= \left|\tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{4} - k + k^2\right)\right|$$

$$= \left|\tfrac{1}{4} - \underbrace{\left(\tfrac{1}{2} - k\right)^2}_{\geq 0}\right|$$

$$\leq 2L\, \left|\tfrac{1}{4}\right|\, |h|$$

$$= \tfrac{1}{2} L\, |x_i - x_{i-1}|$$

Aufgabe 3

-> Die Interpolation ist relativ genau. Vorallem im Höhepunkt der Funktion kommt es jedoch zu einer Abweichung.
Das letzte Subintervall wird nicht beachtet, siehe „Fehleranalyse.md"