1) $\cdot\ V := \mathbb{R}^n$ mit Norm $\|\cdot\|$

$\cdot$ lin. Operator $A: V \to V$

$\cdot\ \|A\|_{op} := \inf\{C > 0 : \|A\cdot x\| \leq C \cdot \|x\|\}$

$\cdot\ x \in \mathbb{R}^n$

i) z.z. $\|A\|_{op} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A\cdot x\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|A\cdot x\|$

Bew: „$\|x\| = 1$":

$$\|A\|_{op} := \inf\{C > 0 : \|A\cdot x\| \leq C\cdot\|x\|\}$$
$$= \inf\{C > 0 : \frac{1}{\|x\|}\cdot\|A\cdot x\| \leq C\}$$
Normeigenschaft
$$= \inf\{C > 0 : \left\|A\cdot\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq C\}$$
$$= \sup_{x \neq 0}\left\{\left\|A\cdot\frac{x}{\|x\|}\right\|\right\}$$
$$= \sup_{\|x'\|=1}\{\|A\cdot x'\|\}$$

„$\|x\| \leq 1$": Sei $\|\lambda\| \geq \|x\|$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

$$\|A\|_{op} := \inf\{C > 0 : \|A\cdot x\| \leq C\cdot\|x\|\}$$
$$= \inf\{C > 0 : \frac{1}{\|x\|}\cdot\|A\cdot x\| \leq C\}$$
$$= \inf\{C > 0 : \frac{1}{\|\lambda\|}\cdot\|A\cdot x\| \leq \frac{1}{\|x\|}\cdot\|A\cdot x\| \leq C\}$$
Normeigenschaft
$$= \inf\{C > 0 : \left\|A\cdot\frac{x}{\|\lambda\|}\right\| \leq C\}$$
$$= \sup_{\|x''\| := \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| \overset{\text{Normeigenschaft}}{=} \frac{1}{\|\lambda\|}\cdot\|x\| \leq \frac{1}{\|x\|}\cdot\|x\| = 1}\{\|A\cdot x''\|\}$$

q.e.d.

ii) z. z. $\|A\|_{op,1} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Bew: $\|A\|_{op,1} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1$ klar nach i)

(1) z.z. $\|A\|_{op,1} \le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$

Bew: $\|A\|_{op,1} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|_1\}$

$\overset{*}{=} \max_{\|x\|_1=1} \{\|Ax\|_1\}$

$\le \max_{\|x\|_1=1} \{\|A\|_1 \cdot \|x\|_1\}$

$\overset{**}{=} \max \{\|A\|_1\}$

$= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

(2) z.z. $\|A\|_{op,1} \ge \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$

Bew: $\|A\|_{op,1} = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|_1\}$

$\overset{*}{=} \max_{\|x\|_1=1} \{\|Ax\|_1\}$

$\overset{**}{\ge} \max \{\|A \cdot e_j\|_1\}$

$= \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\Rightarrow \|A\|_{op,1} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

*: $\mathbb{R}^n$ ist endlich dim. und nach Satz v. Weierstraß wird somit das Maximum angenommen

**: e_j ist kanonischer Einheitsvektor, sodass die j-te Spaltensumme maximal wird

q.e.d.

z.z. $\|A\|_{op,\infty} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Bew: $\|A\|_{op,\infty} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty$ klar nach i) $\qquad \|x\|_\infty := \max_{1\le k\le n} |x_k|$

① z.z. $\|A\|_{op,\infty} \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Bew:

$$\|A\|_{op,\infty} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{*}{=} \max_{\|x\|_\infty=1} \{ \|Ax\|_\infty \}$$

Submultiplikativität

$$\le \max_{\|x\|_\infty=1} \{ \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty \}$$

$$= \max \{ \|A\|_\infty \}$$

$$= \max \left\{ \max_{1\le i\le n} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\| \right\} \right\}$$

$$\overset{**}{=} \max_{1\le i\le n} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\| \right\}$$

② z.z. $\|A\|_{op,\infty} \ge \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Bew:

$$\|A\|_{op,\infty} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty$$

$$\overset{*}{=} \max_{\|x\|_\infty=1} \{ \|Ax\|_\infty \}$$

$$= \max_{\|x\|_\infty=1} \left\{ \max_{1\le i\le n} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\| \right\} \right\}$$

$$\ge \max_{1\le i\le n} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \mathrm{sgn}(x_{ij}) \right\| \right\}$$

$$= \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|$$

*: $\mathbb{R}^n$ ist endlich dim. und nach Satz v. Weierstraß wird somit das Maximum angenommen

**: Das Maximum eines Matrixeintrags ist der Matrixeintrag selbst

q.e.d.

iii) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert $\Rightarrow \|A^{-1}\|_{op} \geq \frac{1}{\|A\|_{op}}$ gilt (Hinweis)

$$k_{rel}(A) = \|A\|_{op} \cdot \|A^{-1}\|_{op} \geq \|A\|_{op} \cdot \frac{1}{\|A\|_{op}} = 1$$

bringt nichts ...

Betrachte das LGS

$$* \quad Ax = y$$

Die Eingabe habe einen Fehler Δy, Ausgabe habe einen kleinen Fehler Δx

$$A(x+\Delta x) = y + \Delta y$$

$$\Rightarrow Ax + A \cdot \Delta x = y + \Delta y$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} y + A \cdot \Delta x = y + \Delta y$$

$$\Rightarrow A \cdot \Delta x = \Delta y$$

$$\Rightarrow \Delta x = A^{-1} \cdot \Delta y$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta y\| \overset{\text{Submultiplikativität}}{\leq} \|A^{-1}\|_{op} \cdot \|\Delta y\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{op} \cdot \|\Delta y\|}{\|x\|} \overset{**}{\leq} \|A\|_{op} \cdot \|A^{-1}\|_{op} \cdot \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|} = k_{rel}(A) \cdot \frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}$$

Bei Fehler Δy ist der relative Fehler der Ausgabe höchstens $k_{rel}(A)$ mal so groß wie der relative Fehler der Eingabe. Also ist $k_{rel}(A)$ ein gutes Maß für die Verstärkung bzw. relative Konditionszahl.

$$** \quad Ax = y$$

$$\Rightarrow \|y\| = \|A \cdot x\| \overset{\text{submult.}}{\leq} \|A\|_{op} \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|_{op}}{\|y\|}$$

Aufgabe 2

Monotonie

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{s}{x_n}\right) - x_n = \frac{s}{2x_n} - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{s - x_n^2}{\underbrace{x_n}_{>0}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} - x_n > 0 & \text{falls } x_n^2 < s \quad \text{bzw } x_n < \sqrt{s} \\ x_{n+1} - x_n = 0 & \text{falls } x_n^2 = s \qquad\quad x_n = \sqrt{s} \\ x_{n+1} - x_n < 0 & \text{falls } x_n^2 > s \qquad\quad x_n > \sqrt{s} \end{cases}$$

Wenn $x_n < \sqrt{s}$ gilt $x_{n+1} > x_n$ dh. die Funktion steigt, wenn $x_n > \sqrt{s}$ gilt $x_{n+1} < x_n$ dh. die Funktion fällt.

zz. $x_n > \sqrt{s} \Rightarrow$ die Folge (x_n) fällt monoton gegen $\sqrt{s}$

IA: $x_0 > \sqrt{s}$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{s}{x_0}\right) > \frac{1}{2}\left(\sqrt{s} + \frac{s}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s} + \sqrt{s}\right) = \sqrt{s}$$

IV: $x_n > \sqrt{s} \Rightarrow \sqrt{s} < x_{n+1} < x_n$

IS: $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{s}{x_n}\right) \overset{IV}{>} \frac{1}{2}\left(\sqrt{s} + \frac{s}{\sqrt{s}}\right) = \sqrt{s}$$

zz. $x_n + \frac{s}{x_n} > 2\sqrt{s}$ wenn $x_n > \sqrt{s}$

$$\Rightarrow \frac{x_n^2 + s - 2\sqrt{s}\,x_n}{x_n} > 0 \Leftrightarrow x_n^2 - 2\sqrt{s}\,x_n + s$$

$$= (x_n - \sqrt{s})^2 > 0 \quad ✓$$

Wenn $x_0 < \sqrt{s}$ steigt die Funktion, bis ein $s \in \mathbb{N}$ mit $x_s > \sqrt{s}$ existiert, danach fällt die Folge monoton und ist beschränkt durch $\sqrt{s}$. Dh. die Folge konv. gegen $\sqrt{s}$

Die Folge für $x_0 < \sqrt{5}$ ist nicht durch $\sqrt{5}$ nach oben beschränkt: $x_0 = 0{,}5 \quad S = 0{,}5$ mit $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}707$

$x_1 = 0{,}75 > \sqrt{0{,}5}$

Aufgabe 4 iii)

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707106781186547$$

			sqrt(1) = 1 > 1/2	
n / x_0	0,2	0,5	1	2
1	1,35	0,75	0,75	1,125
2	0,86	0,708	0,708	0,78
3	0,72	0,707107	0,707107	0,71
4	0,7072	0,707106781187	0,707106781	0,70711
5	0,70710679	0,707106781186547	0,7071067811865470	0,70710678

1 bietet sich als Startwert an, da $\sqrt{1} = 1 > \frac{1}{2}$. Wie man sieht, erhält man bereits bei n = 3 für alle Testwerte in der Nähe von $\frac{1}{2}$ näherungsweise gutes Ergebnis da $0{,}71^2 = 0{,}5041 \approx 0{,}5$

Bei n = 5 sind alle Ergebnisse mindestens auf die 7te Nachkommastelle genau.

Bei den Startwerten 0,2 und 0,5, die beide kleiner sind als $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sieht man - wie in Aufgabe 2 beschrieben - dass die Folge erst steigt und dann monoton fällt, sobald $x_s > \sqrt{\frac{1}{2}}$. Die Folgen mit den Startwerten 1 und 2 (> $\sqrt{\frac{1}{2}}$) fallen monoton.