Aufgabe 1:

1. Frage: Was ist eine Quadraturformel?

Antwort: Eine Formel der Form $Q[f;\omega] = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$
$x_k \in [a,b]$, zur Approximation des Integrals
$I[f;\omega] = \int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx$

2. Frage: Was besagt der Exaktheitsgrad?

Antwort: Der Exaktheitsgrad q ist der höchste Polynomgrad, sodass alle Polynome $p \in \Pi_q$ durch die gewählte Quadraturformel das zu berechnende Integral <u>exakt</u> beschreiben: $Q[p;\omega] = I[p;\omega]$

3. Frage: Was ist der maximale Exaktheitsgrad einer Quadraturformel mit $n+1$ Stützstellen und Gewichten?

Antwort: $q_{max} = 2n+1$

Aufgabe 4

(i) g, l const., $f(x) = \sin(x)$ $\quad f'(x) = \cos(x)$

$x_0 = 0$

$$T_f(\varphi) \overset{!}{=} \sin(0) + \cos(0)(\varphi - 0) + \theta^2$$
$$= 0 + 1\varphi + \theta^2$$
$$= \varphi$$

$\overset{!}{}$ Taylorpolynom erster Ordnung

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Lösungsansatz für homogene DGL zweiter Ordnung.

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{\varphi}(0) = -A\omega_0 \underbrace{\sin(\omega_0 \cdot 0)}_{0} + B\omega_0 \underbrace{\cos(\omega_0 \cdot 0)}_{=1} = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\varphi(0) = A\cos(\omega_0 \cdot 0) + 0 = A = \varphi_0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\varphi_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 \cdot t) = -\frac{g}{l}\varphi_0 \cos(\omega_0 \cdot t) \Rightarrow \omega_0 = \frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \varphi_L(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$$

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}81}s^2} \approx 2s$$