Aufgabe 1

Frage 1) Auf welches Intervall bezieht sich der kubische Spline $s_i(x)$?

Antwort: $[x_i, x_{i+1}]$

Frage 2): Gibt es für die Interpolationspunkte (x_i, y_i) $i \in \{0, \dots, n\}$ ein $s_n(x)$?

Antwort: $s_n(x)$ wäre der Spline zum Intervall $[x_n, x_{n+1}]$. Da es keinen Punkt (x_{n+1}, y_{n+1}) gibt, ist der „letzte Spline" $s_{n-1}(x)$ auf $[x_{n-1}, x_n]$.

Frage 3): wieviele kubische Splines benötigt man für n Interpolationspunkte?

Antwort: $n-1$ kubische Splines, da es $n-1$ Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Aufgabe 2:

a)

$$c_{3,i} = \frac{1}{\Delta x_i^3}\left(-2y_{i+1} + 2y_i + \sigma_i \Delta x_i + \sigma_{i+1}\Delta x_i\right)$$

(vgl. 2.3)

Randbedingung:

1)
$$s_0'''(x_1) = s_1'''(x_1)$$

$\Downarrow$ ableiten von $s_i(x)$ $\quad i \in \{0, 1\}$

$$c_{3,0} = c_{3,1}$$

$\Downarrow$ einsetzen (2.3)

$$\frac{1}{\Delta x_0^3}\left(-2y_1 + 2y_0 + \sigma_0\Delta x_0 + \sigma_1 \Delta x_0\right) = \frac{1}{\Delta x_1^3}\left(-2y_2 + 2y_1 + \sigma_1\Delta x_1 + \sigma_2\Delta x_1\right)$$

$$2y_0\frac{\Delta x_1^2}{\Delta x_0} - 2y_1\frac{\Delta x_1^2}{\Delta x_0} + \sigma_0\Delta x_1^2 + \sigma_1\Delta x_1^2 = 2y_1\frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_1} - 2y_2\frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_1} + \sigma_1\Delta x_0^2 + \sigma_2\Delta x_0^2$$

$$2\left(y_0\frac{\Delta x_1^2}{\Delta x_0} - y_1\left(\frac{\Delta x_1^2}{\Delta x_0} + \frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_1}\right) + y_2\frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_1}\right) = -\sigma_0\Delta x_1^2 + \sigma_1\left(\Delta x_0^2 - \Delta x_1^2\right) + \sigma_2\Delta x_0^2$$

2)
$$s_{n-2}'''(x_{n-1}) = s_{n-1}'''(x_{n-1})$$

$\Downarrow$

$$c_{3,n-2} = c_{3,n-1}$$

$$\frac{1}{\Delta x_{n-2}^3}\left(-2y_{n-1} + 2y_{n-2} + \sigma_{n-2}\Delta x_{n-2} + \sigma_{n-1}\Delta x_{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta x_{n-1}^3}\left(-2y_n + 2y_{n-1} + \sigma_{n-1}\Delta x_{n-1} - \sigma_n\Delta x_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(y_{n-2}\frac{\Delta x_{n-1}^2}{\Delta x_{n-2}} - y_{n-1}\left(\frac{\Delta x_{n-1}^2}{\Delta x_{n-2}} + \frac{\Delta x_{n-2}^2}{\Delta x_{n-1}}\right) + y_n\frac{\Delta x_{n-2}^2}{\Delta x_{n-1}}\right) = -\sigma_{n-2}\Delta x_{n-1}^2 + \sigma_{n-1}\left(\Delta x_{n-2}^2 - \Delta x_{n-1}^2\right) + \sigma_n\Delta x_{n-2}^2$$

b) Die Splines in x_0 und x_n stimmen im Wert, sowie in der ersten & zweiten Ableitung überein, sodass der spline periodisch weitergeführt werden kann.

$$s_1'(x_0) = s_n'(x_n)$$
$$\sigma_0 = \sigma_n$$

$$s_1''(x_0) = s_n''(x_n)$$
$$2c_{2,1} + 6c_{3,1}(x_0 - x) = 2c_{2,n} + 6c_{3,n}(x_n - x)$$
$$c_{2,1} + 3c_{3,1}(x_0 - x) = c_{2,n} + 3c_{3,n}(x_n - x)$$
$$\frac{1}{\Delta x_1^2}(3y_2 - 3y_1 - 2\sigma_1 \Delta x_1 - \sigma_2 \Delta x_1) + 3\frac{1}{\Delta x_1^3}(-2y_2 + 2y_1 + \sigma_1 \Delta x_1 + \sigma_2 \Delta x_1)$$
$$=$$
$$\frac{1}{\Delta x_n^2}(3y_{n+1} - 3y_n - 2\sigma_0 \Delta x_n - \sigma_1 \Delta x_n) + 3\frac{1}{\Delta x_n^3}(-2y_{n+1} + 2y_n + \sigma_0 \Delta x_n + \sigma_1 \Delta x_n)$$

aber $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$?

Aufgabe 3

Für iii)

$$s_i(x) = c_{0,i} + c_{1,i}(x-x_i) + c_{2,i}(x-x_i)^2 + c_{3,i}(x-x_i)^3$$

$$= y_i + \sigma_i (x-x_i) + c_{2,i}(x-x_i)^2 + c_{3,i}(x-x_i)^3$$

$$c_{2,i} = \frac{1}{\Delta x_i^2}(3y_{i+1} - 3y_i - 2\sigma_i \Delta x_i - \sigma_{i+1}\Delta x_i)$$

$$c_{3,i} = \frac{1}{\Delta x_i^3}(-2y_{i+1} + 2y_i + \sigma_i \Delta x_i + \sigma_{i+1}\Delta x_i)$$

Auswertung:

Die Splinekurve und die Testfunktionen $f(x)$, $g(x)$ sind jeweils deckungsgleich.