Name, Matrikelnummer: ____

1. Teil: Multiple-Choice (20 Punkte)

1. Bei den folgenden Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig; diese ist anzukreuzen bzw. einzusetzen. Beweise oder Begründungen sind hier nicht erforderlich.

Für eine richtige Antwort bekommen Sie jeweils **2 Punkte**; *für eine falsche Antwort bekommen Sie dieselbe Punktzahl abgezogen.* Sollte sich dadurch für diese Aufgabe insgesamt eine negative Punktzahl ergeben, wird die ganze Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

(a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K, $c \in K$, $v \in V$ und $\lambda \in V^*$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist *nicht* sinnvoll?

☐ $c \cdot v$ ☐ $c \cdot \lambda$ ☐ $\lambda(v)$ ☐ $\lambda(c)$

(b) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und U ein Untervektorraum von V. Ferner seien $v_1, v_2 \in V$ so gewählt, dass $v_1 + v_2 \in U$ gilt. Was läßt sich in dieser Situation über v_1 und v_2 sagen?

☐ Es gilt stets $v_1, v_2 \in U$.

☐ Es ist sowohl möglich, dass $v_1, v_2 \in U$ gilt, als auch, dass dies nicht der Fall ist.

☐ Es gilt niemals $v_1, v_2 \in U$.

(c) Welche Dimension hat der Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$?

________ *(Bitte einsetzen.)*

(d) Ist die Summe zweier Vektorraum-Isomorphismen stets wieder ein Vektorraum-Isomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein

(e) Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ferner sei $U \subset V$ ein Untervektorraum, so dass $F|U = 0$ gilt. Was läßt sich in dieser Situation über den Rang von F allgemein sagen?

☐ $\mathrm{Rang}(F) \geq \dim(U)$	☐ $\mathrm{Rang}(F) \geq \dim(V) - \dim(U)$
☐ $\mathrm{Rang}(F) \leq \dim(U)$	☐ $\mathrm{Rang}(F) \leq \dim(V) - \dim(U)$
☐ $\mathrm{Rang}(F) = \dim(U)$	☐ $\mathrm{Rang}(F) = \dim(V) - \dim(U)$

☐ Es läßt sich keine allgemeine Aussage treffen.

Bitte wenden.

(f) Es sei ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 7 Unbekannten gegeben, das mindestens eine Lösung besitzt. Was kann man dann über die Dimension des Lösungsraums allgemein sagen?

- ☐ Sie beträgt mindestens 3.
- ☐ Sie beträgt mindestens 4.
- ☐ Sie beträgt höchstens 3.
- ☐ Sie beträgt höchstens 4.
- ☐ Sie beträgt genau 3.
- ☐ Sie beträgt genau 4.
- ☐ Es läßt sich keine allgemeine Aussage treffen.

(g) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$ *(Bitte einsetzen.)*

(h) Von den folgenden Matrizen ist genau eine invertierbar. Welche?

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(i) Welche der folgenden Matrizen sind zueinander äquivalent? (Zur Erinnerung: Zwei Matrizen A und B gleicher Zeilen- und Spaltenzahl heißen *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen S und T gibt, so dass $B = SAT$ gilt.)

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(j) Welcher der folgenden Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$ wird bezüglich irgendeiner Basis des $\mathbb{R}^2$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dargestellt?

- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (v_1, v_2) \mapsto (0, 0)$
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (v_1, v_2) \mapsto (v_1, v_1)$
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (v_1, v_2) \mapsto (2v_1, 2v_2)$
- ☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$

Folgt Seite 3.

2. Teil: Rechenaufgaben (34 Punkte)

2. **(16 Punkte)** Es sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie je eine Basis vom Kern und vom Bild von F.

3. Wir betrachten die lineare Abbildung

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (\ 2x_1+x_2+x_3\ ,\ x_1+x_2-x_3\ ,\ x_1-2x_2-x_3\ )$,

bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ und setzen

$$\mathcal{B} := \{\ (1,1,-1)\ ,\ (0,1,-2)\ ,\ (1,2,-2)\ \}\ .$$

(a) **(10 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen S und T, so dass $\mathrm{Mat}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F) = S \cdot \mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot T$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F

- **(i)** **(3 Punkte)** bezüglich der Basis $\mathcal{A}$, d.h., bestimmen Sie die Matrix $\mathrm{Mat}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$.
- **(ii)** **(5 Punkte)** bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, d.h., bestimmen Sie die Matrix $\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.

Bitte wenden.

3. Teil: Definitionen und Sätze (10 Punkte)

4. Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K.

(a) Vervollständigen Sie die folgenden Definitionen der jeweils unterstrichenen Begriffe: **(je 2 Punkte)**

(i) „Der von einer endlichen Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ <u>aufgespannte Raum</u> ist ...“

(ii) „Die zu einer linearen Abbildung $F : V \to W$ <u>duale Abbildung</u> ist ...“

(iii) „Der <u>Rang</u> einer linearen Abbildung $F : V \to W$ ist ...“
[Der Begriff soll *nicht* auf den Begriff des Rangs einer Matrix zurückgeführt werden.]

(b) **(2 Punkte)** Geben Sie die Dimensionsformel für Summen von endlich-dimensionalen Untervektorräumen an.

(c) **(2 Punkte)** Formulieren Sie den Basisergänzungssatz.

4. Teil: Kleine Beweise (36 Punkte)

5. Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Beweisen Sie:

(a) **(5 Punkte)** Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist F genau dann injektiv, wenn $\ker(F) = \{0\}$ gilt.

[Ein Verweis auf die entsprechende Aussage der Vorlesung gilt *nicht* als Beweis.]

(b) **(5 Punkte)** Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann betrachten wir die Linearformen $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$, die durch

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \ : \ v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

charakterisiert sind. Zeigen Sie, dass $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ eine Basis von V^* ist.

[Ein Verweis auf die entsprechende Aussage der Vorlesung gilt *nicht* als Beweis.]

(c) Es sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass es einen Untervektorraum $U \subset V$ mit $\operatorname{Im}(F) \subset U$ und $F|U = 0$ gibt. Dann gilt:

- **(i)** **(4 Punkte)** $\operatorname{Rang}(F) \leq \frac{1}{2} \dim_K V$.
- **(ii)** **(3 Punkte)** $F \circ F = 0$.
- **(iii)** **(3 Punkte)** $\mathrm{id}_V + F$ ist invertierbar; geben Sie auch $(\mathrm{id}_V + F)^{-1}$ an.

Folgt Seite 5.

6. **(a)** **(4 Punkte)** Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Zeigen Sie: falls $\dim U = \dim V$ ist, dann gilt $U = V$.

(b) **(5 Punkte)** Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit angeordneter Basis B, es sei W ein K-Vektorraum mit angeordneter Basis B', und es gelte $\dim V = \dim W$. Weiter sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\left(M^B_{B'}(f)\right)^{-1} = M^{B'}_B\left(f^{-1}\right).$$

(c) **(7 Punkte)** Es sei V ein K-Vektorraum und V_1, V_2 seien zwei Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Ist $V_1 \cup V_2$ ein Untervektorraum von V, dann gilt $V_1 \subset V_2$ oder $V_2 \subset V_1$.

Das war's!