1. Teil: Multiple-Choice

1. Bei den folgenden Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig; diese ist anzukreuzen bzw. einzusetzen. Beweise oder Begründungen sind hier nicht erforderlich.

Für eine richtige Antwort bekommen Sie jeweils **2 Punkte**; *für eine falsche Antwort bekommen Sie dieselbe Punktzahl abgezogen.* Sollte sich dadurch für diese Aufgabe insgesamt eine negative Punktzahl ergeben, wird die ganze Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

(a) Es sei k ein Körper, $A \in M(n \times m, k)$ eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten, wobei $n < m$ ist. Es sei $\lambda \in k^*$, $c \in k$, $v \in k^n$, $w \in k^m$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist *nicht* sinnvoll?

☐ ${}^t(\lambda A) \cdot v$ ☐ $c \cdot A \cdot (\lambda v)$ ☐ $\lambda^{-1} \cdot c$ ☐ $(\lambda A) \cdot (c \cdot w)$

(b) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k und U, W Untervektorräume von V. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$
☐ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
☐ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W + \dim(U \cap W)$

(c) Welche Dimension hat der Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$?

________ *(Bitte einsetzen.)*

(d) Es sei k ein Körper. Ist die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen eine Untergruppe von $(M(n \times n, k), +)$?

☐ Ja ☐ Nein

(e) Es sei k ein Körper. Es sei $A \in M(4 \times 3, k)$. Was lässt sich über den Rang von A sagen?

☐ $\text{Rang}(A) \geq 4$ ☐ $\text{Rang}(A) \geq 3$
☐ $\text{Rang}(A) \geq 2$ ☐ $\text{Rang}(A) \leq 3$
☐ Es läßt sich keine allgemeine Aussage treffen.

Bitte wenden.

.

(f) Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten über $\mathbb{R}$ gegeben. Es gibt mindestens zwei Lösungen, wenn

☐ $n = m$. ☐ $n \geq m$.

☐ $m > n$. ☐ $n > m$.

☐ Es läßt sich keine allgemeine Aussage treffen.

(g) Die Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$ wirke auf $\mathbb{R}^2$. Es sei O die Bahn durch den Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt:

☐ $O = \{0\}$ ☐ $O = \{\lambda \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ☐ $O = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ ☐ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(h) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert eine Gruppenwirkung der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathbb{R}^2$?

☐ $(t, v) \mapsto t \cdot v$ ☐ $(t, v) \mapsto e^t \cdot v$ ☐ $(t, v) \mapsto t + v$

(i) Es sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{smallmatrix}\right)$. Für welche der folgenden Matrizen B gibt es Matrizen $T_1, T_2 \in GL_2(\mathbb{R})$, so dass $T_1 A T_2 = B$?

☐ $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

☐ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

☐ $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

☐ $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(j) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $f^* : (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ die duale Abbildung. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ f ist injektiv $\Rightarrow n < m$

☐ f^* ist injektiv $\Rightarrow n \leq m$

☐ f ist surjektiv $\Rightarrow n \geq m$

☐ f^* ist surjektiv $\Rightarrow n \geq m$

Bitte wenden

2. Teil: Rechenaufgaben

2. (16 Punkte) Es sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie den Rang der Matrix sowie eine Basis des Bildes von F.

Bitte wenden.

3. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) **(5 Punkte)** Zeigen Sie: $U = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot v = 3 \cdot v\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) **(8 Punkte)** Geben Sie eine Basis von U an.

Hinweis: Es kann helfen, die Abbildung $F - 3 \cdot Id$ zu betrachten.

(c) **(5 Punkte)** Geben Sie die Matrix der Abbildung F bezüglich der Basis $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$ an.

Hinweis: Sie müssen nicht zeigen, dass es sich hierbei um eine Basis handelt.

Bitte wenden.

3. Teil: Definitionen und Sätze

4. Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper k.

(a) Vervollständigen Sie die folgenden Definitionen der jeweils unterstrichenen Begriffe: **(je 2 Punkte)**

(i) „Es sei G eine Gruppe, M eine Menge. Eine Abbilding $\varphi : G \times M \to M$ heißt <u>Gruppenwirkung</u>, falls ...“

(ii) „Die zu einer linearen Abbildung $F : V \to W$ <u>duale Abbildung</u> ist ...“

(iii) „Eine endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V heißt <u>linear unabhängig</u>, falls ...“

(b) **(4 Punkte)** Geben Sie die Dimensionsformel für eine lineare Abbildung $F : V \to W$ an.

(c) **(4 Punkte)** Formulieren Sie den Basisaustauschsatz.

Bitte wenden.

4. Teil: Kleine Beweise

5. Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper k.

(a) **(10 Punkte)** Beweisen Sie: Wenn V n-dimensional ist, dann ist eine endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V genau dann linear unabhängig, wenn sie ein Erzeugendensystem ist. [Ein Verweis auf die entsprechende Aussage der Vorlesung gilt *nicht* als Beweis.]

Bitte wenden.

(b) (5 Punkte) Es sei $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Beweisen Sie: es existiert eine lineare Abbildung $g : W \to V$ so dass $f \circ g = Id_W$ gilt.

Bitte wenden.

(c) Es sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass $F \circ F = F$. Beweisen Sie:

- **(i)** **(4 Punkte)** Für alle $v \in Im(f)$ gilt: $v = f(v)$.
- **(ii)** **(3 Punkte)** $Kerf \cap Imf = \{0\}$.
- **(iii)** **(3 Punkte)** $Kerf + Imf = V$. (Hinweis: Dimensionsformeln)
- **(iv)** **(3 Punkte)** Es existiert eine Basis B von V, so dass

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E die Einheitsmatrix geeigneter Größe, und 0 Null-Matrizen geeigneter Größe bezeichnen.

Bitte wenden !

Bitte wenden !

.

6. **(4 Punkte)** Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$. Es sei S_n die symmetrische Gruppe. Wir definieren eine Abbildung $\rho : S_n \to GL_n(\mathbb{R})$ durch

$$\rho(\sigma) = \left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right).$$

(Also: die i.te Spalte der Matrix $\rho(\sigma)$ ist genau der $\sigma(i)$.te Einheitsvektor.)

Zeigen Sie: ρ ist ein Gruppenhomorphismus.

Hinweis: Wenn j gegeben ist, was ist $\rho(\sigma) \cdot (\rho(\tau) \cdot e_j)$?

Das war's !

.

.