Aufgabe 1

(a) Beweis: Offensichtlich, die kleinste gewichted Kante ist eine Kante von MST(G);
Anehme, es existiert 2 verschiedener MST T und T‘; sei Kanten davon :
E(T) = { e_1, e_2 , ... e_m} , E(T‘) = { e'_1 , $e'_{2,\dots}$ e'_m} ;
Setze $e_k \neq e'_k$ und k als die kleinste gewichte Kante, da die Gewichten sind paarweise verschieden sind, wenn man e_k in T‘ fügt und w $(e_k) < (e'_k)$, $wird\ ein\ Zyklus\ erzeugt$ und e'_1 , $e'_{2,\dots}$ e'_k sind nicht inder Zyklus, (sonst wird T auch eine Zyklus enhält); jetzt delete die Kante in der Kreis, die grösser als e_k ist (es wird zumindes eine Kante grösser als $e_k\ in\ der\ Kreise$) , dann wird ein neue MST erzeugt, dann ist T‘ nicht mehr MST ; also widerspruch!
Es muss eindeutig für MST im ungerichten, zusammenhängenden, gewichten Graph sein .

q.e.d

(b) Beweise:

(i) erst zu zeigen , für jeden Schnitt von G liegt Schnittkante im MST(G) von G.

Angenommen, die Schnittkante e = (u,v), $u \epsilon S$, $v\epsilon V\backslash S$ liegt nicht in der MST. Da die MST den Graphen überspannt, muss es einen einfachen Pfad P geben, der u und v in der MST verbindet (d.h. nur aus Kanten in der MST besteht) und Der Pfad muss den Schnitt zwischen S und V \S mindestens einmal überqueren, da u und v auf entgegengesetzten Seiten liegen.

Sei e‘ eine Kante in P, Nehmen wir an, das Gewicht von e‘ sei größer als das von e. Füge nun e in den Graphen ein - so erhalten wir einen Zyklus, der sowohl e als auch e‘ enthält ; entfernen e‘ aus dem Graphen, um den einzigen Zyklus zu unterbrechen und wieder einen Spannbaum zu erhalten. Da das Gewicht von e nun geringer ist als das von e‘, hat der resultierende Spannbaum ein geringeres Gewicht. Das ist ein Widerspruch, und deshalb muss e im Baum gewesen sein.

(ii) zu zeigen bei Fügen Schnittekante von G wird MST erzeugt;

Wir werden durch Induktion und wiederspruch beweisen.

Sei G (V,E) mit n Knoten , dann ist die MST(G) = T mit n Knoten und n-1 Kanten;

ES = { $e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$} als die Menge für jede Iteration , die Schnittkante enthält;

IA: Falls T‘ = Ø, ist das klar , dass T‘ einer subgraph von T ist ;

Jeztzt füge $e_1$nach erste Schnitt, also, T‘ ∪ $\{e_1\}$, $nach\ (i)$, $e_1 \in$ T und T‘ ist ein Teilbaum von T somit ist T‘ ∪ $\{e_0\}$ ein Teilbaum von T; klar;

IS: Anehmen, nach n-1 mals Iteration , dass T‘ $\neq T$ also, es würden Fällen wie foglt :

Falls 1: es exitiert Teilbaum von T‘, nach k-te Iterration ist Teilbaum Tk+1...Tn-1 nicht in MST T. Nach eingenschafft von (i) , wiederspruch!

Falls 2 : w(T) > w(T‘) , da T als MST mit minimalem Gewichten ist , wiederspruch!

Induktionsschluss: Also, nach n-1 mals Iteration der Fugüng leichten Schnittpunkt muss MST aufgebaut wird , dann ist die Aussage wahr.

q.e.d