Liebe Studierende,

bei dieser Datei handelt es sich um eine Probeklausur zur Vorlesung aus dem WS 2007/08. Sie wurde an den aktuellen Stand der diesjährigen Vorlesung angepasst und demnach leicht modifiziert. Sie soll Ihnen als Orientierung und zur Vorbereitung auf die Klausur zur Vorlesung helfen und muss nicht abgegeben werden. Überdies finden Sie im *public*-Verzeichnis ebenfalls die Datei „*Klausur-WS0708.pdf*“, bei der es sich um die im WS 2007/08 gestellte Erstklausur handelt (unverändert).

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein frohes neues Jahr!

Stefan Kebekus und Andreas Demleitner

1. Teil: Multiple-Choice (20 Punkte)

1. Bei den folgenden Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig; diese ist anzukreuzen bzw. einzusetzen. Beweise oder Begründungen sind hier nicht erforderlich.

Für eine richtige Antwort bekommen Sie jeweils **2 Punkte**; *für eine falsche Antwort bekommen Sie dieselbe Punktzahl abgezogen.* Sollte sich dadurch für diese Aufgabe insgesamt eine negative Punktzahl ergeben, wird die ganze Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

(a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K, $v, v' \in V$, $\lambda \in K$ und $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$, $n \geq 1$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist *nicht* sinnvoll?

☐ $\lambda \cdot v + v'$ ☐ $A \cdot v$ ☐ $\lambda \cdot A$ ☐ A^{2019}

(b) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und U ein Untervektorraum von V. Ferner seien $v_1, v_2 \in V$ so gewählt, dass $v_1 + v_2 \in U$ gilt. Was lässt sich in dieser Situation über v_1 und v_2 sagen?

☐ Es gilt stets $v_1, v_2 \in U$.

☐ Es ist sowohl möglich, dass $v_1, v_2 \in U$ gilt, als auch, dass dies nicht der Fall ist.

☐ Es gilt niemals $v_1, v_2 \in U$.

(c) Welche Dimension hat der Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$?

________ *(Bitte einsetzen.)*

(d) Ist die Summe zweier Vektorraum-Isomorphismen stets wieder ein Vektorraum-Isomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein

(e) Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $F: V \to W$ eine lineare Abbildung. Ferner sei $U \subset V$ ein Untervektorraum, so dass $F(u) = 0$ für alle $u \in U$ gilt. Was lässt sich in dieser Situation über den Rang von F allgemein sagen?

☐ $\mathrm{Rang}(F) \geq \dim(U)$	☐ $\mathrm{Rang}(F) \geq \dim(V) - \dim(U)$
☐ $\mathrm{Rang}(F) \leq \dim(U)$	☐ $\mathrm{Rang}(F) \leq \dim(V) - \dim(U)$
☐ $\mathrm{Rang}(F) = \dim(U)$	☐ $\mathrm{Rang}(F) = \dim(V) - \dim(U)$

☐ Es lässt sich keine allgemeine Aussage treffen.

(f) Es sei ein lineares Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 7 Unbekannten gegeben, das mindestens eine Lösung besitzt. Was kann man dann über die Dimension des Lösungsraums allgemein sagen?

☐ Sie beträgt mindestens 3.	☐ Sie beträgt mindestens 4.
☐ Sie beträgt höchstens 3.	☐ Sie beträgt höchstens 4.
☐ Sie beträgt genau 3.	☐ Sie beträgt genau 4.

☐ Es lässt sich keine allgemeine Aussage treffen.

(g) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ *(Bitte einsetzen.)*

(h) Von den folgenden Matrizen ist genau eine invertierbar. Welche?

☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{smallmatrix}\right)$

(i) Welche der folgenden Matrizen sind zueinander äquivalent? (Zwei Matrizen A und B gleicher Zeilen- und Spaltenanzahl heißen *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen S und T gibt, so dass $B = SAT$ gilt.)

☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

(j) Welcher der folgenden linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird bezüglich irgendeiner Basis des $\mathbb{R}^2$ $(*)$ durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ dargestellt? ($(*)$ bedeutet, dass die Basis des Urbildbildraums und des Bildraums gleich sein sollen.)

☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

☐ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

2. Teil: Rechenaufgaben (34 Punkte)

2. (16 Punkte) Es sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, die bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie je eine Basis vom Kern und vom Bild von F.

3. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

und bezeichnen mit $\mathcal{A}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ und setzen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) **(10 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie (dabei) die Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ bzw. von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

(b) Bestimmen Sie:

(i) **(3 Punkte)** $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$.

(ii) **(5 Punkte)** $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.

3. Teil: Definitionen und Sätze (10 Punkte)

4. Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K.

(a) Vervollständigen Sie die folgenden Definitionen der jeweils unterstrichenen Begriffe: **(je 2 Punkte)**

(i) „Der von einer endlichen Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ <u>aufgespannte Raum</u> ist ...“

(ii) „Sei $W \subset V$ ein Untervektorraum. Ein <u>Quotient von V nach W</u> ist ...“

(iii) „Der <u>Rang</u> einer linearen Abbildung $F : V \to W$ ist ...“
[Der Begriff soll *nicht* auf den Begriff des Rangs einer Matrix zurückgeführt werden.]

(b) **(2 Punkte)** Geben Sie die Dimensionsformel für Summen von endlich-dimensionalen Untervektorräumen an.

(c) **(2 Punkte)** Formulieren Sie den Basisergänzungssatz.

4. Teil: Kleine Beweise (36 Punkte)

5. Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Beweisen Sie:

(a) **(5 Punkte)** Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist F genau dann injektiv, wenn $\ker(F) = \{0\}$ gilt.

[Ein Verweis auf die entsprechende Aussage der Vorlesung gilt *nicht* als Beweis.]

(b) **(5 Punkte)** Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann betrachten wir die linearen Abbildungen $v_1^*, \ldots, v_n^* \colon V \to K$, die durch

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \ : \ v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

charakterisiert sind. Zeigen Sie, dass $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, K)$ ist.

(c) Es sei $F : V \to V$ linear mit der Eigenschaft, dass es einen Untervektorraum $U \subset V$ mit $\mathrm{Im}(F) \subset U$ und $F(U) = \{0\}$ gibt. Dann gilt:

(i) **(4 Punkte)** $\mathrm{Rang}(F) \leq \frac{1}{2} \dim_K V$.

(ii) **(3 Punkte)** $F \circ F = 0$.

(iii) **(3 Punkte)** $\mathrm{id}_V + F$ ist invertierbar; geben Sie auch $(\mathrm{id}_V + F)^{-1}$ an.

6. **(a)** **(4 Punkte)** Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Zeigen Sie: falls $\dim U = \dim V$ ist, dann gilt $U = V$.

(b) **(5 Punkte)** Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit angeordneter Basis B, es sei W ein K-Vektorraum mit angeordneter Basis B', und es gelte $\dim V = \dim W$. Weiter sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$\left(M_{B'}^{B}(f)\right)^{-1} = M_{B}^{B'}\left(f^{-1}\right).$$

(c) **(7 Punkte)** Es sei V ein K-Vektorraum und V_1, V_2 seien zwei Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Ist $V_1 \cup V_2$ ein Untervektorraum von V, dann gilt $V_1 \subset V_2$ oder $V_2 \subset V_1$.