Prof. Dr. Stefan Kebekus
Dr. Daniel Greb

WS 2009/2010

Mathematisches Institut der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Klausur Lineare Algebra I

30.3.2010

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bachelor: ❑ Ja ❑ Nein

Studienfach: ______________________________

Die Klausur besteht aus insgesamt 24 Seiten. Bitte überprüfen Sie nach Ausgabe Ihre Klausur sofort auf Vollständigkeit. Die Klausur ist mit schwarzer, blauer oder grüner Tinte (kein Bleistift, kein Rotstift) anzufertigen. Neben Papier und Schreibgerät sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Außer bei Multiple Choice Aufgaben müssen alle Antworten ausführlich und nachvollziehbar begründet werden. Handys am Sitzplatz sind nicht erlaubt. Wer gegen diese Vorschriften verstößt, oder sonst einen Täuschungsversuch unternimmt, wird von der Klausur (und auch der Nachklausur) ausgeschlossen.

Durch Ihre Unterschrift bestätigen Sie die Kenntnisnahme dieser Bedingungen.

<u>Erklärung:</u>
Ich bitte darum, mein Klausurergebnis unter dem unten angegebenen Codewort auf der Website der Vorlesung geschützt mit dem bekannten Passwort bereitzustellen: ❑ Ja ❑ Nein

Codewort: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Erreichte Punkte:

1	2	3	4	5	6	Summe

bestanden / nicht bestanden

Note:

1. Teil: Multiple-Choice

1. Bei den folgenden Fragen ist jeweils *genau eine* Antwort richtig; diese ist anzukreuzen bzw. einzusetzen. Beweise oder Begründungen sind hier nicht erforderlich.

Für eine richtige Antwort bekommen Sie jeweils **2 Punkte**; *für eine falsche Antwort bekommen Sie dieselbe Punktzahl abgezogen.* Sollte sich dadurch für diese Aufgabe insgesamt eine negative Punktzahl ergeben, wird die ganze Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

(a) Es sei V ein k-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Was kann man über das Komplement $V \setminus U$ sagen?

- ☐ $V \setminus U$ ist stets ein Untervektorraum von V.
- ☐ Es gibt sowohl Fälle, in denen $V \setminus U$ ein Untervektorraum von V ist, als auch Fälle, in denen dies nicht zutrifft.
- ☐ $V \setminus U$ ist niemals ein Untervektorraum von V.

(b) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper k und U, W Untervektorräume von V. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- ☐ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$
- ☐ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
- ☐ $\dim(U + W) = \dim U + \dim W + \dim(U \cap W)$

(c) Welche Dimension hat der Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$?

________ *(Bitte einsetzen.)*

(d) Es sei k ein Körper. Ist die Menge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen eine Untergruppe von $(M(n \times n, k), +)$?

☐ Ja ☐ Nein

(e) Es sei V ein k-Vektorraum, $f : V \to V$ eine invertierbare lineare Abbildung und λ ein Eigenwert von f. Dann ist

☐ λ Eigenwert von f^{-1}	☐ $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von f^{-1}
☐ $-\lambda$ Eigenwert von f^{-1}	☐ $\lambda = 0$

☐ Es läßt sich keine allgemeine Aussage treffen.

Bitte wenden.

(f) Betrachte die folgenden Elemente σ und τ von S_5: $\sigma = (3\,1\,2)(5\,4)$ und $\tau = (5\,1\,2\,3\,4)$. Sind σ und τ konjugiert in S_5?

☐ Ja ☐ Nein

(g) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Welche Dimension hat der Eigenraum von A zum Eigenwert 3?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

(h) Es seien V und W k-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Bedingungen ist zur Injektivität von f äquivalent?

☐ $\mathrm{Im}(f) = W$

☐ $\ker(f) = \{0\}$

☐ $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$

(i) Es sei V ein k-Vektorraum und es seien $f, g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen. Es existiere ein $\varphi \in GL(V)$ mit $f = \varphi g \varphi^{-1}$. Dann haben f und g stets

☐ die gleichen Eigenwerte.

☐ die gleichen Eigenvektoren.

☐ die gleichen Eigenräume.

(j) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $f^* : (\mathbb{R}^m)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ die duale Abbildung. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ f ist injektiv $\Rightarrow n < m$

☐ f^* ist injektiv $\Rightarrow n \leq m$

☐ f ist surjektiv $\Rightarrow n \geq m$

☐ f^* ist surjektiv $\Rightarrow n \geq m$

Bitte wenden

2. Teil: Rechenaufgaben

2. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(a) **(8 Punkte)** Berechnen Sie $\det A$. Erläutern Sie hierbei Ihre Rechnung.

(b) **(8 Punkte)** Es sei $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$, falls dies möglich ist.

Bitte wenden.

3. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(a) **(9 Punkte)** Zeigen Sie:

$$\det(A - 2 \cdot E_3) = 0,$$

wobei E_3 die (3×3)-Einheitsmatrix bezeichne. Berechnen Sie zudem eine Basis des Eigenraumes von A zum Eigenwert 2.

(b) **(9 Punkte)** Es sei $B = gAg^{-1}$ für ein $g \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \{\text{invertierbare } (3 \times 3)-\text{Matrizen}\}$. Berechnen Sie (mit Erläuterung) das charakteristische Polynom $P_B(t)$.

Bitte wenden.

3. Teil: Definitionen und Sätze

4. Es seien V, W, V_1, V_2, V_3 endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper k.

(a) Vervollständigen Sie die folgenden Definitionen der jeweils unterstrichenen Begriffe: **(je 2 Punkte)**

(i) „Es sei G eine Gruppe, M eine Menge. Eine Abbildung $\varphi : G \times M \to M$ heißt <u>Gruppenwirkung</u>, falls ...“

(ii) „Die zu einer linearen Abbildung $F : V \to W$ <u>duale Abbildung</u> ist ...“

(iii) „Eine endliche Teilmenge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V heißt <u>linear unabhängig</u>, falls ...“

(b) **(4 Punkte)** Es seien $\alpha : V_1 \to V_2$ und $\beta : V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen. Eine Sequenz $0 \to V_1 \xrightarrow{\alpha} V_2 \xrightarrow{\beta} V_3 \to 0$ heißt <u>exakt</u>, falls ...

(c) **(4 Punkte)** Formulieren Sie den Basisergänzungssatz.

Bitte wenden.

4. Teil: Kleine Beweise

5. Es seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Mit $\pi : V \to V/U$ bezeichnen wir die kanonische Abbildung in den Quotientenvektorraum und mit $\imath : U \to V$ die Inklusionsabbildung von U nach V.

   (a) **(6 Punkte)** Beweisen Sie: die Sequenz

   $$0 \to U \xrightarrow{\imath} V \xrightarrow{\pi} V/U \to 0$$

   ist exakt.

Bitte wenden.

(b) **(6 Punkte)** Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper k. Es sei $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Beweisen Sie: es existiert eine lineare Abbildung $g : W \to V$ so dass $f \circ g = Id_W$ gilt.

Bitte wenden.

(c) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass $f \circ f = f$. Beweisen Sie:

(i) **(4 Punkte)** Für alle $v \in Im(f)$ gilt: $v = f(v)$.

(ii) **(4 Punkte)** $Ker f \cap Im f = \{0\}$.

(iii) **(3 Punkte)** $Ker f + Im f = V$. (Hinweis: Dimensionsformeln)

(iv) **(2 Punkte)** Es existiert eine Basis B von V, so dass

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E die Einheitsmatrix geeigneter Größe, und 0 Null-Matrizen geeigneter Größe bezeichnen.

Bitte wenden.

6. Es sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sei die duale Basis von V^*. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$ und für alle $\varphi \in V^*$ gilt:

(a) $v = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(v) v_j$ sowie

(b) $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(v_j) \varphi_j$.

Das war's !