(a) $3n^3 + 8n^2 + n \in O(n^3)$

Def. $O(g(n)) := \{f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$

Bew: $f(n) = 3n^3 + 8n^2 + n$

$g(n) = n^3$

$3n^3 + 8n^2 + n \leq 3n^3 + 8n^3 + n^3$

$3n^3 + 8n^2 + n \leq 14n^3$

$\Rightarrow \exists\, c = 14, n \geq 1$

Es gilt für die Def.

$\square$

(b) $2^n \in o(n!)$

Bew: $f(n) = 2^n$, $g(n) = n!$

Nach Def $o(g(n)) := \{f(n) \mid \forall c > 0\ \exists\, n_0 > 0, \forall n \geq n_0 : f(n) < c \cdot g(n)\}$

für $\forall c > 0$, falls $n_0 = 4$, gilt für

$2^n \leq c \cdot n!$

Es gilt für die Def.

$\square$

(c) $2\log n \in \Omega((\log n)^2)$

Bew: $f(n) = 2\log n$ $\quad g(n) = (\log n)^2$

$2\log n \geq c \cdot (\log n)^2$

$2\log n \geq c \cdot \log n \cdot \log n \quad | : \log n$

$2 \geq c \cdot \log n$

für $c = 1$, $n_0 = 4$, $\exists\, n = 8$, wobei $2 < \log 8$, $2 < 3$, wiederspruch!

$\square$

(d) Bew: $\max\{f(n), g(n)\} \in \Theta(f(n)+g(n))$ für nicht negative Funktionen f und g.

Weil $f(n) \geq 0$, $g(n) \geq 0$, $\exists n_f$, für jede $n > n_f$, dass $f(n) \geq 0$
$\exists n_g$, für jede $n > n_g$, um $g(n) \geq 0$ zu gelten.

$\Rightarrow f(n)+g(n) \geq f(n)$, für jede $n > n_f$.
$f(n)+g(n) \geq g(n)$, für jede $n > n_g$.

setz $n_{max} = \max(n_f, n_g)$. dann für $\forall n > n_{max}$
$f(n)+g(n) \geq 0$ ist immer klar.

Also $f(n)+g(n) \geq \max(f(n), g(n))$ ist klar. mit $\forall n > n_{max}$.

setz $F_{max}(n) = \max(f(n), g(n))$

$$f(n) \leq F_{max}(n), \quad g(n) \leq F_{max}(n)$$

$\Rightarrow f(n)+g(n) \leq 2 \cdot F_{max}(n)$ ist klar

$$\Rightarrow \frac{f(n)+g(n)}{2} \leq \max(f(n), g(n)) \leq f(n)+g(n)$$

$\exists C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 1$, für $\forall n \geq \max(n_f, n_g)$ gilt für die Def Θ