Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Math. Logik
Heike Mildenberger
Oliver Straser

Dauer: 120 Minuten
Eckerstraße 1

Probeklausur zur Vorlesung Lineare Algebra vom Wintersemester 2013/14

Geben Sie am Ende der Klausur Ihre Lösungen einschließlich dieses Deckblatts und der Aufgabenblätter ab. Schreiben Sie auf das Deckblatt und auf jedes Arbeitsblatt Ihren Namen.

Sie brauchen nicht alles zu bearbeiten, um eine sehr gute Note zu erhalten. Etwa 75–80% der Punkte werden sicherlich reichen.

Erlaubte Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DinA4-Blatt mit Beschriftung Ihrer Wahl dürfen Sie mitbringen und benutzen. Sonst sind keine Unterlagen erlaubt. Mobiltelefone und Laptops dürfen während der Prüfung nicht benutzt werden.

Viel Erfolg!

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Studiengang: ....
Unterschrift: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
Punkte maximal	3	3	3	3	3	4	3	6	4	3	5	6	7	7	7	60
Punkte bearbeitet																
Punkte erreicht																

Note: ....
Klausur eingesehen am: ....
Unterschrift der Prüferin: ....

Bitte wenden

Kreuzen Sie bei jeder Multiple-Choice-Frage (Aufgabe 1 bis Aufgabe 5) entweder Ja, Nein oder nichts an. Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. Sie bekommen in jeder Aufgabe mindestens 0 Punkte.

Aufgabe 1. *(3 Punkte)*
Sei V ein K-Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen für v_1, v_2, $v_3 \in V$ richtig?

Es gilt $\dim(\operatorname{span}\{v_2, v_3\} \cap \operatorname{span}\{v_1, v_2\}) < 2$ ☐ Ja ☐ Nein
Wenn $v_1 \in \operatorname{span}\{v_2, v_3\}$ ist, dann gilt $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \operatorname{span}\{v_2, v_3\}$ ☐ Ja ☐ Nein
Wenn $v_3 \in \operatorname{span}\{v_2, v_3\}$ ist, dann gilt $v_1 \in \operatorname{span}\{v_2, v_3\}$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 2. *(3 Punkte)*
Seien V und W Vektorräume sowie $f : V \to W$ und $g : W \to V$ lineare Abbildungen. Sind die folgenden Aussagen immer richtig?

$\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$ ☐ Ja ☐ Nein
Bild $g \circ f \subseteq$ Bild g ☐ Ja ☐ Nein
Bild $g \subseteq \ker f$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Seien V und W Vektorräume. Sind die folgenden Abbildungen $f : V \to W$ linear?

Sei $V = W = \mathbb{Z}_2$ und f definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{Z}_2$. ☐ Ja ☐ Nein
Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $W = \mathbb{R}^2$ und f definiert durch $f(\phi) = (\phi(0), \phi(1))$ für $\phi \in V$ (*Zur Erinnerung: $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ist der reelle Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{R}$.*) ☐ Ja ☐ Nein
Sei $V = W = \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ und f definiert durch $f(A) = A^2$. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 4. *(3 Punkte)*
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sind die folgenden Aussagen richtig?

f ist genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist. ☐ Ja ☐ Nein
$\ker f + \operatorname{Bild}(f) = V$ ☐ Ja ☐ Nein
Es gibt ein $v \in V$ mit $f(v) = v$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 5. *(3 Punkte)*
Sei V ein Vektorraum. Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum von V?

$V = \mathbb{R}^2$ und $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \cdot y = 0\}$ ☐ Ja ☐ Nein
$V = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ und $U = \{f \in V | f(0) = 0\}$ ☐ Ja ☐ Nein
$V = M_{3,3}(\mathbb{R})$ und $U = \{A \in V | \text{rang } A \leq 2\}$ ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Aufgabe 7. *(3 Punkte)*
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Begründen Sie ihre Antworten!

Aufgabe 8. *(6 Punkte)*
Seien die zwei Untervektorräume U und V des $\mathbb{R}^4$ definiert durch:

$$U \quad := \quad \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x_2 = x_1 + x_3, \; x_1 = x_3 + x_4 \}$$

$$V \quad := \quad \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | x_2 - x_3 = x_4 - x_1 \}$$

Bestimmen Sie $\dim U$, $\dim V$, $\dim(U+V)$ und $\dim(U \cap V)$. Begründen Sie ihre Antworten.

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Seien $\vec{A} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ und $\vec{B} = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ angeordnete Basen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathrm{id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Identitätsabbildung. Berechnen Sie:

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id})$$

Aufgabe 10. *(3 Punkte)*
Definieren Sie den Begriff Vektorraumhomomorphismus. Den Begriff eines K-Vektorraumes duerfen Sie ohne eine Definition anzugeben verwenden.

Aufgabe 11. *(5 Punkte)*
Sei

$$U := \{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) | \; x \in \mathbb{R} \}$$

Ist U eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$? Ist U abelsch?

Aufgabe 12. *(6 Punkte)*
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $h \in G$ ein fest gewähltes Element. Ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} Ad_h : G & \to & G \\ g & \mapsto & h^{-1} * g * h \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus? Ist sie bijektiv? Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f : G \to G$ heißt Gruppenhomomorphismus, wenn für alle $g_1,\ g_2 \in G$ gilt: $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$.

Aufgabe 13. *(5+2 Punkte)*

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$

i) Gibt es ein invertierbares $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, so dass

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Berechnen Sie:

$$A^{2014}$$

Hierbei ist A^n für $n > 0$ induktiv definiert durch: $A^1 = A$ und $A^{n+1} = A^n \cdot A$.

Aufgabe 14. *(7 Punkte)*
Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Seien ferner $w_i \in V$ definiert durch $w_1 := v_1$ und $w_i = w_{i-1} + v_i$ für $i > 1$. Ist $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V?

Aufgabe 15. *(7 Punkte)*
Wir arbeiten wieder im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Für $f, g \in V$ definieren wir: fRg :gdw für alle geraden $z \in \mathbb{Z}$ gilt $f(z) = g(z)$.
Sei $U = [0]_R$. Ist U ein Untervektorraum von V? Gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens n linear unabhängige Vektoren in V/U? Wenn ja, dann geben Sie für jedes n eine linear unabhaengige Menge mit mindestens n Vektoren an. Finden Sie eine linear unabhaengige Menge, die gleichzeitig fuer alle n als Antwort dient? Schreiben Sie gegebenenfalls so eine Menge hin.