模式识别作业一

数据科学与计算机学院　17大数据与人工智能

17341015　陈鸿峥

问题 1 (§2 Q2). 假设两个等概率的一维密度具有如下形式：对任给$i = 1, 2$及$0 < b_i$，$p(x \mid \omega_i) \propto \mathrm{e}^{-|x-a_i|/b_i}$。

(a) 写出每个密度的解析表达式，即对任意的a_i和正的b_i，将每个函数归一化

(b) 计算似然比，作为4个变量的函数

(c) 绘出在$a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 2$时的似然比$p(x \mid \omega_1)/p(x \mid \omega_2)$的曲线图

解答. (a) 设比例系数为k_i，由概率的基本性质有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} k_i \mathrm{e}^{\frac{-|x-a_i|}{b_i}} \,\mathrm{d}x \\
=&\int_{-\infty}^{a_i} k_i \mathrm{e}^{\frac{x-a_i}{b_i}} \,\mathrm{d}x + \int_{a_i}^{\infty} k_i \mathrm{e}^{-\frac{x-a_i}{b_i}} \,\mathrm{d}x \\
=&2k_i b_i \\
=&1
\end{aligned}
$$

进而求得$k_i = 1/(2b_i)$，故解析表达式为

$$
p(x \mid \omega_i) = \frac{1}{2b_i}\mathrm{e}^{-|x-a_i|/b_i}
$$

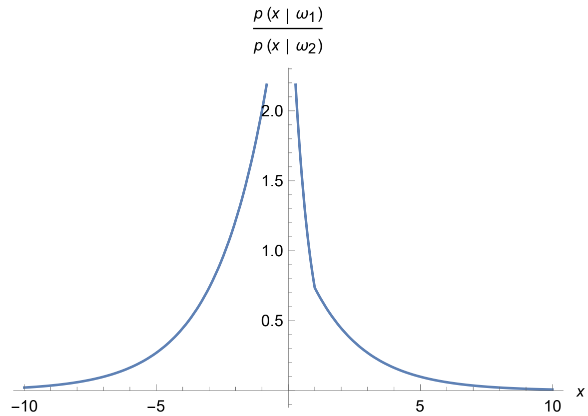
(b)

$$
\frac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} = \frac{b_2}{b_1}\mathrm{e}^{-\frac{|x-a_1|}{b_1}+\frac{|x-a_2|}{b_2}}
$$

(c) 将$a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 2$代入(b)求得的式子化简得

$$
\frac{p(x \mid \omega_1)}{p(x \mid \omega_2)} = 2\mathrm{e}^{-|x|+\frac{|x-1|}{2}}
$$

图像如下



问题 2 (§2 Q7)**.** 考虑两个一维柯西分布的*Neyman-Pearson*准则：

$$p(x \mid \omega_i) = \frac{1}{\pi b} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_i}{b}\right)^2}, \qquad i = 1, 2$$

在*0-1*误差损失下，且为了简化，设$a_2 > a_1$，宽度b相同，且先验概率相等。

(a) 假设当一样本实际属于ω_1却被误认为ω_2的模式分类时的最大可接受误差率为E_1，用所给变量确定判决边界。

(b) 对于此边界，将ω_2错分为ω_1的误差率是多少？

(c) 在*0-1*损失率下的总误差率是多少？

(d) 将你的结论应用于特殊情况：$b = 1$且$a_1 = -1, a_2 = 1$且$E_1 = 0.1$

(e) 将你的结论与贝叶斯误差率（即没有*Neyman-Pearson*条件）作比较。

解答. (a) 因先验概率相等，故$p(x \mid \omega_1) = 1/2$。设判别边界为$x^\star$，则

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_{x^\star}^{\infty} p(x \mid \omega_1) P(\omega_1)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{x^\star}^{\infty} \frac{1}{\pi b} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi b} \int_{u^\star}^{\infty} \frac{b}{1+u^2}\ \mathrm{d}u \qquad u = \frac{x - a_1}{b} \\
&= \frac{1}{2\pi} \arctan u \Big|_{u^\star}^{\infty}
\end{aligned}$$

移项得到

$$2\pi E_1 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x^\star - a_1}{b}$$

两侧同时取tan，整理得

$$x^\star = a_1 + \frac{b}{\tan(2\pi E_1)}$$

(b) 由题(a)的结果

$$\begin{aligned}
E_2 &= \int_{-\infty}^{x^\star} p(x \mid \omega_2) P(\omega_2)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi b} \int_{-\infty}^{x^\star} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_i}{b}\right)^2} P(\omega_2)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi b} \int_{-\infty}^{u^\star} \frac{b}{1+u^2}\ \mathrm{d}u \qquad u = \frac{x-a_2}{b} \\
&= \frac{1}{2\pi} \arctan u \Big|_{-\infty}^{u^\star} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{x^\star - a_2}{b}
\end{aligned}$$

(c) 综合题(a)和题(b)有

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{x^\star - a_2}{b}$$

(d) 将值代入(c)式得到$x^\star = 0.3764$，$E = 0.2613$

(e) 贝叶斯的决策边界为$x_B^\star = 0$，进而贝叶斯误差率为

$$\begin{aligned}
E_B &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi b} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \arctan u \Big|_0^\infty \\
&= 0.25 < E
\end{aligned}$$

即确实贝叶斯误差率会小于基于Neyman-Pearson准则的误差率

问题 3 (§2 Q9). 使用第7题给出的条件密度，设类别的先验概率相等。

(a) 证明最小误差概率为

$$P(error) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{a_2 - a_1}{2b} \right|$$

(b) 绘出它随$|a_2 - a_1|/(2b)$变化的曲线图。

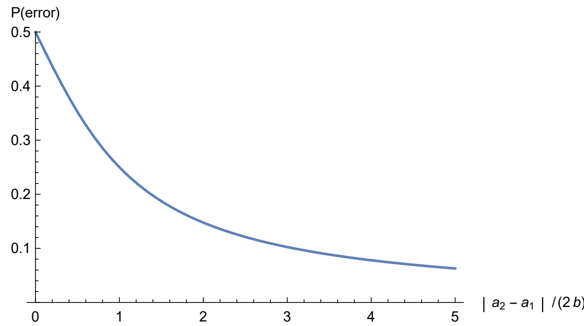
(c) $P(error)$的最大值是多少？在什么条件下可以达到此值？试说明原因。

解答. (a) 不妨设$a_2 > a_1$，判决边界为$(a_1 + a_2)/2$，则误差概率为

$$\begin{aligned}
P(error) &= \int_{-\infty}^{(a_1+a_2)/2} p(x \mid \omega_2) P(\omega_2)\ \mathrm{d}x + \int_{(a_1+a_2)/2}^{\infty} p(x \mid \omega_1) P(\omega_1)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi b} \left(\int_{-\infty}^{(a_1+a_2)/2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_2}{b}\right)^2}\ \mathrm{d}x + \int_{(a_1+a_2)/2}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-a_1}{b}\right)^2}\ \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi b} \left(\arctan u \Big|_{-\infty}^{(a_1-a_2)/(2b)} + \arctan u \Big|_{(-a_1+a_2)/(2b)}^{\infty} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{a_2 - a_1}{2b}
\end{aligned}$$

对于$a_1 \le a_2$的情形类似，故得证

(b) 如下图所示



(c) 当$|a_2 - a_1|/(2b) = 0$时$P(error)$达到最大值$1/2$，也即两个概率分布相同（$a_1 = a_2$），或者两个概率分布都为常量值（$a_1 \neq a_2, b = \infty$）