

数值计算方法实验报告

实验三：最小二乘法

数据科学与计算机学院 17大数据与人工智能

17341015 陈鸿峥

一、实验题目

拟合形如 $f(x) \approx \frac{a+bx}{1+cx}$ 的函数的一种快速方法是将最小二乘法用于下列问题： $f(x)(1+cx) \approx a+bx$ ，试用这方法拟合下表给出的中国人口数据。

次序	年份	人口（亿）
第一次	1953	5.82
第二次	1964	6.95
第三次	1982	10.08
第四次	1990	11.34
第五次	2000	12.66

通过图形来展示拟合效果。

二、实验目的

理解最小二乘法的原理并应用到实际生活中。

三、实验原理与内容

将方程 $f(x)(1+cx) \approx a+bx$ 改写为

$$f(x) \approx a + bx - cx f(x)$$

因此可看作基函数为

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = -x f(x)$$

设 $\mathbf{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_5]^T$ 进而

$$\begin{bmatrix} \phi_0(\mathbf{x}) & \phi_1(\mathbf{x}) & \phi_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = f(\mathbf{x})$$

即可解得 a, b, c 。或通过解法方程

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_0, \phi_2 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_0 \rangle & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \\ \langle f, \phi_2 \rangle \end{bmatrix}$$

也可得到 a, b, c 。

下面为本次实验的Mathematica源代码，用两种方法求解，完整文件已在附件中LeastSquares.nb。

```

1 x = {1953, 1964, 1982, 1990, 2000};
2 y = {5.82, 6.95, 10.08, 11.34, 12.66};
3 \[Phi]0 = ConstantArray[1, 5];
4 \[Phi]1 = x;
5 \[Phi]2 = Table[-x[[i]]*y[[i]], {i, 1, 5}];
6 A = Transpose[{\[Phi]0, \[Phi]1, \[Phi]2}];
7 LeastSquares[A, y] (*Inner function*)
8 (*My implementation below*)
9 \[Phi][i_, x_] :=
10   If[i == 0, \[Phi]0[[x]],
11     If[i == 1, \[Phi]1[[x]], If[i == 2, \[Phi]2[[x]]]]
12 A = Table[
13   Table[Sum[\[Phi][i, k]*\[Phi][j, k], {k, 1, 5}], {j, 0, 2}], {i, 0,
14     2}];
15 b = Table[Sum[\[Phi][i, k]*y[[k]], {k, 1, 5}], {i, 0, 2}];
16 result = Inverse[A].b
17 Show[ListPlot[Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 1, 5}]],
18   Plot[(result[[1]] + result[[2]] k)/(result[[3]] k + 1), {k, 1950,
19     2010}], AxesLabel -> {HoldForm[Year], HoldForm[Population]}]
```

四、实验结果与分析

两种方法求解出来的结果相同，均为

$$\begin{cases} a = 2.94562 \\ b = -0.00140662 \\ c = -0.000495599 \end{cases}$$

拟合结果如图 1 所示。

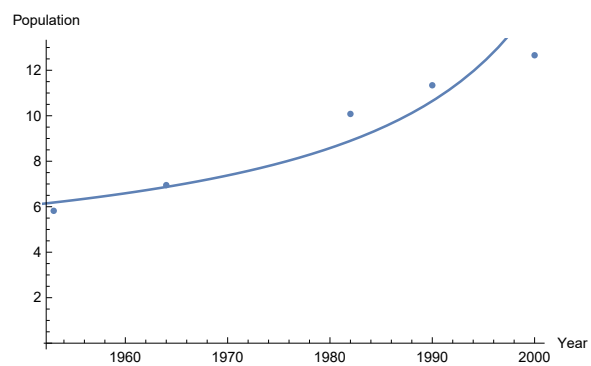


图 1: 拟合结果

五、 实验总结和心得

本次实验熟悉了最小二乘法的原理，并用两种方法实施求解，收获良多。