数值计算方法实验报告

实验一：插值多项式

数据科学与计算机学院　17大数据与人工智能

17341015　陈鸿峥

一、 题目描述

- 使用区间$[-5,5]$上的21个等距节点，找出函数$f(x)=(x^2+1)^{-1}$的20阶插值多项式$p(x)$。打印出$f(x)$和$p(x)$的图形，观察$f(x)$和$p(x)$的最大偏差。
- 在计算机上，对上一题使用切比雪夫节点$x_i=5\cos(i\pi/20), 0\le i\le 20$，找出函数$f(x)=(x^2+1)^{-1}$的20阶插值多项式$q(x)$。打印出$f(x)$和$q(x)$的图形，由上一题和本题，你能得出什么结论？

二、 实验结果与分析

采用Wolfram Mathematica 11.1进行编程实验，实验结果如图1和图2所示。由于$p(x)$函数波动太大，故在图1的左图中仅仅显示了$[-4,4]$的区间。

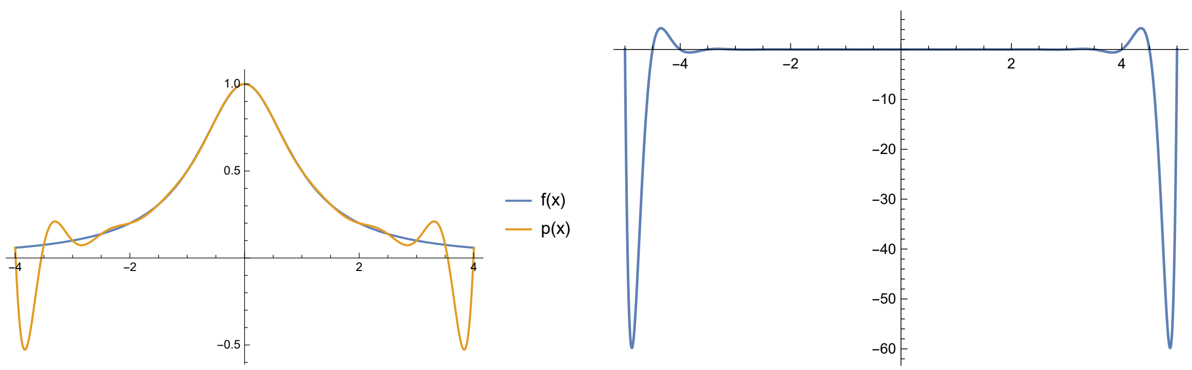

图 1: $f(x)$与$p(x)$的图形与误差

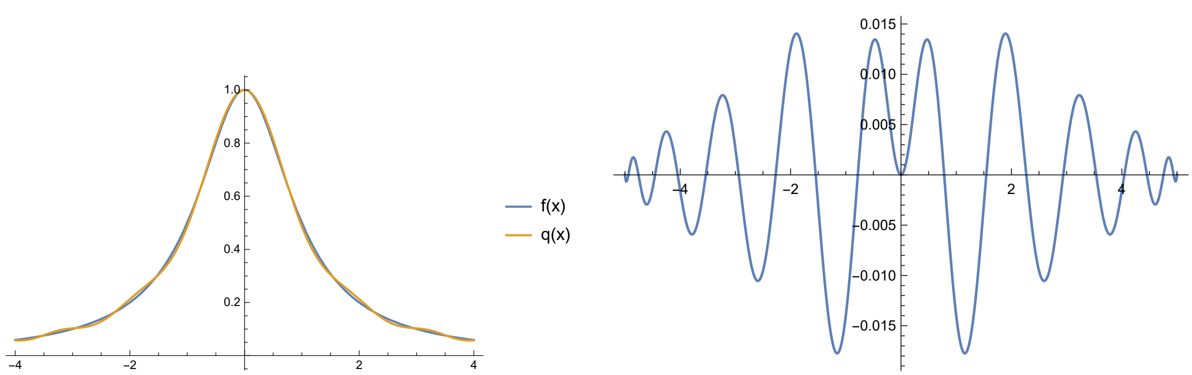

图 2: $f(x)$与$q(x)$的图形与误差

由图1可以看出，$p(x)$在$[-2,2]$的区间都拟合得比较好，与$f(x)$的绝对误差接近于0；而在大约±4.8的位置，误差达到最大，绝对误差接近于60。

由图2则可以看出，$q(x)$在$[-5,5]$整个区间上都拟合得很好，最大绝对误差也不超过0.02，进而得出结论：在本题的插值函数中采用切比雪夫节点会获得比较好的效果（即误差较小）。

证明由课本下一章切比雪夫多项式的性质可得。设切比雪夫多项式为$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}(x))$，有零点$x_i=\cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right),i=1,\dots,n$，进而

$$T_n(x)=2^{n-1}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

若在$[-1,1]$上进行拉格朗日插值，则余项为

$$|R_n(x)|=|f(x)-q(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

其中$\xi\in(-1,1)$。记$M_{n+1}=\max_{x\in[-1,1]}|f^{(n+1)}(x)|$，则

$$|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{T_{n+1}(x)}{2^n}\right|=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}$$

可见误差非常小。若将区间换为$[-5,5]$，同理可得

$$|R_n(x)|\le\frac{5^n\max_{x\in[-5,5]}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!2^n}$$

三、 源代码

下面为本次实验的Mathematica源代码，完整文件已在附件中`interpolation.nb`。注意下列插值函数均为自己编写，没有调用系统库函数。

```
f[x_] := (x^2 + 1)^(-1)
px = Array[# &, 21, {-5, 5}];(*equal length*)
px2 = Table[N[5 Cos[i \[Pi]/20]], {i, 0, 20}]; (*Chebyshev*)
(*My Lagrange function, not using InterpolatingPolynomial*)
l[px_] :=
 Sum[Product[If[j != i, x - px[[j]]], {j, 1, 21}]/
   Product[If[j != i, px[[i]] - px[[j]]], {j, 1, 21}] f[px[[i]]], {i,
   1, 21}];
Plot[{Legended[f[x], "f(x)"], Legended[l[px], "p(x)"]}, {x, -4, 4}]
Plot[l[px] - f[x], {x, -5, 5}, PlotRange -> Full]
Plot[{Legended[f[x], "f(x)"], Legended[l[px2], "q(x)"]}, {x, -4, 4}]
Plot[l[px2] - f[x], {x, -5, 5}]
```