编译原理期末大作业

正则表达式等价性

数据科学与计算机学院　17大数据与人工智能

17341015　陈鸿峥

目录

一、 实验目的

对于两个正则表达式r和s，判断这两个正则表达式的关系。正则表达式r和s的关系有4种：

1. r和s等价，即r描述的语言和s描述的语言相等；
2. r描述的语言是s描述的语言的真子集；
3. s描述的语言是r描述的语言的真子集；
4. 非上述情况。

正则表达式的字符集为小写字母`a-z`，`|`号表示或者，`*`号表示闭包，`?`表示出现0或1次，`+`表示至少出现一次，大写字母E表示epsilon（空串）。

编写一个C++程序，实现上述功能。

输入格式：

第一行是测试数的组数T。接下来的T行，每行是两个正则表达式r和s，每个正则表达式只含`a-z`，`|`，`*`，`?`，`+`，`(`，`)`，`E`。两个正则表达式之间用空格分开。

输出格式：

输出有T行。对于每组数据，如果r和s等价，输出`=`；如果r是s的真子集，输出`<`；如果s是r的真子集，输出`>`；非上述情况，输出`!`。

提交内容：

1. 能在Linux下或在Windows的Dev C++下编译运行的C++源程序；
2. 实验报告，包括算法描述，和你的测试用例，及测试结果。

二、 算法原理

本次实验主要分为以下几个部分（如图1所示），正则表达式读入、字符串预处理、中缀转后缀表示、正则表达式转NFA、NFA转DFA、DFA最小化、DFA等价性判断，下文会依次阐述算法细节。

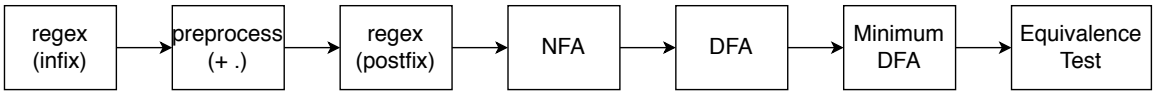


图 1: 算法核心流程

1. 字符串预处理

最开始读入的正则表达式并不方便后续的操作，因此需要对其进行一些预处理。这里包括加法符号替代和连接符号插入两项预处理。

(i) 加法符号替代

加法符号`+`用来表示前文的符号出现至少一次，这并非最简正则所支持的语法，因此我们

需要对其进行替代。注意到

$$\texttt{R+} \iff \texttt{RR*}$$

因此可以将R+替换成用星号表示的形式。

需要注意R也是一个正则表达式，故需要确定其包含的内容，然后才可以做拷贝替换。这里我直接在输入的正则字符串上进行操作：

- 若R就是单一字母（a-z），那么直接在其后面添加R*。
- 若R为括号包围的正则表达式，则需要将括号包围的内容整份进行拷贝。具体实现可用栈维护括号的位置，遇到左括号则将其下标进栈，遇到右括号弹出栈顶的下标；如果右括号的下一符号为+，则将当前下标与栈顶下标这一区间的字符串进行拷贝，附加在当前字符的右侧，并添加*作结。

一个例子如下

((x|y)+)+ 展开后为 ((x|y)(x|y)*)((x|y)(x|y)*)*

只有正确使用栈操作才能够正确处理上述**嵌套括号**的情况。

完整实现见源码的substitute_plus函数。

(ii) 连接符号插入

接下来一步则是对连接符进行插入。由于原有的正则表示式都是默认省略连接符，这会给后续的分析转换带来麻烦，因此这一步则是将省略的这些连接符进行插入，这里用.代表连接符。

由于只需判断当前字符与下一字符的关系，这里只给出一个例子以示说明，完整实现请见insert_concat函数。

b*a*b?a* 变为 b*.a*.b?.a*

2. 中缀转后缀表示

处理完加号和连接符后，即可将中缀的正则表达式转换为后缀形式表达，这将方便后续NFA转换的处理。

算法流程如下，利用一个算子栈进行状态维护：

1. 从左到右遍历中缀表达式
2. 如果当前字符是
    - 字母（a-z或E），则将其添加入输出中
    - 左括号(，将其推入栈中

- 右括号)，将栈顶的符号依次弹出，直至遇见左括号（左括号也要弹出）
- 算子，先将栈顶**优先级比该算子高**的符号依次弹出，再将当前算子推入栈中

3. 循环以上过程，直至字符串遍历完
4. 将栈顶剩余的符号全部弹出

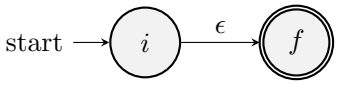
完整代码请见`infix2postfix`函数。

3. 正则表达式转NFA

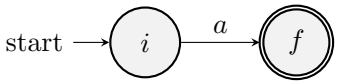
正则表达式转NFA即课本3.7.4节所述的Thompson算法，按照以下方式可以进行构造。

1. 奠基

- 对于表达式ϵ（即输入为`E`），构建NFA

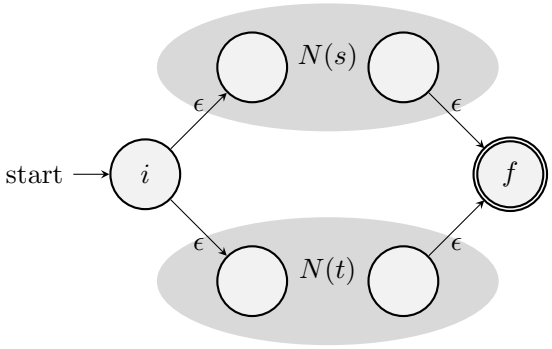


- 对于任意子表达式$a \in \Sigma$，构建NFA

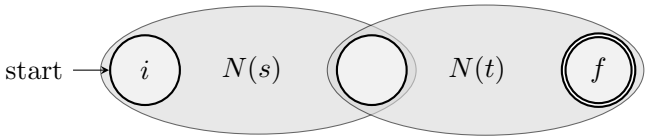


2. 推论

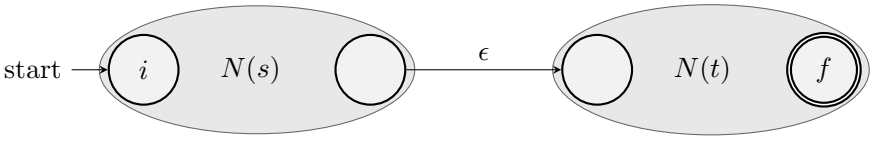
- $r = s|t$，取并集



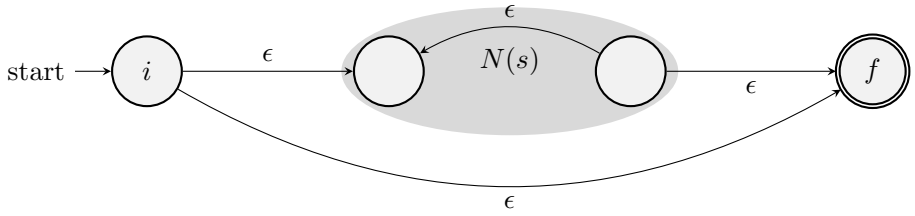
- $r = st$，取连接



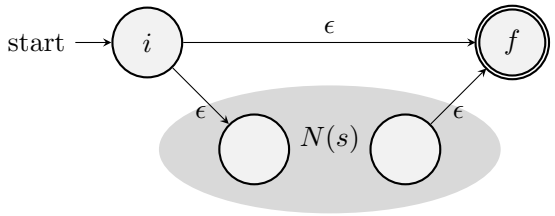
这里为方便程序实现，采用了如下的构造方式。



- $r = s^*$，Kleene闭包



- $r = s?$，这是本问题新加的语法，代表0个或1个输入，相当于$r = \epsilon|s$，故只需对并集自动机的构造进行适当修改即可。



具体实现上需要创建一个NFA结点类，存储其结点编号、状态、出边，定义如下。

```
class NFA_Node{
public:
    NFA_Node() : id(cnt), accepting(false) {
        cnt++;
    }
    int id;
    static int cnt;
    bool accepting;
    map<char,int> out;
    vector<int> e;
};
```

并用一个栈对NFA结点进行维护，每次从后缀表达式中读取一个符号，从栈顶弹出对应$N(s)$和$N(t)$的入口结点及出口结点，并按照以上构造方式，创建新的i和f结点，连接好对应边后，将i和f推入栈顶。

完整代码见`regex2nfa`函数。

4. NFA转DFA

NFA转DFA的算法参见课本第3.7.1节，即子集构造算法，这里需要以下几个操作。关于集合的操作均采用C++的`<set>`标准库进行实现，而计算闭包则是通过递归深度优先搜索(DFS)实现。

操作	描述
$\epsilon\text{-}closure(s)$	从状态s能够通过ϵ边转换的集合（包括自己的状态）
$\epsilon\text{-}closure(T)$	$\bigcup_{s\in T}\epsilon\text{-}closure(s)$
$move(T,a)$	从$s\in T$中的状态通过输入符号a进行转换

同时，构造DFA结点类，存储其结点编号、状态及出边，定义如下。

```
class DFA_Node{
public:
    DFA_Node() : id(cnt), start(false), accepting(false), group(1) {
        cnt++;
    }
    int id;
    static int cnt;
    bool start;
    bool accepting;
    map<char,int> out; // be careful of non-existed keys
    int group;
};
```

注意到DFA中就没有ϵ边了。

具体算法参见图2，其中状态的访问用队列queue维护，状态标记用集合set维护，状态转移用映射map维护。

initially, $\epsilon\text{-}closure(s_0)$ is the only state in $Dstates$, and it is unmarked;
while (there is an unmarked state T in $Dstates$) {
    mark T;
    for (each input symbol a) {
        $U = \epsilon\text{-}closure\big(move(T,a)\big)$;
        if (U is not in $Dstates$)
            add U as an unmarked state to $Dstates$;
        $Dtran[T,a] = U$;
    }
}

图 2: 子集构造算法

完整代码见nfa2dfa函数，需要注意在计算闭包构造新结点的同时也要记录开始状态和接受状态。

5. DFA最小化

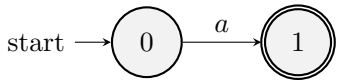
由于每个正则表达式对应的最小化DFA是唯一的，因此可以通过最小化DFA的方式来判断

两个正则表达式之间的关系，这里采用课本3.9.6节的Hopcroft划分算法。这一部分算是本次实验所有算法中最难实现的一个，需要考虑到非常多的细节。

算法流程如下：

1. 开始初始划分为$\prod$，所有接受状态F为一个组，该集合的补为另一个组$S-F$（注意有可能所有状态均为接受状态，那么$S-F=\varnothing$），将这两个组推入队列中（在具体实现上我并没有将所有划分用统一的数据结构进行存储，而是在原有每个DFA结点下添加`group`成员进行标记）
2. 若组队列非空，则弹出头部的组
   - 若该组只有一个状态，则不需划分
   - 若改组有多个状态，并且存在两个状态对于相同符号的出边落在不同的组，那么这两个状态需要被划分为不同的组（具体实现上采用`map<int,vector<int>>`对状态进行维护，考察每个DFA结点对相同符号的出边，目标结点的组标号为`map`的key，而value则是组内的状态编号），将划分后的新组重新加入队列
3. 对组编号进行重新分配及映射，为每个组挑选旧DFA中的标志结点，并创建新的DFA结点，将新的结点按照旧的连边关系建图，生成最终最小化DFA

完整代码见`minimize_dfa`函数，这里在划分组时需要小心一些出边并不完全的DFA。一个简单的例子即`a`，生成的DFA如下图所示。



该DFA的接受结点即没有任何的出边，这在访问时需要特别小心。比如在分组时就会将这些访问不到出符号的结点的出结点的组别设为-1。

在具体实现上`map`不能直接通过`[]`进行读取，哪怕没有该元素，也会读出值造成错误；故应该用`.count(c)`判断`c`元素是否存在映射中，并用`.at(c)`来读出`c`的内容。

6. DFA等价性判断

最后一步则是进行DFA等价性的判断。注意到每个正则表达式都可以对应一个DFA，而两个DFA R和S之间的关系只会有四种情况，可以考察原DFA与补DFA的交关系来判断原始两个DFA之间的包含关系，如图3所示。

- R等价于S：$R\cap\bar{S}=\varnothing\wedge\bar{R}\cap S=\varnothing$
- R含于S：$R\cap\bar{S}=\varnothing\wedge\bar{R}\cap S\neq\varnothing$
- S含于R：$R\cap\bar{S}\neq\varnothing\wedge\bar{R}\cap S=\varnothing$
- 其他关系：$R\cap\bar{S}\neq\varnothing\wedge\bar{R}\cap S\neq\varnothing$

其中这里$\bar{\cdot}$代表DFA的补，即将所有接受状态变为非接受状态，非接受状态变为接受状态。

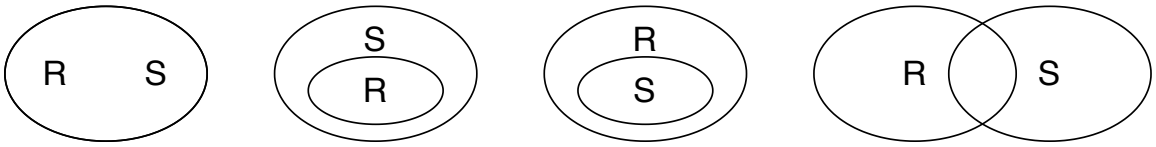


图 3: DFA关系的四种情况

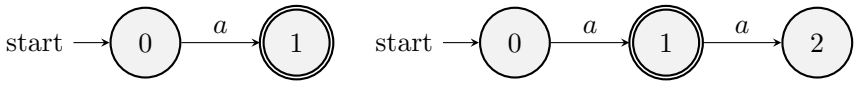
所以只需求两个DFA是否**相交**即可，具体方法是对两个DFA同时从开始状态进行模拟。如果模拟到两个状态$s1$和$s2$都为接受态，意味着有一个字符串可以同时被两个DFA/正则表达式所匹配，即两个DFA相交；如果对于所有字符串，都没有办法使两个DFA同时到达接受态，则这两个DFA不相交。

具体实现采用递归的DFS。为防止陷入死循环，开设一个`visited`二维数组记录两个DFA访问过的状态。算法流程如下，函数为`intersection(s1,s2,dfa1,dfa2,visited)`。

1. 设置状态$(s1, s2)$为已访问
2. 若$(s1, s2)$均为接受态，返回真
3. 对于每一个输入符号
    - 求两个状态机在$(s1, s2)$下的状态转移，新的状态为$(o1, o2)$
    - 若$(o1, o2)$未访问且`intersection(o1,o2,dfa1,dfa2,visited)`为真，返回真
4. 若所有输入符号都没返回真，则返回假

有了求交的算法就可以通过执行两次交判断语句来得到两个正则表达式的关系，即R与$\bar{S}$求交，S与$\bar{R}$求交。因此还需要有一个辅助函数来对DFA进行求反。由于之前已经创建了`DFA_Node`的类，故求反只需将每个DFA的结点由接受态改为非接受态，非接受态改为接受态。

这里还需注意对于DFA的某些状态，可能没有对所有输入符号都有出边，这在模拟DFA时可能会出现错误。对于这种情况，可以假设有一个冗余结点来接收这些非法输入。如对于a的DFA来说，右侧结点已经无法再接收其他符号，那么为保持每个结点输入符号都存在，可以添加多一个非接受态结点用以作为输出（即黑洞结点，只进不出），如下图所示。



完整代码可见`judge`函数。

三、 实验结果

已在Sicily上验证通过。

附录 A. 完整源码

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <cstring>
#include <stack>
#include <map>
#include <vector>
#include <queue>
#include <set>
#include <utility>
// #include "utils.h"
using namespace std;

class NFA_Node{
public:
    NFA_Node() : id(cnt), accepting(false) {
        cnt++;
    }
    int id;
    static int cnt;
    bool accepting;
    map<char,int> out;
    vector<int> e;
};

class DFA_Node{
public:
    DFA_Node() : id(cnt), start(false), accepting(false), group(1) {
        cnt++;
    }
    int id;
    static int cnt;
    bool start;
    bool accepting;
    map<char,int> out; // be careful of non-existed keys
    int group;
};

void print_nfa(const vector<NFA_Node*>& nfa) {
    for (auto state : nfa) {
        cout << state->id;
        if (state->accepting)
            cout << "(A)";
        cout << ": ";
        for (auto edge : state->e)
            cout << edge << " ";
        for (auto& c : state->out)
            cout << c.first << "(" << c.second << ")";
```

```
48          cout << endl;
49      }
50  }
51
52  void print_dfa(const vector<DFA_Node*>& dfa, const set<char>& input_symbol) {
53      for (auto c : input_symbol)
54          cout << "\t" << c;
55      cout << endl;
56      for (auto node : dfa) {
57          // cout << (char)(node->id+'A');
58          cout << node->id;
59          if (node->start)
60              cout << "S";
61          if (node->accepting)
62              cout << "*";
63          cout << "\t";
64          for (auto c : input_symbol)
65              // cout << (char)(node->out[c]+'A') << "\t";
66              if (node->out.count(c) == 0)
67                  cout << (-1) << "\t";
68              else
69                  cout << node->out.at(c) << "\t";
70          cout << endl;
71      }
72  }
73
74  template<typename T>
75  void free_node(vector<T*> v) {
76      for (auto it = v.begin(); it != v.end(); ++it)
77          delete *it;
78      v.clear();
79  }
80
81  int prec(char c) {
82      switch (c) {
83          case '(':
84          case ')': return 3;
85          case '*':
86          case '?':
87          case '+': return 2;
88          case '.': return 1;
89          case '|': return 0;
90          default: return -1;
91      }
92  }
93
94  /*
95   * R+ is equivalent to RR* (one or more)
96   * Since NFA engine cannot recognize +,
```

```
97  * substitute + using * first.
98  */
99  string substitute_plus(const string str) {
100     if (str.find("+") == string::npos)
101         return str;
102     string res = "";
103     stack<int> out_stk;
104     int len = str.size();
105     // do parentheses matching & make duplication
106     for (int i = 0; i < len; ++i) {
107         if (str[i] == '(') {
108             res += "(";
109             out_stk.push(res.size()-1);
110         } else if (str[i] == ')') {
111             if (i + 1 < len && str[i+1] == '+') {
112                 int front = out_stk.top();
113                 res += ")";
114                 string new_str = res.substr(front, res.size()-front);
115                 res += new_str + "*";
116             } else {
117                 res += ")";
118             }
119             out_stk.pop();
120         } else if (str[i] == '+' && str[i-1] != ')') {
121             char c = str[i-1];
122             res += c;
123             res += "*";
124         } else if (str[i] != '+')
125             res += str[i];
126     }
127     return res;
128 }
129
130 /*
131  * To easier parse the regex and change it
132  * to postfix format, need to insert concatenation
133  * sign first. Here use "." to represent.
134  */
135 string insert_concat(const string str) {
136     string res = "";
137     int i = 0;
138     int len = str.size();
139     for (auto c1 : str) {
140         res += c1;
141         if (i + 1 < len) {
142             char c2 = str[i + 1];
143             if (c1 != '(' && c1 != '|' &&
144                 c2 != '*' && c2 != '?' && c2 != '+' &&
145                 c2 != '|' && c2 != ')')
```

```
146                 res += '.';
147             }
148             i++;
149         }
150         return res;
151     }
152
153     /*
154      * Change the regex to postfix format
155      * Use a stack to maintain operators
156      */
157     string infix2postfix(const string str) {
158         string res = "";
159         stack<char> op_stk;
160         for (auto c : str) {
161             if (isalpha(c)) // operand
162                 res += c;
163             else if (c == '(')
164                 op_stk.push('(');
165             else if (c == ')') {
166                 char top = op_stk.top();
167                 while (top != '(') {
168                     res += top;
169                     op_stk.pop();
170                     top = op_stk.top();
171                 }
172                 op_stk.pop(); // discard '('
173             } else { // operator
174                 while (!op_stk.empty() && op_stk.top() != '('
175                         && prec(c) <= prec(op_stk.top())) {
176                     char top = op_stk.top();
177                     res += top;
178                     op_stk.pop();
179                 }
180                 op_stk.push(c);
181             }
182         }
183         // pop all remaining ops in the stack
184         while (!op_stk.empty()) {
185             char top = op_stk.top();
186             res += top;
187             op_stk.pop();
188         }
189         return res;
190     }
191
192     string get_postfix(const string str) {
193         string res;
194         cout << str << endl;
```

```
195     res = substitute_plus(str);
196     // cout << res << endl;
197     res = insert_concat(res);
198     cout << res << endl;
199     res = infix2postfix(res);
200     // cout << res << endl;
201     return res;
202 }
203 
204 set<char> get_input_symbol(const string str) {
205     set<char> input_symbol(str.begin(),str.end());
206     input_symbol.erase('E');
207     input_symbol.erase('.');
208     input_symbol.erase('*');
209     input_symbol.erase('?');
210     input_symbol.erase('+');
211     input_symbol.erase('|');
212     // print_set<char>(input_symbol);
213     return input_symbol;
214 }
215 
216 /*
217  * 3.7.4 Construction of an NFA from a Regular Expression
218  * McNaughton-Yamada-Thompson algorithm
219  *
220  * Return:
221  * pair<NFA_Node*,NFA_Node*>: start & accepting state of nfa
222  * vector<NFA_Node*>: The built NFA
223  *
224  */
225 pair<int,int> regex2nfa(const string postfix_str,
226                         vector<NFA_Node*>& nfa) {
227     stack<NFA_Node*> nfa_stk;
228     for (auto c :  postfix_str ) {
229         if (isalpha(c)) { // a-z E
230             NFA_Node* begin = new NFA_Node();
231             NFA_Node* end = new NFA_Node();
232             nfa.push_back(begin);
233             nfa.push_back(end);
234             // cout << c << " " << begin->id << " " << end->id << endl;
235             if (c != 'E')
236                 begin->out[c] = end->id;
237             else
238                 begin->e.push_back(end->id);
239             end->accepting = true;
240             nfa_stk.push(begin);
241             nfa_stk.push(end);
242         } else if (c == '|') { // union
243             NFA_Node* begin = new NFA_Node();
```

```
244             NFA_Node* end = new NFA_Node();
245             nfa.push_back(begin);
246             nfa.push_back(end);
247             // N(t)
248             NFA_Node* d = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
249             NFA_Node* c = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
250             // N(s)
251             NFA_Node* b = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
252             NFA_Node* a = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
253             begin->e.push_back(a->id);
254             begin->e.push_back(c->id);
255             b->e.push_back(end->id);
256             d->e.push_back(end->id);
257             b->accepting = false;
258             d->accepting = false;
259             end->accepting = true;
260             nfa_stk.push(begin);
261             nfa_stk.push(end);
262         } else if (c == '.') { // concatenation
263             // N(t)
264             NFA_Node* d = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
265             NFA_Node* c = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
266             // N(s)
267             NFA_Node* b = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
268             NFA_Node* a = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
269             b->e.push_back(c->id);
270             b->accepting = false;
271             d->accepting = true;
272             nfa_stk.push(a);
273             nfa_stk.push(d);
274         } else if (c == '*') { // Kleen closure
275             NFA_Node* begin = new NFA_Node();
276             NFA_Node* end = new NFA_Node();
277             nfa.push_back(begin);
278             nfa.push_back(end);
279             NFA_Node* b = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
280             NFA_Node* a = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
281             b->e.push_back(a->id);
282             begin->e.push_back(end->id);
283             begin->e.push_back(a->id);
284             b->e.push_back(end->id);
285             b->accepting = false;
286             end->accepting = true;
287             nfa_stk.push(begin);
288             nfa_stk.push(end);
289         } else if (c == '?') { // zero or one, E|N(t)
290             NFA_Node* begin = new NFA_Node();
291             NFA_Node* end = new NFA_Node();
292             nfa.push_back(begin);
```

```
293             nfa.push_back(end);
294             NFA_Node* b = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
295             NFA_Node* a = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
296             begin->e.push_back(a->id);
297             begin->e.push_back(end->id);
298             b->e.push_back(end->id);
299             b->accepting = false;
300             end->accepting = true;
301             nfa_stk.push(begin);
302             nfa_stk.push(end);
303         } else if (c == '+') {
304             // preprocess in input string
305         }
306     }
307     // print_nfa(nfa);
308     NFA_Node* end = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
309     NFA_Node* begin = nfa_stk.top(); nfa_stk.pop();
310     pair<int,int> res(begin->id,end->id);
311     return res;
312 }
313
314 // helper function for calculating e-closure of a state
315 void traverse_e(const NFA_Node* s, const vector<NFA_Node*>& nfa, set<int>& res) {
316     for (auto neigh : s->e) {
317         if (res.find(neigh) != res.end())
318             break;
319         res.insert(neigh);
320         traverse_e(nfa[neigh], nfa, res);
321     }
322 }
323
324 // e-closure of a state
325 set<int> epsilon_closure(const NFA_Node* s, const vector<NFA_Node*>& nfa) {
326     set<int> res;
327     res.insert(s->id);
328     traverse_e(s,nfa,res);
329     return res;
330 }
331
332 // e-closure of a set
333 set<int> epsilon_closure(const set<int>& T, const vector<NFA_Node*>& nfa) {
334     set<int> res;
335     for (auto s : T) {
336         set<int> tmp = epsilon_closure(nfa[s],nfa);
337         res.insert(tmp.begin(),tmp.end());
338     }
339     return res;
340 }
341
```

```
342 // helper function for calculating transition
343 void traverse(NFA_Node* s, const vector<NFA_Node*>& nfa,
344               const char a, set<int>& res) {
345     if (s->out.count(a) != 0)
346         res.insert(s->out[a]);
347 }
348
349 // transition of a set
350 set<int> move_to(const set<int>& T, const vector<NFA_Node*>& nfa, const char a) {
351     set<int> res;
352     for (auto s : T)
353         traverse(nfa[s], nfa, a, res);
354     return res;
355 }
356
357 /*
358  * 3.7.1 Conversion of an NFA to a DFA
359  *
360  * Return:
361  * int: start state id of the DFA (only one entrance)
362  * vector<DFA_Node*>: The built DFA
363  *
364  */
365 int nfa2dfa(const pair<int,int>& p,
366             const vector<NFA_Node*>& nfa,
367             const set<char>& input_symbol,
368             vector<DFA_Node*>& dfa) {
369     int start = p.first;
370     int end = p.second;
371     queue<set<int>> q;
372     set<int> start_closure = epsilon_closure(nfa[start], nfa);
373     q.push(start_closure);
374     DFA_Node* node = new DFA_Node();
375     dfa.push_back(node);
376     set<set<int>> marked; // used to record visited states
377     // loop up table
378     // used to record mapping from NFA states to DFA
379     // set of NFA states -> DFA id
380     map<set<int>,int> lut;
381     lut[q.front()] = 0;
382     int start_id;
383     if (start_closure.count(end) != 0) {
384         node->accepting = true;
385         node->group = 0;
386     }
387     if (start_closure.count(start) != 0) {
388         node->start = true;
389         start_id = dfa.size() - 1;
390     }
```

```
391     while (!q.empty()) {
392         set<int> s = q.front();
393         int idx = lut[s];
394         for (auto sym : input_symbol) { // only alphas
395             set<int> move = move_to(s,nfa,sym);
396             if (move.empty())
397                 continue;
398             set<int> U = epsilon_closure(move,nfa);
399             if (marked.find(U) == marked.end()) { // U not in Dstates
400                 q.push(U);
401                 marked.insert(U);
402                 DFA_Node* node = new DFA_Node();
403                 dfa.push_back(node);
404                 lut[U] = dfa.size() - 1;
405                 // record the start & accepting states
406                 if (U.count(end) != 0) {
407                     node->accepting = true;
408                     node->group = 0;
409                 }
410                 if (U.count(start) != 0) {
411                     node->start = true;
412                     start_id = dfa.size() - 1;
413                 }
414             }
415             dfa[idx]->out[sym] = lut[U];
416         }
417         q.pop();
418     }
419     return start_id;
420 }
421
422 /*
423  * 3.9.6 Minimizing the Number of States of a DFA
424  * Hopcroft's algorithm
425  *
426  * Return:
427  * int: start state id
428  * vector<DFA_Node*>: Minimum DFA
429  */
430 int minimize_dfa(vector<DFA_Node*>& dfa,
431                  const set<char>& input_symbol,
432                  vector<DFA_Node*>& min_dfa) {
433     queue<vector<int>> partition;
434     vector<int> s1, s2;
435     set<int> group_id;
436     for (auto state : dfa) {
437         if (state->accepting)
438             s1.push_back(state->id);
439         else
```

```
440             s2.push_back(state->id);
441         group_id.insert(state->group);
442     }
443     int n_group = 2;
444     partition.push(s2);
445     partition.push(s1);
446     map<int,int> state_map;
447     // do partition
448     while (!partition.empty()) {
449         vector<int> p = partition.front();
450         partition.pop();
451         int size = p.size();
452         // only one state, need not to be partitioned
453         if (size < 2)
454             continue;
455         // more than 2 states
456         int origin_group = dfa[p[0]]->group;
457         for (auto c : input_symbol) {
458             map<int,vector<int>> groups; // gid, idx in group
459             for (int i = 0; i < size; ++i) {
460                 if (dfa[p[i]]->out.count(c) != 0) {
461                     int out = dfa[p[i]]->out.at(c);
462                     groups[dfa[out]->group].push_back(p[i]);
463                 } else {
464                     // be careful of this case!
465                     // no available transition in DFA!
466                     groups[-1].push_back(p[i]);
467                 }
468             }
469             // if jump to different groups
470             // can be partitioned
471             int g_size = groups.size();
472             if (g_size >= 2) {
473                 group_id.erase(origin_group);
474                 for (auto& item : groups) {
475                     n_group++;
476                     group_id.insert(n_group);
477                     for (auto idx : item.second)
478                         dfa[idx]->group = n_group;
479                     partition.push(item.second);
480                 }
481                 break;
482             }
483         }
484     }
485     // be careful that start and end may overlap
486     vector<bool> start_flag(n_group,false);
487     vector<bool> end_flag(n_group,false);
488     map<int,int> group_map;
```

```
489     // reallocate group id
490     int cnt = 0;
491     for (auto id : group_id) {
492         group_map[id] = cnt;
493         cnt++;
494     }
495     // remap group id
496     int start_id;
497     int len = dfa.size();
498     for (int i = 0; i < len; ++i) {
499         dfa[i]->group = group_map[dfa[i]->group];
500         int group = dfa[i]->group;
501         state_map[group] = i;
502         if (dfa[i]->start) {
503             start_flag[group] = true;
504             start_id = group;
505         }
506         if (dfa[i]->accepting) {
507             end_flag[group] = true;
508         }
509     }
510     // generate new DFA
511     n_group = group_id.size();
512     for (int i = 0; i < n_group; ++i) {
513         DFA_Node* node = new DFA_Node();
514         for (auto c : input_symbol) {
515             if (dfa[state_map[i]]->out.count(c) != 0) {
516                 int out = dfa[state_map[i]]->out.at(c);
517                 node->out[c] = dfa[out]->group;
518             }
519         }
520         if (start_flag[i])
521             node->start = true;
522         if (end_flag[i])
523             node->accepting = true;
524         min_dfa.push_back(node);
525     }
526     return start_id;
527 }
528
529 int build_dfa(const string postfix_str,
530               const set<char>& input_symbol,
531               vector<DFA_Node*>& min_dfa) {
532     NFA_Node::cnt = 0;
533     vector<NFA_Node*> nfa;
534     pair<int,int> p = regex2nfa(postfix_str,nfa);
535
536     DFA_Node::cnt = 0;
537     vector<DFA_Node*> dfa;
```

```
538     int start_dfa = nfa2dfa(p,nfa,input_symbol,dfa);
539     free_node<NFA_Node>(nfa);
540     // print_dfa(dfa,input_symbol);
541     // min_dfa = dfa;
542     // return start_dfa;
543 
544     DFA_Node::cnt = 0;
545     int start_mindfa = minimize_dfa(dfa,input_symbol,min_dfa);
546     free_node<DFA_Node>(dfa);
547     // print_dfa(min_dfa,input_symbol);
548     return start_mindfa;
549 }
550 
551 bool intersection(const int s1, const int s2,
552                   const vector<DFA_Node*>& dfa1,
553                   const vector<DFA_Node*>& dfa2,
554                   const int len1, const int len2,
555                   const set<char>& input_symbol,
556                   vector<vector<bool>>& visited) {
557     visited[s1][s2] = true;
558     bool acc1 = (s1 == len1) ? false : dfa1[s1]->accepting;
559     bool acc2 = (s2 == len2) ? true : dfa2[s2]->accepting;
560     if (acc1 && acc2)
561         return true;
562     for (auto c : input_symbol) {
563         // be careful of unavailable states of DFA
564         int o1 = (s1 == len1 || dfa1[s1]->out.count(c) == 0) ?
565                  len1 : dfa1[s1]->out.at(c);
566         int o2 = (s2 == len2 || dfa2[s2]->out.count(c) == 0) ?
567                  len2 : dfa2[s2]->out.at(c);
568         if (!visited[o1][o2])
569             if (intersection(o1,o2,dfa1,dfa2,len1,len2,input_symbol,visited))
570                 return true;
571     }
572     return false;
573 }
574 
575 void complement(vector<DFA_Node*>& dfa) {
576     for (auto node : dfa) {
577         node->accepting = !node->accepting;
578     }
579 }
580 
581 int judge(vector<DFA_Node*>& dfa1,
582           vector<DFA_Node*>& dfa2,
583           const set<char>& symbol1,
584           const set<char>& symbol2,
585           const int s1, const int s2) {
586     // add a dummy state
```

```
587     int len1 = dfa1.size();
588     int len2 = dfa2.size();
589 
590     vector<vector<bool>> visited;
591     for (int i = 0; i < len1+1; ++i) {
592         vector<bool> tmp(len2+1,false);
593         visited.push_back(tmp);
594     }
595     complement(dfa2);
596     bool a_in_cb = intersection(s1,s2,dfa1,dfa2,len1,len2,symbol1,visited);
597 
598     visited.clear();
599     for (int i = 0; i < len2+1; ++i) {
600         vector<bool> tmp(len1+1,false);
601         visited.push_back(tmp);
602     }
603     complement(dfa2);
604     complement(dfa1);
605     bool b_in_ca = intersection(s2,s1,dfa2,dfa1,len2,len1,symbol2,visited);
606 
607     if (!a_in_cb && !b_in_ca)
608         return 0; // dfa1 = dfa2
609     else if (!a_in_cb && b_in_ca)
610         return 1; // dfa1 in dfa2
611     else if (a_in_cb && !b_in_ca)
612         return 2; // dfa2 in dfa1
613     else
614         return 3; // none
615 }
616 
617 int NFA_Node::cnt = 0;
618 int DFA_Node::cnt = 0;
619 
620 #ifdef NO_STDIN
621 const vector<vector<string>> input_str = {
622     {"((E|a)b*)*", "(a|b)*"}, // =
623     {"b*a*b?a*", "b*a*ba*|b*a*"}, // =
624     {"b*a*b?a*", "(b*|a*)(b|E)a*"}, // >
625     {"(c|d)*c(c|d)(c|d)", "(c|d)*d(c|d)(c|d)"}, // !
626     {"x+y+z+", "x*y*z*"}, // <
627     {"a", "a+"}, // <
628     {"(a|b)*abb", "(a|b)*abbb*"}, // <
629     {"(a|b)*c+(d|e)?", "(a|b)*cd"}, // >
630     {"((x|y)+)+","(x|y)+(y+b*)*"} // <
631 };
632 #endif
633 
634 int main() {
635     int n_case;
```

```
#ifdef NO_STDIN
    n_case = input_str.size();
#else
    cin >> n_case;
#endif
    for (int case_id = 0; case_id < n_case; ++case_id) {
        string str1, str2;
#ifdef NO_STDIN
        str1 = input_str[case_id][0];
        str2 = input_str[case_id][1];
#else
        cin >> str1 >> str2;
#endif
        string postfix_str1 = get_postfix(str1);
        string postfix_str2 = get_postfix(str2);
        set<char> symbol1 = get_input_symbol(str1);
        set<char> symbol2 = get_input_symbol(str2);
        vector<DFA_Node*> dfa1;
        int s1 = build_dfa(postfix_str1 ,symbol1,dfa1);
        vector<DFA_Node*> dfa2;
        int s2 = build_dfa(postfix_str2 ,symbol2,dfa2);
        int res = judge(dfa1,dfa2,symbol1,symbol2,s1,s2);
        if (res == 0)
            cout << "=" << endl;
        else if (res == 1)
            cout << "<" << endl;
        else if (res == 2)
            cout << ">" << endl;
        else
            cout << "!" << endl;
        free_node<DFA_Node>(dfa1);
        free_node<DFA_Node>(dfa2);
    }
    return 0;
}
```

```
#ifndef UTILS_H
#define UTILS_H

#include <set>
#include <vector>
using namespace std;

template<typename T>
void print_set(const set<T>& s, bool newline=true) {
    cout << "Set: ";
    for (auto x : s)
        cout << x << " ";
    if (newline)
```

```
        cout << endl;
}

template<typename T>
void print_vector(const vector<T> v) {
    cout << "Vector: ";
    for (auto x : v)
        cout << x << " ";
    cout << endl;
}

#endif // UTILS_H
```

```
ifdef NO_STDIN
FLAGS = -DNO_STDIN
endif

all: regex

regex: main.cpp
    g++ $< -g $(FLAGS) -o $@

.PHONY: clean
clean:
    rm regex
```

附录 B. 测试数据

regex1	regex2	output
((E|a)b*)*	(a|b)*	=
b*a*b?a*	b*a*ba*|b*a*	=
b*a*b?a*	(b*|a*)(b|E)a*	>
(c|d)*c(c|d)(c|d)	(c|d)*d(c|d)(c|d)	!
x+y+z+	x*y*z*	<
a	a+	<
(a|b)*abb	(a|b)*abbb*	<
(a|b)*c+(d|e)?	(a|b)*cd	>
((x|y)+)+	(x|y)+(y+b*)*	<