算法题

1.4 计算下述算法所执行的加法次数.

算法

输入：$n=2^t$，t 为正整数

输出：k

1. $k \leftarrow 0$
2. while $n \geqslant 1$ do
3.   for $j \leftarrow 1$ to n do
4. $k \leftarrow k+1$
5. $n \leftarrow n/2$
6. return k

1.16 在表 1.1 中填入 true 或 false.

表 1.1 函数 f 与 g

序号 \ 函数	$f(n)$	$g(n)$	$f(n)=O(g(n))$	$f(n)=\Omega(g(n))$	$f(n)=\Theta(g(n))$
1	$2n^3+3n$	$100n^2+2n+100$			
2	$50n+\log n$	$10n+\log\log n$			
3	$50n\log n$	$10n\log\log n$			
4	$\log n$	$\log^2 n$			
5	$n!$	5^n			

1.18 对以下函数，按照它们的阶从高到低排列；如果 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的阶相等，表示为 $f(n)=\Theta(g(n))$.

$$2^{\sqrt{2\log n}},\quad n\log n,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad n2^{n},\quad (\log n)^{\log n},\quad 2^{2n},\quad 2^{\log\sqrt{n}}$$

基础知识

第 1

$$n^{3},\quad \log(n!),\quad \log n,\quad \log\log n,\quad n^{\log\log n},\quad n!,\quad n,\quad \log 10^{n}$$

1.21 设原问题的规模是 n，从下述三个算法中选择一个最坏情况下时间复杂度最低的算法，简要说明理由.

算法 A：将原问题划分规模减半的 5 个子问题，递归求解每个子问题，然后在线性时间将子问题的解合并得到原问题的解.

算法 B：先递归求解 2 个规模为 $n-1$ 的子问题，然后在常量时间内将子问题的解合并.

算法 C：将原问题划分规模为 $n/3$ 的 9 个子问题，递归求解每个子问题，然后在 $O(n^3)$ 时间将子问题的解合并得到原问题的解.

2.2 设 A 是由 n 个非 0 实数构成的数组，设计一个算法重新排列数组的数，使得负数都排在正数的前面. 要求算法使用 $O(n)$ 的时间和 $O(1)$ 的空间.

2.3 双 Hanoi 塔问题是 Hanoi 塔问题的一种推广，与 Hanoi 塔的不同点在于：$2n$ 个圆盘，分成大小不同的 n 对，每对圆盘完全相同. 初始，这些圆盘按照从大到小的次序从下到上放在 A 柱上，最终要把它们全部移到 C 柱，移动的规则与 Hanoi 塔相同.

(1) 设计一个移动的算法并给出伪码描述.

(2) 计算你的算法所需要的移动次数.

2.4 给定含有 n 个不同的数的数组 $L=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$. 如果 L 中存在 x_i 使得 $x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i>x_{i+1}>\cdots>x_n$，则称 L 是单峰的，并称 x_i 是 L 的"峰顶". 假设 L 是单峰的，设计一个算法找到 L 的峰顶.

2.20 有 n 个人，其中某些人是诚实的，其他人可能会说谎. 现在需要进行一项调查，该调查

由一系列测试构成. 每次测试如下进行：选两个人，然后提问：对方是否诚实？每个人的回答只能是"是"或者"否". 假定在这些人中，所有诚实的人回答都是正确的，而其他人的回答则不能肯定是否正确. 如果诚实的人数 $>n/2$，试设计一个调查算法，以最小的测试次数从其中找出一个诚实的人.

2.28 在 Internet 上的搜索引擎经常需要对信息进行比较，比如可以通过某个人对一些事物的排名来估计他对各种不同信息的兴趣，从而实现个性化的服务. 对于不同的排名结果可以用逆序来评价它们之间的差异. 考虑 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$，如果其中存在 i_j，i_k，使得 $j<k$ 但是 $i_j>i_k$，那么就称 (i_j,i_k) 是这个排列的一个逆序. 一个排列含

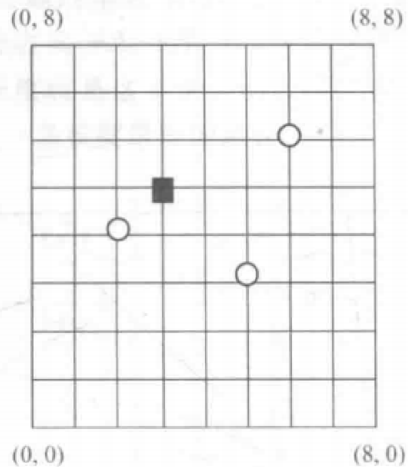

图 2.8 街道图

有逆序的个数称为这个排列的逆序数.例如排列 2 6 3 4 5 1 含有 8 个逆序(2,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,1),(3,1),(4,1),(5,1),它的逆序数就是 8. 显然,由 1, 2,…,n 构成的所有 $n!$ 个排列中,最小的逆序数是 0,对应的排列就是 12…n;最大的逆序数是 $n(n-1)/2$,对应的排列就是 $n(n-1)\cdots21$. 逆序数越大的排列与原始排列的差异度就越大.

利用二分归并排序算法设计一个计数给定排列逆序的分治算法,并对算法进行时间复杂度的分析.

3.1 用动态规划算法求解下面的组合优化问题:

$$\max g_1(x_1)+g_2(x_2)+g_3(x_3)$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 10$$

$$x_1,x_2,x_3 \text{ 为非负整数}$$

其中函数 $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$的值给在表 3.9 中.

表 3.9 函数值

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0	2	5	8	2	7	16	17
1	4	10	12	3	11	20	22

3.2 设 $A=<x_1,x_2,\cdots,x_n>$ 是 n 个不等的整数构成的序列，A 的一个单调递增子序列是序列 $<x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}>$ 使得 $i_1<i_2<\cdots<i_k$，且 $x_{i_1}<x_{i_2}<\cdots<x_{i_k}$. 子序列 $<x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}>$ 的长度是含有的整数个数 k. 例如 $A=<1,5,3,8,10,6,4,9>$，它的长为 4 的递增子序列是：$<1,5,8,10>$，$<1,5,8,9>$，…. 设计一个算法求 A 的一个最长的单调递增子序列，分析算法的时间复杂度. 设算法的输入实例是 $A=<2,8,4,-4,5,9,11>$，给出算法的计算过程和最后的解.

3.16 设 P 是一台 Internet 上的 Web 服务器. $T=\{1,2,\cdots,n\}$ 是 n 个下载请求的集合，$\forall i\in T$，$a_i\in\mathbf{Z}^+$ 表示下载请求 i 所申请的带宽. 已知服务器的最大带宽是正整数 K. 我们的目标是使带宽得到最大限度的利用，即确定 T 的一个子集 S，使得 $\sum_{i\in S}a_i\leqslant K$，且 $K-\sum_{i\in S}a_i$ 的值达到最小. 设计一个算法求解服务器下载问题，用文字说明算法的主要设计思想和步骤，给出最坏情况下的时间复杂度.

3.17 有正实数构成的数字三角形排列形式如图 3.15 所示. 第一行的数为 a_{11}；第二行的数从左到右依次为 a_{21},a_{22}；…第 n 行的数为 $a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}$. 从 a_{11} 开始，每一行的数 a_{ij} 只有两条边可以分别通向下一行的两个数 $a_{(i+1)j}$ 和 $a_{(i+1)(j+1)}$. 请设计一个算法，计算出从 a_{11} 通到 $a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}$ 中某个数的一条路径，并且使得该路径上的数之和达到最小.

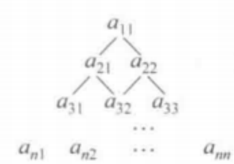

图 3.15 数字三角形

4.12 设字符集 S，其中 8 个字符 A,B,C,D,E,F,G,H 的频率是 $f_1,f_2,\cdots,f_8$，且 $100\times f_i$ 是第 i 个 Fibannaci 数的值，$i=1,2,\cdots,8$.

(1) 给出这 8 个字符的 Huffman 树和编码.

(2) 如果有 n 个字符，其频率恰好对应前 n 个 Fibanacci 数，那么对应的 Huffman 树是什么结构，证明你的结论.

4.19 有 n 个文件存在磁带上，每个文件占用连续的空间. 已知第 i 个文件需要的存储空间为 s_i，被检索的概率是 f_i，$i=1,2,\cdots,n$，且 $f_1+f_2+\cdots+f_n=1$. 检索每个文件需要从磁带的开始位置进行操作，比如文件 i 需要空间 $s_i=310$，存储在磁带的 121～430 单元，那么检索该文件需要的时间为 430. 问如何排列 n 个文件而使得平均检索时间最少？设计算法求解这个问题，说明算法的设计思想，证明算法的正确性，给出算法最坏情况下的时间复杂度.

5.6 子集和问题. 设 n 个不同的正数构成集合 S,求出使得和为某数 M 的 S 的所有子集.

5.7 分派问题. 给 n 个人分配 n 件工作,给第 i 个人分配第 j 件工作的成本是 $C(i,j)$. 试求成本最小的工作分配方案.

6.4 用图解法解下列线性规划

(1) $\max\ x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &x_1\leqslant 5\\ &x_2\leqslant 3\\ &x_1+3x_2\leqslant 11\\ &x_1,x_2\geqslant 0 \end{aligned}$$

(2) $\min\ x_1-x_2$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 2x_1+3x_2&\leqslant 14\\ -x_1+x_2&\leqslant 3\\ x_1&\leqslant 4\\ x_1,x_2&\geqslant 0 \end{aligned}$$

(3) $\min\ 2x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1+x_2&\geqslant 1\\ x_2&\leqslant 2\\ x_1,x_2&\geqslant 0 \end{aligned}$$

(4) $\min\ 2x_1-x_2$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 2x_1+x_2&\geqslant 2\\ x_1-x_2&\leqslant -3\\ x_1,x_2&\geqslant 0 \end{aligned}$$

(5) $\max\ 3x_1-2x_2$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} x_1-x_2&\geqslant -1\\ 3x_1+x_2&\leqslant 9\\ x_1+2x_2&\geqslant 9\\ x_1,x_2&\geqslant 0 \end{aligned}$$

6.5 写出下述线性规划的标准形

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1-2x_2+x_3 \\
\text{s. t. }\ & x_1+2x_2-x_3\leqslant 1 \\
& 4x_1-2x_3\geqslant 5 \\
& x_2-5x_3\leqslant -4 \\
& x_1-3x_2+2x_3=-10 \\
& x_1\geqslant 0,\quad x_2\ \text{任意},\quad x_3\geqslant 0
\end{aligned}
$$

6.6 设线性规划

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1+x_2 \\
\text{s. t. }\ & -x_1+2x_2\leqslant 4 \\
& x_1\leqslant 5 \\
& x_1,x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

(1) 画出它的可行域,用图解法求最优解.

(2) 写出它的标准形,列出所有的基,指出哪些是可行基. 通过列出所有的可行解及其目标函数值找到最优解. 指出每个可行解对应的可行域的顶点.