Sessió pràctica: quadratures simples

Objectius

- Ser capaç d'aproximar integrals mitjançant quadratures simples: Gauss-Legendre i Newton-Cotes obertes i tancades.
- Ser capaç de calcular els pesos d'integració per les quadratures de Newton-Cotes amb punts equiespaiats.
- Comprovar numèricament que la convergència de les quadratures de Newton-Cotes simples en augmentar el número de punts no està garantida.

Cas 1

Considerem la integral

$$I = \int_a^b \left(\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x-4)^2} \right) \mathrm{d}x.$$

En una primera aproximació, calcularem la integral fent servir quadratures de Newton-Cotes tancades amb punts equiespaiats

- Escriu una funció de Matlab que, donat un vector de punts $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots x_n]$ i els límits d'integració a i b, calculi els pesos corresponents per obtenir una quadratura d'ordre $\geq n$. Recorda que aquests pesos es poden calcular resolent el sistema lineal d'equacions que s'obté d'imposar que la quadratura sigui d'ordre n, és a dir, que integri exactament polinomis de grau menor o igual que n.
- Considera l'interval $a = 0$, $b = 5$ i aproxima la integral mitjançant la quadratura de Newton-Cotes tancada amb $n = 4$ (5 punts).
  El valor exacte de la integral és

  $$I = \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\Big(\mathrm{erf}(b-4) - \mathrm{erf}(a-4) \Big).$$

  Fes servir aquest resultat per calcular l'error de l'aproximació numèrica de la integral.
- Dibuixa una gràfica de convergència en què es vegi l'evolució del logaritme de l'error en funció del logaritme del número de punts, per $n = 1, 2, \dots 14$.

Per a intentar millorar l'aproximació, farem servir quadratures de Gauss-Legendre.
La funció de Matlab `QuadraturaGauss.m` proporciona un vector amb els punts d'integració `z` i un vector `w` amb els pesos de la quadratura de Gauss-Legendre, que permeten aproximar integrals en l'interval $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(z)\mathrm{d}z \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(z_i)$$

- Escriu el canvi de variables que permet transformar una integral definida en un interval $[a, b]$ en una definida en l'interval $[-1, 1]$, on es pot fer servir la quadratura de Gauss-Legendre.
- Fent servir aquest canvi de variables i els punts i pesos d'integració proporcionats per la funció `QuadraturaGauss.m`, calcula la integral I en l'interval $[0, 5]$ fent servir $n = 4$ (5 punts d'integració). S'obté un resultat millor que amb la quadratura de Newton-Cotes?
- Dibuixa una gràfica de convergència en què es vegi l'evolució del logaritme de l'error en funció del logaritme del número de punts, per $n = 0, 1, \ldots 14$.

Cas 2

Considerem ara la integral

$$I = \int_{-4}^{4} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

Tenint en compte que el valor d'aquesta ingral és $I = \operatorname{atan}(4) - \operatorname{atan}(-4) = 2 \operatorname{atan}(4)$, dibuixa la gràfica de convergència per les quadratures de Gauss-Legendre i de Newton-Cotes tancades.

- S'observa el mateix comportament que en el cas anterior?
- Té sentit considerar quadratures amb més punts per millorar l'aproximació? Per què?

Cas 3

Finalment, considerem la integral

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{x}{\sin(x)} \mathrm{d}x = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots\right).$$

- Podem fer servir quadratures de Newton-Cotes tancades? I quadratures de Gauss-Legendre?
- Aproxima la integral mitjançant una quadratura de Newton-Cotes oberta amb punts equiespaiats.
- Dibuixa la gràfica de convergència per les quadratures de Newton-Cotes obertes i per les quadratures de Gauss-Legendre i compara el seu comportament.
  El valor exacte de la integral el pots obtenir o bé avaluant el sumatori amb prou precisió o bé emprant la funció de matlab `quad`, que permet calcular integrals definides.