1. Es vol trobar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ solució del sistema d'equacions no lineals, de $n+1$ equacions i incògnites, següent:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= f(\alpha)\mathbf{b} \\ ||\mathbf{x}||_2 &= 1 \end{aligned}$$

La matriu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és pentadiagonal, simètrica i definida positiva, $f(\alpha)$ és una funció real no lineal tal que $\forall x\, f(x) \geq 0$, $\mathbf{b}$ és un vector no nul de dimensió n i $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ és la norma euclidiana.

a) Plantejar la resolució del problema amb el mètode de Newton. Comentar els diversos aspectes d'interès sobre el sistema lineal a resoldre a cada iteració: obtenció, estructura, esquema d'emmagatzematge i mètode de resolució.

b) Plantejar la resolució del problema amb un mètode que requereixi exclusivament *1)* resoldre un sistema lineal d'equacions, *2)* trobar el zero d'una funció escalar i *3)* fer un producte de real per vector. Comentar els diversos aspects d'interès sobre el sistema lineal a resoldre: obtenció, estructura, esquema d'emmagatzematge i mètode de resolució.

c) Plantejar el mètode de Newton per a la resolució del problema de zeros de funcions obtingut a l'apartat anterior. Discutir el número de solucions i l'ordre de convergència del mètode per als casos $f(x) = \exp(x)$ i $f(x) = x^2 + 1$.

---

2. L'objectiu d'aquest problema és desenvolupar una metodologia per a calcular arrels reals o *complexes* de polinomis, treballant amb variable real. La idea principal és, donat un polinomi $p \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$, trobar reals $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $x^2 + ax + b$ sigui un divisor de p. Així, el problema es redueix a trobar les dues arrels de $x^2 + ax + b$ i del polinomi quocient, de grau $n-2$.

Amb aquest objectiu, considerem $a, b \in \mathbb{R}$ qualssevol, i expressem la divisió de p com

$$p(x) = (x^2 + ax + b)q(x) + A(a,b)x + B(a,b)$$

amb residu donat pels coeficients $A(a,b), B(a,b) \in \mathbb{R}$. Els valors de a i b que busquem són els que proporcionen un residu nul de la divisió, és a dir, els que verifiquen el sistema de dues equacions i dues incògnites

$$A(a,b) = 0, \quad B(a,b) = 0.$$

Aquest sistema no lineal de 2 equacions i 2 incògnites es pot resoldre amb un mètode numèric.

a) Proposar raonadament un mètode per a la resolució del sistema no lineal.

b) Implementar una funció que, donat un vector $\mathbf{p} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ i dos reals, a i b, calculi i retorni els coeficients del residu de la divisió de $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ per $x^2 + ax + b$.

Es considera ara el polinomi

$$p(x) = 8x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 6x + 1$$

c) Implementar una funció que, donat un vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$, prengui $a = z_1$ i $b = z_2$, calculi el residu de la divisió de $p(\mathbf{x})$ per $(x^2 + ax + b)$ i retorni un vector $\mathbf{r} = (A(a,b), B(a,b))^T$.

d) Trobar una solució del sistema no lineal i, posteriorment, totes les arrels del polinomi.

---

3. L'objectiu d'aquest problema és determinar la geometria d'un cable suspès deformat sota l'efecte del seu propi pes, veure la Figura 1. Es considera un cable de longitud

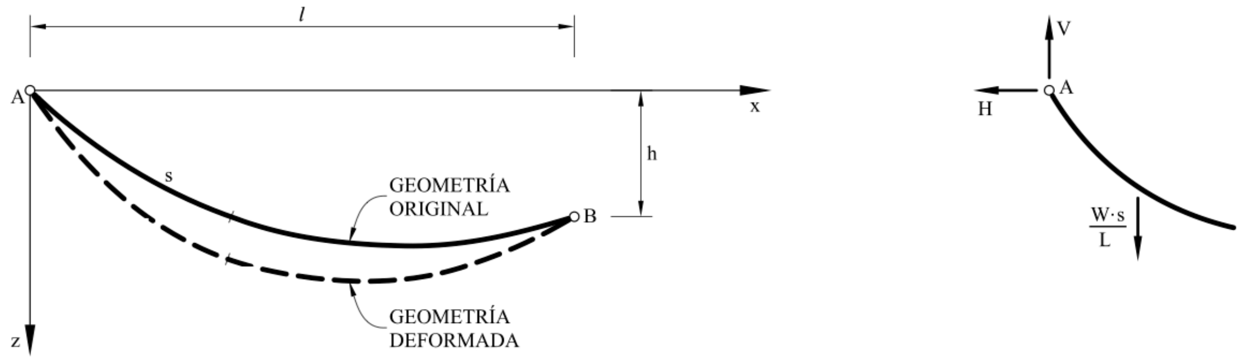

Figura 1: Representació gràfica del cable

inicial L suspès entre dos recolzaments fixos A i B situats a diferent nivel, a distància horitzontal l i diferència de nivell h. Considerant un model d'elasticitat lineal i imposant condicions d'equilibri i condicions de contorn, es pot arribar a trobar una parametrització del cable deformat de la forma

$$x(s) = \frac{Hs}{EA_T} + \frac{HL}{W}\left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{V}{H}\right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{V}{H} - \frac{Ws}{HL}\right)\right] \tag{1}$$

$$\begin{aligned} z(s) = {} & \frac{Ws}{EA_T}\left(\frac{V}{W} - \frac{s}{2L}\right) \\ & + \frac{HL}{W}\left\{\left[1 + \left(\frac{V}{H}\right)^2\right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V}{H} - \frac{Ws}{HL}\right)^2\right]^{1/2}\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

on E és el mòdul de Young (mòdul d'elasticitat), A_T és l'àrea de la secció transversal del cable, W és el pes total. Els valors H i V són les reaccions horitzontal i vertical al punt A, que es determinen amb les equacions

$$l = f(H, V) \tag{3}$$

$$h = g(H, V) \tag{4}$$

amb

$$
\begin{aligned}
f(H,V) &= \frac{HL}{EA_T} + \frac{HL}{W}\left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{V}{H}\right) - \operatorname{arsinh}\left(\frac{V-W}{H}\right)\right] \\
g(H,V) &= \frac{WL}{EA_T}\left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2}\right) + \frac{HL}{W}\left\{\left[1+\left(\frac{V}{H}\right)^2\right]^{1/2} - \left[1+\left(\frac{V-W}{H}\right)^2\right]^{1/2}\right\}
\end{aligned}
$$

Es proposa ara representar la geometria deformada d'un cable amb distàncies entre els recolzaments $l = 20$ m i $h = 8.5$ m, longitud inicial $L = 28$ m, secció transversal $A_T = 2\ 10^{-4}$ m^2, mòdul de Young $E = 1.5\ 10^7$ kN/m^2 i pes propi $W = 0.85$ kN.

Una idea molt senzilla per triar una aproximació inicial consisteix en suposar que el cable és rígid (inextensible, amb $E = \infty$) i que els recolzaments estan situats al mateix nivell ($h = 0$), corresponent a la versió clàssica de l'anomenat problema de la catenària. En aquest cas, les reaccions a A són

$$
H^0 \simeq \frac{W}{2\sqrt{6}}\frac{l}{L}\sqrt{\frac{l}{L-l}}, \quad V^0 = \frac{W}{2}. \tag{5}
$$

a) Resoldre el sistema no lineal, amb aproximació inicial $\mathbf{x}^0 = (H^0, V^0)^T$ segons (5), mitjançant

- el mètode de Newton-Raphson (amb derivació analítica o numèrica),
- el mètode de Broyden amb aproximació inicial de la jacobiana $\mathbf{B}^0 = \mathbf{J}(\mathbf{x}^0)$,
- el mètode de Broyden amb amb aproximació inicial de la jacobiana igual a la identitat.

b) Representar gràficament la geometria del cable deformat per a les solucions obtingudes. És raonable el resultat?

c) Representar gràficament el logaritme de l'error en funció del número d'iteracions. Tenen els mètodes el comportament esperat?

d) Repetir els apartats anteriors amb aproximacions inicials $\mathbf{x}^0 = (H^0, V^0)^T = (0.3, 0.7)^T$ i $\mathbf{x}^0 = (H^0, V^0)^T = (0.5, 0.7)^T$.