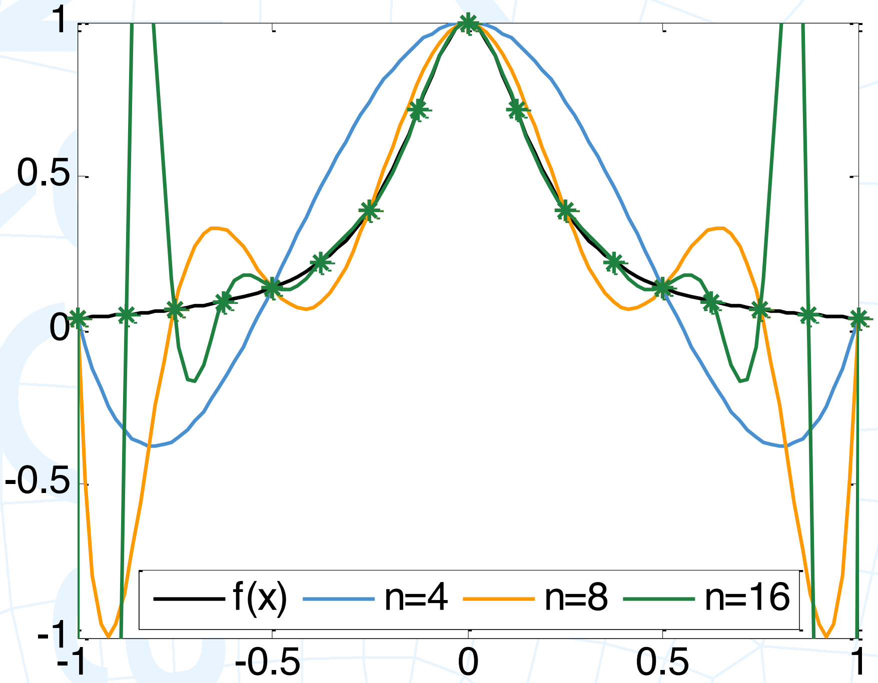
Interpolación seccional: SPLINES

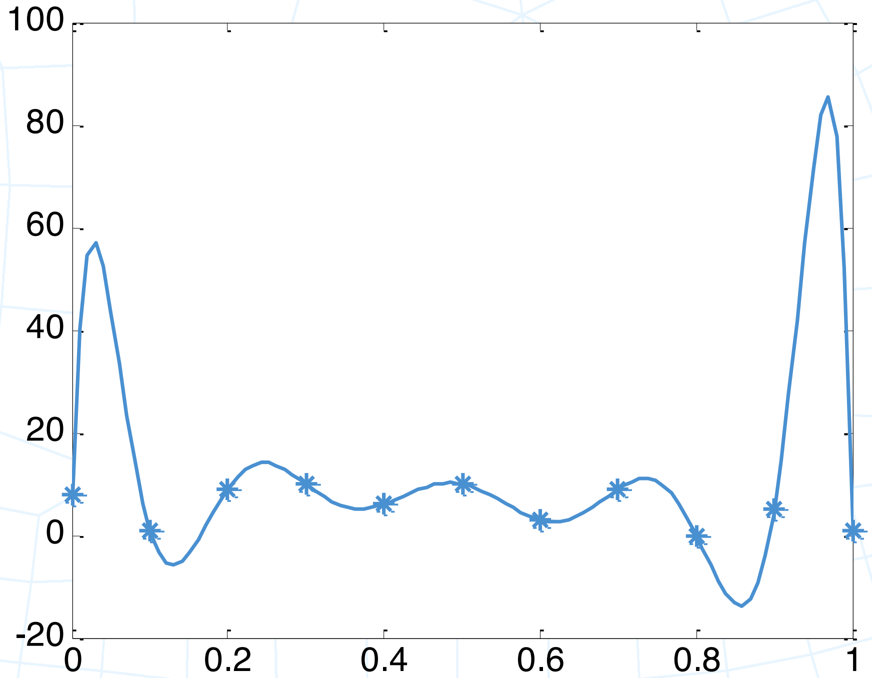
Laboratori de Càlcul Numèric (LaCàN)
Departament de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya (Spain)
http://www-lacan.upc.es

Motivación: problemas en aproximación funcional

1. Interpolación polinómica pura ➡ oscilaciones para número elevado de datos

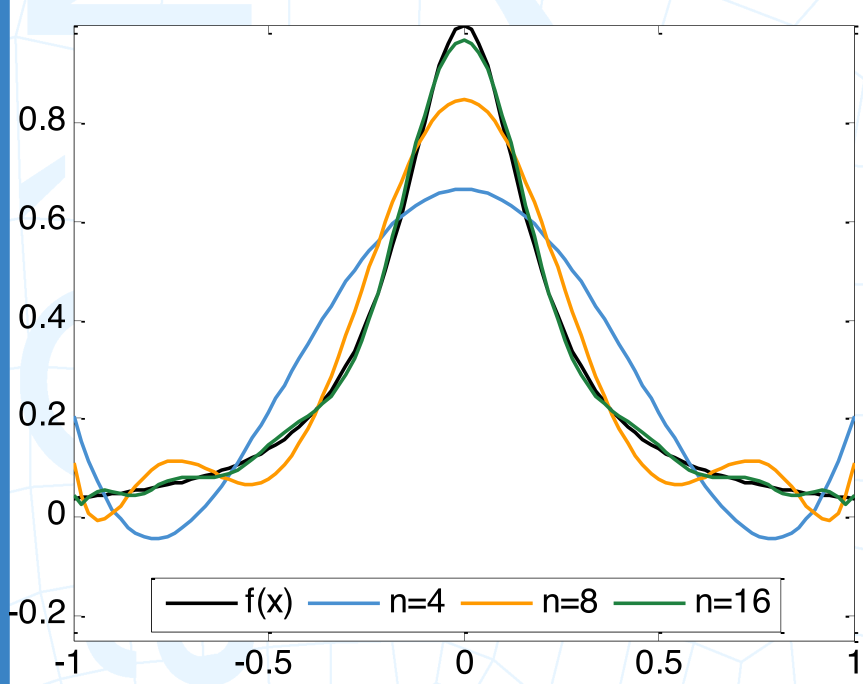


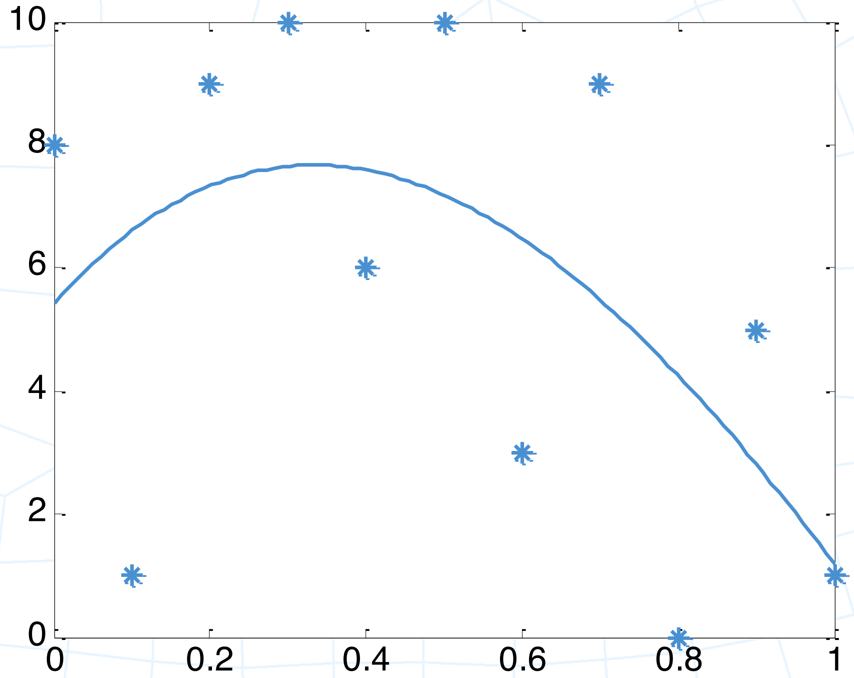
$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$



Motivación: problemas en aproximación funcional

2. Mínimos cuadrados ➡ La aproximación no pasa por los puntos

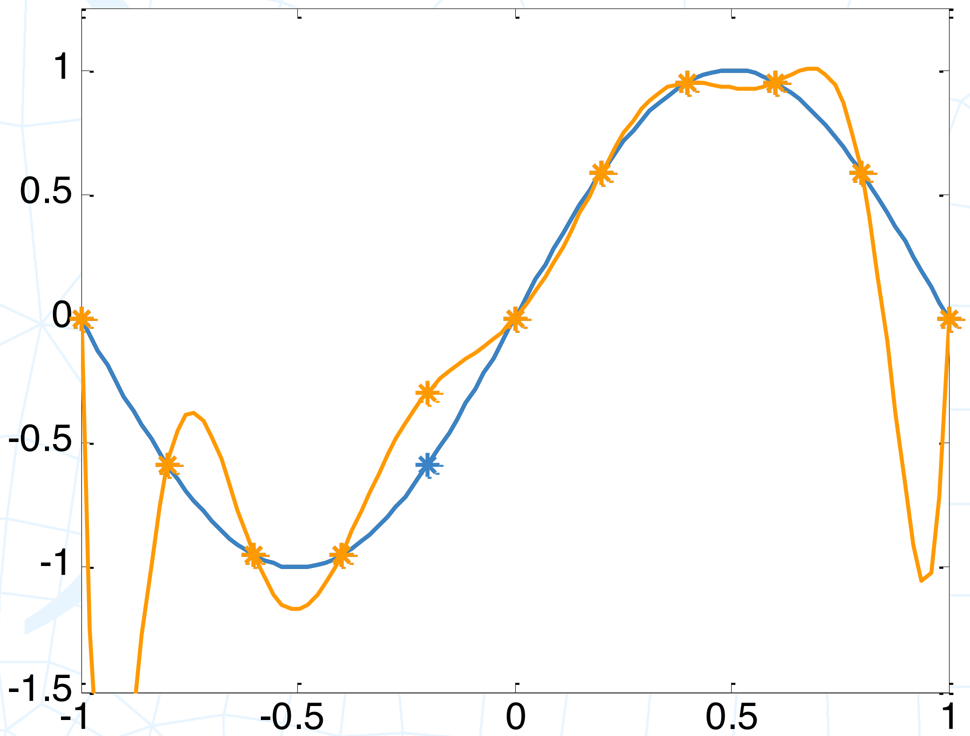




$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Motivación: problemas en aproximación funcional

3. Modificaciones locales afectan globalmente



Solución

Cambiar el tipo de aproximación

Cualidades deseables de la aproximación (dibujo, resolución EDPs…):

1. Control sobre la suavidad del aproximante
2. Posibilidad de interpolar
3. Desarrollo en función de una base
4. Interpolante local

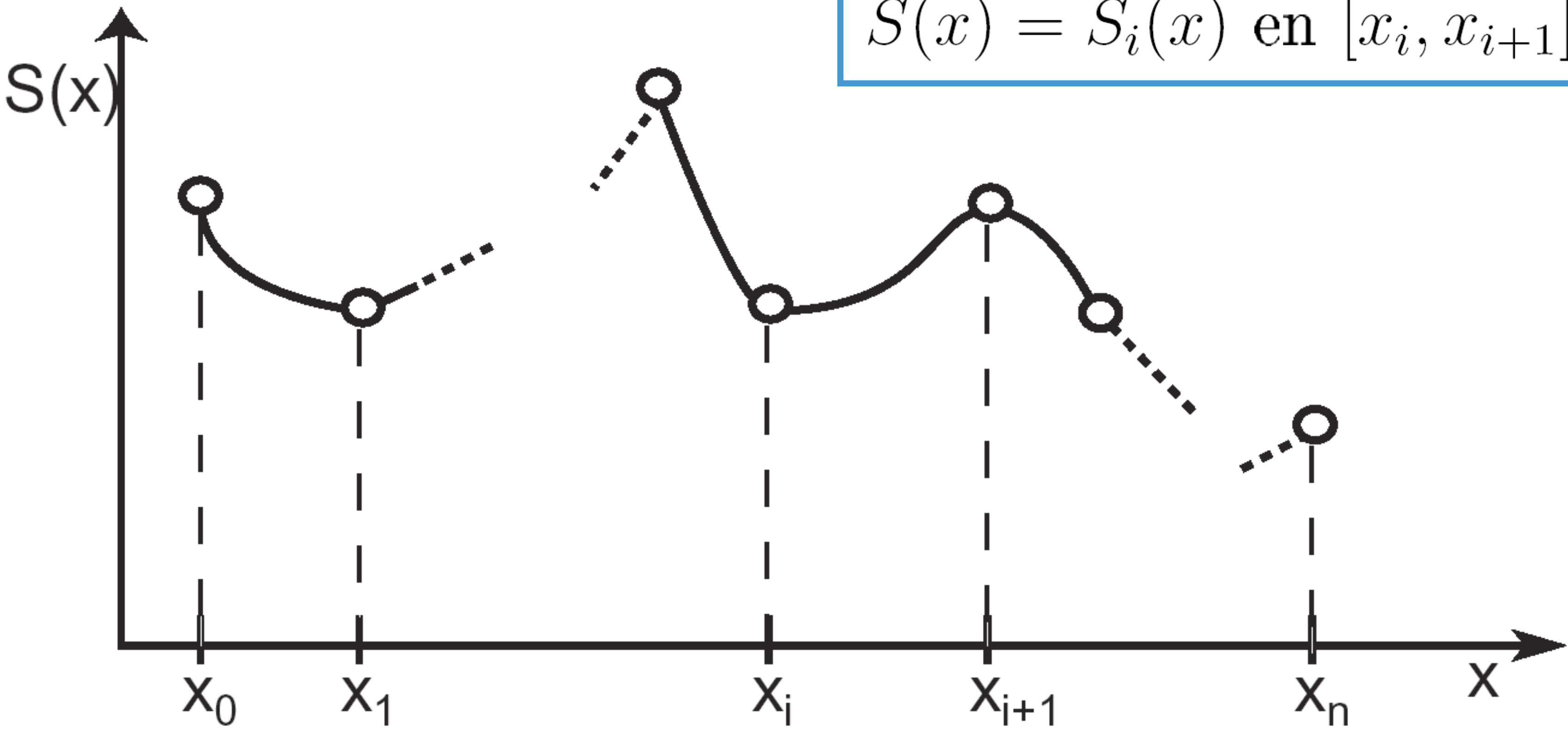
↓

Aproximación polinómica a trozos (spline)

Definición

- **SPLINE:** función definida a trozos, generalmente polinómica en cada tramo

$$\boxed{S(x) = S_i(x) \text{ en } [x_i, x_{i+1}]}$$



Fijados:

1. puntos base $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
2. grado de polinomio *m* en cada subintervalo y
3. regularidad (continuidad en los puntos base interiores de S(x) y las *r* primeras derivadas)

Se define el espacio de funciones spline

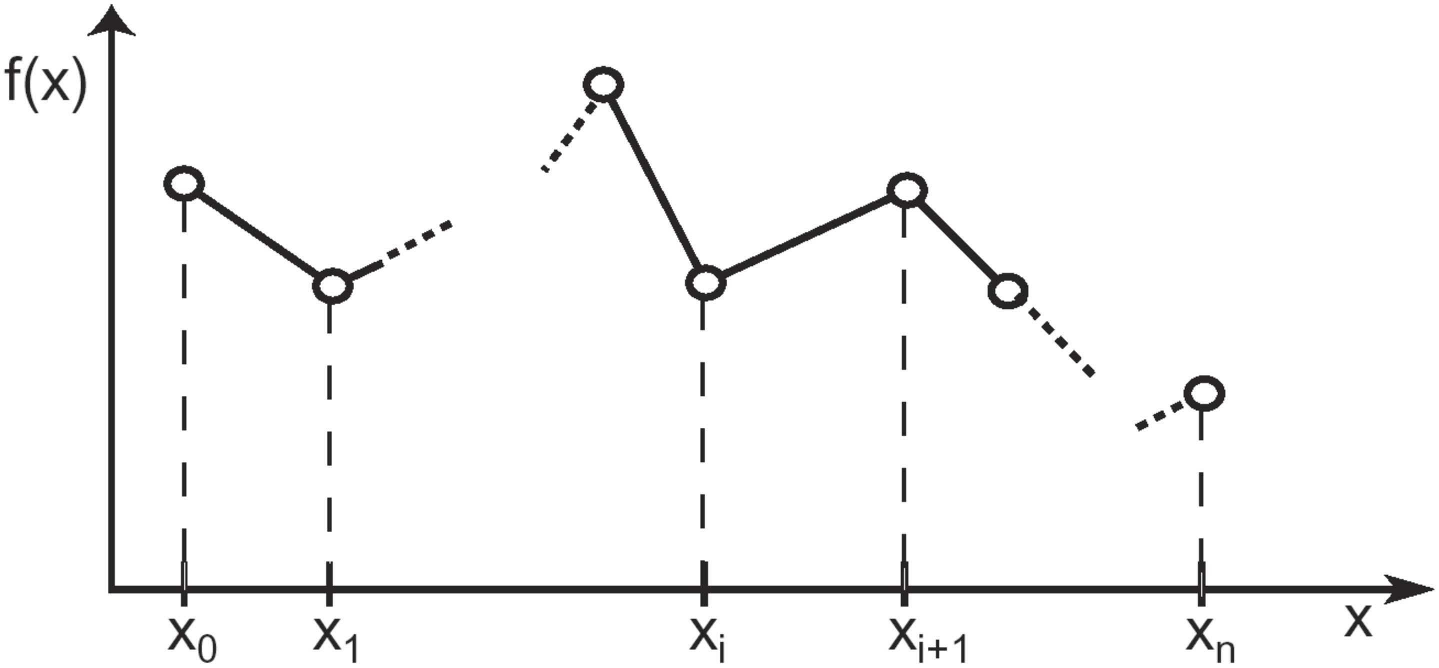
$$\boxed{\mathrm{E}_S = \{S(x) \in \mathcal{C}^r \;\mid\; S(x) = S_i(x) \text{ en } [x_i, x_{i+1}] \text{ con } S_i \in \mathcal{P}_m\}}$$

¿Es un espacio vectorial?

- ¿Cuál es la dimesión del espacio E_S?
- ¿Cómo se calcula una función spline en este espacio?
- ¿Cómo se calcula una base? ¿Tienen los coeficientes en esa base algún significado?

Splines lineales C0

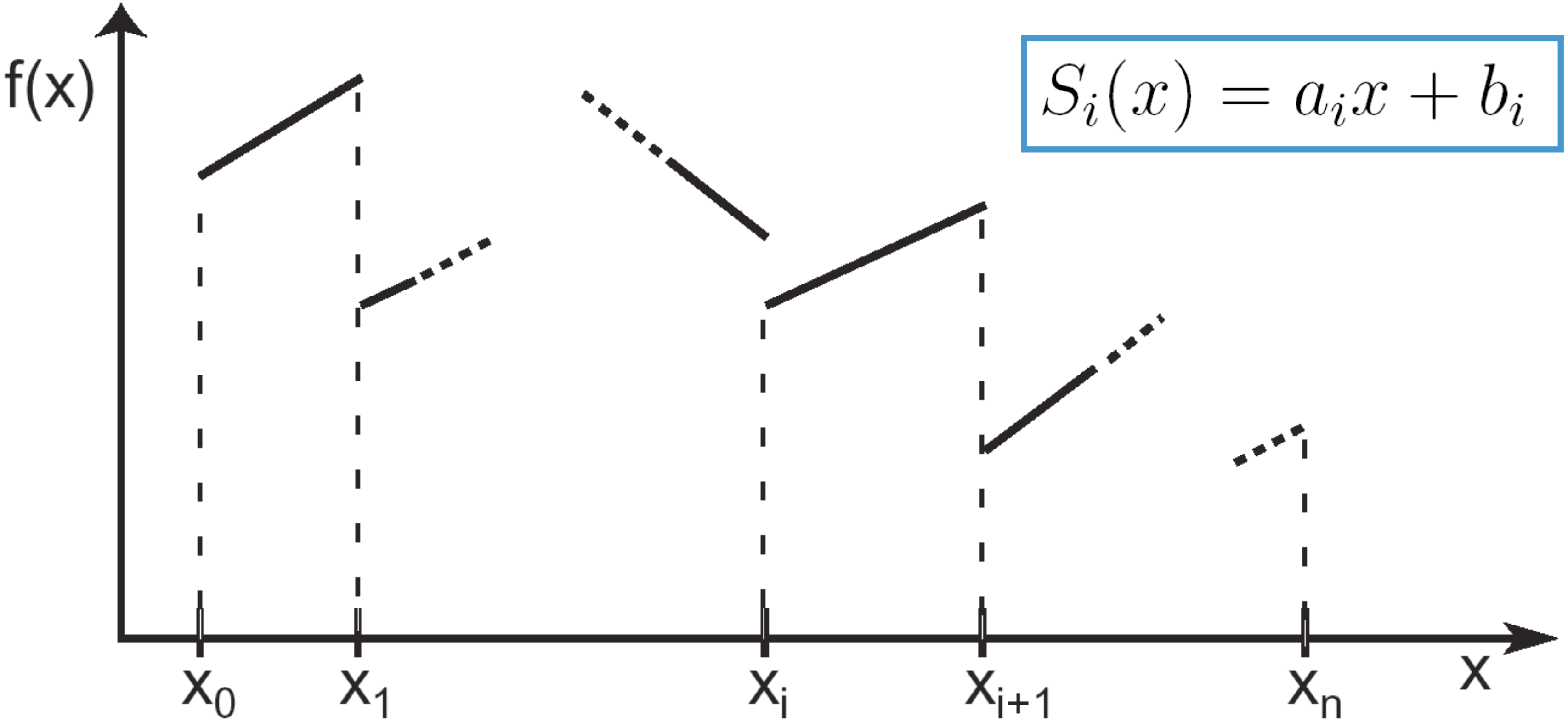
- Función polinómica a trozos
- Continua (en los puntos base x_i)



Notación:

$$\begin{cases} h_i = x_{i+1} - x_i \\ t_i = f_{i+1} - f_i \end{cases} \quad i = 0, \ldots, n-1$$

Spline lineal sin imponer continuidad



$$S_i(x) = a_i x + b_i$$

¿Cuál es la dimensión de este espacio?

¿Y si imponemos continuidad C^0?

- Spline: $S(x) = S_i(x)$ en $[x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0, \ldots, n-1)$
- Poligonal: $S_i(x) = a_i x + b_i$
  - Número de coeficientes: **2n**

    $$a_i,\ b_i\ \ (i = 0, \ldots, n-1)$$

  - Número de condiciones: **n-1**
    continuidad en los n-1 puntos interiores

    $$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)\ \ (i = 1, \ldots, n-1)$$

  - Diferencia:

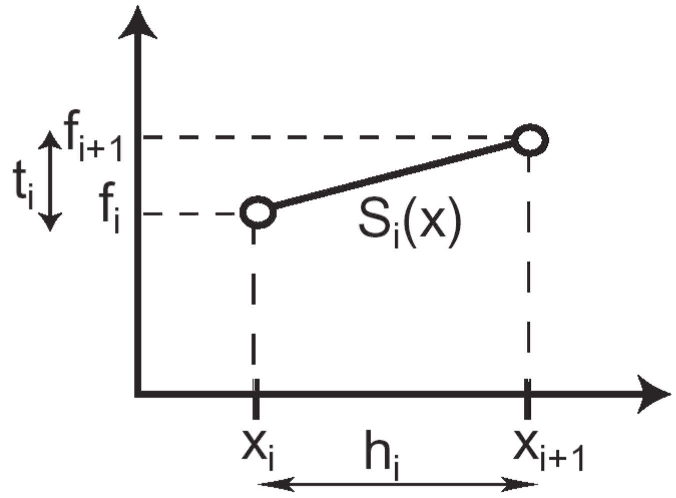
2n – (n-1) = n+1

parámetros libres,
dimensión del espacio E_S

Podemos imponer el valor de la función en n+1 puntos base.

Cálculo de S_i

$$S_i(x) = a_i x + b_i$$



- Cálculamos la recta $S_i(x)$ a partir de los valores en los puntos base x_i y x_{i+1}

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= f_i \\ S_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a_i &= \frac{t_i}{h_i} \\ b_i &= f_i - \frac{t_i}{h_i} x_i \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{\begin{gathered} S_i(x) = \frac{t_i}{h_i}(x - x_i) + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ i = 0 \ldots n-1 \end{gathered}}$$

Base del espacio de splines

- Depende de los puntos base $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$
- De todas las bases posibles escogemos la que permite variar con facilidad los valores f_i

- El interpolante (spline) se escribe como

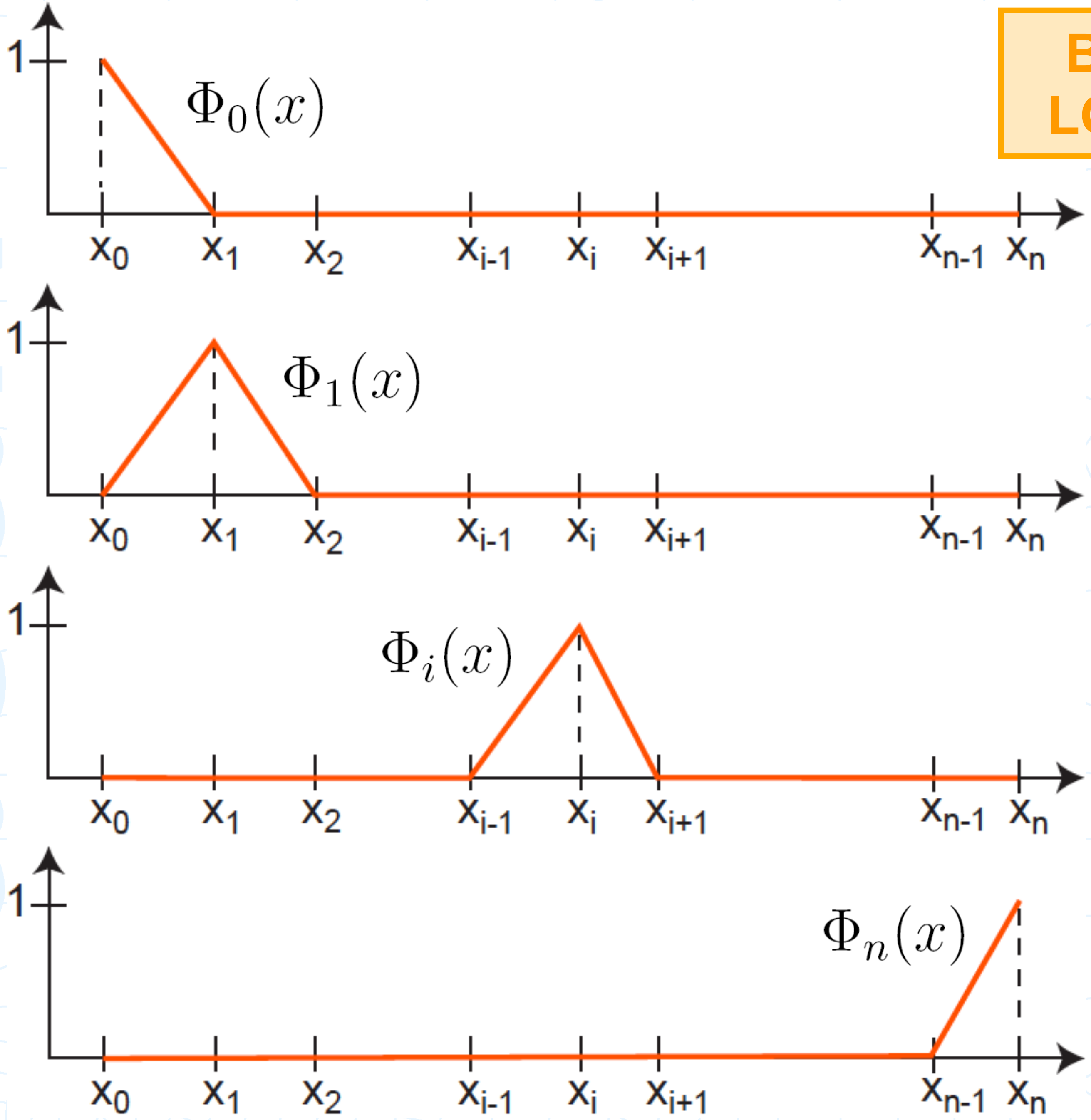
$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x), \quad x \in [x_0, x_n]$$

donde $\Phi_i(x)$ son las funciones de la base de splines (definidas en todo $[x_0, x_n]$)

- Las funciones de la base deben verificar

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0 \ldots n$$

BASE LOCAL



Spline C1 parabólico

- En cada intervalo: $S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$
  - Número de coeficientes $\boxed{3n}$
  - Número de condiciones:
    continuidad del spline y de la primera derivada en los n-1 puntos interiores

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= S_{i-1}(x_i) \\ S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \qquad \boxed{2(n-1)}$$

  - Diferencia: $\boxed{3n - 2(n-1) = n+2}$

$\Downarrow$

parámetros libres,
dimensión del espacio $\mathrm{E_S}$

Podemos imponer el valor de la función en n+1 puntos base y una condición adicional

- Por ejemplo, podemos imponer la pendiente en el inicio: $S'(x_0)=s'_0$:

$$\left.\begin{aligned} S_0(x_0) &= f_0 \\ S_0(x_1) &= f_1 \\ S_0'(x_0) &= s_0' \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_0(x) \;\text{ en } [x_0, x_1] \qquad s_1' = S_0'(x_1)$$

$$\left.\begin{aligned} S_1(x_1) &= f_1 \\ S_1(x_2) &= f_2 \\ S_1'(x_1) &= s_1' \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1(x) \;\text{ en } [x_1, x_2] \qquad s_2' = S_1'(x_2)$$

$$\vdots$$

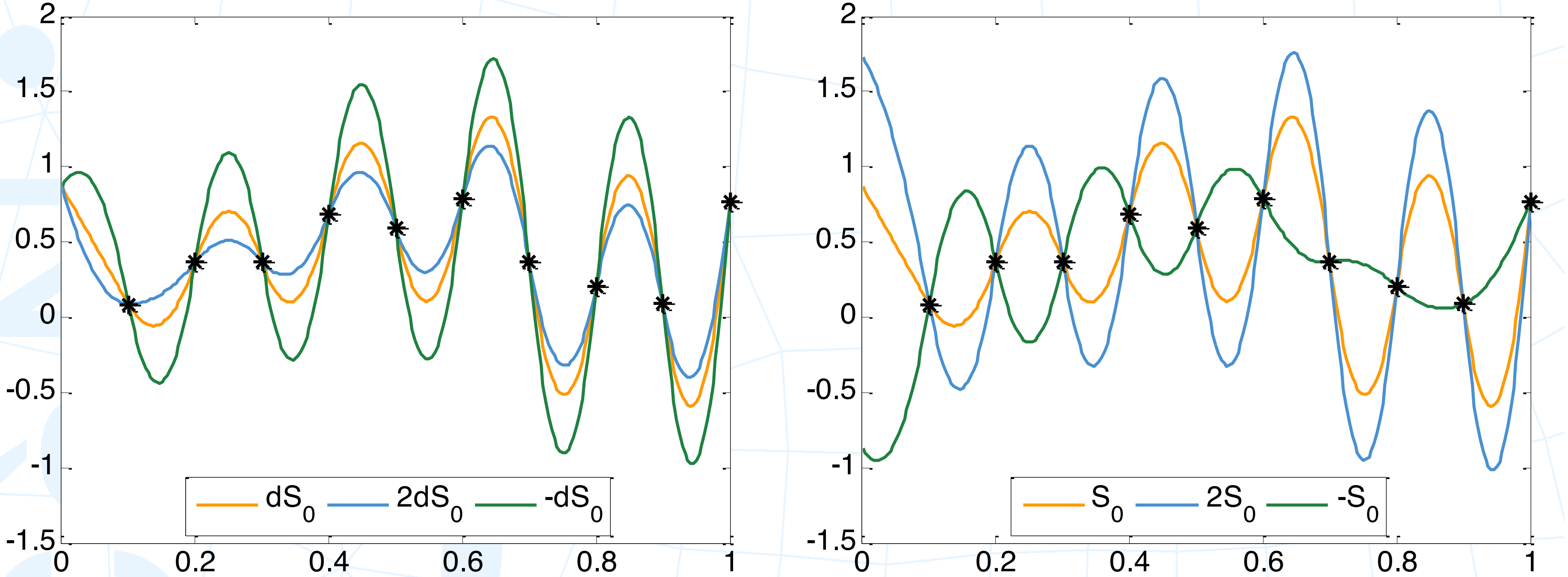
$$\left.\begin{aligned} S_{n-2}(x_{n-2}) &= f_{n-2} \\ S_{n-2}(x_{n-1}) &= f_{n-1} \\ S'_{n-2}(x_{n-2}) &= s'_{n-2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{n-2}(x) \quad \text{en } [x_{n-2}, x_{n-1}]$$

$$s'_{n-1} = S'_{n-2}(x_{n-1})$$

$$\left.\begin{aligned} S_{n-1}(x_{n-1}) &= f_{n-1} \\ S_{n-1}(x_{n}) &= f_{n} \\ S'_{n-1}(x_{n-1}) &= s'_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{n-1}(x) \quad \text{en } [x_{n-1}, x_{n}]$$

El spline C^1 parabólico se conoce como **spline parabólico recurrente**

- La base de splines es **no local**



- Elección de s'_{0}:
  - Dejar s'_0 libre y modificar interactivamente
  - Interpolar polinomio con N+1 puntos en el entorno de x_0: s'_0 = pendiente del polinomio en x_0,
  - Tomar $s'_1 = (f_2 – f_0)/(x_2 – x_0)$ (diferencia centrada) e interpolar un subintervalo en sentido contrario

poco utilizado

Spline C1 cúbico

- Se conoce como **interpolación de Hermite**
- En cada intervalo: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
  - Número de coeficientes: **4n**
  - Número de condiciones:
    continuidad del spline y de la primera derivada en los n-1 puntos interiores

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= S_{i-1}(x_i) \\ S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

2(n-1)

  - Diferencia: **4n – 2(n-1) = 2(n+1)**

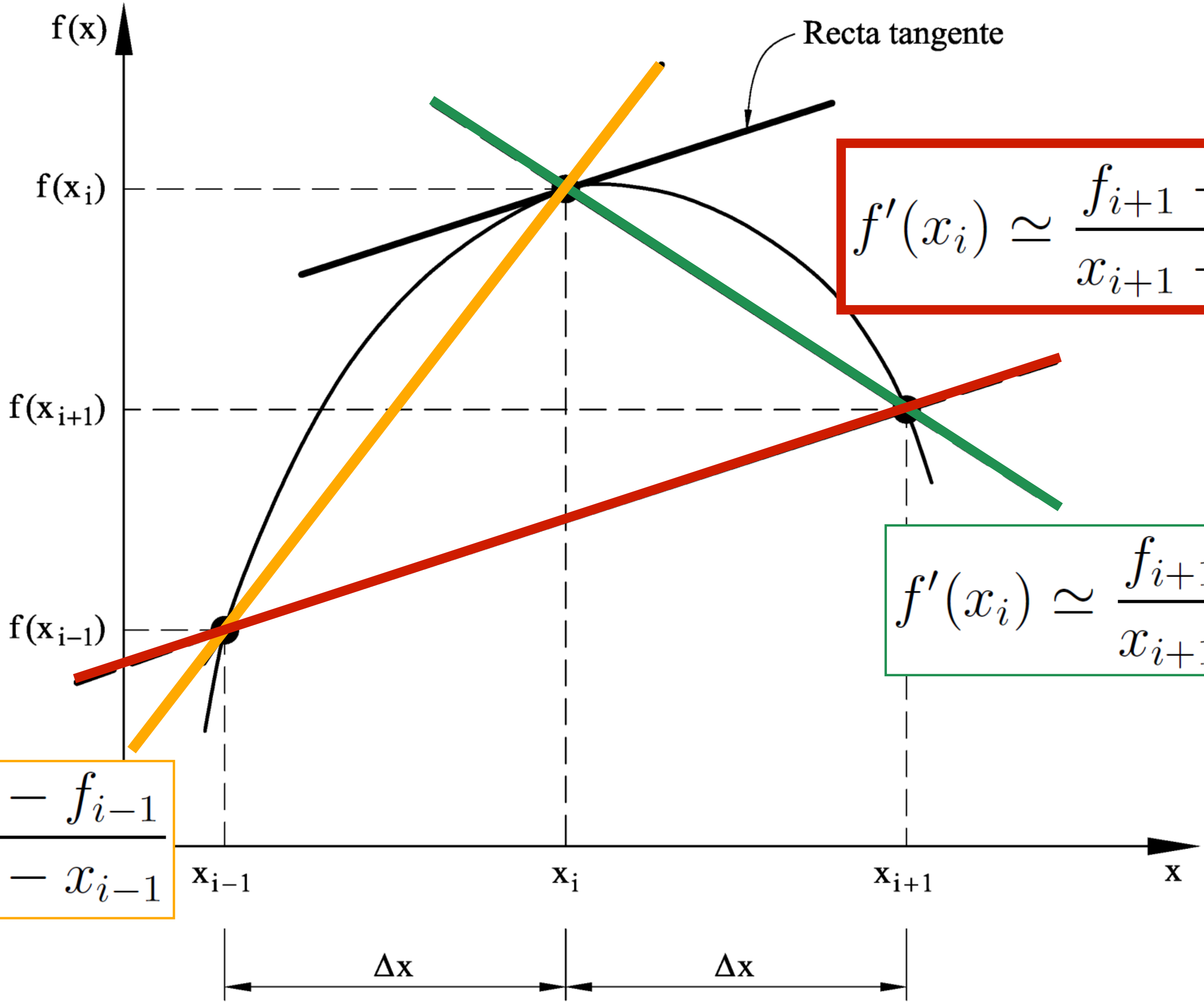
parámetros libres,
dimensión del espacio E_S

Podemos imponer el valor de la función y su derivada en los n+1 puntos base.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

LABORATORI DE CÀLCUL NUMÈRIC

- Si las derivadas no son conocidas, se aproximan. Por ejemplo:



$$f'(x_i) \simeq \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

$$f'(x_i) \simeq \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$f'(x_i) \simeq \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Cálculo de $S_i(x)$

- En cada intervalo:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Calculamos la cúbica $S_i(x)$ a partir del valor de S(x) y de su derivada en los puntos base x_i y x_{i+1}

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= f_i \\ S_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_i'(x_i) &= s_i' \\ S_i'(x_{i+1}) &= s_{i+1}' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x_i + d_i &= f_i \\ a_i x_{i+1}^3 + b_i x_{i+1}^2 + c_i x_{i+1} + d_i &= f_{i+1} \\ 3a_i x_i^2 + 2b_i x_i + c_i &= s_i' \\ 3a_i x_{i+1}^2 + 2b_i x_{i+1} + c_i &= s_{i+1}' \end{aligned}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$a_i,\ b_i,\ c_i\ ,d_i$$

- Resolviendo el sistema, se obtiene la expresión de la cúbica en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^3 \\ &+ \left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)^2 \\ &+ (x - x_i)s'_i + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ &\qquad (i = 0 \ldots n-1) \end{aligned}$$

Base del espacio de splines

- El interpolante (spline cúbico) se escribe como

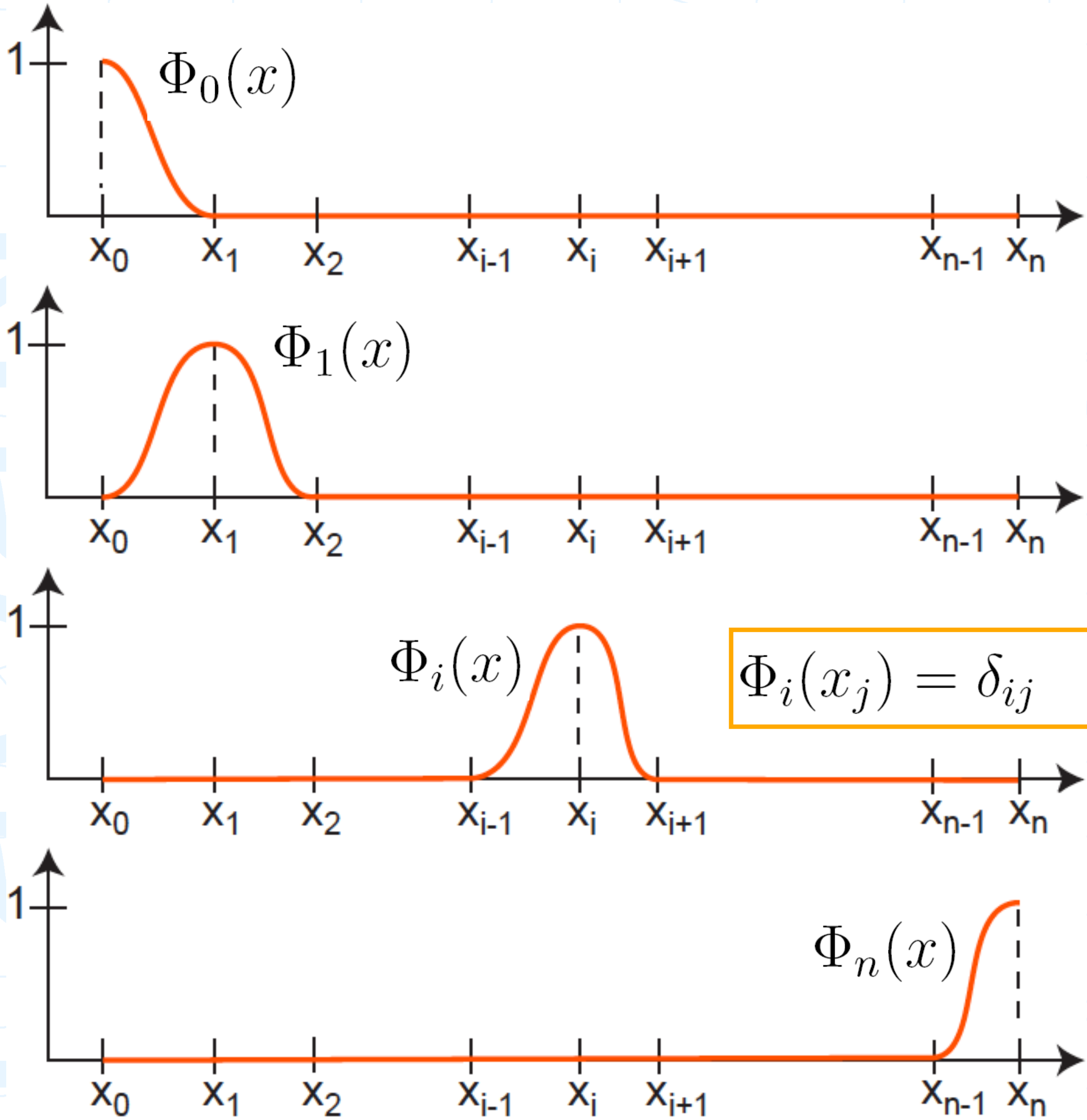
$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} s_i' \widehat{\Phi}_i(x)$$

donde $\Phi_i(x)$ y $\widehat{\Phi}_i(x)$ son las funciones de la base de splines (definidas en todo $[x_0,x_n]$)

- Las funciones de la base deben verificar

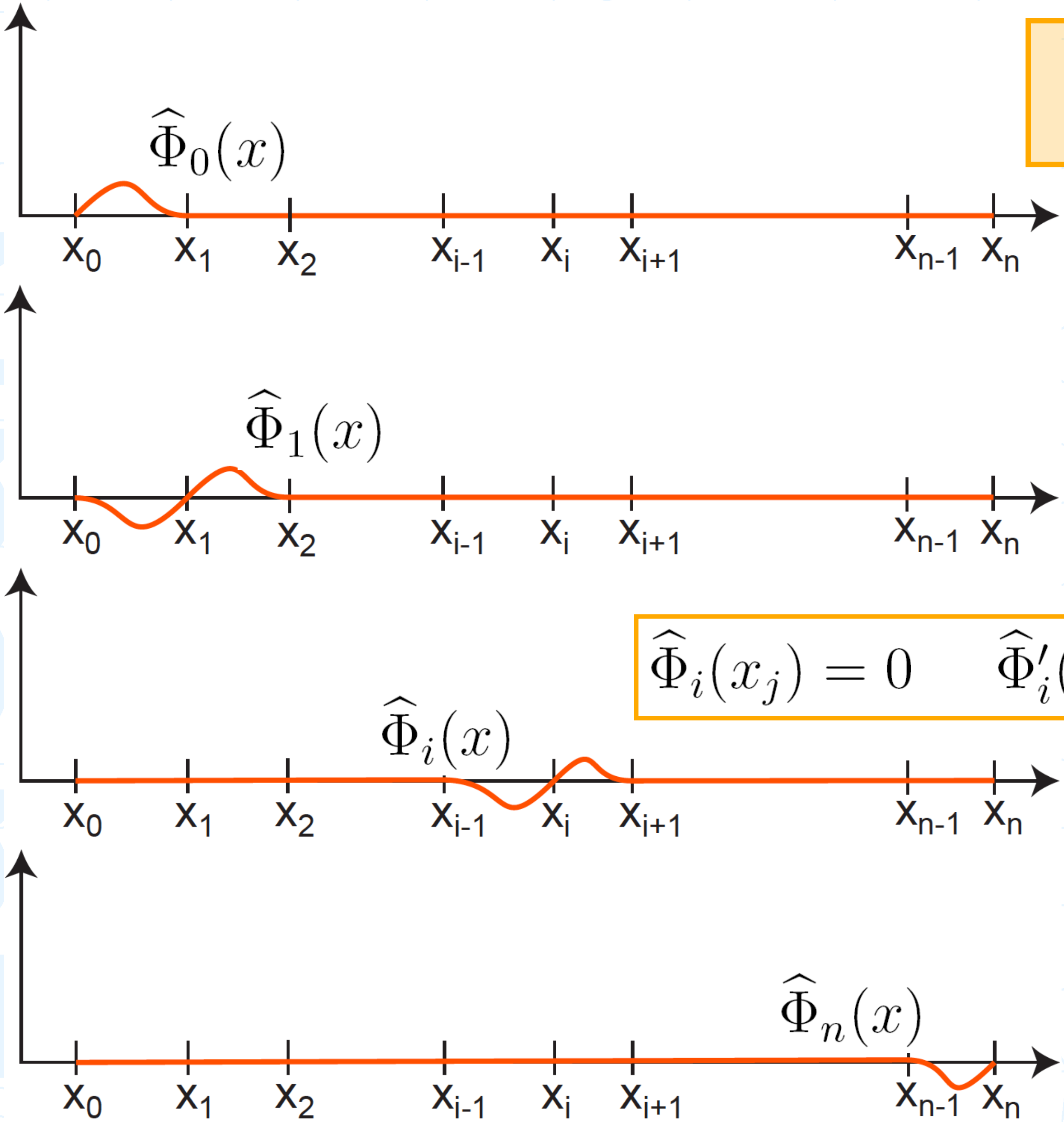
$$\begin{array}{ll} \Phi_i(x_j) = \delta_{ij} & {\Phi_i}'(x_j) = 0 \\ \widehat{\Phi}_i(x_j) = 0 & \widehat{\Phi}_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{array} \qquad (i, j = 0 \ldots n)$$

BASE LOCAL



$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \Phi_i{}'(x_j) = 0$$

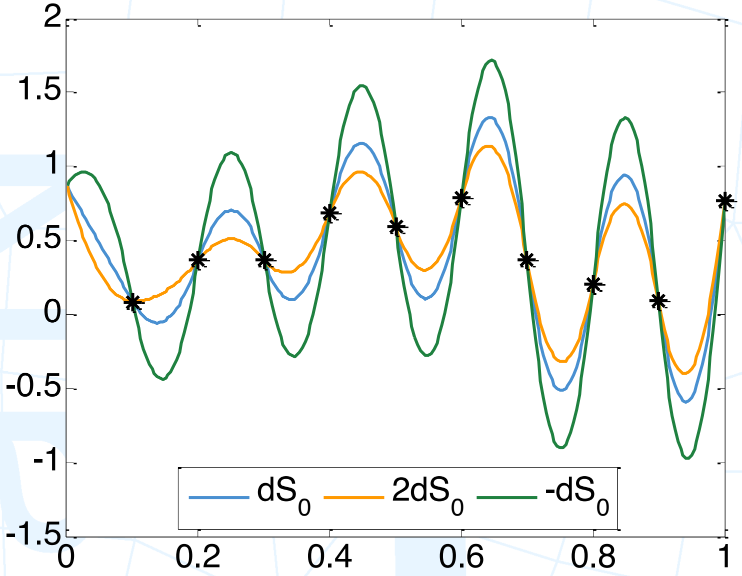
BASE LOCAL

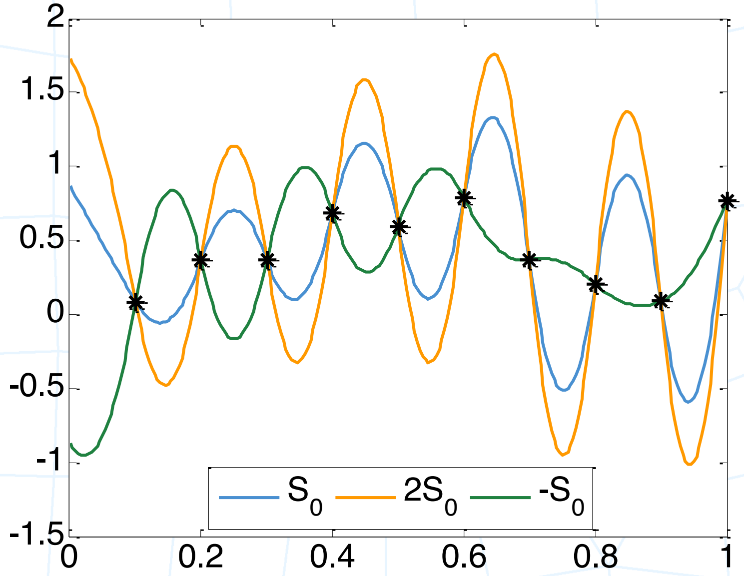


$$\widehat{\Phi}_i(x_j) = 0 \qquad \widehat{\Phi}'_i(x_j) = \delta_{ij}$$

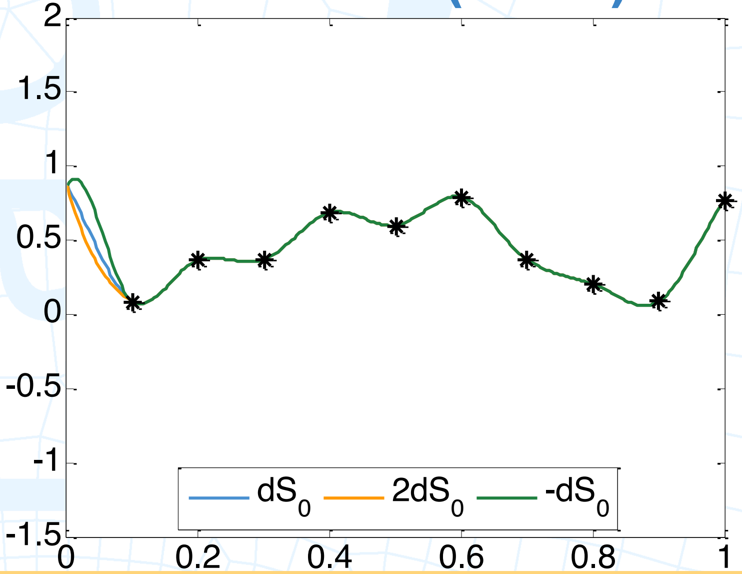
Ejemplo

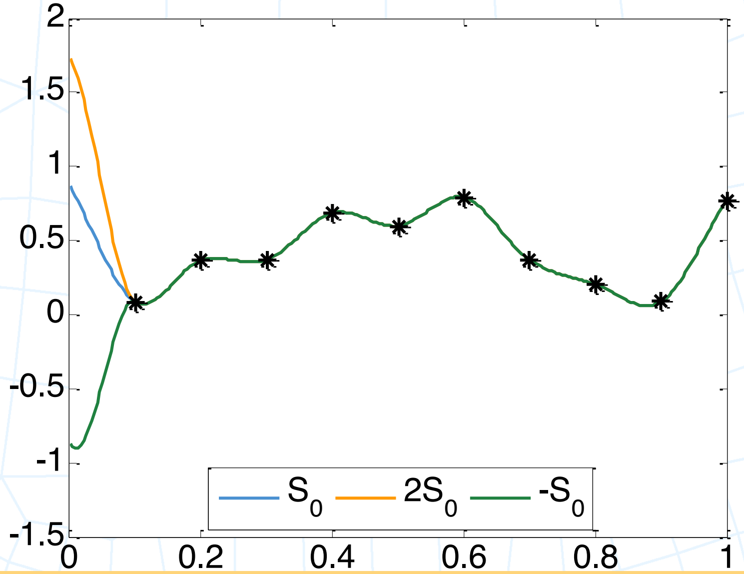
- Spline C1 parabólico **(no local)**





- Spline C1 cúbico **(local)**





Spline C2 cúbico

- En cada intervalo: $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
  - Número de coeficientes: **4n**
  - Número de condiciones:
    continuidad del spline y de la primera y segunda derivada en los n-1 puntos interiores

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= S_{i-1}(x_i) \\ S_i'(x_i) &= S_{i-1}'(x_i) \\ S_i''(x_i) &= S_{i-1}''(x_i) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

3(n-1)

  - Diferencia: **4n – 3(n-1) = (n+1) + 2**

$\Downarrow$

parámetros libres, dimensión del espacio E_S

Podemos imponer el valor de la función en los n+1 puntos base y dos condiciones adicionales

- Posibles condiciones adicionales:
  - derivadas en los extremos

    $S'(x_0)= s'_0,\ S'(x_n)= s'_n$
  - segundas derivadas en los extremos

    $S''(x_0)= s''_0,\ S''(x_n)= s''_n$
  - función periódica

    $S'(x_0)=S'(x_n),\ S''(x_0)=S''(x_n)$
  - ...

Formulación en derivadas

- Spline cúbico (de momento con continuidad C^1)

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3 \\ &+ \left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 \\ &+ (x-x_i)s'_i + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

- Sólo podemos imponer el valor de $S(x_i)=f_i$ y dos condiciones adicionales

- Las pendientes s'_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de $S''(x)$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (i = 1 \ldots n-1)$$

y las dos condiciones adicionales.

detalles

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA · LABORATORI DE CÀLCUL NUMÈRIC · LaCàN

Formulación en curvaturas

- Se expresa el spline en función de f_i y de las segundas derivadas en los puntos base s_i''

$$S_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_i(x_i) = f_i \\ S_i(x_{i+1}) = f_{i+1} \end{array}} \quad \Downarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} S_i''(x_i) = s_i'' \\ S_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}'' \end{array}}$$

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s_{i+1}'' - s_i''\right)(x-x_i)^3 + \frac{1}{2}s_i''(x-x_i)^2 \\ &+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s_{i+1}'' + 2s_i''\right)\right](x-x_i) + f_i \end{aligned}$$

- Las curvaturas s''_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de S’(x)

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i)$$

y las dos condiciones adicionales.

detalles

Condiciones adicionales

1. Curvaturas prescritas en los extremos: s''_0 y s''_n dadas
   - Formulación en curvaturas
2. Pendientes prescritas en los extremos: s'_0 y s'_n dadas
   - Formulación en pendientes
3. Imposición de una pendiente y una curvatura. **ejemplo**
4. Spline periódico:
   Si se verifica $f_0=f_n$ puede ser interesante exigir
   $$s'_0=s'_n \text{ y } s''_0=s''_n$$
5. Interpolación cuadrática en los dos subintervalos extremos:
   $$s''_0=s''_1 \text{ y } s''_{n-1}=s''_n$$
6. Interpolación con la misma cúbica en los dos primeros subintervalos y en los dos últimos subintervalos

Spline natural

- Es el spline C2 cúbico con $s''_0=s''_n=0$
- La suavidad de una función se mide con el funcional

$$I(f) = \int_{x_0}^{x_n} \left[f''(x)\right]^2 \, dx$$

Teorema

De todas las funciones C^2 que pasan por $\{x_i,f_i\}_{i=0,\dots,n}$, la más suave es el spline natural.

Es decir, el spline natural minimiza el funcional I en C^2.

Demostración

- Sea h∈C^2 cualquiera y S(x) el spline natural. La diferencia del funcional I es

$$\int_{x_0}^{x_n} [h''(x)]^2 \, dx - \int_{x_0}^{x_n} [S''(x)]^2 \, dx = \int_{x_0}^{x_n} \left(h''^2 - S''^2\right) dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} (h'' - S'')^2 \, dx + 2 \underbrace{\int_{x_0}^{x_n} S''(h'' - S'') \, dx}$$

donde

$$\int_{x_0}^{x_n} S''(h'' - S'') \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S''(h'' - S'') \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} S''(h' - S')\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''(h' - S') \, dx$$

$$= S''(h' - S')\Big|_{x_0}^{x_n} - \sum_{i=0}^{n-1} S_i'''\underbrace{(h - S)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}}_{0}$$

Por lo tanto,

$$\int_{x_0}^{x_n} [h''(x)]^2 \, dx - \int_{x_0}^{x_n} [S''(x)]^2 \, dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_n} (h'' - S'')^2 \, dx + 2S''(h' - S')\Big|_{x_0}^{x_n}$$

siendo S(x) el spline natural ($s''_0 = s''_n = 0$)

$$\int_{x_0}^{x_n} [h''(x)]^2 \, dx \geq \int_{x_0}^{x_n} [S''(x)]^2 \, dx$$

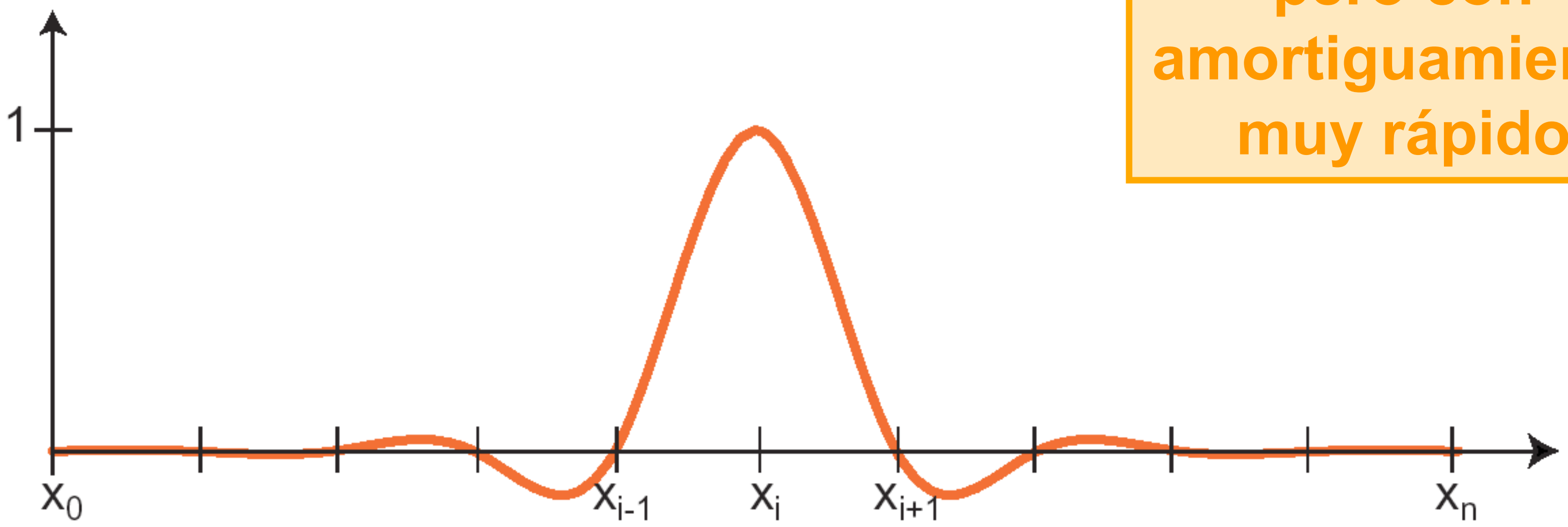
Base de splines naturales

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \Phi_i(x)$$

donde

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

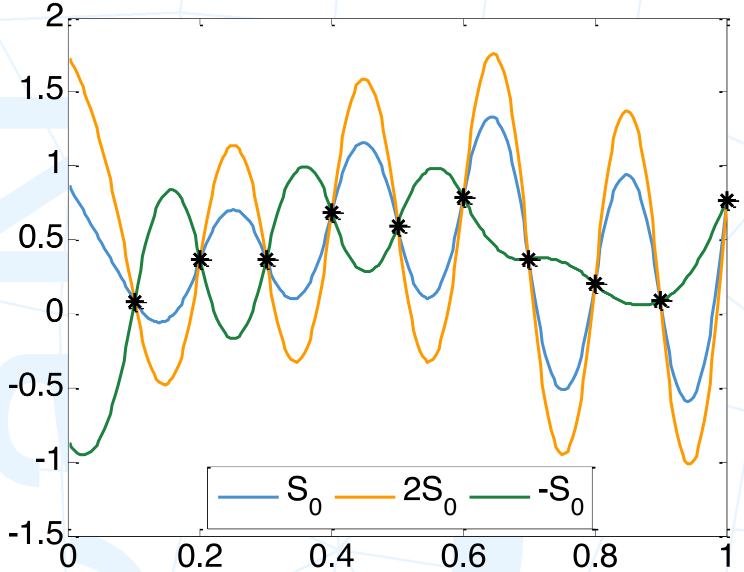
$$\Phi_i''(x_0) = \Phi_i''(x_n) = 0$$



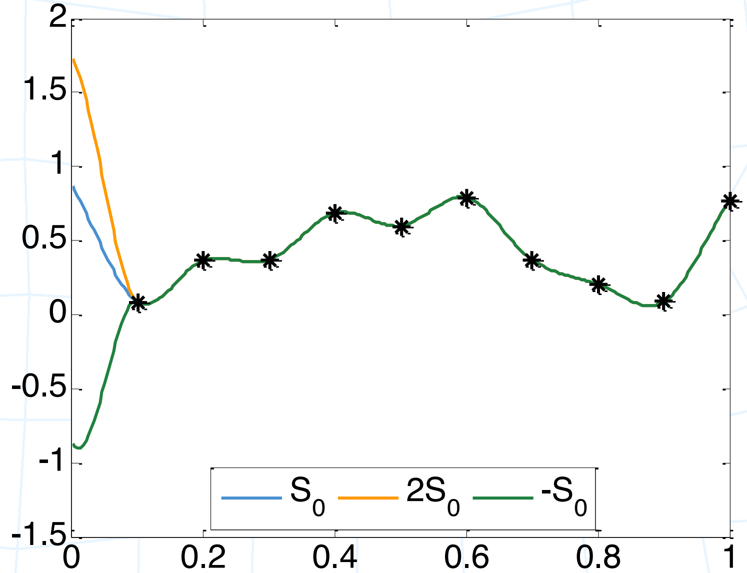
Base no local, pero con amortiguamiento muy rápido

Ejemplo

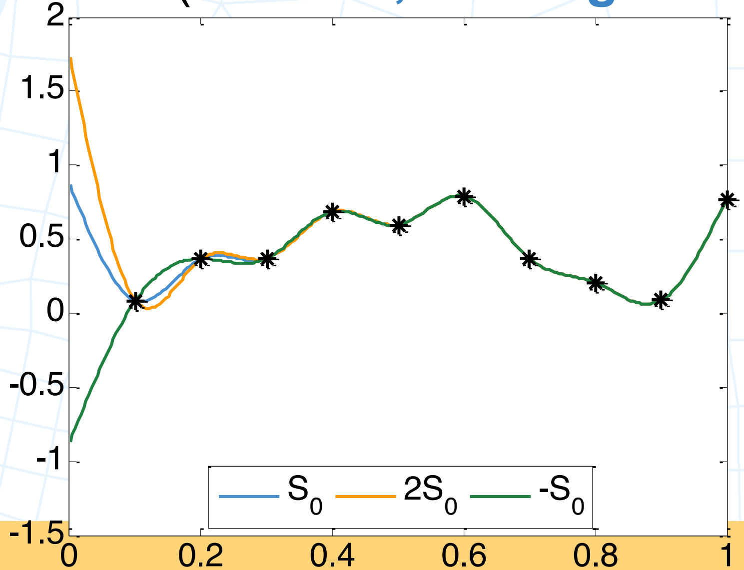
Spline C1 parabólico **(no local)**



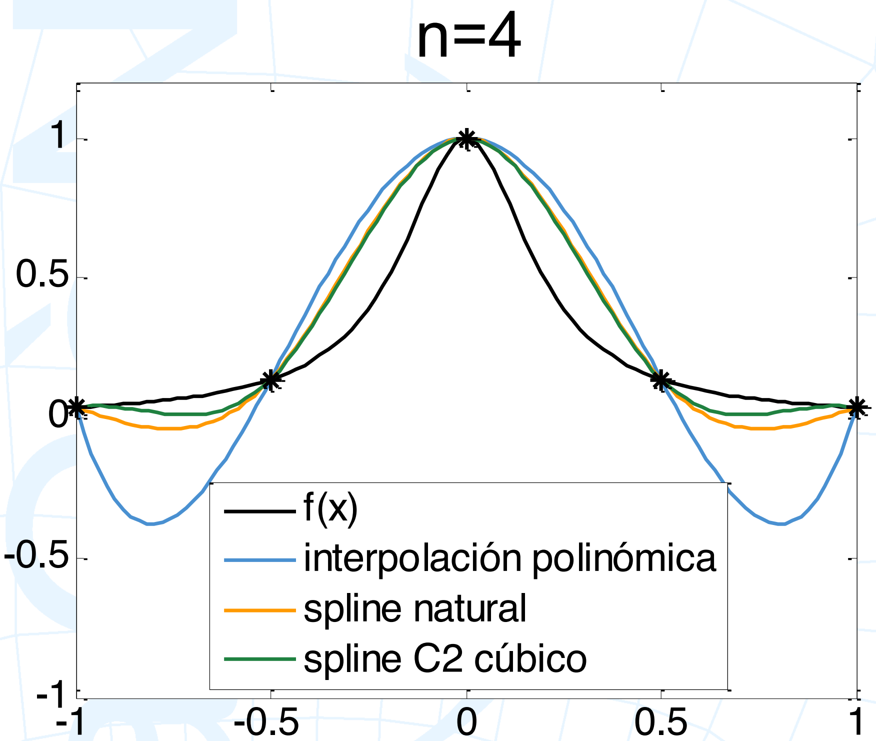
Spline C1 cúbico **(local)**

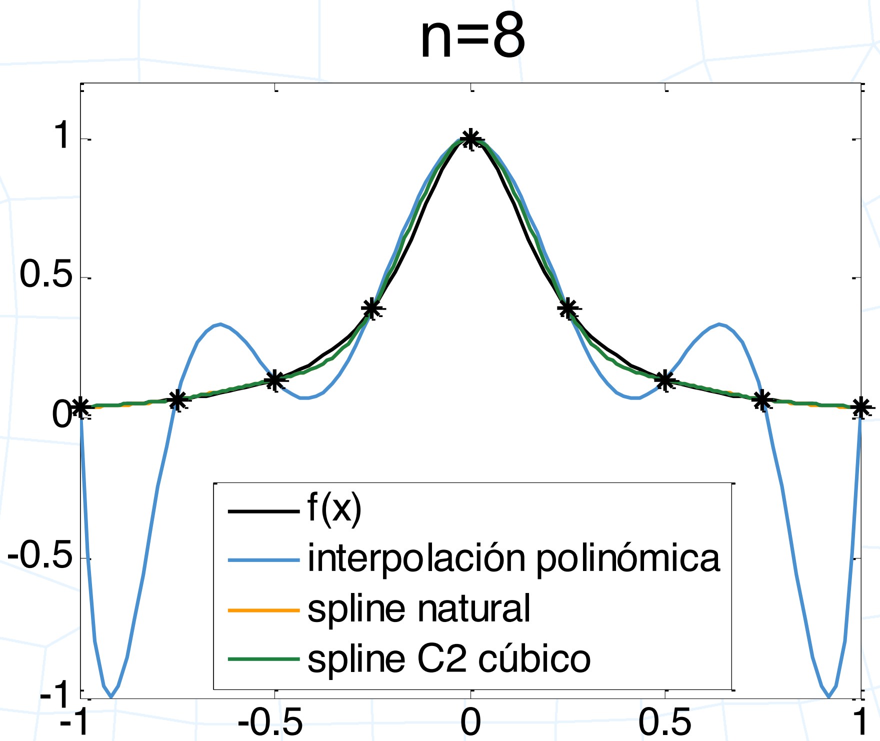


Spline C2 cúbico (**no local, amortiguamiento rápido)**



Ejemplo: paradoja de Runge





THE END

Formulación en derivadas

- Spline cúbico (de momento con continuidad C^1)

$$
\begin{aligned}
S_i(x) \quad &= \left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3 \\
&+ \left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 \\
&+ (x-x_i)s'_i + f_i, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]
\end{aligned}
$$

- Sólo podemos imponer el valor de $S(x_i)=f_i$ y dos condiciones adicionales
- Las pendientes s'_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de $S''(x)$

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (i = 1 \ldots n-1)$$

y las dos condiciones adicionales

$$
\begin{aligned}
S_i(x) &= \left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^3 \\
&+ \left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 \\
&+ (x-x_i)s'_i + f_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]
\end{aligned}
$$

- Segundas derivadas del spline:

$$
\begin{aligned}
S''_i(x) &= 6\left[h_i\left(s'_i + s'_{i+1}\right) - 2t_i\right]\frac{x-x_i}{h_i^3} \\
&+2\left[3t_i - h_i\left(2s'_i + s'_{i+1}\right)\right]\frac{1}{h_i^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S''_{i-1}(x) &= 6\left[h_{i-1}\left(s'_{i-1} + s'_i\right) - 2t_{i-1}\right]\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}^3} \\
&+2\left[3t_{i-1} - h_{i-1}\left(2s'_{i-1} + s'_i\right)\right]\frac{1}{h_{i-1}^2}
\end{aligned}
$$

- Imponiendo continuidad de la segunda derivada:

$$S_i''(x_i) = 2\left[3t_i - h_i\left(2s_i' + s_{i+1}'\right)\right]\frac{1}{h_i^2}$$

$$\|$$

$$S_{i-1}''(x_i) = 6\left[h_{i-1}\left(s_{i-1}' + s_i'\right) - 2t_{i-1}\right]\frac{1}{h_{i-1}^2} + 2\left[3t_{i-1} - h_{i-1}\left(2s_{i-1}' + s_i'\right)\right]\frac{1}{h_{i-1}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}s_{i-1}' + 2s_i' + \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}s_{i+1}' = \frac{3}{h_i + h_{i-1}}\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}t_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_i}t_i\right) \qquad (i = 1 \ldots n-1)}$$

- Sistema de ecuaciones

sistema (n-1)x(n+1)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & & & \\ & \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} & \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_0 \\ s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n-2} \\ s'_{n-1} \\ s'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}$$

$$e_i = \frac{3}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} t_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{h_i} t_i \right)$$

Hay que añadir las dos condiciones adicionales

- Pendientes prescritas en los extremos: s'$_0$ y s'$_n$ dadas

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_{n-2} \\ s'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - \lambda_1 s'_0 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} - \mu_{n-1} s'_n \end{pmatrix}$$

(matriz n-1 × n-1, tridiagonal, no simétrica y estrictamente diagonalmente dominante)

Formulación en curvaturas

Se expresa el spline en función de f_i y de las segundas derivadas en los puntos base s_i''

- Cúbica en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

- Segunda derivada: $S_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i$

- Imponemos valores $S(x_i)=f_i$ y $S''(x_i)=s_i''$:

$$\left.\begin{aligned} S_i(x_i) &= f_i \\ S_i(x_{i+1}) &= f_{i+1} \\ S_i''(x_i) &= s_i'' \\ S_i''(x_{i+1}) &= s_{i+1}'' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} d_i &= f_i \\ a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i &= f_{i+1} \\ 2b_i &= s_i'' \\ 6a_i h_i + 2b_i &= s_{i+1}'' \end{aligned}\right.$$

- Spline cúbico C2 (formulación en curvaturas)

$$S_i(x) = \frac{1}{6h_i}\left(s''_{i+1} - s''_i\right)(x - x_i)^3 + \frac{1}{2}s''_i(x - x_i)^2 + \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1} + 2s''_i\right)\right](x - x_i) + f_i$$

- Sólo podemos imponer el valor de f_i y dos condiciones adicionales
- Las curvaturas s''_i no son datos, son parámetros a determinar imponiendo continuidad de S'(x)

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$$

y las dos condiciones adicionales

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s''_{i+1}-s''_i\right)(x-x_i)^3+\frac{1}{2}s''_i(x-x_i)^2 \\ &+\left[\frac{t_i}{h_i}-\frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1}+2s''_i\right)\right](x-x_i)+f_i \end{aligned}$$

- Primeras derivada del spline:

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= \frac{1}{2h_i}\left(s''_{i+1}-s''_i\right)(x-x_i)^2+s''_i(x-x_i) \\ &+\left[\frac{t_i}{h_i}-\frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1}+2s''_i\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x) &= \frac{1}{2h_{i-1}}\left(s''_i-s''_{i-1}\right)(x-x_{i-1})^2+s''_{i-1}(x-x_{i-1}) \\ &+\left[\frac{t_{i-1}}{h_{i-1}}-\frac{1}{6}h_{i-1}\left(s''_i+2s''_{i-1}\right)\right] \end{aligned}$$

- Imponiendo continuidad de la primera derivada:

$$S_i'(x_i) = \frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6} h_i \left(s_{i+1}'' + 2 s_i''\right)$$

$$\|$$

$$\begin{aligned} S_{i-1}'(x_i) &= \frac{1}{2}\left(s_i'' - s_{i-1}''\right) h_{i-1} + s_{i-1}'' h_{i-1} \\ &+ \left[\frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{1}{6} h_{i-1}\left(s_i'' + 2 s_{i-1}''\right)\right] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} s_{i-1}'' + 2 s_i'' + \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} s_{i+1}'' \\ = \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{t_i}{h_i} - \frac{t_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \end{aligned} \quad (i = 1 \ldots n-1)}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

LABORATORI DE CÀLCUL NUMÈRIC

- Sistema de ecuaciones

sistema (n-1)x(n+1)

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\ & & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \\ s''_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i-1}} \left(\frac{t_i}{h_i} - \frac{t_{i-1}}{h_{i-1}} \right)$$

Hay que añadir las dos condiciones adicionales

- Curvaturas prescritas en los extremos: s''$_0$ y s''$_n$ dadas

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - \mu_1 s''_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} s''_n \end{pmatrix}$$

matriz n-1 × n-1, tridiagonal, no simétrica y estrictamente diagonalmente dominante

Condiciones adicionales: s'_0 y s''_n

- **Formulación en curvaturas** (análogamente se puede hacer para la formulación en derivadas)

$$
\begin{aligned}
S_i(x) &= \frac{1}{6h_i}\left(s''_{i+1} - s''_i\right)(x - x_i)^3 + \frac{1}{2}s''_i(x - x_i)^2 \\
&+ \left[\frac{t_i}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left(s''_{i+1} + 2s''_i\right)\right](x - x_i) + f_i
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{pmatrix}
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & & \\
& \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} & \\
& & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
s''_0 \\ s''_1 \\ s''_2 \\ \vdots \\ s''_{n-2} \\ s''_{n-1} \\ s''_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

sistema (n-1)x(n+1)

$$
\begin{aligned}
S_0(x) &= \frac{1}{6h_0}\left(s_1'' - s_0''\right)(x-x_0)^3 + \frac{1}{2}s_0''(x-x_0)^2 \\
&+ \left[\frac{t_0}{h_0} - \frac{1}{6}h_0\left(s_1'' + 2s_0''\right)\right](x-x_0) + f_0
\end{aligned}
$$

- Imponemos la derivada s'$_0$

$$
s_0' = S_0'(x_0) = \frac{t_0}{h_0} - s_0''\frac{h_0}{3} - s_1''\frac{h_0}{6}
$$

$$\Downarrow$$

$$
2s_0'' + s_1'' = 6\frac{t_0}{h_0^2} - 6\frac{s_0'}{h_0}
$$

- El sistema resultante es

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & & & & \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\
 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\
 & & & & \mu_{n-1} & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
s_0'' \\ s_1'' \\ s_2'' \\ \vdots \\ s_{n-2}'' \\ s_{n-1}''
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
6t_0/h_0^2 - 6s_0'/h_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1}s_n''
\end{pmatrix}
$$