Sessió pràctica: resolució d'equacions no lineals

Objectius

Ser capaç de

- Programar el mètode de la bisecció i el mètode de Newton per determinar l'arrel d'una equació no lineal.
- Calcular els errors comesos en el càlcul i representar gràficament la seva evolució (gràfica de convergència).
- Analitzar el comportament dels mètodes a partir dels errors.

Introducció

En aquestes sessions aprendrem a resoldre equacions no lineals $f(x) = 0$.
Per trobar les arrels d'una equació es fan servir algoritmes iteratius: donada una aproximació inicial x^0, es construeix una successió de valors $\{x^k\}_{k\geq 0}$ que (esperem) tendeix a una solució α del problema tal que $f(\alpha) = 0$.
En particular, programarem i analitzarem el comportament de dos mètodes:

- <u>Mètode de bisecció</u>
  Donat un interval inicial amb extrems x^0 i a tals que $f(x^0) \cdot f(a) < 0$, es construeix una successió $\{x^k\}_{k\geq 0}$ de la manera següent:

  1. Calculem el punt mig de l'interval $x^{k+1} = \dfrac{x^k + a}{2}$
  2. Actualitzem l'interval de manera que tingui com a extrems el nou punt x^{k+1} i un dels dos punts que definien l'interval anterior:
     – Si $f(x^{k+1}) \cdot f(x^k) > 0$, ens quedem amb l'interval definit per x^{k+1} i a.
     – Si $f(x^{k+1}) \cdot f(x^k) < 0$, actualitzem el valor d'a de manera que prengui el valor x^k i ens quedem amb l'interval definit per x^{k+1} i a.

- <u>Mètode de Newton</u>
  Donada una aproximació inicial x^0, es construeix una successió on cada terme es calcula a partir de l'anterior com

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \quad \text{per } k \geq 0.$$

En aquesta sessió analitzarem el comportament d'aquests dos mètodes quan es fan servir per resoldre l'equació $f(x) = 0$ amb

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 21x^2 + 6x + 18. \tag{1}$$

Tasques a fer:

1. Escriu una funció de Matlab que permeti avaluar la funció (1).
   Pista: Si no recordes com fer-ho, busca la comanda `function` en l'ajuda del programa. També pots definir la funció en línea fent servir `@`.

2. Dibuixa la gràfica de la funció. Quantes solucions té? Quines aproximacions inicials et semblen raonables?
   Pista: Pots fer servir la comanda `plot` per dibuixar la gràfica d'una funció. Totes les arrels estan en l'interval $[-1, 4]$.

3. Escriu un programa de Matlab que, donat un interval inicial adequat, faci `niter` iteracions del mètode de la bisecció per trobar les solucions de la funció (1). Escriu per pantalla el valor de cada una de les aproximacions calculades.
   Tingues en compte que el programa ha de ser prou general com per què es pugui canviar fàcilment tant l'interval inicial com el número d'iteracions que es fan.
   Pista: Hauràs d'emprar les comandes `for` i `if` per calcular les iteracions. Si vols demanar les dades per teclat, pots fer servir la instrucció `input`.

4. Fes servir el mètode de la bisecció amb els següents intervals inicials:

   i) $[-1, 0]$
   ii) $[1, 2]$
   iii) $[3, 4]$
   iv) $[-1, 4]$
   v) $[-2, 4]$

   Quina solució s'obté en cada cas? Per què?

5. Escriu un programa de Matlab que, donada una aproximació inicial, calculi `niter` aproximacions fent servir el mètode de Newton per determinar les arrels de la funció (1). En aquest cas hauràs d'escriure, també, una funció que permeti avaluar la derivada de la funció.

6. Fes servir el mètode de Newton amb les següents aproximacions inicials:

   i) $x^0 = -1$
   ii) $x^0 = 2$
   iii) $x^0 = 3$
   iv) $x^0 = 2.5$

   Quina solució s'obté en cada cas? Justifica el comportament del mètode en cada cas.

7. El valor absolut de l'error relatiu de cada una de les aproximacions obtingudes és

$$r^k = \left| \frac{x^k - \alpha}{\alpha} \right|.$$

Tenint en compte que l'aproximació x^{k+1} és millor que la que estem considerant, aquest error es pot aproximar com

$$r^k \simeq \left| \frac{x^k - x^{k+1}}{x^{k+1}} \right|.$$

Modifica el teu programa per calcular l'error comès en cada una de les iteracions.

8. Considera l'interval inicial $[1, 2]$ pel mètode de la bisecció i l'aproximació inicial $x^0 = 1$ pel de Newton. Representa gràficament l'evolució del logaritme dels errors en funció del número d'iteracions. Observa el comportament dels dos mètodes. Quin et sembla millor? Quantes iteracions calen per tenir una bona aproximació de la solució amb cada un dels mètodes?

Exercicis addicionals:

1. El mètode de la secant és un esquema iteratiu basat en les mateixes idees que el mètode de Newton. La diferència és que, en lloc d'aproximar la funció per la recta tangent en el punt $\big(x^k, f(x^k)\big)$, s'aproxima per la recta secant que passa pels punts $\big(x^k, f(x^k)\big)$ i $\big(x^{k+1}, f(x^{k+1})\big)$.

   a) Escriu l'expressió del esquema iteratiu que s'obté en aquest cas.

   b) Escriu un programa que permeti resoldre la funció (1) mitjançant el mètode de la secant.

   c) Resol el problema fent servir les següents aproximacions inicials:

      I) $x^0 = 0$, $x^1 = -1$

      II) $x^0 = 1$, $x^1 = 2$

      III) $x^0 = 3$, $x^1 = 4$

      IV) $x^0 = 0$, $x^1 = 4$

   Observa el comportament del mètode i compara'l amb el de la bisecció i Newton.

2. L'esquema iteratiu corresponent al mètode de Whittaker es pot escriure com

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{m} \quad \text{per } k \geq 0.$$

on m és una constant.

   a) Escriu un programa que permeti resoldre la funció (1) mitjançant el mètode de Whittaker.

b) Utilitza el programa per determinar les arrels de la funció, fent servir com aproximació inicial $x^0 = 1$ i els valors següents del paràmetre m:

i) $m = -26$
ii) $m = -32$
iii) $m = -20$
iv) $m = 150$

Observa el comportament del mètode. Convergeix en tots els casos? Quin valor de m proporciona millors resultats?

c) Repeteix l'apartat anterior fent servir com a aproximació inicial $x^0 = 2$. S'observa en tots els casos el mateix comportament?

3. Utilitza el mètode de Newton per determinar les arrels de la funció

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 9x - 18$$

Utilitza com a aproximacions inicials:

i) $x^0 = -1$
ii) $x^0 = 1$
iii) $x^0 = 3$

Quina creus que és la causa de què el comportament del mètode canviï en els diferents casos?