Sessió pràctica: sistemes d'equacions no lineals

Objectius

Ser capaç de

- Programar el mètode de Newton-Raphson per a la resolució de sistemes no lineals d'equacions.
- Analitzar el comportament del mètode a partir dels errors.

Introducció

El mètode de Newton-Raphson és un mètode iteratiu per a la resolució de sistemes no lineals $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En cada pas k, es calcula un vector aproximació de la solució

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^{k+1} \text{ amb } \Delta\mathbf{x}^{k+1} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$$

on $\mathbf{J}$ és la matriu jacobiana, amb components $J_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Cal tenir en compte que per calcular l'increment en cada pas no es calcula la inversa de la jacobiana, sino que es resol el sistema $\mathbf{J}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$.

El mètode de Newton modificat és una variació del mètode de Newton que consisteix en fer servir en totes les iteracions la jacobiana de l'aproximació inicial. És a dir, l'esquema iteratiu que es fa servir és

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^{k+1} \text{ amb } \Delta\mathbf{x}^{k+1} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^k).$$

En aquest cas, la matriu jacobiana es manté constant en tot el procés iteratiu i, per tant, la podem descomposar i fer servir la factorització per resoldre el sistema en cada iteració.

En aquesta sessió farem servir el mètode de Newton-Raphson (complet i modificat) per a resoldre

$$\begin{cases} 6x_1 - 2\cos(x_2 x_3) - 1 = 0 \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1.06} + 0.9 = 0 \\ 60x_3 + 3\mathrm{e}^{x_1 x_2} + 10\pi - 3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Tasques a fer:

1. Escriu un programa de Matlab que resolgui el sistema (1) mitjanant el mètode de Newton-Raphson. Per això, cal que abans implementis dos funcions de Matlab:
   - Una que, donat un vector $\mathbf{x}$, avaluï el residu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ definit per l'equació (1).
   - Una altra que, donat un vector $\mathbf{x}$, torni la matriu jacobiana del sistema.

2. Abans de resoldre el sistema, convé analitzar-lo per a poder triar bones aproximacions inicials.

   a) Fes servir la primera equació del sistema per a obtenir un interval per a la solució de la component x_1 del sistema.

   b) Utilitza la a segona equació i el resultat anterior per a acotar el valor de x_2.

   c) Acota el valor de x_3 fent servir la darrera equació i els resultats anteriors.

   Tria una aproximació inicial raonable i fes servir el mètode de Newton-Raphson per resoldre el sistema (1).

3. Calcula l'error comès en cada iteració i dibuixa la gràfica de convergència.

4. Escriu un programa de Matlab que resolgui el sistema (1) mitjanant el mètode de Newton-Raphson modificat. Compara el comportament d'aquest mètode amb el del mètode de Newton-Raphson complet.

5. Resol el sistema (1) fent servir els dos mètodes implementats i les següents aproximacions inicials:

   a) $\mathbf{x}^0 = [0, 0, 0]$

   b) $\mathbf{x}^0 = [1, 1, 1]$

   c) $\mathbf{x}^0 = [5, 5, 5]$

   d) $\mathbf{x}^0 = [-15, 15, -15]$

   Analitza els resultats obtinguts. Són en tots els casos raonables? Per qué?

Exercicis addicionals:
En alguns casos resulta difícil o impossible avaluar la matriu jacobiana. Una opció que permet resoldre aquest problema és fer servir derivació numèrica. Tenint en compte que la derivada d'una funció es pot aproximar com

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

les columnes de la matriu jacobiana es poden aproximar com

$$J_{:j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{h},$$

on $\mathbf{e}_j$ és el j-èsim vector de la base canònica.

1. Escriu una funció de Matlab que permeti avaluar numèricament la jacobiana del sistema. Quin valor de h has triat? Per què?

2. Resol el sistema (1) fent servir el mètode de Newton amb l'aproximació de la jacobiana calculada en l'apartat anterior. Es manté la convergència quadràtica? Afecta el valor h a la convergència del mètode?