Trabalho 2

Diana Laura Fernández Duarte

José Gabriel Claure Sánchez

1. Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis,10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de obter no mínimo uma bola azul e uma roxa ao tirar 8 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola seja retirada e não reposta.
   Eventos:
   - X: Há pelo menos uma bola azul e uma bola roxa
   - A: Há pelo menos uma bola azul
   - R: Há pelo menos uma bola roxa

   Com reposição

$$P(X) = 1 - (P(\bar{A}) + P(\bar{R}) - P(\overline{Az} \cap \bar{R}))$$
$$P(X) = 1 - \left(\left(\frac{30}{40}\right)^8 + \left(\frac{30}{40}\right)^8 - \left(\frac{20}{40}\right)^8\right)$$
$$P(X) = 0.8037$$

   Sem reposição

$$P(X) = 1 - (P(\bar{A}) + P(\bar{R}) - P(\overline{Az} \cap \bar{R}))$$
$$P(X) = 1 - \left(\frac{\binom{30}{8}}{\binom{40}{8}} + \frac{\binom{30}{8}}{\binom{40}{8}} - \frac{\binom{20}{8}}{\binom{40}{8}}\right)$$
$$P(X) = 0.8494$$

2. Se você lançar dois dados equilibrados simultaneamente, usando simulação de Monte Carlo. Faça a estimativa da probabilidade de que a soma seja igual ou maior que 10.

Tabela 1: Somas possíveis maiores ou iguais a 10

Soma	Combinações possíveis	Quantidade
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3
11	(5,6), (6,5)	2
12	(6,6)	1

$$P(\text{Soma } \geq 10) = \frac{6}{6^2}$$

$$P(\text{Soma } \geq 10) = 0.1667$$

3. Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 12, recebe de volta r reais, caso contrário perde o investimento de 1 real. Suponha que r = 20. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo? Suponha que o jogador faça novas apostas enquanto tem dinheiro.

Tabela 2: Somas menores a 12

Soma	Quantidade
4	1
5	4
6	10
7	20
8	35
9	56
10	80
11	104
Total	310

$$P(\text{Soma } \leq 11) = \frac{310}{6^4}$$

$$\text{P(Soma } \leq 11) = 0.2391$$

$$E = P(Soma \leq 11) \times (Lucrolíquido) + \left(1 - P(Soma \leq 11) \times (prejuízo)\right)$$
$$E = 0.2391 \times 19 + (1 - 0.2391) \times (-1)$$
$$E = 3.7802$$

Em média, para cada vez que o jogador joga, ele ganha R$ 3,78. A longo prazo, o jogador ganha dinheiro.

4. Resolva as seguintes integrais pelo método da integração de monte carlo e pelo método da integração por importância.

a)

$$I = \int_0^1 (1 - x^5)^{\frac{7}{2}}\, dx$$

Função proposta g(x):

$$g(x) = A(1 - x)^{7/2}, 0 \leq x \leq 1$$

Valor de A para garantir que g(x) seja uma função de densidade válida:

$$I = \int_0^1 A(1 - x)^{\frac{7}{2}}\, dx = 1$$
$$A = \frac{9}{2}$$

$$g(x) = \frac{9}{2}(1-x)^{7/2}$$

CDF da distribuição g(x):

$$G(x) = \int_0^x \frac{9}{2}(1-x)^{7/2}\,dx$$

$$G(x) = \left[-\frac{\frac{9}{2}(1-x)^{9/2}}{\frac{9}{2}}\right]_0^x$$

$$G(x) = -(1-x)^{9/2} + 1$$

Gerar amostras da distribuição g(x) seguindo o método de transformação inversa:

$$U = -(1-x)^{\frac{9}{2}} + 1$$

$$(1-x)^{\frac{9}{2}} = (1-U)$$

$$(1-x) = U^{\frac{2}{9}}$$

$$x = 1 - U^{\frac{2}{9}}$$

b)

$$I = \int_{-5}^{10} e^{(x+x^3)}\,dx$$

Substituição de variáveis

$$I = 15\int_0^1 e^{((15y-5)+(15y-5)^3)}\,dy$$

Função proposta g(y):

$$g(y) = Ae^{15y}, 0 \leq y \leq 1$$

Valor de A para garantir que g(y) seja uma função de densidade válida:

$$I = \int_0^1 Ae^{15y}\,dy = 1$$

$$15 \times A(e^{15} - 1) = 1$$

$$A = \frac{15}{e^{15} - 1}$$

$$g(y) = \frac{15e^{15y}}{e^{15} - 1}$$

CDF da distribuição g(y):

$$G(y) = \frac{15}{e^{15}-1}\int_0^y e^{15y}dy$$
$$G(y) = \frac{1}{e^{15}-1}(e^{15y}-1)$$

Gerar amostras da distribuição g(y) seguindo o método de transformação inversa:

$$U(e^{15}-1) = e^{15y}-1$$
$$y = \frac{ln(U(e^{15}-1) + 1)}{15}$$

c)

$$I = \int_0^\infty x^2(1+x^2)^{-3}$$

Substituição de variáveis

$$I = \int_0^1 \frac{(\frac{1}{y}-1)^2(1+(\frac{1}{y}-1)^2)^{-3}}{y^2}dy$$
$$I = \int_0^1 \frac{y^2(1-y)^2}{(2y^2-2y+1)^3}dy$$

Função proposta g(y):

$$g(y) = A(1-y)^2, 0 \leq y \leq 1$$

Valor de A para garantir que g(y) seja uma função de densidade válida:

$$I = \int_0^1 A(1-y)^2\,dy = 1$$
$$-A\left[\frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^1 = 1$$
$$\frac{-A}{3}(-1) = 1$$
$$A = 3$$
$$g(y) = 3(1-y)^2, 0 \leq y \leq 1$$

CDF da distribuição g(y):

$$G(y) = 3\int_0^y (1-y)^2 dy$$
$$G(y) = -3\left[\frac{(1-y)^3}{3}\right]_0^y$$

$$G(y) = -(1-y)^3 + 1$$

Gerar amostras da distribuição g(x) seguindo o método de transformação inversa:

$$(1-y)^3 = (1-U)$$
$$(1-y) = (1-U)^{\frac{1}{3}}$$
$$y = 1-(U)^{\frac{1}{3}}$$