

Trabalho 2

Diana Laura Fernández Duarte

José Gabriel Claire Sánchez

1. Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis, 10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de obter no mínimo uma bola azul e uma roxa ao tirar 8 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola seja retirada e não reposta.

Eventos:

- X: Há pelo menos uma bola azul e uma bola roxa
- A: Há pelo menos uma bola azul
- R: Há pelo menos uma bola roxa

Com reposição

$$P(X) = 1 - (P(\bar{A}) + P(\bar{R}) - P(\bar{A} \cap \bar{R}))$$

$$P(X) = 1 - \left(\left(\frac{30}{40} \right)^8 + \left(\frac{30}{40} \right)^8 - \left(\frac{20}{40} \right)^8 \right)$$

$$P(X) = 0.8036$$

Sem reposição

$$P(X) = 1 - (P(\bar{A}) + P(\bar{R}) - P(\bar{A} \cap \bar{R}))$$

$$P(X) = 1 - \left(\frac{\binom{30}{8}}{\binom{40}{8}} + \frac{\binom{30}{8}}{\binom{40}{8}} - \frac{\binom{20}{8}}{\binom{40}{8}} \right)$$

$$P(X) = 0.8404$$

2. Se você lançar dois dados equilibrados simultaneamente, usando simulação de Monte Carlo. Faça a estimativa da probabilidade de que a soma seja igual ou maior que 10.

Tabela 1: Somas possíveis maiores ou iguais a 10

Soma	Combinações possíveis	Quantidade
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3
11	(5,6), (6,5)	2
12	(6,6)	1

$$P(\text{Soma} \geq 10) = \frac{6}{6^2}$$

$$P(\text{Soma} \geq 10) = 0.1667$$

3. Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 12, recebe de volta r reais, caso contrário perde o investimento de 1 real. Suponha que $r = 20$. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo? Suponha que o jogador faça novas apostas enquanto tem dinheiro.

Tabela 2: Somas menores a 12

Soma	Quantidade
4	1
5	4
6	10
7	20
8	35
9	56
10	80
11	104
Total	310

$$P(\text{Soma} \leq 11) = \frac{310}{6^4}$$

$$P(\text{Soma} \leq 11) = 0.2391$$

$$E = P(\text{Soma} \leq 11) \times (\text{Lucro líquido}) + (1 - P(\text{Soma} \leq 11)) \times (\text{prejuízo})$$

$$E = 0.2391 \times 19 + (1 - 0.2391) \times (-1)$$

$$E = 3.7802$$

Em média, para cada vez que o jogador joga, ele ganha R\$ 3,78.

4. Resolva as seguintes integrais pelo método da integração de monte carlo e pelo método da integração por importância.
- a)

$$I = \int_0^1 (1 - x^5)^{\frac{7}{2}} dx$$

Função proposta $g(x)$:

$$g(x) = A(1 - x)^{7/2}, 0 \leq x \leq 1$$

Valor de A para garantir que $g(x)$ seja uma função de densidade válida:

$$I = \int_0^1 A(1 - x)^{\frac{7}{2}} dx = 1$$

$$A = \frac{9}{2}$$

$$g(x) = \frac{9}{2}(1 - x)^{7/2}$$

CDF da distribuição $g(x)$:

$$G(x) = \int_0^x \frac{9}{2} (1-x)^{7/2} dx$$
$$G(x) = \left[-\frac{\frac{9}{2} (1-x)^{9/2}}{\frac{9}{2}} \right]_0^x$$
$$G(x) = -(1-x)^{9/2} + 1$$

Gerar amostras da distribuição $g(x)$ seguindo o método de transformação inversa:

$$U = -(1-x)^{\frac{9}{2}} + 1$$
$$(1-x)^{\frac{9}{2}} = (1-U)$$
$$(1-x) = U^{\frac{2}{9}}$$
$$x = 1 - U^{\frac{2}{9}}$$

b)

$$I = \int_{-5}^{10} e^{(x+x^3)} dx$$

Substituição de variáveis

$$I = 15 \int_0^1 e^{((15y-5)+(15y-5)^3)} dy$$

Função proposta $g(y)$:

$$g(y) = Ae^{15y}, 0 \leq y \leq 1$$

Valor de A para garantir que $g(y)$ seja uma função de densidade válida:

$$I = \int_0^1 Ae^{15y} dy = 1$$
$$15 \times A(e^{15} - 1) = 1$$
$$A = \frac{15}{e^{15} - 1}$$
$$g(y) = \frac{15e^{15y}}{e^{15} - 1}$$

CDF da distribuição $g(y)$:

$$G(y) = \frac{15}{e^{15} - 1} \int_0^y e^{15y} dy$$

$$G(y) = \frac{1}{e^{15} - 1} (e^{15y} - 1)$$

Gerar amostras da distribuição $g(y)$ seguindo o método de transformação inversa:

$$U(e^{15} - 1) = e^{15y} - 1$$

$$y = \frac{\ln(U(e^{15} - 1) + 1)}{15}$$

c)

$$I = \int_0^{\infty} x^2 (1 + x^2)^{-3} dx$$

Substituição de variáveis

$$I = \int_0^1 \frac{(\frac{1}{y} - 1)^2 (1 + (\frac{1}{y} - 1)^2)^{-3}}{y^2} dy$$

$$I = \int_0^1 \frac{y^2 (1 - y)^2}{(2y^2 - 2y + 1)^3} dy$$

Função proposta $g(y)$:

$$g(y) = A(1 - y)^2, 0 \leq y \leq 1$$

Valor de A para garantir que $g(y)$ seja uma função de densidade válida:

$$I = \int_0^1 A(1 - y)^2 dy = 1$$

$$-A \left[\frac{(1 - y)^3}{3} \right]_0^1 = 1$$

$$\frac{-A}{3} (-1) = 1$$

$$A = 3$$

$$g(y) = 3(1 - y)^2, 0 \leq y \leq 1$$

CDF da distribuição $g(y)$:

$$G(y) = 3 \int_0^y (1 - y)^2 dy$$

$$G(y) = -3 \left[\frac{(1 - y)^3}{3} \right]_0^y$$

$$G(y) = -(1 - y)^3 + 1$$

Gerar amostras da distribuição $g(x)$ seguindo o método de transformação inversa:

$$(1 - y)^3 = (1 - U)$$

$$(1 - y) = (1 - U)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = 1 - (U)^{\frac{1}{3}}$$