Tarea repaso: Métodos Multivariados

Profesor: Dr. Andrés Ramírez-Morales

Entrega en línea de foto, hecha a mano: 13 Octubre 2025 (12:00 horas)

N.B.: En esta tarea las líneas abajo indican vectores. Las variables en mayúscula son matrices.

Parte 1: Teoría estadística básica

- Describa de manera general los elementos y construcción de un modelo estadístico
- Describa lo que es una variable aleatoria
- Defina lo que es un estimador
- Defina lo que es un operador lineal
- Defina lo que es una cantidad pivotal
- Describa el método pivotal para inferencias estadísticas
- Establezca las propiedades básicas de los operadores esperanza y varianza. Considere el caso de variables aleatorias escalares y vectoriales
- Defina y describa lo que es el valor p (p-value). Establezca su utilidad
- Establezca el Lemma de Neyman-Pearson
- Establezca la relación entre variables con distribución normal y variables con distribución χ^2
- Defina una distribución χ^2 no central
- Defina que es un estimador no-sesgado

Parte 2: Regresión lineal

- Establezca los modelos de regresión lineal simple y multivariado. Discuta sus similitudes y diferencias. Defina los supuestos y elementos para cada uno de ellos
- Para regresion lineal simple demuestre que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}. \tag{1}$$

  Describa la importancia de la última igualdad.

- Para regresión lineal simple demuestre que:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}. \tag{2}$$

- Para regresión lineal simple demuestre que:

$$Var[\beta_1] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}. \tag{3}$$

  Donde $S_{xx} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$.

- Sea $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1$, muestre que

$$Var[\hat{\beta}_0] = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{x}\frac{\sigma^2}{S_{xx}}. \tag{4}$$

- Defina y justifique un estimador de σ^2. Encuentre su distribución.
- Muestre que $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ son no sesgados. Explique por que nos interesa esta propiedad.
- Construya intervalos de confianza y pruebas de hipótesis para los parámetros de regresión linea simple.
- Escriba el modelo de regresión lineal multivariada en notación matricial. Escriba explícitamente las matrices.
- Escriba los supuesto del modelo de regresión lineal multivariada. Recuerde usar notación matricial.
- Encuentre las ecuaciones normales del modelo lineal multivariada.
- Para modelo lineal multivariado, sean X la matriz de co-variables, $\underline{\beta}$ el vector de parárametros y $\underline{y}$. Encuentre las dimensiones de $\underline{\beta}^T$, $(X^TX)^{-1}$, X^T.
- Partiendo del modelo lineal multivariado, encuentre $\hat{\beta}_{0,1}$ del modelo de regresión lineal simple.
- Para modelo lineal multivariado, escriba $\underline{\hat{y}}$.
- Para modelo lineal multivariado, muestre $\underline{\hat{\beta}}$ es no sesgada.
- Para modelo lineal multivariado, muestre $\underline{\hat{\beta}}$ es no sesgada.
- Para modelo lineal multivariado, muestre que muestre

$$Var[\underline{\hat{\beta}}] = \sigma^2(X^TX)^{-1} \tag{5}$$

- Discuta el teorema de Gauss-Markov en el contexto de regresión lineal multivariada.
- Para modelo lineal multivariado, proponga y justifique una distribucioón de densidad de probabilidad multivariada para las observaciones $\underline{y}$.
- Usando el lema de Neyman-Pearson, muestre que para regresión lineal multivariada

$$\lambda = \left[\frac{(\underline{y} - X\underline{\hat{\beta}})^T(\underline{y} - X\underline{\hat{\beta}})}{(\underline{y} - X\underline{\beta}^*)^T(\underline{y} - X\underline{\beta}^*)}\right]^{n/2} \tag{6}$$

- Para modelo lineal multivariado, interprete la siguiente estadística

$$\lambda = \frac{(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}^*)^T X^T X(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta}^*)}{(\underline{y} - X\underline{\beta}^*)^T(\underline{y} - X\underline{\beta}^*)} \tag{7}$$

- Interpretando el modelo lineal multivariado, discuta su uso como ANOVA.
- Para un $\underline{y}$ con distribución

$$\frac{\underline{y}}{\sigma} \sim N\left(\frac{X\underline{\beta}}{\sigma}, I\right) \tag{8}$$

  Muestre que

$$\frac{\underline{y}^T}{\sigma}X(X^TX)^{-1}X^T\frac{\underline{y}}{\sigma} \tag{9}$$

  y

$$\frac{\underline{y}^T}{\sigma}(I - X(X^TX)^{-1}X^T)\frac{\underline{y}}{\sigma} \tag{10}$$

  siguen distribciones χ^2 no centrales. Además demuestre que son independientes.

- Construya una estadística F_0 que siga una distribución de Fisher para el modelo de regresión lineal multivariada. Interprete dicha construcción.
- Formule una tabla de varianzas para el modelo de regresión lineal multivariado. Interprete sus resultados cuidadosamente.