Лабораторная работа №1 учебного года 2023-2024 по курсу «Численные методы»

Выполнил: Зубко Д. В.
Группа: М8О-408Б-20
Преподаватель: Пивоваров Д.Е.
Вариант по списку группы: 8

Условие лабораторной работы

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 8

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \ a > 0, \ c < 0.$$

$$u_x(0,t) = \exp((c-a)t),$$

$$u(\frac{\pi}{2},t) = \exp((c-a)t),$$

$$u(x,0) = \sin x,$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin x$.

Программа

main.py
```
import numpy as np

from functions import phi0, phi1, psi
from show import show_inaccuracy, show_result
from task import a, c, count_t, count_x, h, sigma, tau
```

```
def explicit_scheme(bound_condition):
    u = np.zeros((count_t, count_x))

    for i in range(1, count_x):
        u[0][i] = psi(i * h)

    for k in range(1, count_t):
        for i in range(1, count_x - 1):
            u[k][i] = (
                sigma * u[k - 1][i + 1]
                + (1 - 2 * sigma) * u[k - 1][i]
                + sigma * u[k - 1][i - 1]
                + c * tau * u[k - 1][i]
            )

        if bound_condition == 1:
            u[k][0] = u[k][1] - h * phi0(k * tau)
            u[k][-1] = phi1(k * tau)
        elif bound_condition == 2:
            u[k][0] = (phi0(k * tau) + u[k][2] / (2 * h) - 2 * u[k][1] / h) *
2 * h / -3
            u[k][-1] = phi1(k * tau)
        elif bound_condition == 3:
            u[k][0] = (
                u[k][1] - h * phi0(k * tau) + (h**2 / (2 * tau) * u[k -
1][0])
            ) / (1 + h**2 / (2 * tau))
            u[k][-1] = phi1(k * tau)
        else:
            print("Условие не найдено")
    return u


def implicit_scheme(bound_condition):
    u = np.zeros((count_t, count_x))

    ai = np.zeros(count_x)
    bi = np.zeros(count_x)
    ci = np.zeros(count_x)
    di = np.zeros(count_x)

    for i in range(1, count_x):
        u[0][i] = psi(i * h)
```

```
    for k in range(1, count_t):
        for i in range(1, count_x - 1):
            ai[i] = sigma
            bi[i] = -2 * sigma + c * tau - 1
            ci[i] = sigma
            di[i] = -u[k - 1][i]

        if bound_condition == 1:
            bi[0] = -(1 + 2 * sigma - c * tau)
            ci[0] = 2 * sigma
            di[0] = -(u[k - 1][0] - 2 * a * tau * phi0(k * tau) / h)
            ai[-1] = 2 * sigma
            bi[-1] = -(1 + 2 * sigma - c * tau)
            di[-1] = -phi1(k * tau)
        elif bound_condition == 2:
            bi[0] = -(1 + 2 * sigma - c * tau)
            ci[0] = 2 * sigma
            di[0] = -(u[k - 1][0] - 2 * a * tau * phi0(k * tau) / h)
            ai[-1] = 2 * sigma
            bi[-1] = -(1 + 2 * sigma - c * tau)
            di[-1] = -phi1(k * tau)
        elif bound_condition == 3:
            bi[0] = -(1 + 2 * sigma - c * tau)
            ci[0] = 2 * sigma
            di[0] = -(
                (1 - sigma) * u[k - 1][1] + sigma / 2 * u[k - 1][0]
            ) - sigma * phi0(k * tau)
            ai[-1] = 2 * sigma
            bi[-1] = -(1 + 2 * sigma - c * tau)
            di[-1] = -phi1(k * tau)
        else:
            print("Условие не найдено")
        u[k] = thomas_algorithm(ai, bi, ci, di)
    return u


def thomas_algorithm(a, b, c, d):
    size = len(a)
    p = np.zeros(size)
    q = np.zeros(size)
    p[0] = -c[0] / b[0]
    q[0] = d[0] / b[0]

    for i in range(1, size):
        s = b[i] + a[i] * p[i - 1]
```

```
        p[i] = -c[i] / s
        q[i] = (d[i] - a[i] * q[i - 1]) / s

    result = np.zeros(size)
    result[-1] = q[-1]

    for i in range(size - 2, -1, -1):
        result[i] = p[i] * result[i + 1] + q[i]

    return result


def explicit_implicit_scheme(omega, bound_condition):
    u = np.zeros((count_t, count_x))

    imp = implicit_scheme(bound_condition)
    exp = explicit_scheme(bound_condition)

    for k in range(count_t):
        for i in range(count_x):
            u[k][i] = imp[k][i] * omega + exp[k][i] * (1 - omega)

    return u


def get_axis_np(count, mul):
    axis = np.zeros(count)
    for i in range(count):
        axis[i] = mul * i
    return axis


def solve():
    res1 = explicit_scheme(1)
    res2 = implicit_scheme(1)
    res3 = explicit_implicit_scheme(0.5, 1)

    t_axis = get_axis_np(count_t, tau)
    x_axis = get_axis_np(count_x, h)

    show_result(t_axis, x_axis, res1, res2, res3)
    show_inaccuracy(t_axis, x_axis, res1)
```

```
if __name__ == "__main__":
    solve()
```

show.py

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

from functions import analytic_solution
from task import count_t


def show_result(t_axis, x_axis, u1, u2, u3):
    fig, ax = plt.subplots(2)
    fig.suptitle("Сравнение численных решений ДУ с
аналитическим")
    fig.set_figheight(15)
    fig.set_figwidth(16)
    time = 0
    for i in range(2):
        ax[i].plot(x_axis, u1[time, :], label="Explicit scheme")
        ax[i].plot(x_axis, u2[time, :], label="Implicit scheme")
        ax[i].plot(x_axis, u3[time, :], label="Crank-Nicholson
scheme")
        ax[i].plot(
            x_axis,
            [analytic_solution(x, t_axis[time]) for x in x_axis],
            label="Analytic",
        )
        ax[i].grid(True)
        ax[i].set_xlabel("x")
        ax[i].set_ylabel("u")
        ax[i].set_title(f"Решения при t = {time / count_t}")
        time += count_t - 1

    plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 2), loc="upper right",
borderaxespad=0)
    plt.show()

    fig = plt.figure(num=1, figsize=(19, 12), clear=True)
    ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, projection="3d")
    fig.suptitle("Аналитическое решение")
    xgrid, tgrid = np.meshgrid(x_axis, t_axis)
```

```
    ax.plot_surface(xgrid, tgrid, analytic_solution(xgrid, tgrid))
    ax.set(xlabel="x", ylabel="t", zlabel="u")
    fig.tight_layout()
    plt.show()


def show_inaccuracy(t_axis, x_axis, u):
    inaccuracy = np.zeros(count_t)
    for i in range(count_t):
        inaccuracy[i] = np.max(
            np.abs(u[i] - np.array([analytic_solution(x, t_axis[i]) for x in
x_axis]))
        )

    plt.figure(figsize=(14, 8))
    plt.plot(t_axis[1:], inaccuracy[1:], "violet", label="Ошибка")
    plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc="upper right",
borderaxespad=0.0)
    plt.title("График изменения ошибки во времени")
    plt.xlabel("t")
    plt.ylabel("error")
    plt.grid(True)

    plt.show()
```

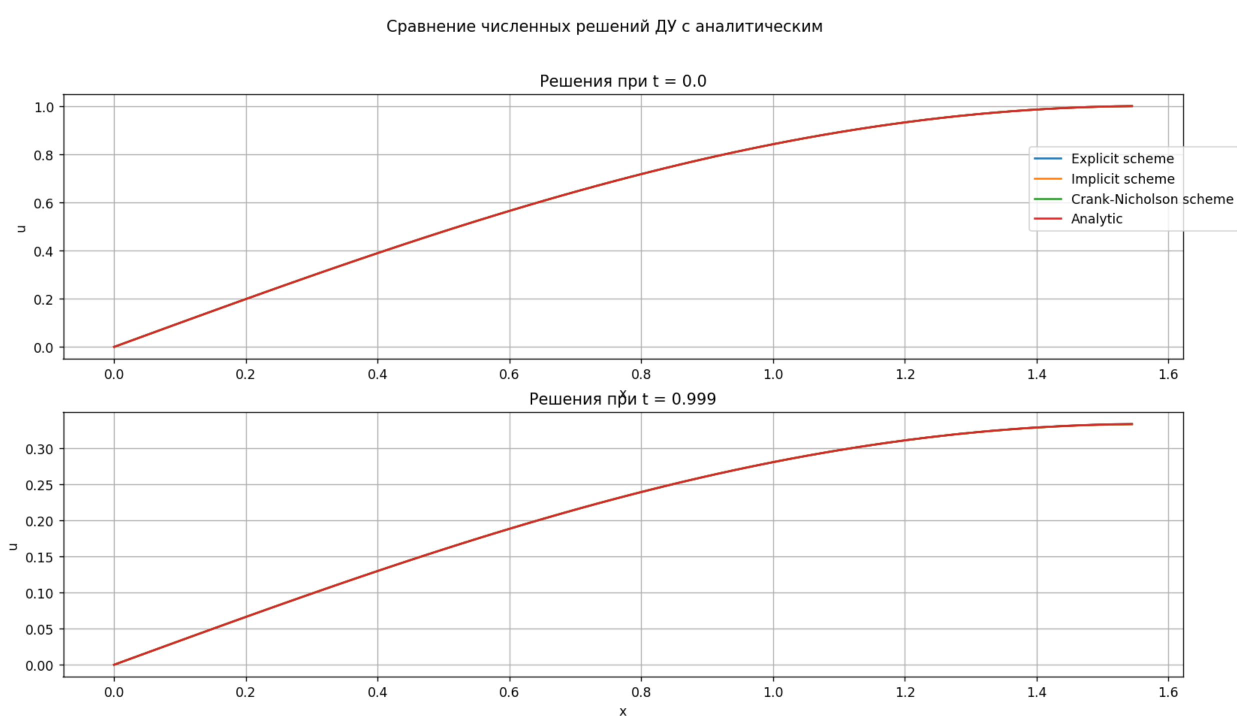
task.py

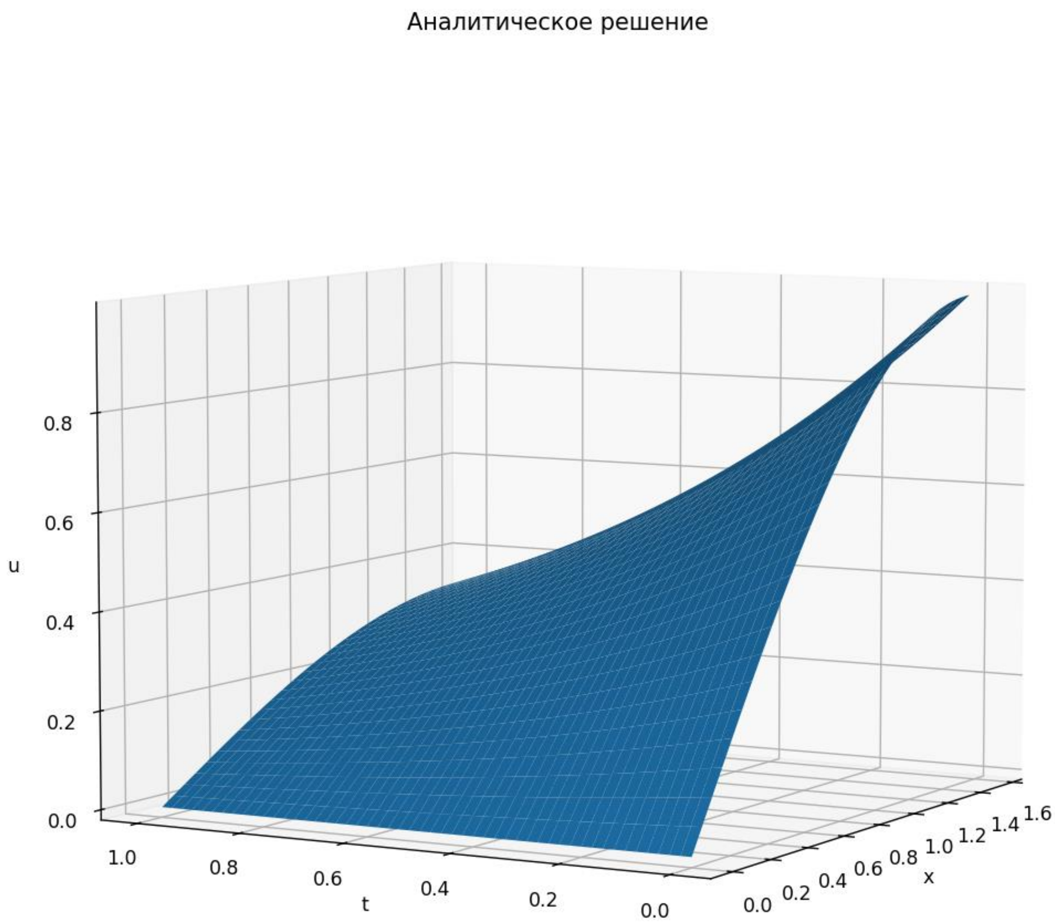
```
import numpy as np

t_max = 1

count_x = 60
count_t = 1000

r_coord = np.pi / 2

a = 0.1
c = -1

h = r_coord / count_x
tau = t_max / count_t

sigma = a * tau / (h**2)
```

functions.py

```
import numpy as np

from task import a, c


def analytic_solution(x, t):
    return np.exp((c - a) * t) * np.sin(x)


def psi(x):
    return np.sin(x)


def phi0(t):
    return np.exp((c - a) * t)


def phi1(t):
    return np.exp((c - a) * t)
```

Результаты работы




Аналитическое решение
u
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
t
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6

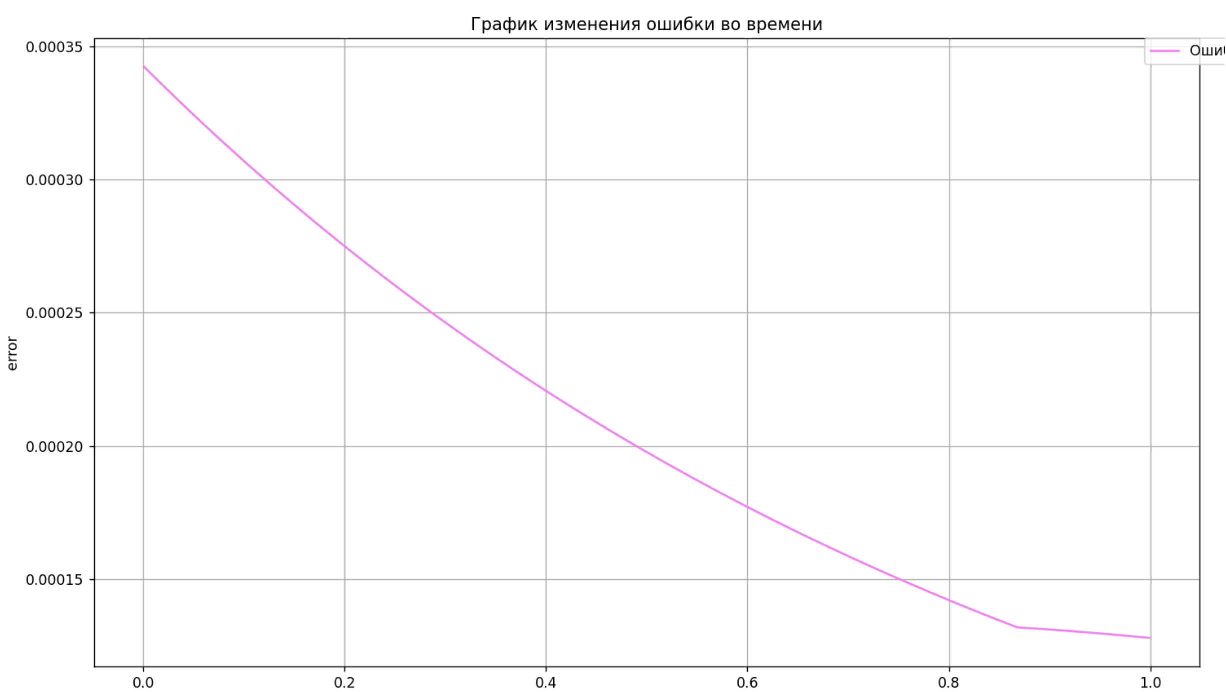


График изменения ошибки во времени
error
0.00035
0.00030
0.00025
0.00020
0.00015
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Вывод по лабораторной работе

Благодаря данной лабораторной работе, я приобрел знания в области численных методов для решения дифференциальных уравнений параболического типа: были исследованы различные методы решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа, включая схему Кранка-Николсона, неявную и явную конечно-разностные методы, а также использование аналитического решения. Эксперименты позволили оценить точность и эффективность каждого метода.