МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*4*
по курсу «Численные методы»

Выполнил: А.В. Клитная
Группа: 8О-408Б-20

Москва, 2023

Условие

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(\pi, y, t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$
$$u(x, \pi, t) = (-1)^{\mu_2}\cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2,\ \mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$.

Метод решения

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на число независимых пространственных переменных (в двумерном случае - на два). На каждом дробном временном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а остальные явно. На следующем дробном шаге следующий по порядку дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для задач имеет вид:

$$\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{a}{h_x^2} \cdot \left(u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{a}{h_y^2} \cdot \left(u_{1,j+1}^{k} - 2 \cdot u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right) + f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{a}{h_x^2} \cdot \left(u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{a}{h_y^2} \cdot \left(u_{1,j+1}^{k+1} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}\right) + f_{i,j}^{k+1}.$$

Из этой схемы видно, что на первом шаге диф оператор дифференцируется неявно , таким образом мы находим значения на подслое, применяя метод прогонки.

Также видно, что оператор прогонки осуществляется по направлению y. Таким образом значения будут определятся на втором шаге.
Такой метод будет иметь высокую точность и второй порядок по времени.

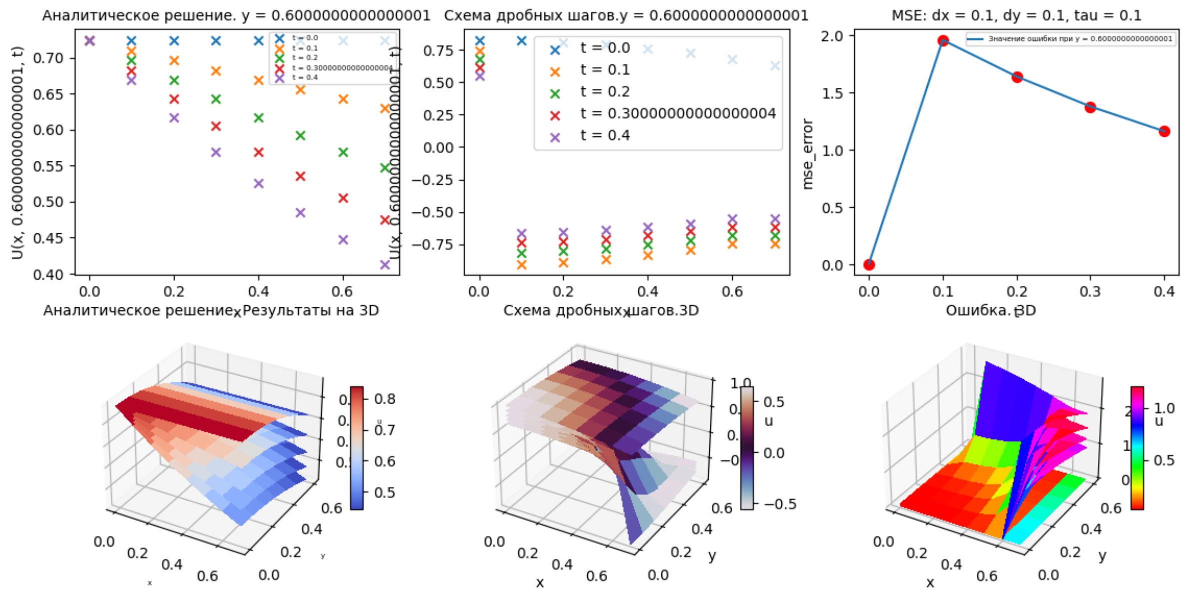
В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанные производные. Схема метода дробных шагов имеет вид:

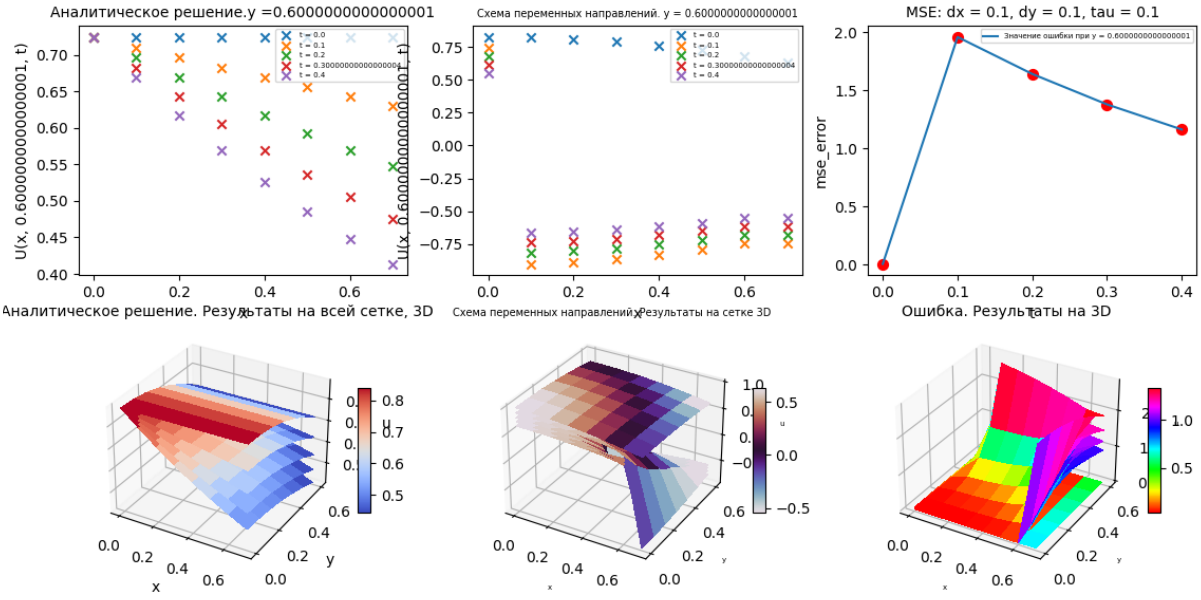
$$\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{k}}{\tau} = \frac{a}{h_x^2} \cdot \left(u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{a}{h_y^2} \cdot \left(u_{1,j+1}^{k+1} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}\right) + \frac{f_{i,j}^{k+1}}{2}.$$

Первая схема чисто неявная и с её помощью мы осуществляем скалярные прогонки в направлении оси x. На втором дробном шаге по времени с помощью второй подсхемы осуществляются скалярные прогонки в направлении оси y.
Данная схема имеет первый порядок по времени и второй по x и y.

Результаты





Выводы

При работе с данной лабораторной работой я изучила методы численного решения, используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Также было выявлено, что более точной является схема переменных направлений.