МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*2*
по курсу «Численные методы»

Выполнил: Велесов Д.И.
Группа: 8О-408Б-20

Москва, 2023

Условие

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2u,$$

$$u(0,t) = \cos(2t),$$

$$u(\frac{\pi}{2}, t) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(-x)\cos x,$$

$$u_t(x,0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-x)\cos x\cos(2t)$

Метод решения

Изначально задаём начальные условия и условия на границах. Затем также задаётся и аналитические решение. Используем следующую конечно-разностную схему:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O\left(\tau^2 + h^2\right), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \ldots \quad (5.38)$$

Аппроксимация 1 порядка рассчитывалась по формуле:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau \ .$$

2 порядка по формуле:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2 \psi_1''(x_j)\frac{\tau^2}{2} \ .$$

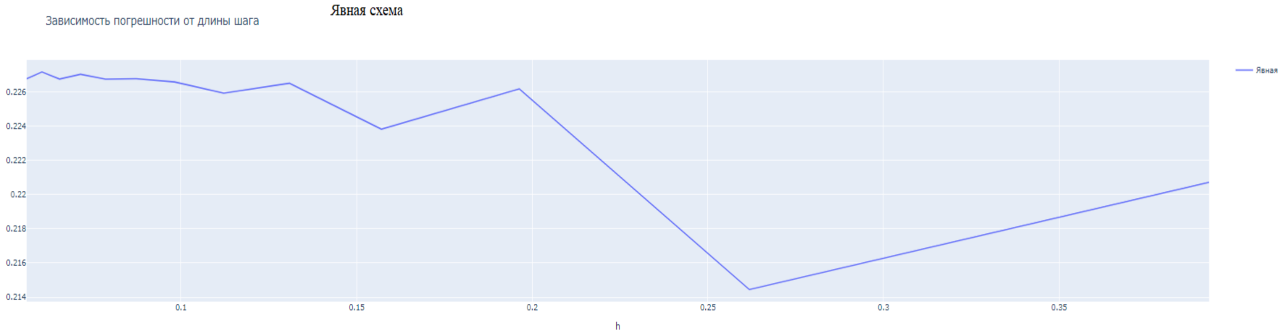
Описание программы

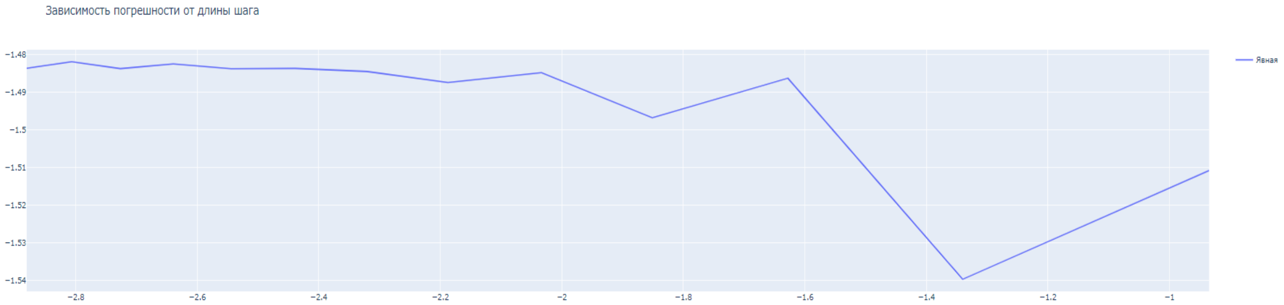
Программа состоит из 1 ipynb файла.
В программе задаются условия и параметры варианта.

Все необходимые данные варианта введены в программу заранее. После реализуются решения краевой задачи с помощью явной и неявной схем, объявленных функциями в программе с применением необходимой аппроксимации. В процессе вычисления выводятся графики погрешностей.

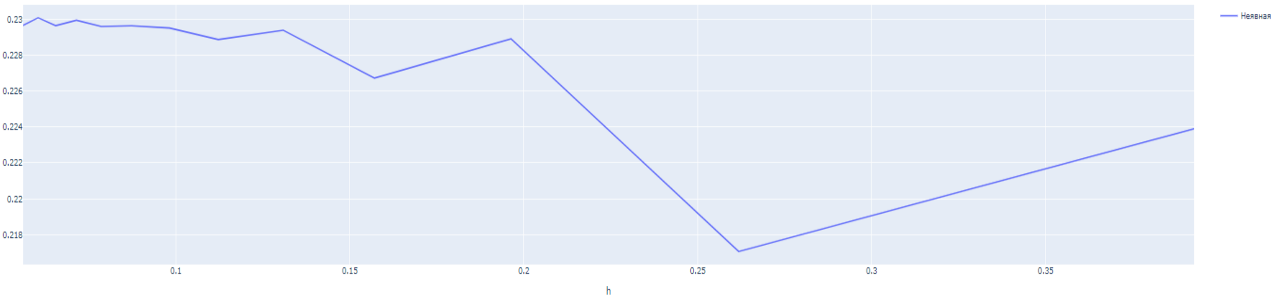
Результаты

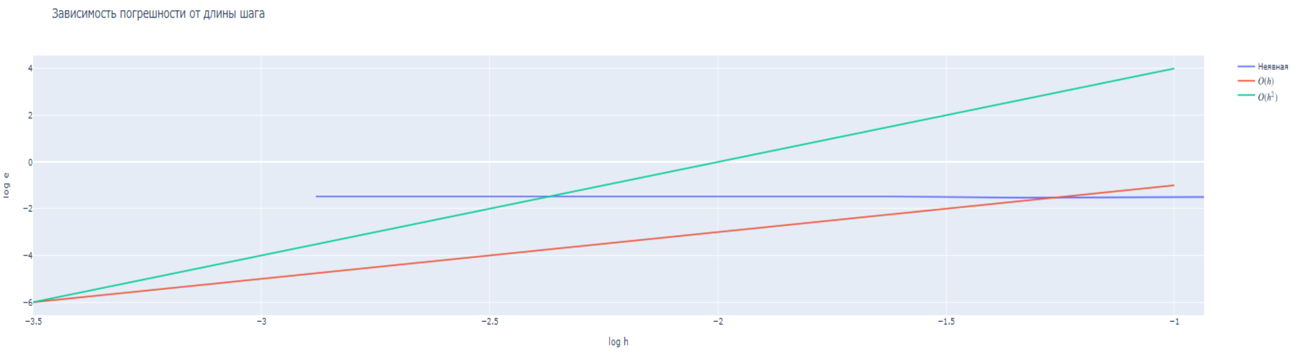
Явная схема



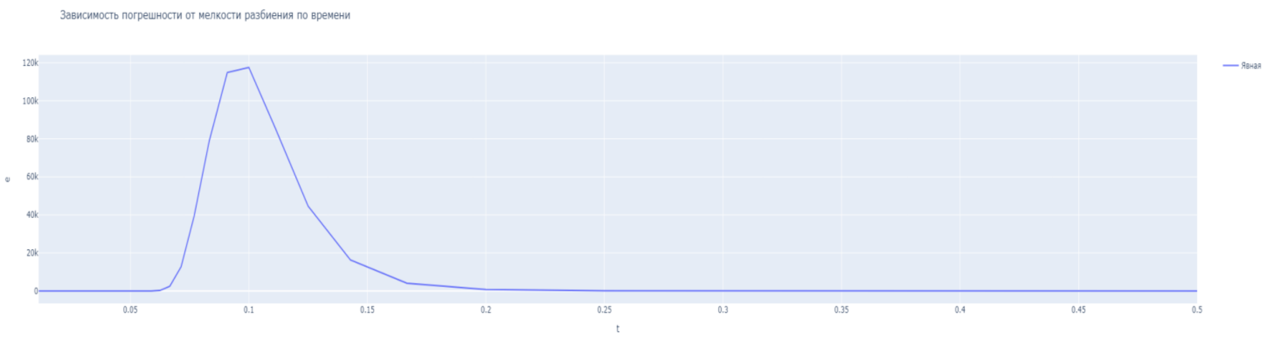


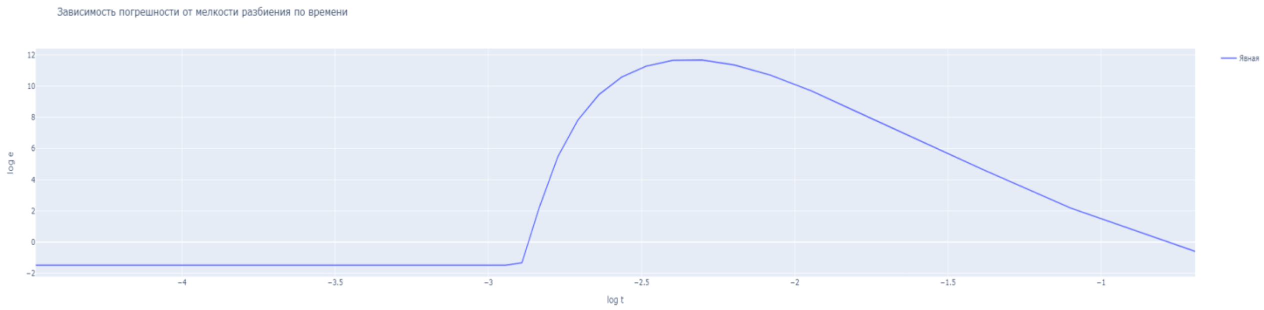
Неявная схема



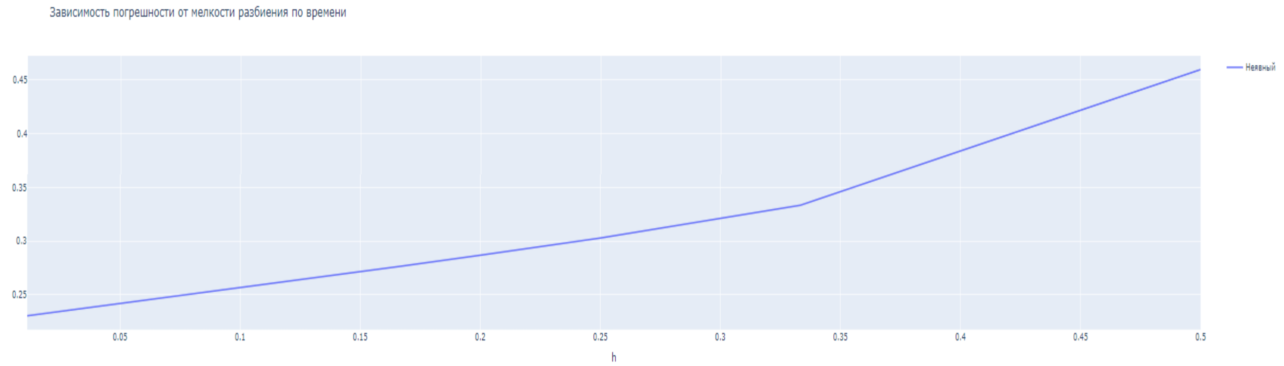


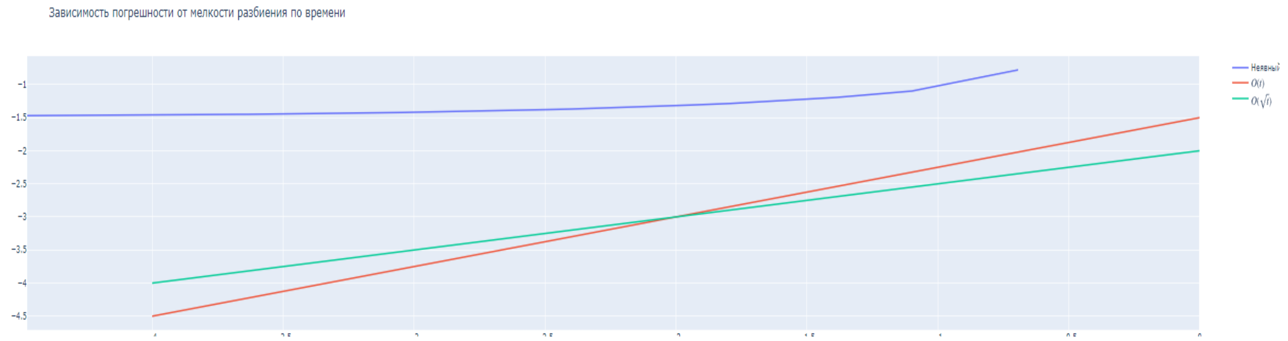
Явная схема

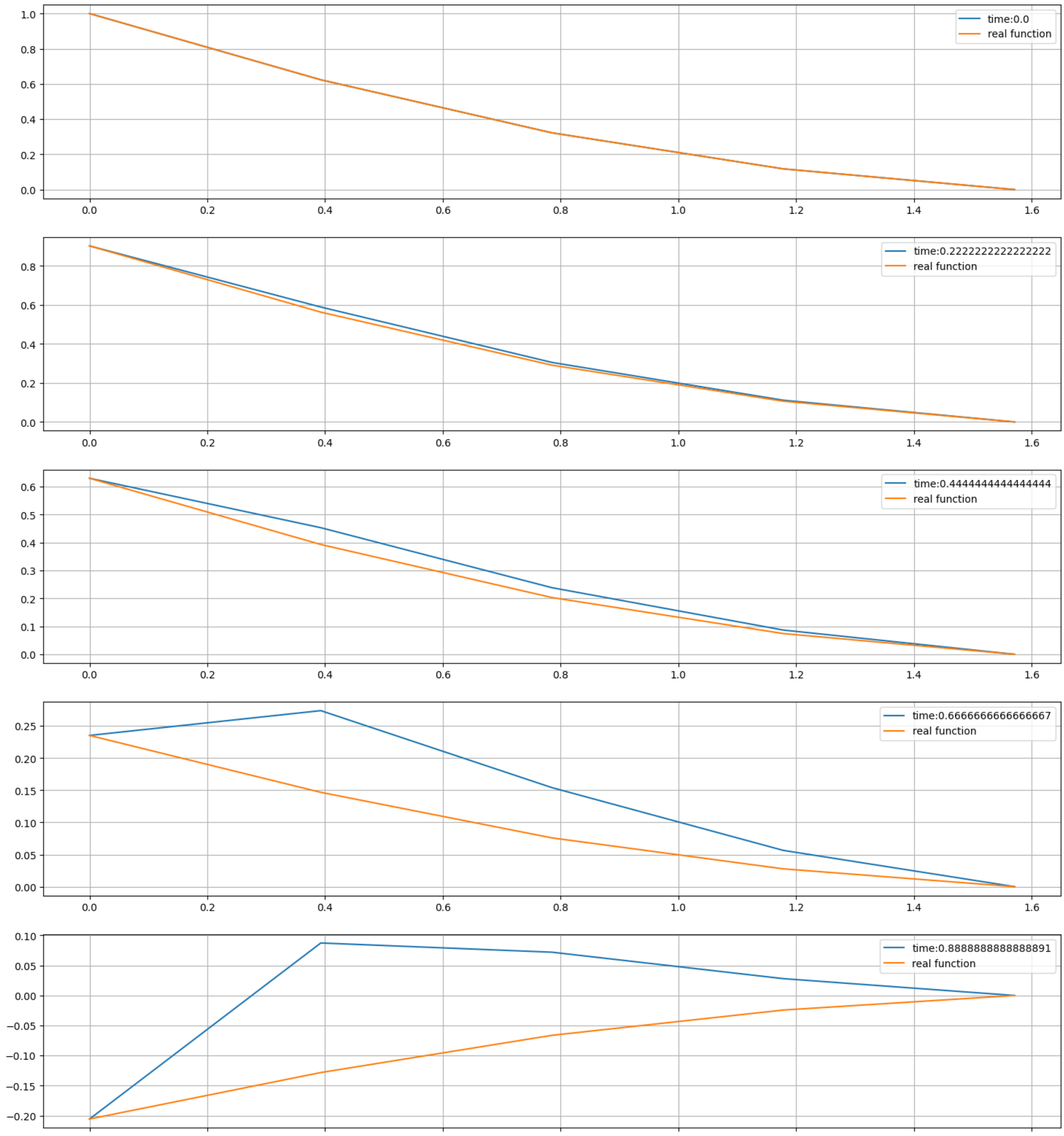



Зависимость погрешности от мелкости разбиения по времени
Явная
log e
log t
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1

Неявная схема






time:0.0
real function
time:0.2222222222222222
real function
time:0.4444444444444444
real function
time:0.6666666666666667
real function
time:0.8888888888888891
real function

Выводы

Выполнив данную лабораторную работу, изучил явную схему крест и неявную схему для решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения гиперболического типа. Выполнил три варианта аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком и двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислил погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Также исследовал зависимость погрешности от сеточных параметров h и thau.