МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа
по курсу «Численные методы»

Численное решение интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода.

Выполнил: *К. Д. Каширин*
Группа: *М8О-408Б-20*
Преподаватель: Д. Е. Пивоваров

Москва, 2023

Условие

Решить численными методами интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода.

Метод решения

Уравнения Вольтерра являются частным случаям интегральных уравнений Фредгольма с наложенным условием (где K - ядро Вольтерра):

$$K(x,t) = 0, t > x$$

Линейное уравнение Вольтерра II рода имеет следующий вид:

$$y(x) - \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x),\ \ x \in [a,b]$$

$y(x)$ – неизвестная функция

$K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения

$f(x)$ – свободный член (правая часть) интегрального уравнения

Метод квадратур

При численном решении интегральных уравнений входящие в них интегралы обычно заменяют конечными суммами.

Согласно методу квадратур интегральные операторы заменяют суммами, полученными с помощью различных квадратурных формул.

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i g(x_i) + R$$

Обозначения:

Узлы сетки: $a \le\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$

R – ошибка аппроксимации квадратурной формулы (полагается малой и отбрасывается).

Чтобы применить метод квадратур к решению уравнению необходимо использовать следующие равенства:

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds = f(x_i), i = 1,2,\dots,n$$

x_i – одно из фиксированных значений переменной x

Если заменить интеграл конечной суммой получим следующее:

$$y(x_i) - \sum_{j=1} A_j K\left(x_i, x_j\right) y\left(x_j\right) = f(x_i) + R_i, i = 1,2,\dots,n$$

A_j - веса квадратурной формулы, R_i- ошибки аппроксимации

В измененном виде имеем:

$$y_i - \sum_{j=1}^{i} A_j K_{ij} y_j = f_i, i = 1,2,\dots,n$$

Преобразуем выражения, внося из суммы значения при $j = i$

$$-\sum_{j=1}^{i-1} A_j K_{ij} y_j + (1 - A_i K_{ii}) y_i = f_i, i = 1,2,\dots,n$$

$$\begin{pmatrix} 1 - A_1 K_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_1 K_{n1} & \cdots & 1 - A_n K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

С помощью формулы трапеции установим условие на шаг для равномерной сетки

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = h$$

Теперь получим формулу для функции метода квадратур

$$y_i = \left(1 - \frac{h}{2} K_{ii}\right)^{-1} \left(f_i + \frac{h}{2} K_{i1} y_j + h \sum_{j=2}^{i-1} K_{ij} y_j\right), i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Мною были рассмотрены следующие функции:

1.

$$y(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2 - s^2} y(s) ds, x \in [0,1]$$

Аналитическое решение: $y(x) = e^{x^2 + x}$

2.

$$y(x) = x + \int_0^x (4\sin(x - s) - x + s) y(s) ds$$

Аналитическое решение: $\frac{x(e^x + e^{-x})}{2}$

Описание программы

Программа состоит из одного файла cp.py - реализацию численного метода для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием метода квадратур. Программа решает два примера интегрального уравнения с заданными функциями *solution, f_volt, K_volt* для первого примера и *solution2, f_volt2, K_volt*2 для второго примера.

После проведения расчетов для обоих примеров выводятся точные решения, численные решения, а также вычисленные погрешности. Далее, используется библиотека Plotly для построения графиков, отображающих точные и численные значения решений на интервалах x для каждого из примеров.

Результаты

```
k.d.kashirin@macbook-C02F11GJMD6M cp % python3 cp.py
Пример 1:
Точное решение:
[1.0, 1.020193495371487, 1.0415953793188284, 1.0642642730697094, 1.0882630060785004, 1.1136589030919124, 1.140524095063185, 1.1689358559045513, 1.198976967254205,
 1.2307361136383732, 1.2643083106332507, 1.2997953688775357, 1.337306397056385, 1.376958347274326, 1.4188766065608072, 1.4631956386107385, 1.5100596802570536, 1.5
596234976067807, 1.6120532072506524, 1.6675271684836115, 1.7262369530549304, 1.7883883996079295, 1.8542027606769298, 1.923917950890385, 1.997789905892149, 2.07609
40624465776, 2.1591269712476238, 2.2472080551185267, 2.340681526579509, 2.439918480190134, 2.545319176656141, 2.657315537445092, 2.7763738706005863, 2.90299785060
27163, 3.037731777517483, 3.181164143337109, 3.3339315363673157, 3.496722917800868, 3.6702843082674783, 3.855423926211569, 4.053017824469861, 4.26401607645446, 4.
4894495689553215, 4.730437464826916, 4.988195405795092, 5.26404453339793, 5.559421414756808, 5.875888969570492, 6.215148505560264, 6.579052981706857, 6.9696216321
684945, 7.38905609893065]
Метод квадратур:
[1.0, 1.04000373118919, 1.0618218664960293, 1.084931643587022, 1.109397114501301, 1.135286914032927, 1.1626745766978304, 1.1916388800420639, 1.2222642165099604, 1
.2546409962991707, 1.2888660838580666, 1.3250432709317728, 1.3632837893384255, 1.403706866959763, 1.4464403307626383, 1.4916212610337218, 1.5393967014120022, 1.58
99244297466428, 1.6433737952955947, 1.6999266283179748, 1.759778228705916, 1.8231384409553324, 1.8902328234965078, 1.9613039212019283, 2.0366126507686184, 2.11643
98096445494, 2.201087720243731, 2.290882022383712, 2.386173628195235, 2.487340855210847, 2.594791754953296, 2.7089666561332493, 2.830340943549186, 2.9594280959823
256, 3.096783008821125, 3.2430056298609644, 3.3987449397362988, 3.5647033117898426, 3.741641289905213, 3.93038282697009, 4.13182103124549, 4.346924473048594, 4.57
6744109874042, 4.822420894451466, 5.08519413734399, 5.366410703621953, 5.667535131997648, 5.990160774692642, 6.336022067355461, 6.707008050696535, 7.1051772793197
56, 7.532774268687]
Погрешность:
0.45857368364553547
Пример 2:
Точное решение:
[0.0, 0.032274849563932645, 0.06465044435017789, 0.09722770431303739, 0.13010789912536164, 0.1633928236745914, 0.1971849743238742, 0.23158772619487164, 0.26670551
17302413, 0.30264400079548864, 0.3395102825819415, 0.3774130495750108, 0.4164627838546616, 0.456771945998135, 0.4984551668584424, 0.5416294424959927, 0.5864143325
44929, 0.6329321623003366, 0.6813082288174519, 0.7316710113193587, 0.7841523862154047, 0.8388878470387247, 0.8960167296178148, 0.9556824428040734, 1.0180327050846
407, 1.0832197874176868, 1.151400762635605, 1.2227377617702875, 1.297398237663875, 1.3755552362380665, 1.4573876758052264, 1.5430806348152437]
Метод квадратур:
[0.0, 0.03225806451612903, 0.06461680730134185, 0.09717708116286493, 0.13004008823833627, 0.1633075552966668, 0.1970819098026398, 0.23146645700141555, 0.266565558
28047157, 0.30248481106821523, 0.3393312305305613, 0.377213433329166, 0.4162418237077675, 0.4565287821761896, 0.49818885706503474, 0.5413389592279272, 0.586098560
1723664, 0.6325898939048276, 0.6809381627807002, 0.731271747654999, 0.783722422635511, 0.8384255747461828, 0.8955204288150902, 0.9551502779082879, 1.0174627196382
287, 1.0826098986832504, 1.1507487558628933, 1.2220412841225299, 1.2966547917899693, 1.3747621734763549, 1.4565421890038281, 1.5421797507530801]
Погрешность:
0.0024854983342567517
```

Рис. 1. Консольное взаимодействие программы с пользователем.

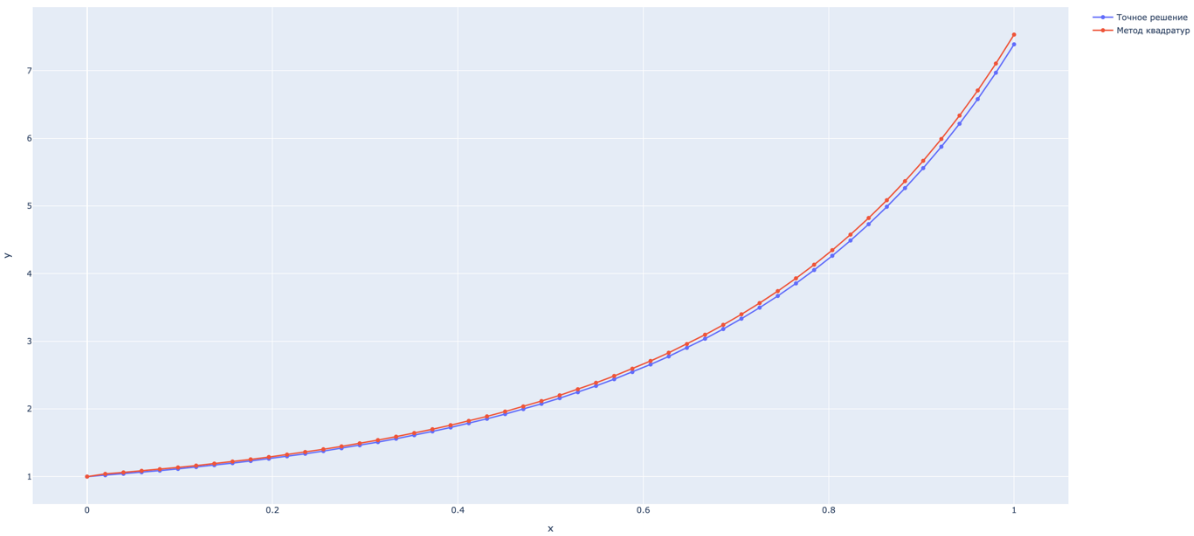

Рис. 2. График, отображающий точные и численные значения решений на интервалах x для примера 1.

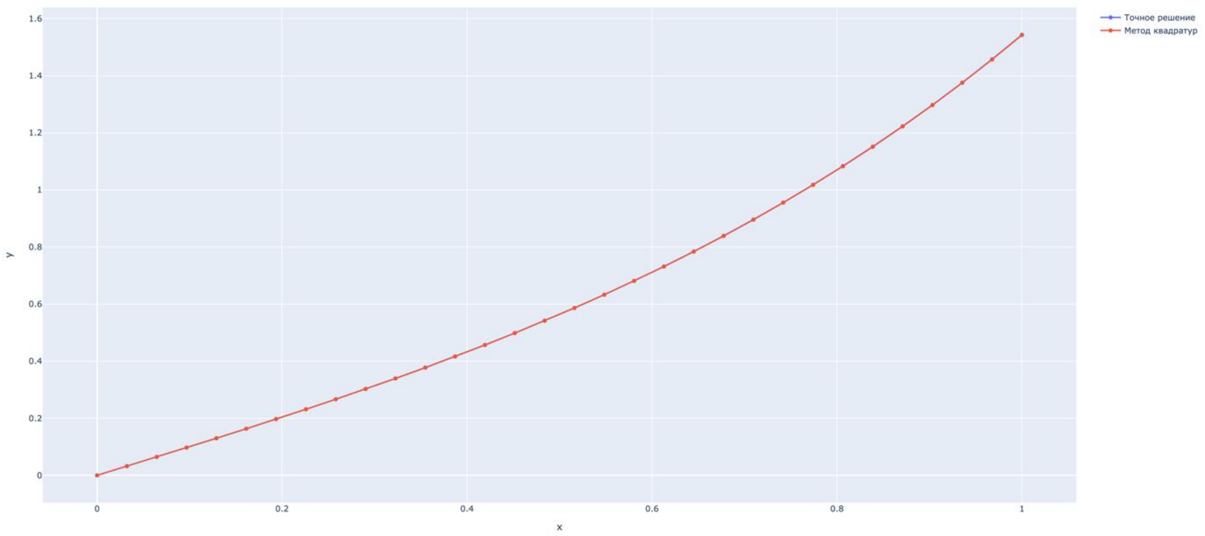

Рис. 3. График, отображающий точные и численные значения решений на интервалах x для примера 2.

Вывод

В ходе выполнения данной курсовой работы лабораторная я освоил основные принципы численного решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, провел сравнительный анализ точности и эффективности метода квадратур и оценил его применимость для данного класса интегральных уравнений.