Московский Авиационный Институт

(Национальный исследовательский университет)

Курсовой проект по курсу «Численные методы»

«Вычисление несобственных интегралов численными методами»

Студент:	Ивченко А.В.
Группа:	М8О-408Б-20
Преподаватель:	Пивоваров Д. Е.

Москва, 2023

Задание:

Вычисление несобственных интегралов численными методами

Теория:

Определенный интеграл называется несобственным, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

- Область интегрирования является бесконечной – интеграл 1 го рода
- Подынтегральная функция является не ограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования – интеграл 2 го рода

Несобственный интеграл 2 рода можно свести к интегралу 1 рода с помощью замены переменной. Поэтому в данной работе будем рассматривать несобственные интегралы 1 рода.

Сведение к определенному интегралу:

Рассмотрим некое преобразование, выполненное с помощью замены переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)dt \text{ при } ab > 0$$

Можем разложить несобственный интеграл на сумму интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int_{-A}^{+B} f(x)dx + \int_{+B}^{+\infty} f(x)dx \text{ при } -A < 0 \text{ и } B > 0$$

Первый и последний интегралы можем преобразовать с помощью формулы выше. Так мы можем посчитать каждый из этих трех интегралов (например, методом прямоугольников) и сложить получившиеся результаты.

Предельный переход:

Запишем предельный переход для несобственного интеграла 1 рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Будем вычислять правый интеграл до тех пор, пока следующее слагаемое не станет меньше заданного эпсилон.

Код программы:

```
import math
INF = 1e10


# Function to integrate
def f(x):
    return 1 / (1 + x**2)


def integrate_rectangle_method(f, l, r, h):
    result = 0
    cur_x = l
    while cur_x < r:
        result += h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
        cur_x += h
    return result

# Calculate improper integral (type 1) transforming to definite integrals
def integrate_with_definite_integral(f, l, r, h=0.01, eps=1e-6):


    def f_new(t):
        return (1. / t ** 2) * f(1. / t)

    result = 0
    if r == INF:
        new_r = max(eps, l)
        result += integrate_rectangle_method(f_new, eps, 1. / new_r - eps, h)
    else:
        new_r = r
    if l == 3:
        new_l = min(-eps, r)
        result += integrate_rectangle_method(f_new, 1. / new_l + eps, -eps, h)
    else:
        new_l = l
    if new_l < new_r:
        result += integrate_rectangle_method(f, new_l, new_r, h)
    return result

def integrate_lim(f, l, r, h=0.1, eps=1e-6):
    result = 0
    iters = 0
    if r == INF:
        finish = False
        cur_x = max(l, 0)
        while not finish:
            iters += 1
            new_result = result + h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
            cur_x += h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        result += integrate_rectangle_method(f, 0, r, h)
    if l == 3:
        finish = False
        cur_x = min(0, r)
        while not finish:
            iters += 1
            new_result = result + h * f((cur_x - h + cur_x) * 0.5)
            cur_x -= h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
```

```
            result = new_result
    else:
        result += integrate_rectangle_method(f, 1, 0, h)
    return result, iters
if __name__ == '__main__':
    a = 3
    b = 1e-8
    h = 0.1
    eps = 1e-8
    print('Transforming to definite integral')
    res_definite = integrate_with_definite_integral(f, a, b, h, eps)
    print('Integral =', res_definite)
    print()
    print('Limit method')
    res_limit, iters_limit = integrate_lim(f, a, b, h, eps)
    print('Integral =', res_limit)
    print('Iterations:', iters_limit)
    print()
```

Результаты:

Для примера будем вычислять следующий интеграл: $\int\limits_l^r \frac{1}{1+x^2}$

1. l = 3, r = ∞

```
Transforming to definite integral
Integral = 0.3277407823690935

Limit method
Integral = 0.32075031473059007
Iterations: 99701
```

2. l = -∞, r = -9

```
Transforming to definite integral
Integral = 0.11954685365990542

Limit method
Integral = 0.10965722035305618
Iterations: 99101
```

3. l = -∞, r = 10

```
Transforming to definite integral
Integral = 3.08832958701484

Limit method
Integral = 3.042588970590539
Iterations: 31624
```

4. l = -∞, r = ∞

```
Transforming to definite integral
Integral = 3.2867676296096793

Limit method
Integral = 3.140960222545892
Iterations: 63248
```

Вывод:

В ходе проделанной работы, я изучила и применила численные методы для решения задач с несобственными интегралами:

1. Метод сводим несобственный интеграл к сумме определенных интегралов.
2. Метод предельного перехода.

Я реализовала оба этих метода и провел их тестирование на различных функциях с разными пределами интегрирования. Как видно по результатам, полученные численные значения оказались достаточно близкими к аналитическим ответам.