МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*4*
по курсу «Численные методы»

Выполнил: Велесов Д.И.
Группа: 8О-408Б-20

Москва, 2023

Условие

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y .

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy\sin t ,$$

$u(0, y, t) = 0,$

$u(1, y, t) = y\cos t,$

$u(x, 0, t) = 0,$

$u(x, 1, t) = x\cos t,$

$u(x, y, 0) = xy$.

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy\cos t$.

Метод решения

В схеме метода переменных направлений (МПН), как и во всех методах расщепления, шаг по времени τ разбивается на число независимых пространственных переменных (в двумерном случае - на два). На каждом дробном временном слое один из пространственных дифференциальных операторов аппроксимируется неявно (по соответствующему координатному направлению осуществляются скалярные прогонки), а остальные явно. На следующем дробном шаге следующий по порядку дифференциальный оператор аппроксимируется неявно, а остальные – явно и т.д. В двумерном случае схема метода переменных направлений для задач имеет вид:

$$\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{k}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{a}{h_x^2} \cdot \left(u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{a}{h_y^2} \cdot \left(u_{1,j+1}^{k} - 2 \cdot u_{i,j}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right) + f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{a}{h_x^2} \cdot \left(u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{a}{h_y^2} \cdot \left(u_{1,j+1}^{k+1} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}\right) + f_{i,j}^{k+1}.$$

Из этой схемы видно, что на первом шаге диф. оператор дифференцируется неявно , таким образом мы находим значения на подслое, применяя метод прогонки.

Также видно, что оператор прогонки осуществляется по направлению y. Таким образом значения будут определятся на втором шаге.
Такой метод будет иметь высокую точность и второй порядок по времени.

В отличие от МПН метод дробных шагов (МДШ) использует только неявные конечно-разностные операторы, что делает его абсолютно устойчивым в задачах, не содержащих смешанные производные. Схема метода дробных шагов имеет вид:

$$\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{k}}{\tau} = \frac{a}{h_x^2} \cdot \left(u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{a}{h_y^2} \cdot \left(u_{1,j+1}^{k+1} - 2 \cdot u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}\right) + \frac{f_{i,j}^{k+1}}{2}.$$

Первая схема чисто неявная и с её помощью мы осуществляем скалярные прогонки в направлении оси x. На втором дробном шаге по времени с помощью второй подсхемы осуществляются скалярные прогонки в направлении оси y.

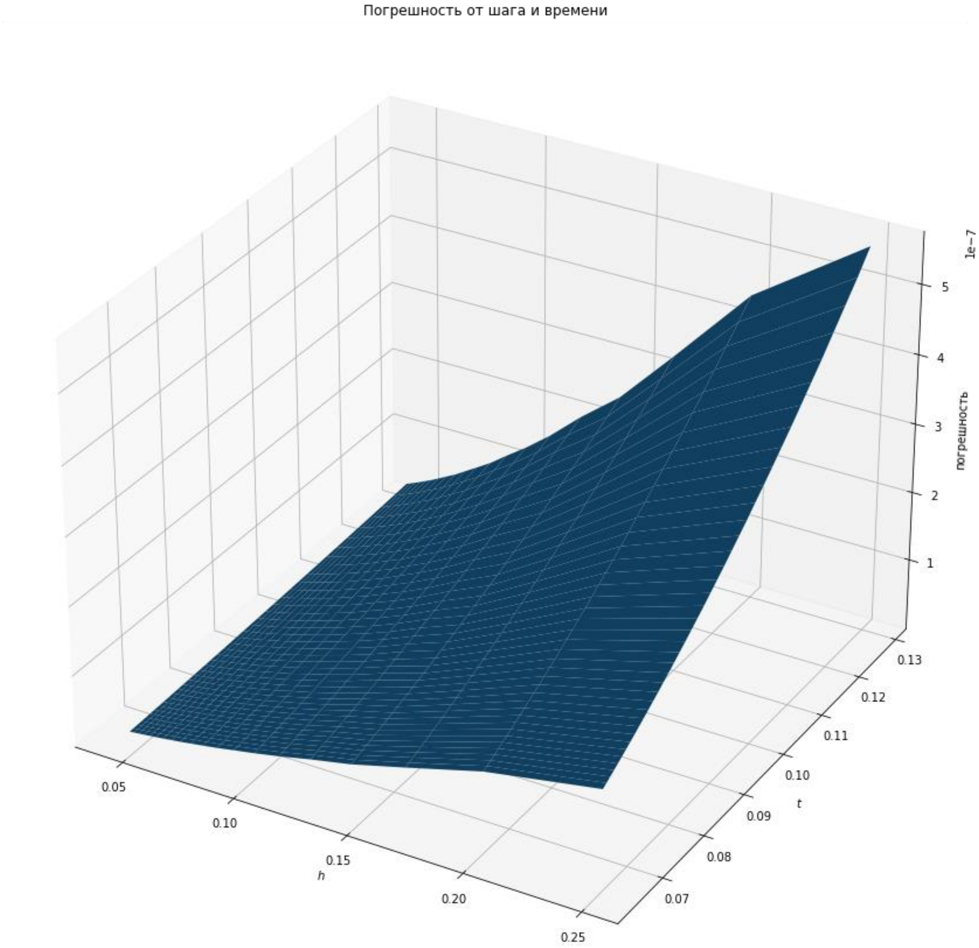
Описание программы

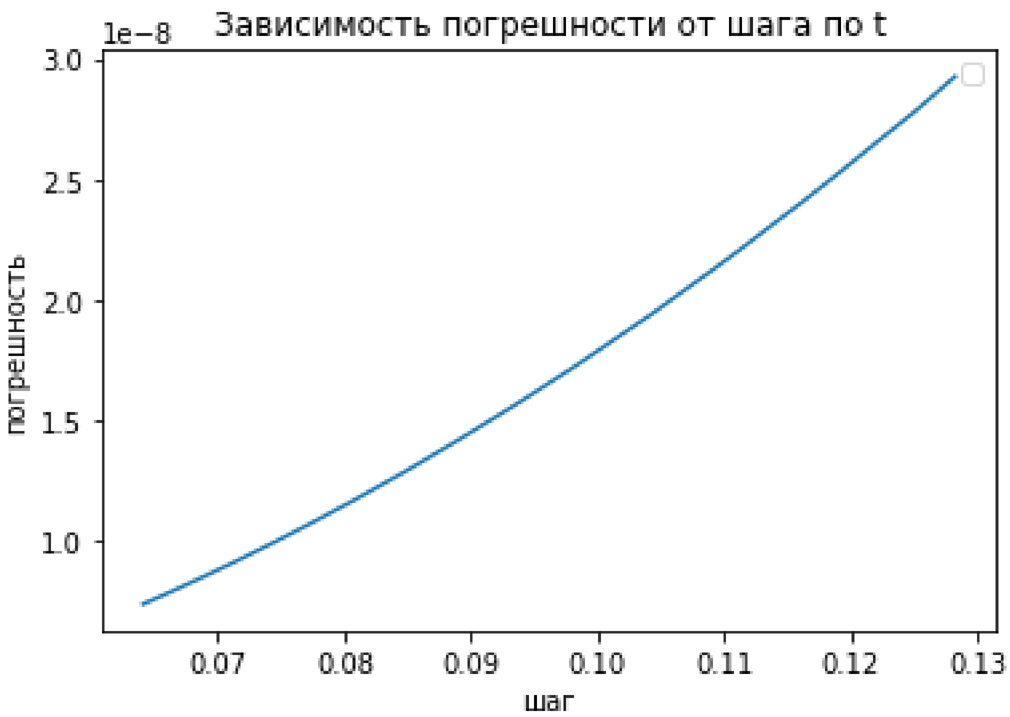
Программа состоит из 1 ipynb файла.
В программе задаются условия и параметры варианта.

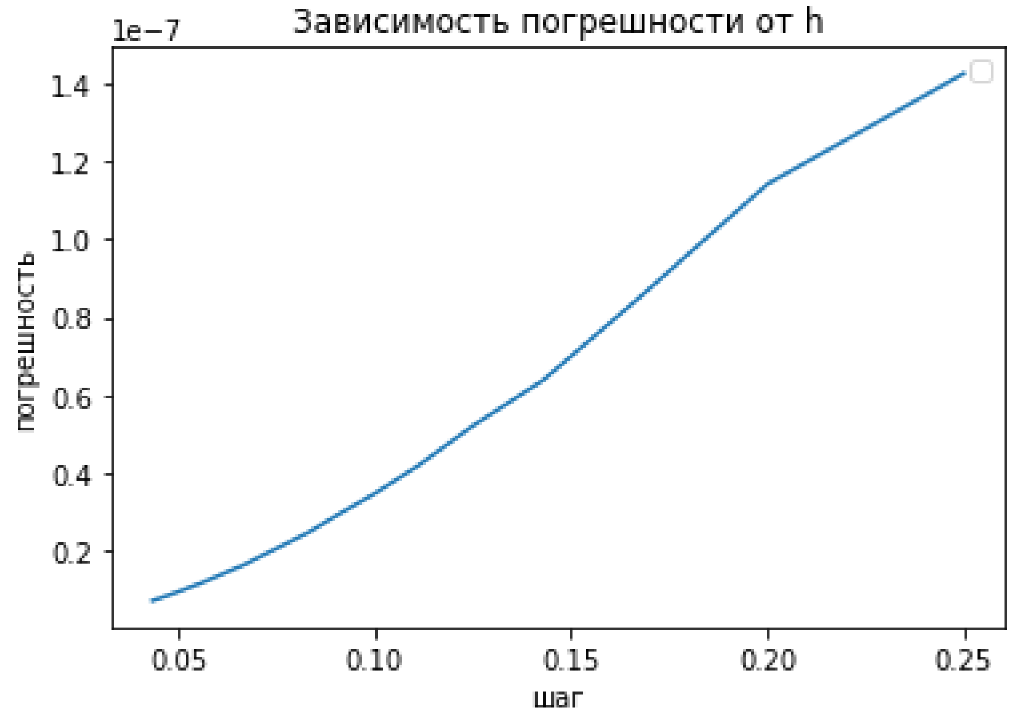
Все необходимые данные варианта введены в программу заранее. Для решения двумерной начально-краевой задачи используем схемы схемы переменных направлений и дробных шагов реализованные в соответствующих функциях. Далее вычисляется погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$ (AnaliticalSolutionMatrix()).После с помощью библиотеки matplotlib выводим графики зависимости погрешности параметров τ, h_x, h_y а также график решения.

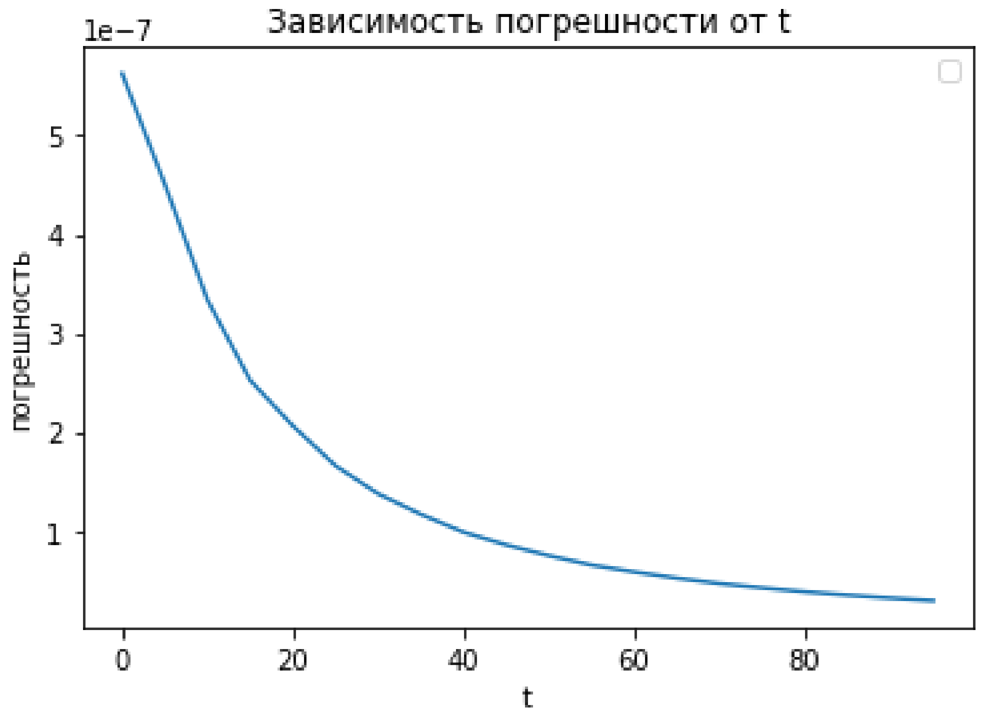
Результаты

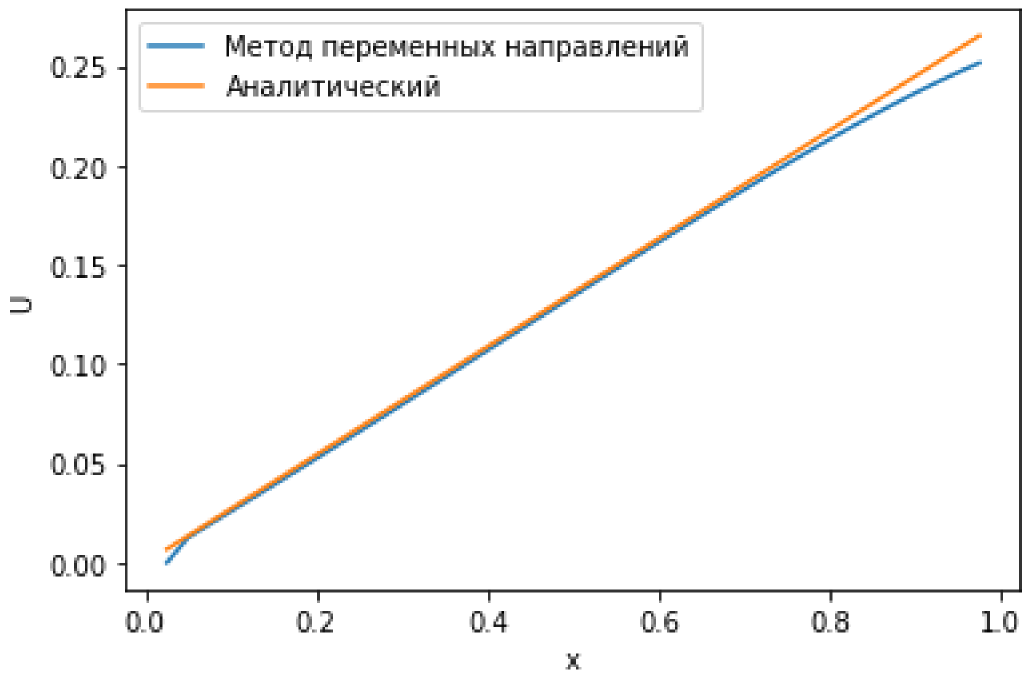
Метод переменных направлений



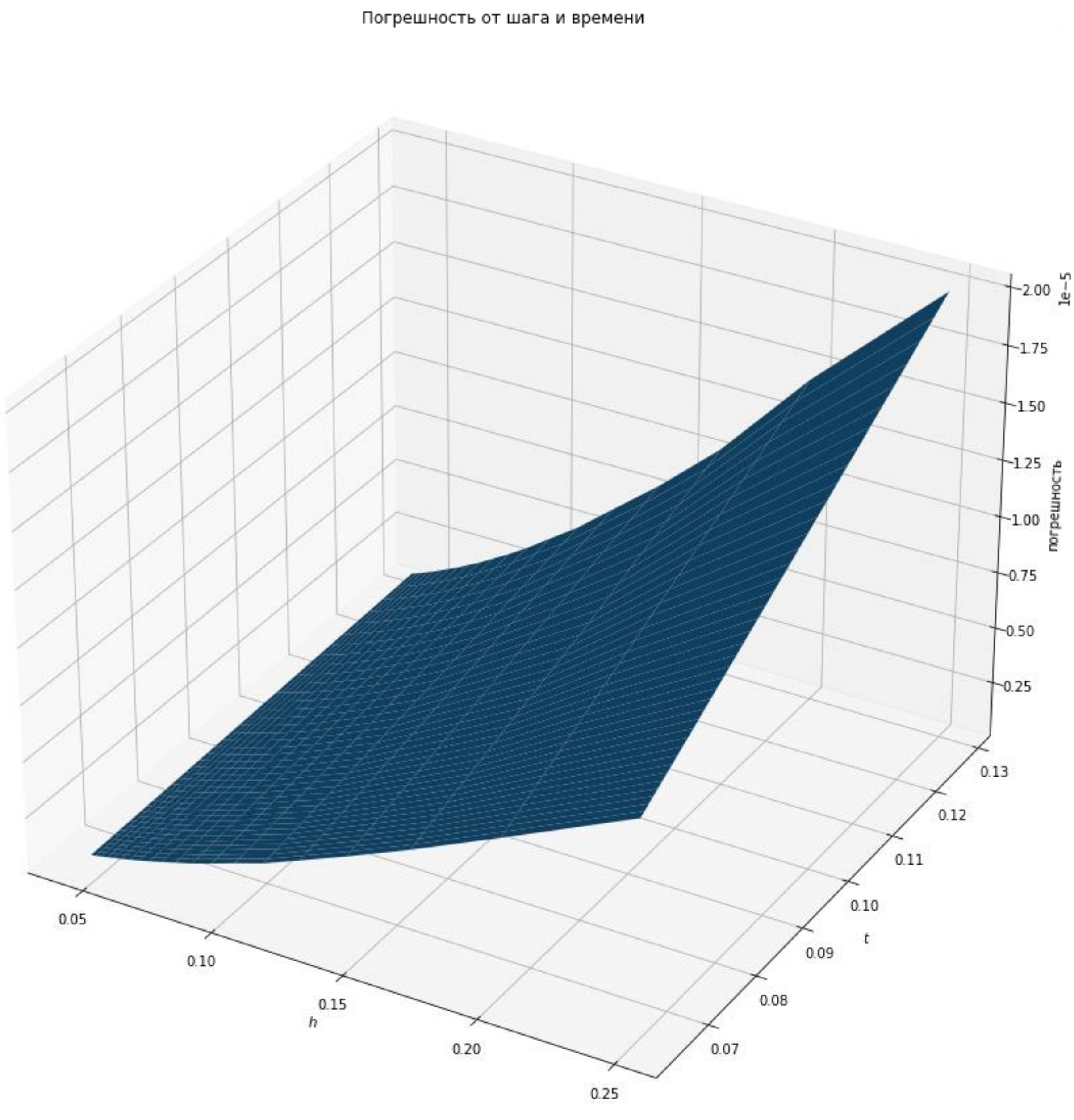


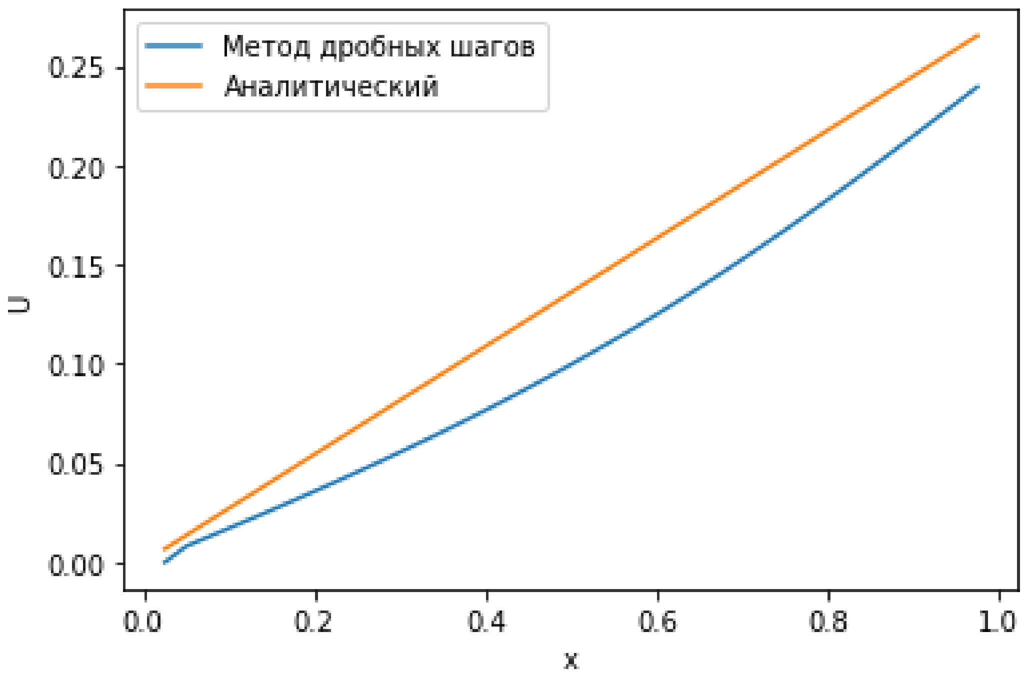

Зависимость погрешности от h
1e−7
погрешность
шаг
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25

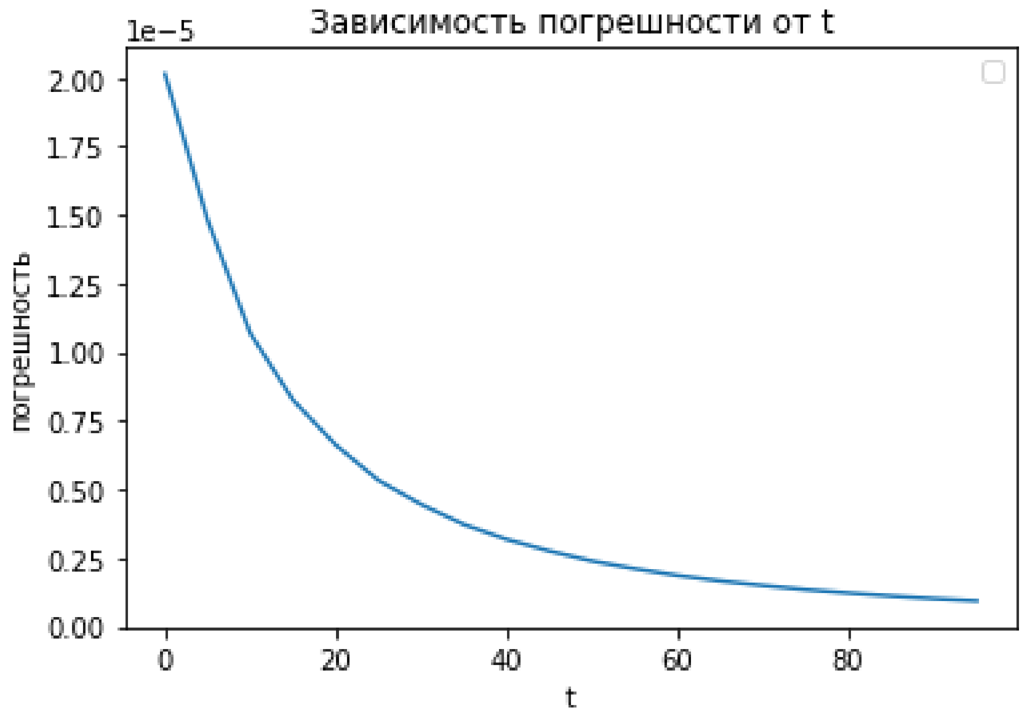

Зависимость погрешности от t
1e−7
погрешность
t
5
4
3
2
1
0
20
40
60
80



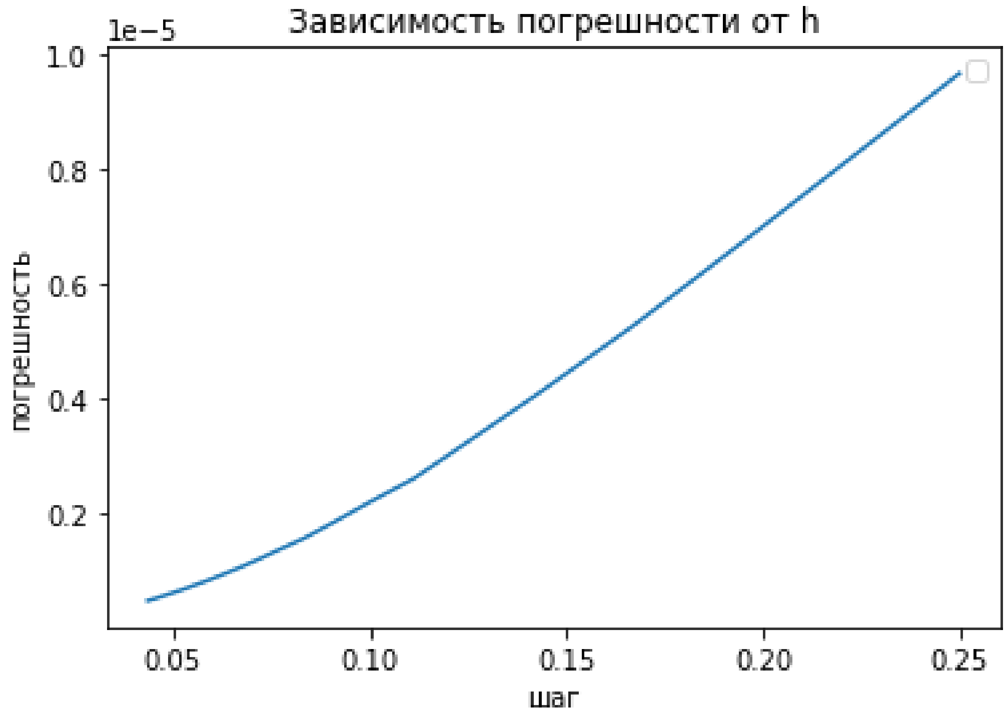
Метод дробных шагов




Метод дробных шагов
Аналитический
U
x
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Зависимость погрешности от t
1e−5
погрешность
t
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
20
40
60
80

Зависимость погрешности от шага по t
1e−7
9
8
7
6
5
погрешность
0.07
0.08
0.09
0.10
0.11
0.12
0.13
шаг



Зависимость погрешности от h
1e−5
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
погрешность
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
шаг

Выводы

При работе с данной лабораторной работой я изучил методы численного решения, используя схемы переменных направлений и дробных шагов, и смог решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Также было выявлено, что более точной является схема переменных направлений.