МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №3
по курсу «Численные методы»

Выполнил: Велесов Д.И.
Группа: 8О-408Б-20

Москва, 2023

Условие

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y.

Вариант 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2u ,$$

$$u(0, y) = \cos y,$$

$$u(\frac{\pi}{2}, y) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos x ,$$

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = 0 .$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \cos x \cos y$.

Метод решения

Согласно ***методу Либмана*** вычисления ведутся следующим образом: выбрав начальные приближения $u_{ij}^{(0)}$, последовательные приближения $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутренних узлов сеточной области , определяем по формулам

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 f\left(x_i^{(k)}, y_j^{(k)}\right) \right], \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

для уравнения Пуассона и

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} \right],$$

для уравнения Лапласа, которые следуют из конечно-разностных уравнений.

Для получения начальных приближений можно указать два способа:

1. значения во внутренних узлах получают путем интерполирования, использующего известные граничные условия;
2. составляют систему конечно-разностных уравнений для сетки с более крупным шагом и решают ее методом исключения, а затем полученные значения интерполируют на узлы данной сетки.

Доказано, что для любого шага h процесс Либмана сходится к точному решению независимо от выбора начальных значений.

Итерационный процесс будет сходиться значительно быстрее, если при вычислении последующих средних арифметических использовать не только значения предыдущего приближения, но и вновь найденные значения. Обычно итерации продолжают до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет требуемое количество десятичных знаков.

Метод Зейделя: Предполагает последовательное обновление значений на границах области, где каждое обновление использует последние известные значения. Это означает, что каждое значение на границе используется сразу же после его вычисления, а не ожидает обновления всех значений на границе. Этот метод обеспечивает более быструю сходимость, поскольку значение на текущей итерации используется сразу же. •

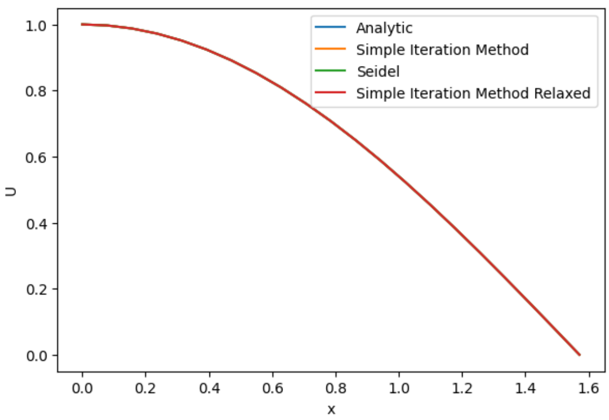
Метод простых итераций с верхней релаксацией: Модификация метода простых итераций, где на каждой итерации введен коэффициент релаксации для управления скоростью сходимости. Коэффициент релаксации позволяет более быстро сходиться к решению путем ускорения скорости изменения значений на границе области.

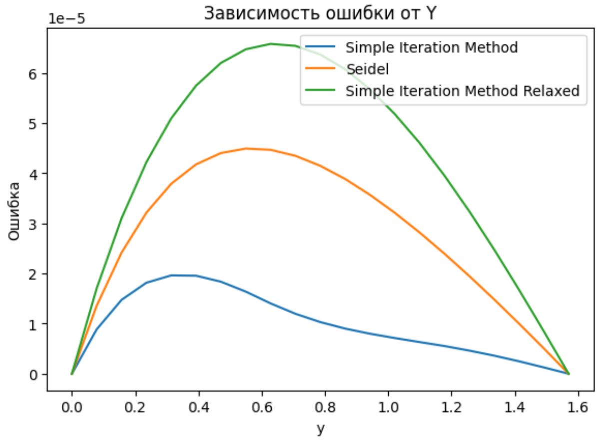
В результате были получены графики полученных функций и их графики ошибок.

Описание программы
Программа состоит из 1 ipynb файла.
В программе задаются условия и параметры варианта.

Все необходимые данные варианта введены в программу заранее. Для решения дискретного аналога примеяются следующие методы, реализованные в виде функций: метод простых итераций(def SimpleIterationMethod), метод Зейделя(def Seidel), метод простых итераций с верхней релаксацией(def SimpleIterationMethodRelaxed). Далее вычисляется погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$ (AnaliticalSolutionMatrix()).После с помощью библиотеки matplotlib выводим графики зависимости погрешности параметров h_x, h_y а также график решения.

Результаты


Analytic
Simple Iteration Method
Seidel
Simple Iteration Method Relaxed
U
x


Зависимость ошибки от Y
1e−5
Simple Iteration Method
Seidel
Simple Iteration Method Relaxed
Ошибка
y

Выводы

Выполнив данную лабораторную работу, решил краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Произвел аппроксимацию уравнения с использованием центрально-разностной схемы. Реализовал для решения задачи следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. А также исследовал зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y.