

Лабораторная работа №7 по курсу «Численные методы»

Выполнил студент группы М8О-408Б-20 Блинов Максим.

Преподаватель: Пивоваров Д. Е.

Цель

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

Вариант 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(0, y) = \cos y,$$

$$u(1, y) = e \cos y,$$

$$u_y(x, 0) = 0,$$

$$u_y\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = -\exp(x).$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = \exp(x) \cos y.$$

О программе

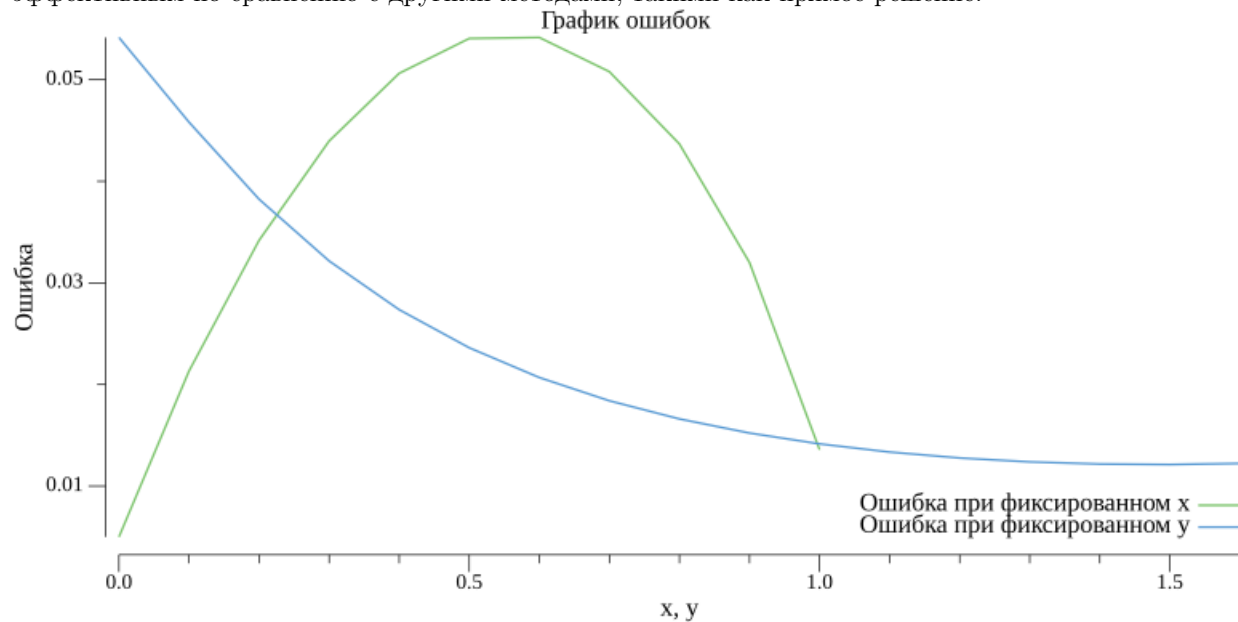
Программа была реализована на языке программирования Go и включает в себя три численных метода для решения дифференциальных уравнений: метод Либмана, метод Зейделя и метод простых итераций с верхней релаксацией. Для визуализации результатов использовалась библиотека `Goplot`, которая предоставляет широкие возможности для построения графиков в среде Go. Результаты вычислений иллюстрируют поведение решений в зависимости от времени и начальных условий, а также позволяют оценить точность численных методов путём сравнения с аналитическим решением задачи. Графики ошибок демонстрируют различия между аналитическими и численными решениями на протяжении всего временного интервала. Все вычислительные эксперименты и генерация графиков проводились в рамках данной программы.

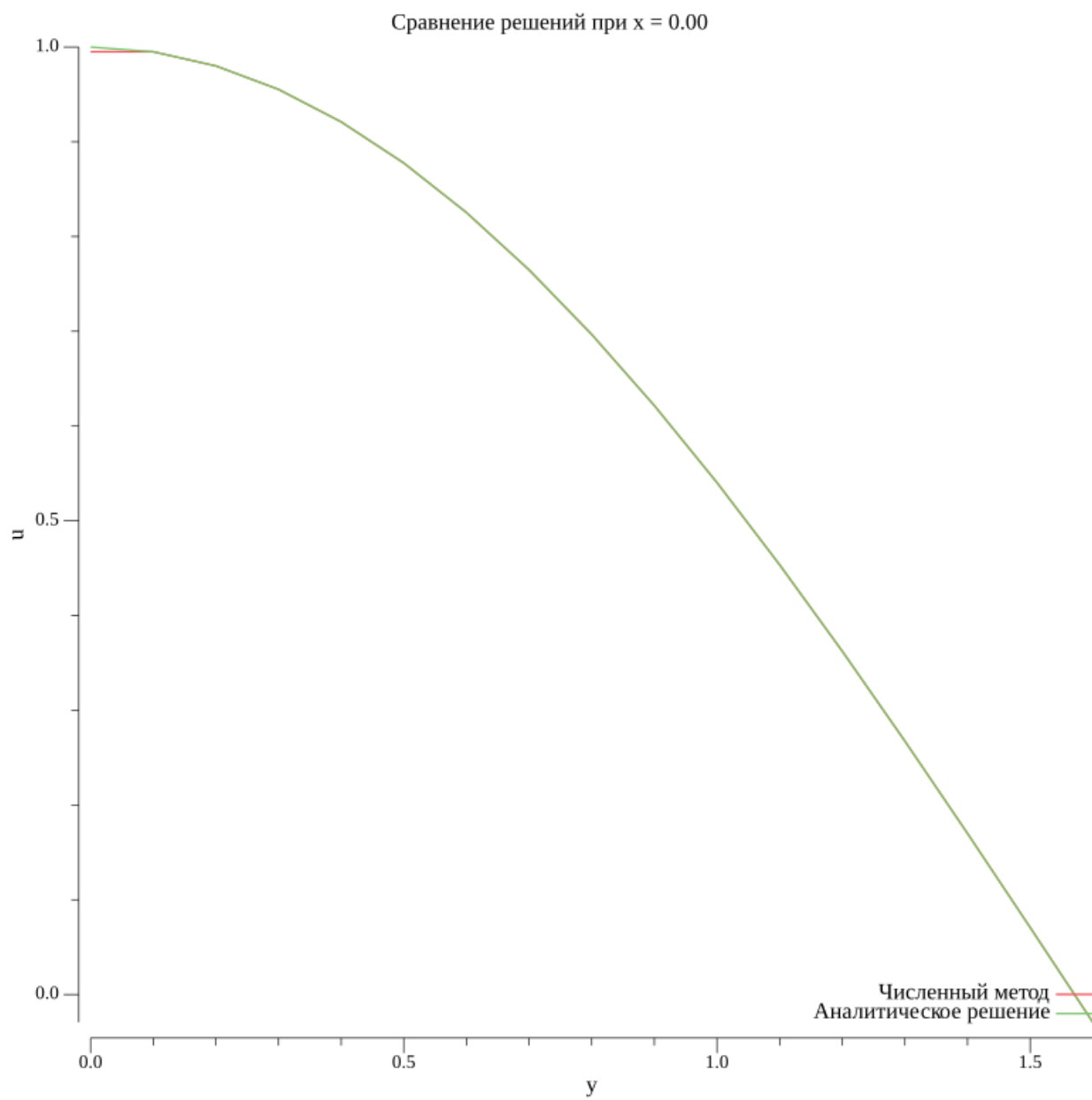
Инструкция к запуску

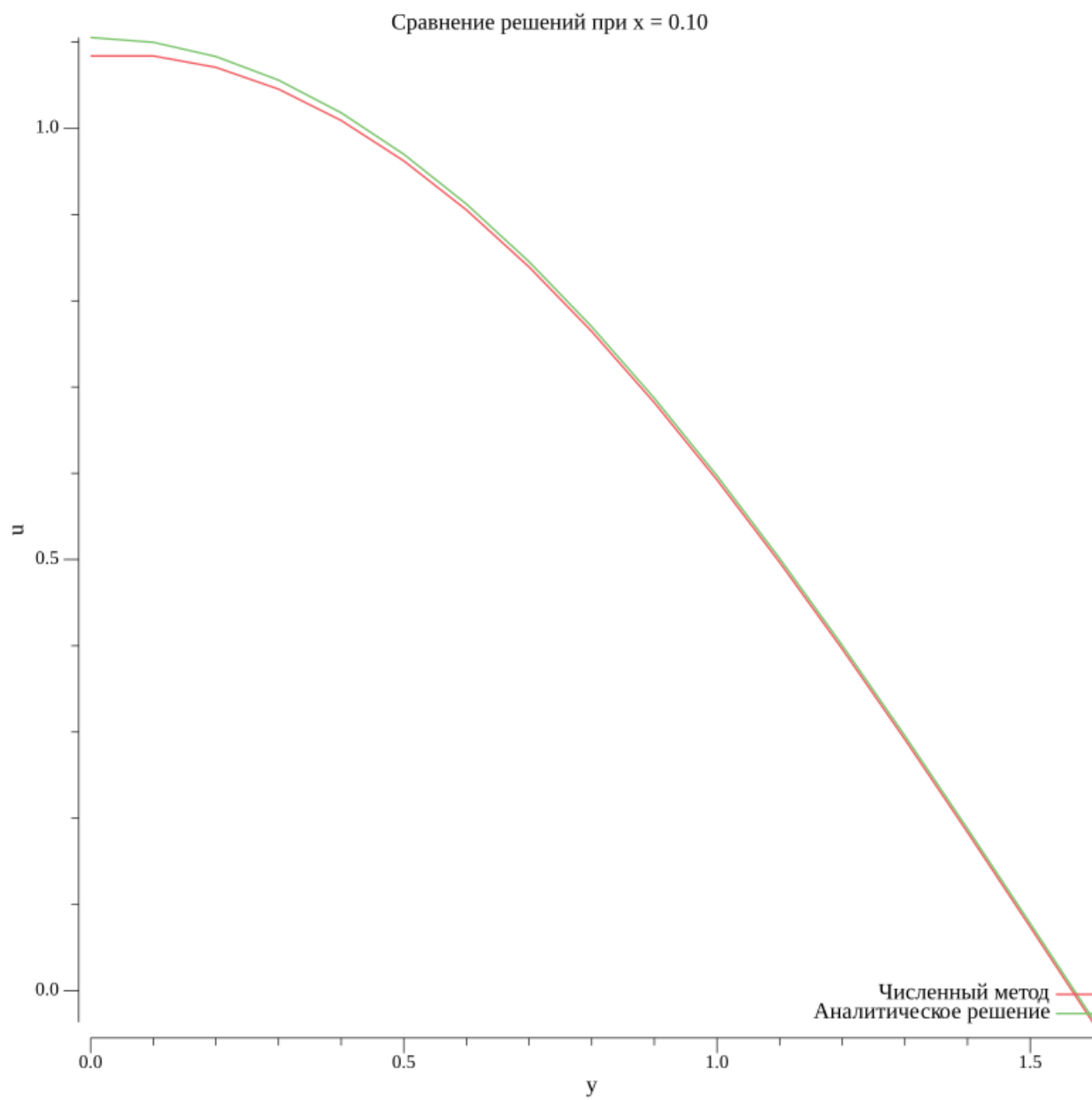
Для запуска программы на Go, решающей гиперболические дифференциальные уравнения, убедитесь, что у вас установлена последняя версия Go (на данный момент 1.21, проверьте на официальном сайте). Создайте рабочее пространство, затем установите необходимые зависимости `go mod tidy`.

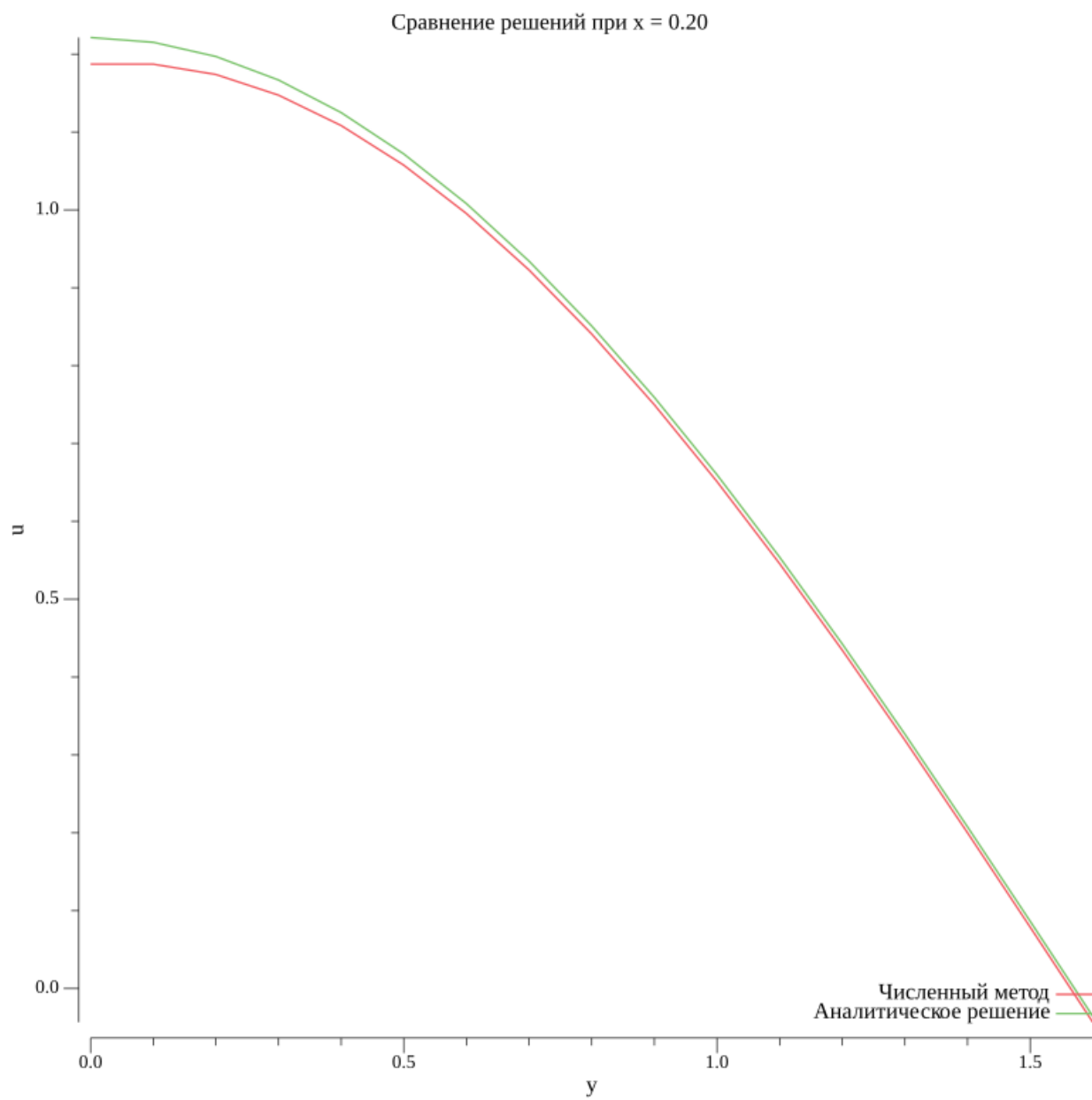
Метод Либмана

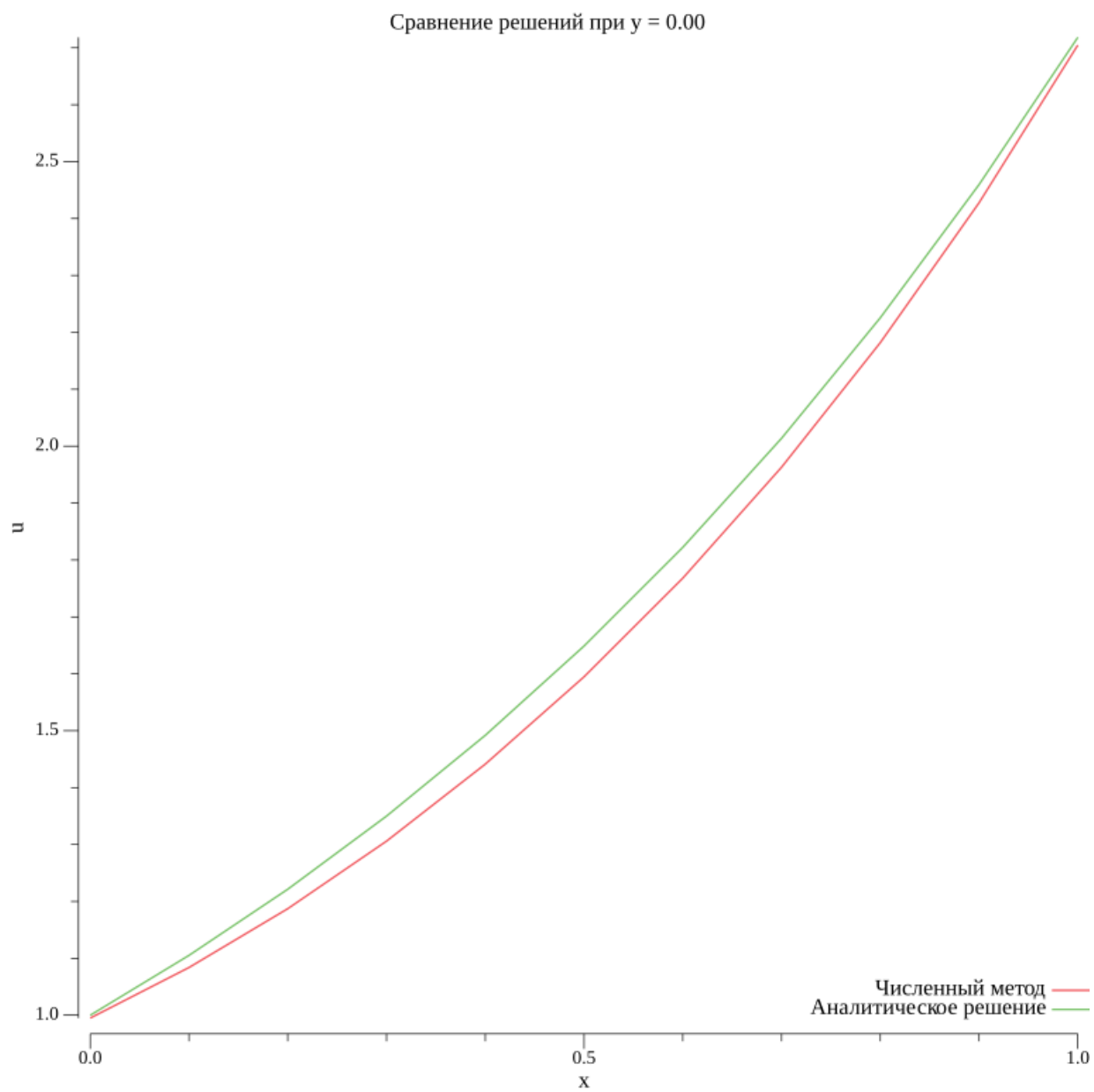
Метод Либмана, также известный как метод Гаусса — Зейделя или метод последовательных замещений, является итерационным методом для решения систем линейных уравнений. Он работает путем последовательного приближения к решению, используя предыдущие оценки для вычисления текущей. Этот метод особенно полезен, когда решается большая система уравнений, так как может быть более эффективным по сравнению с другими методами, такими как прямое решение.

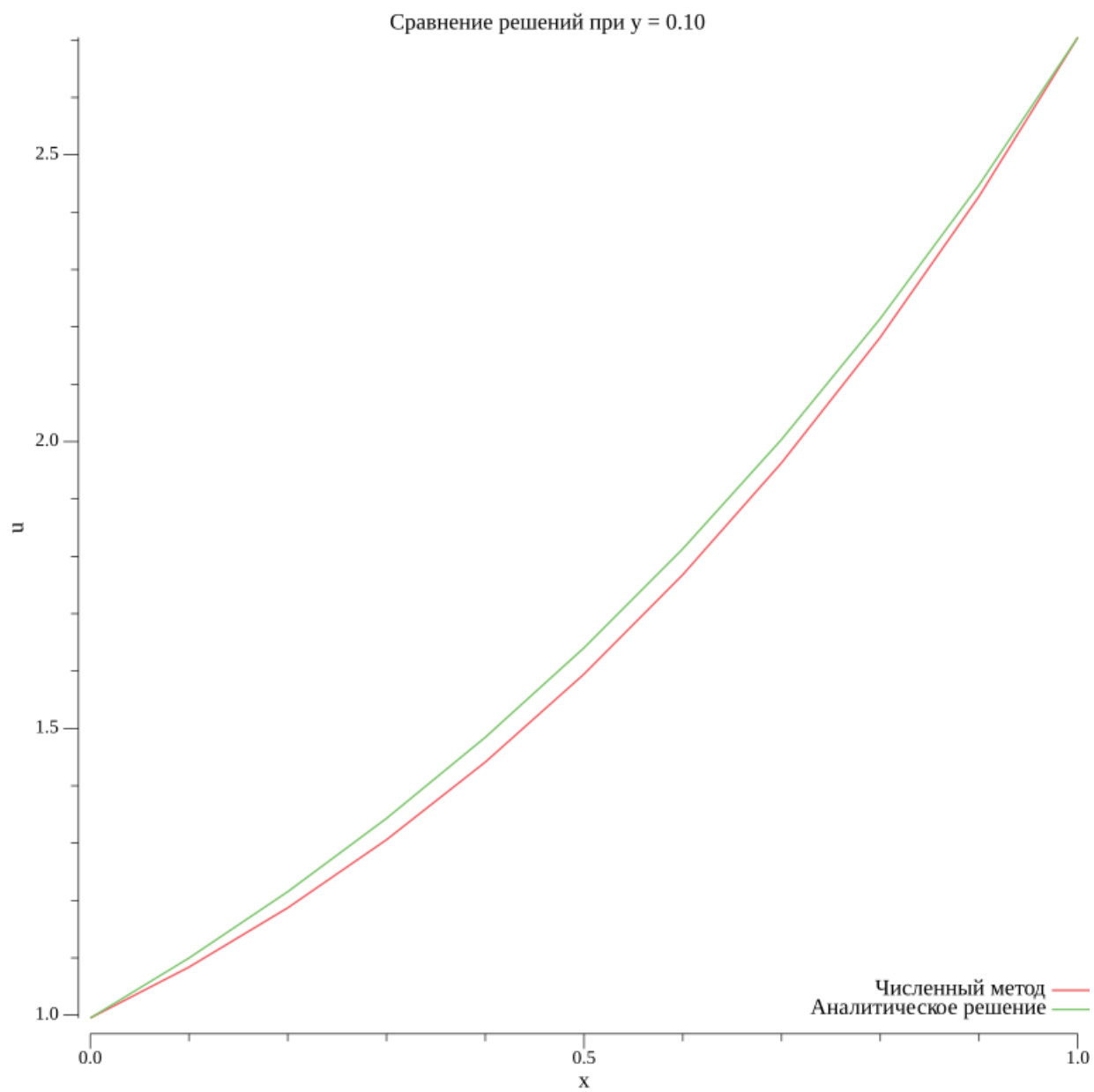




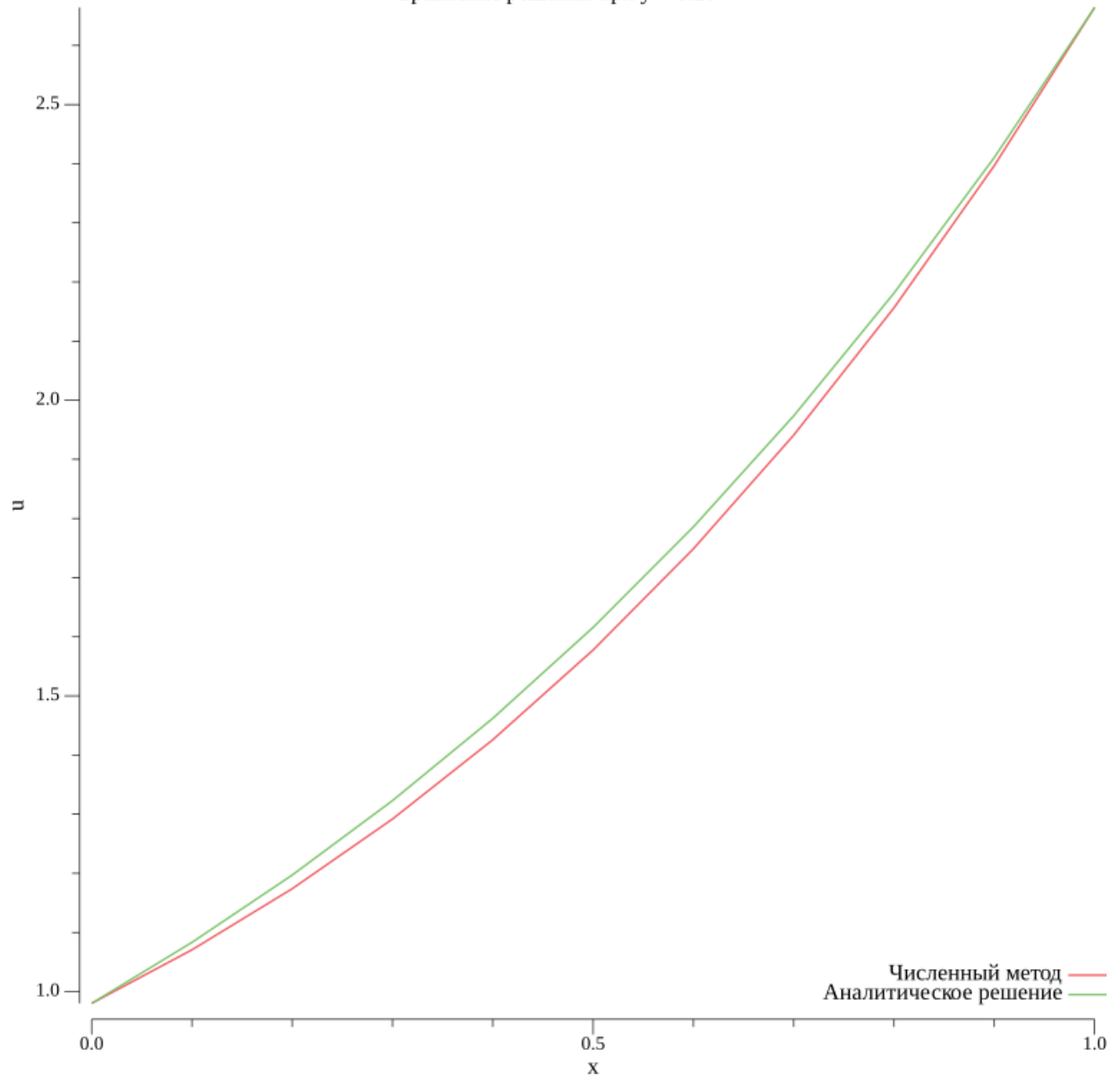




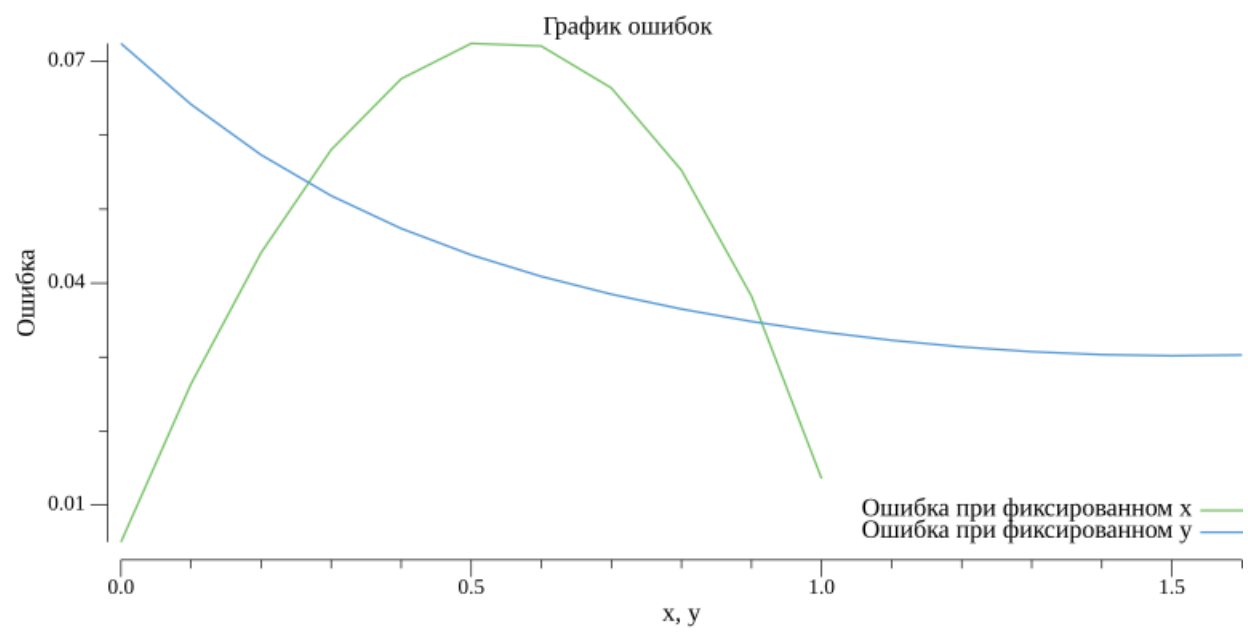


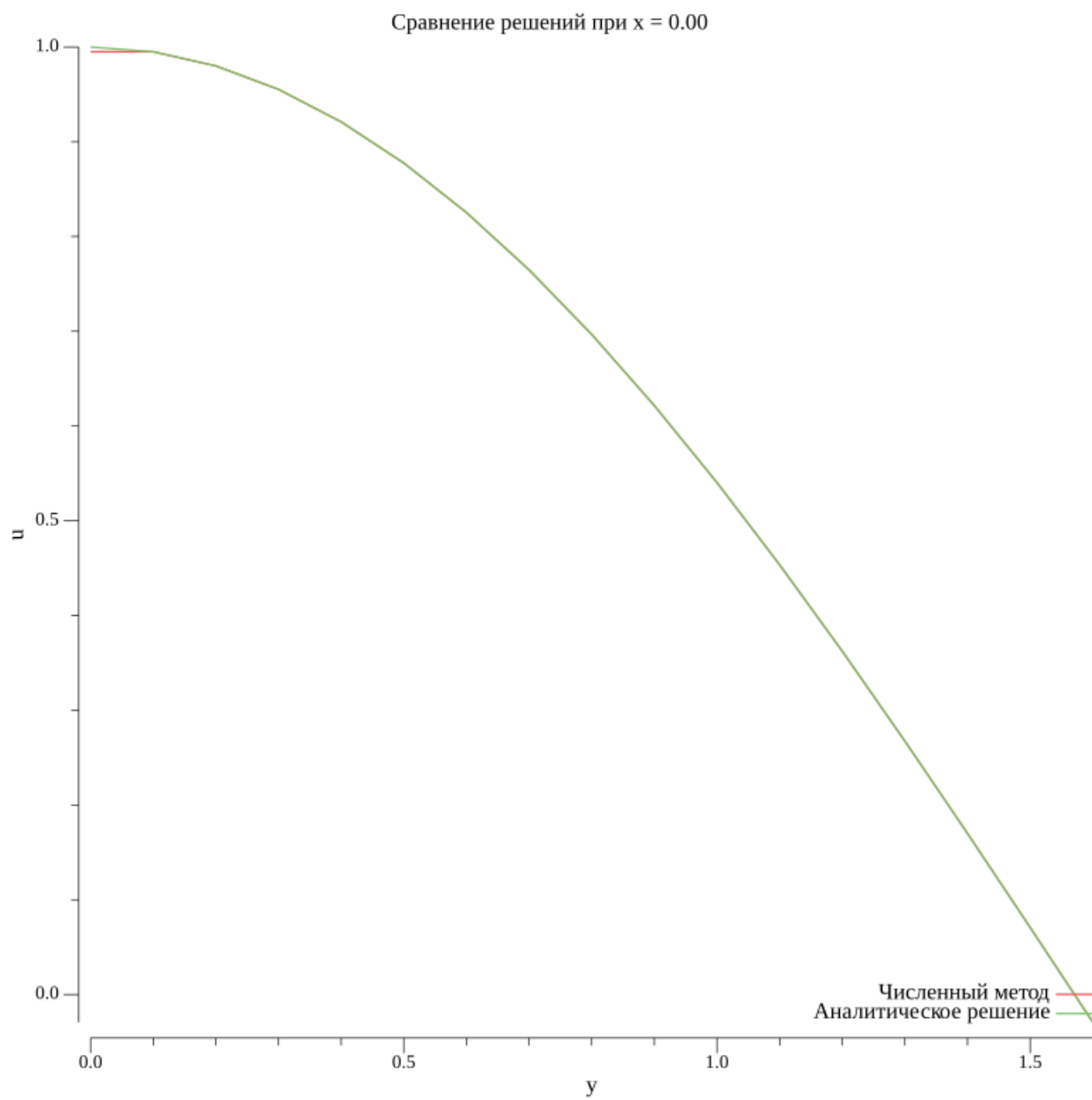


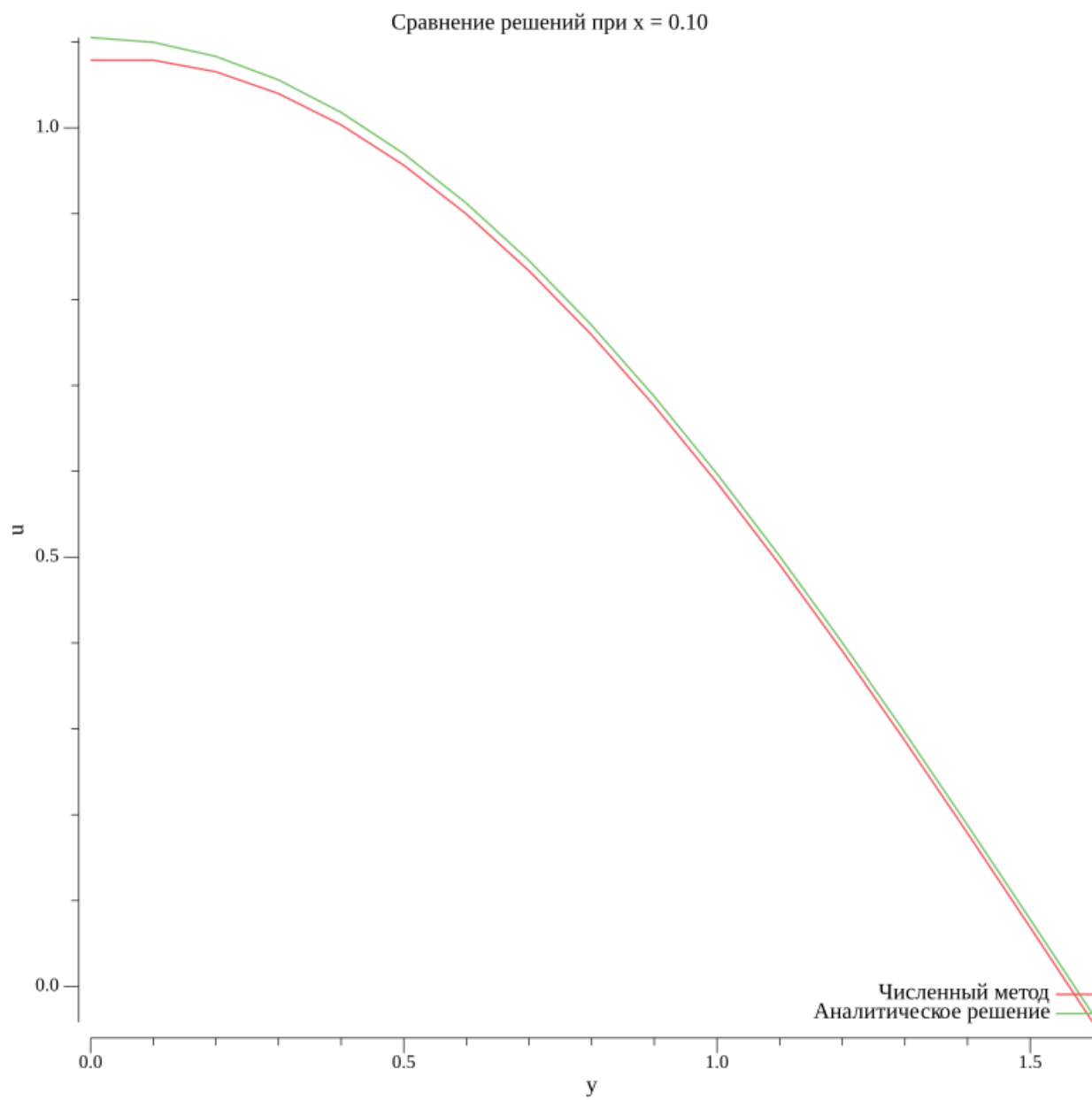
Сравнение решений при $y = 0.20$

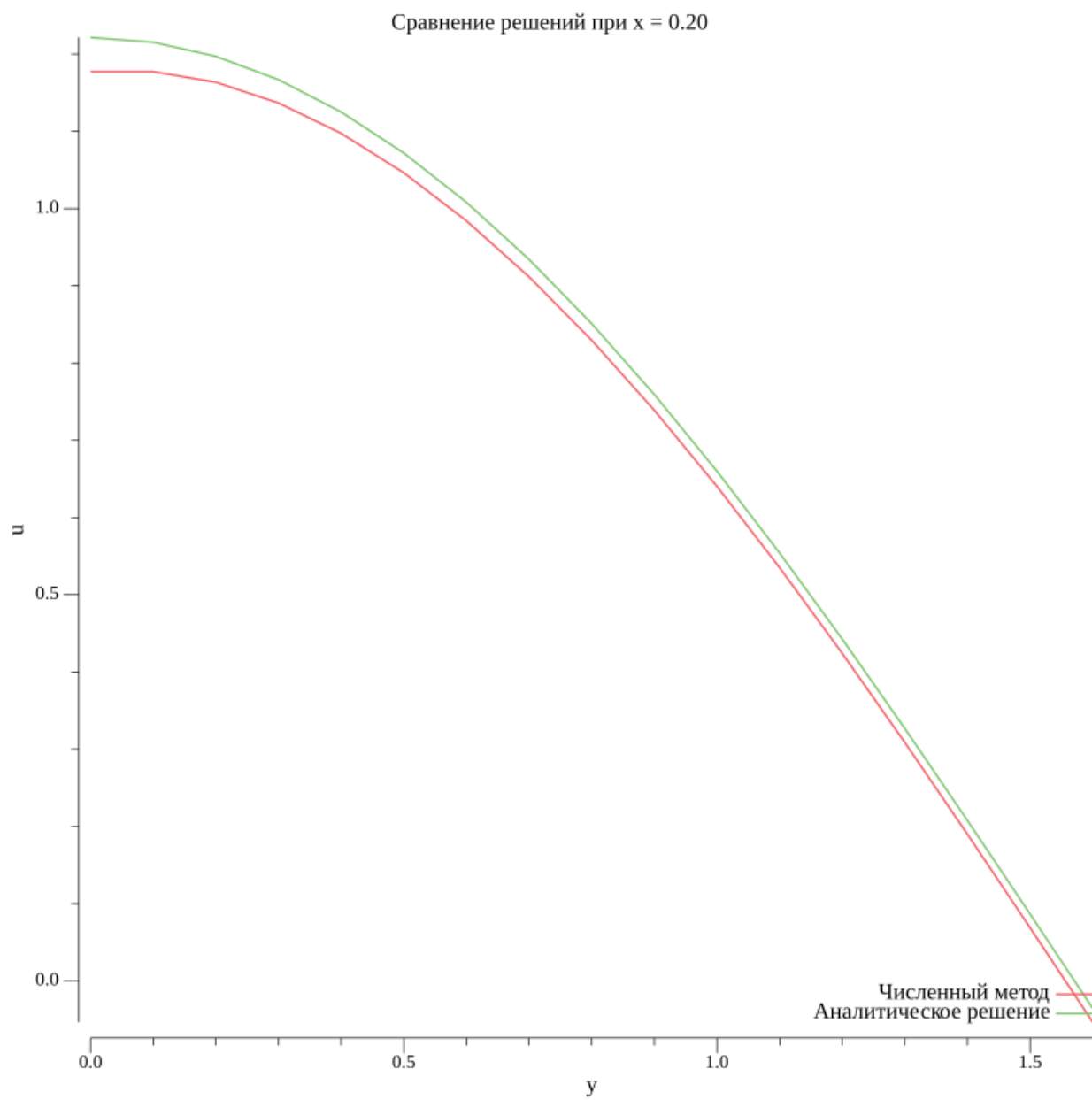


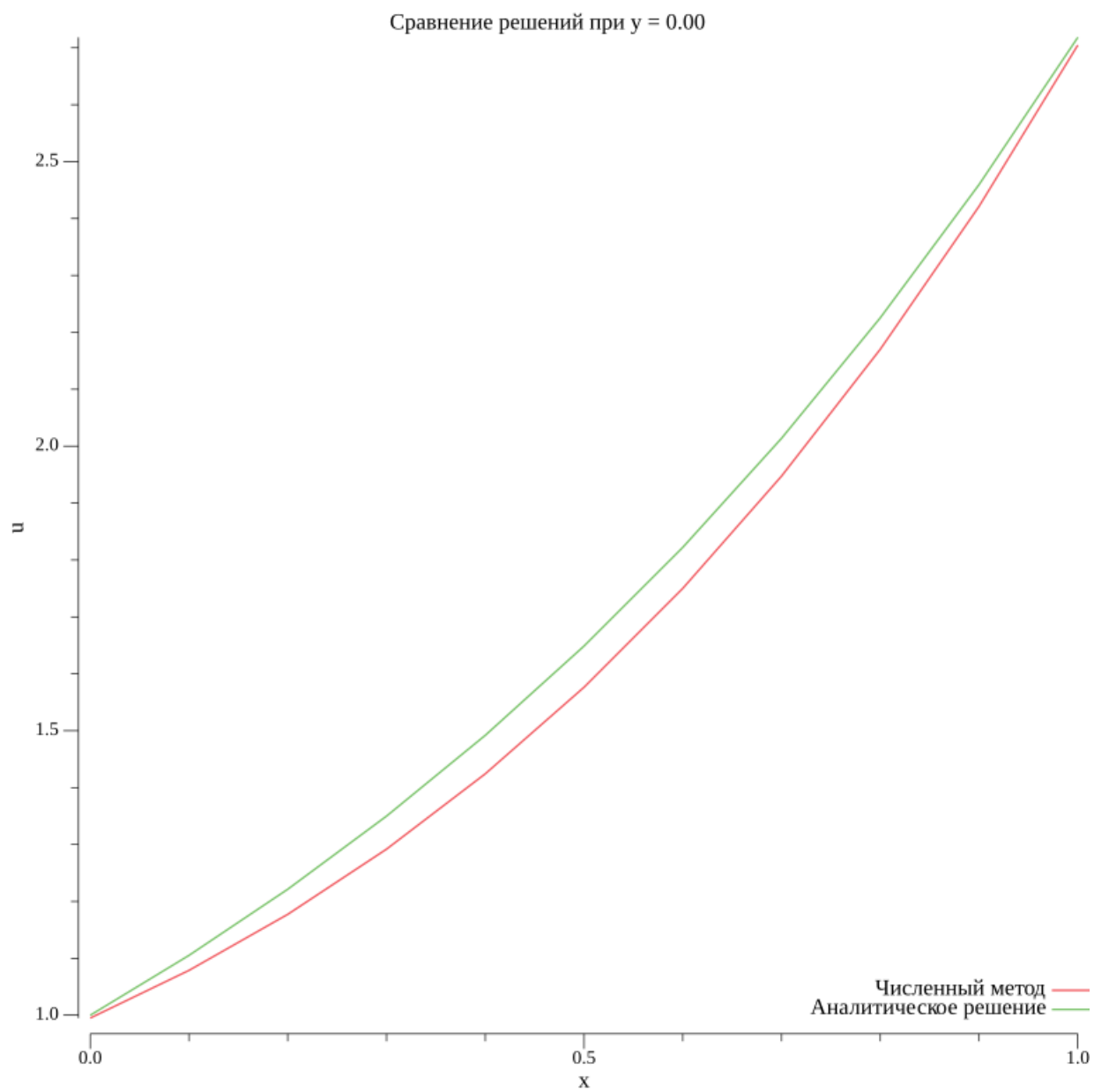
Метод Зейделя

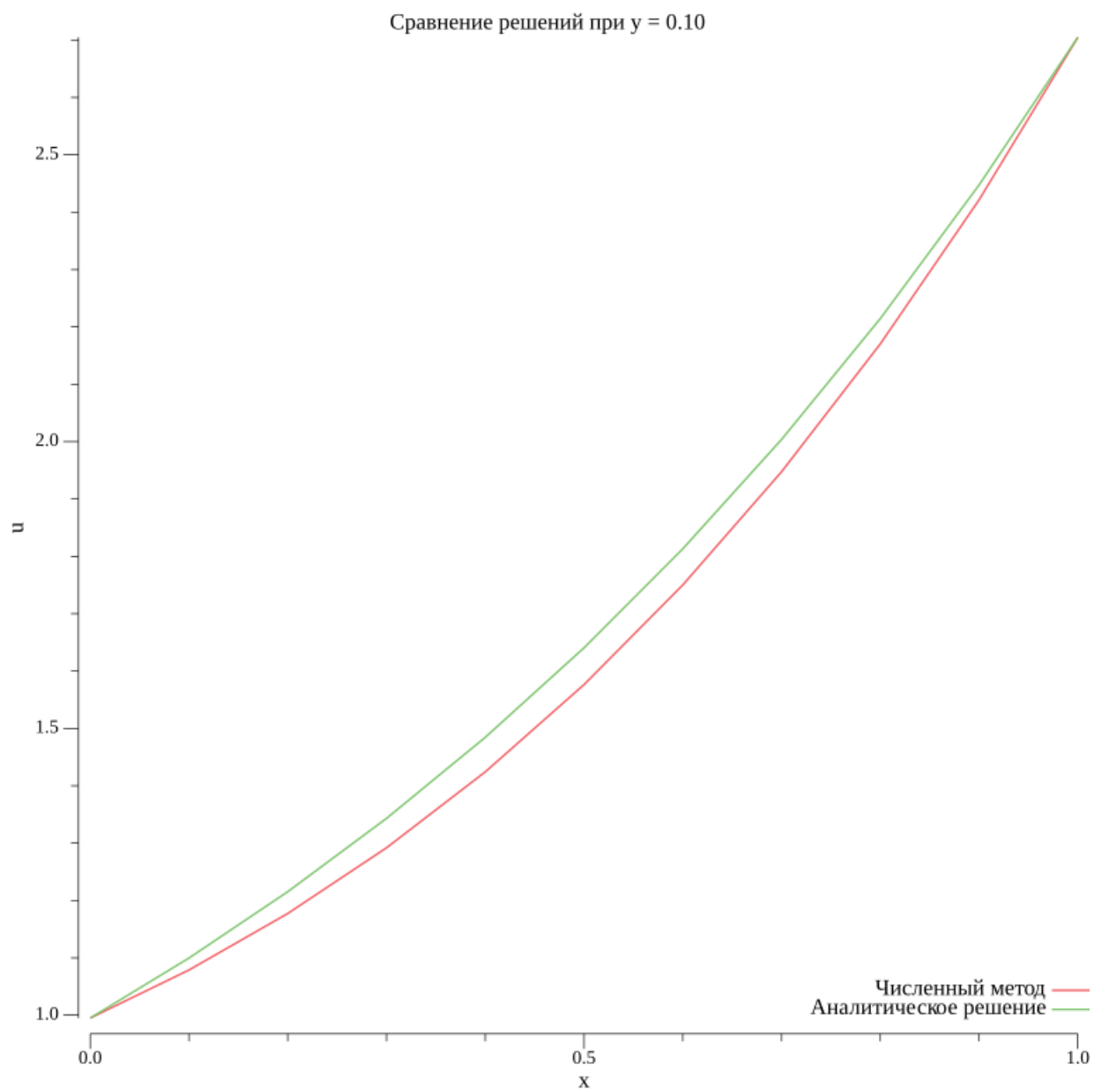


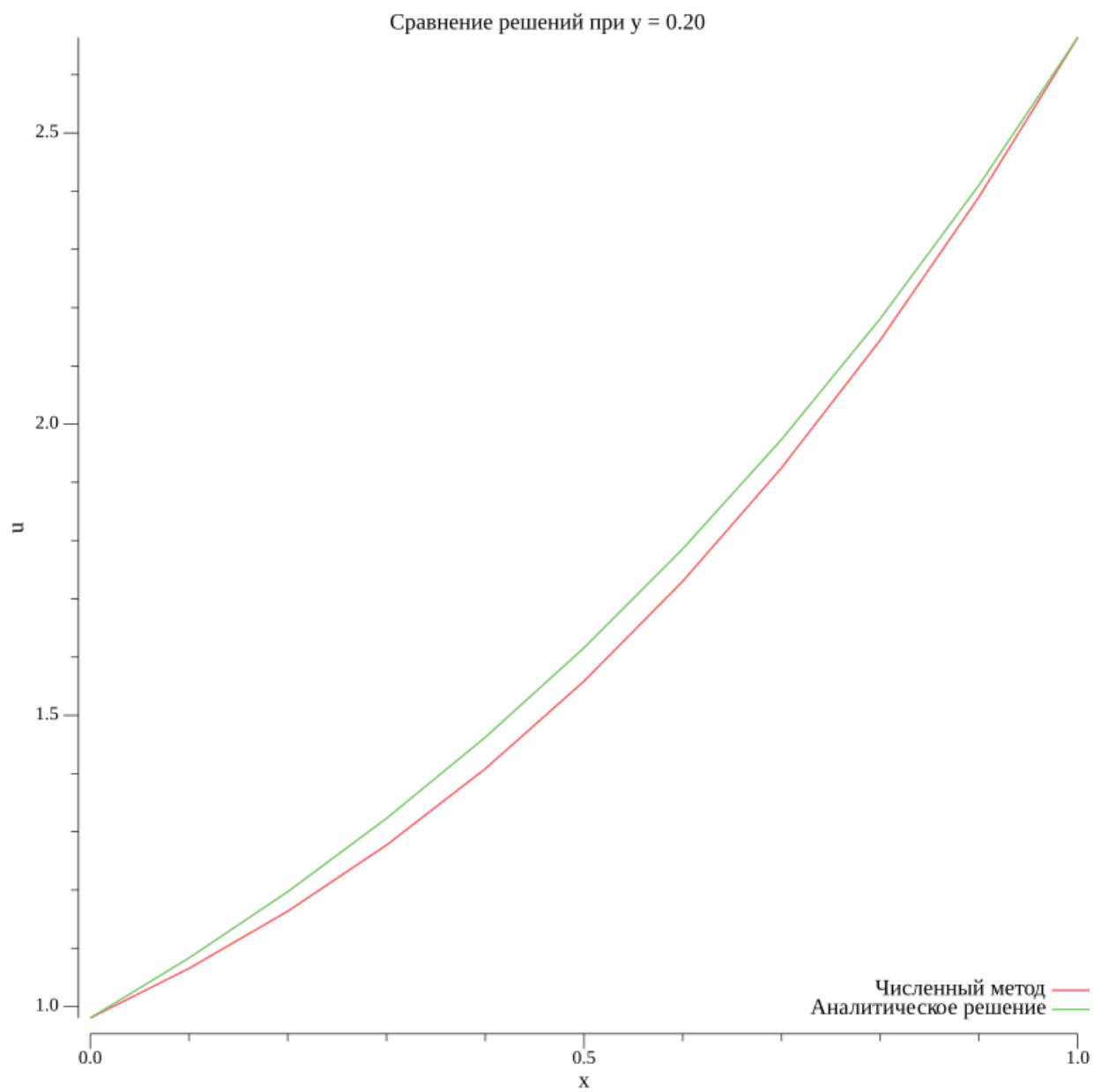




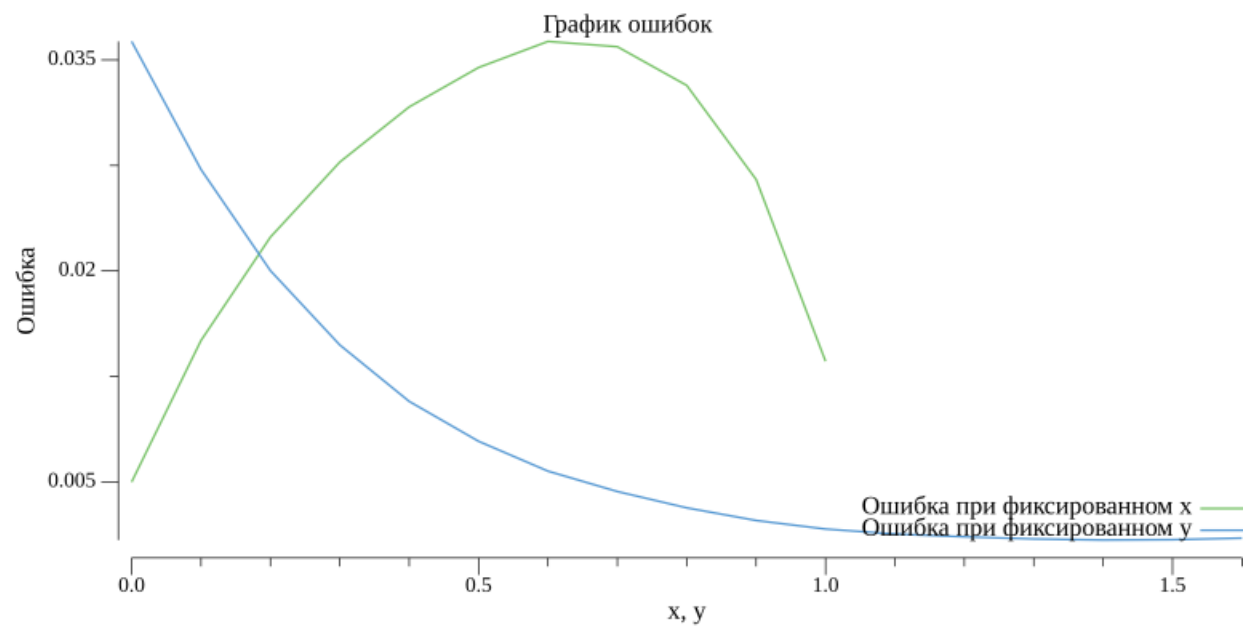


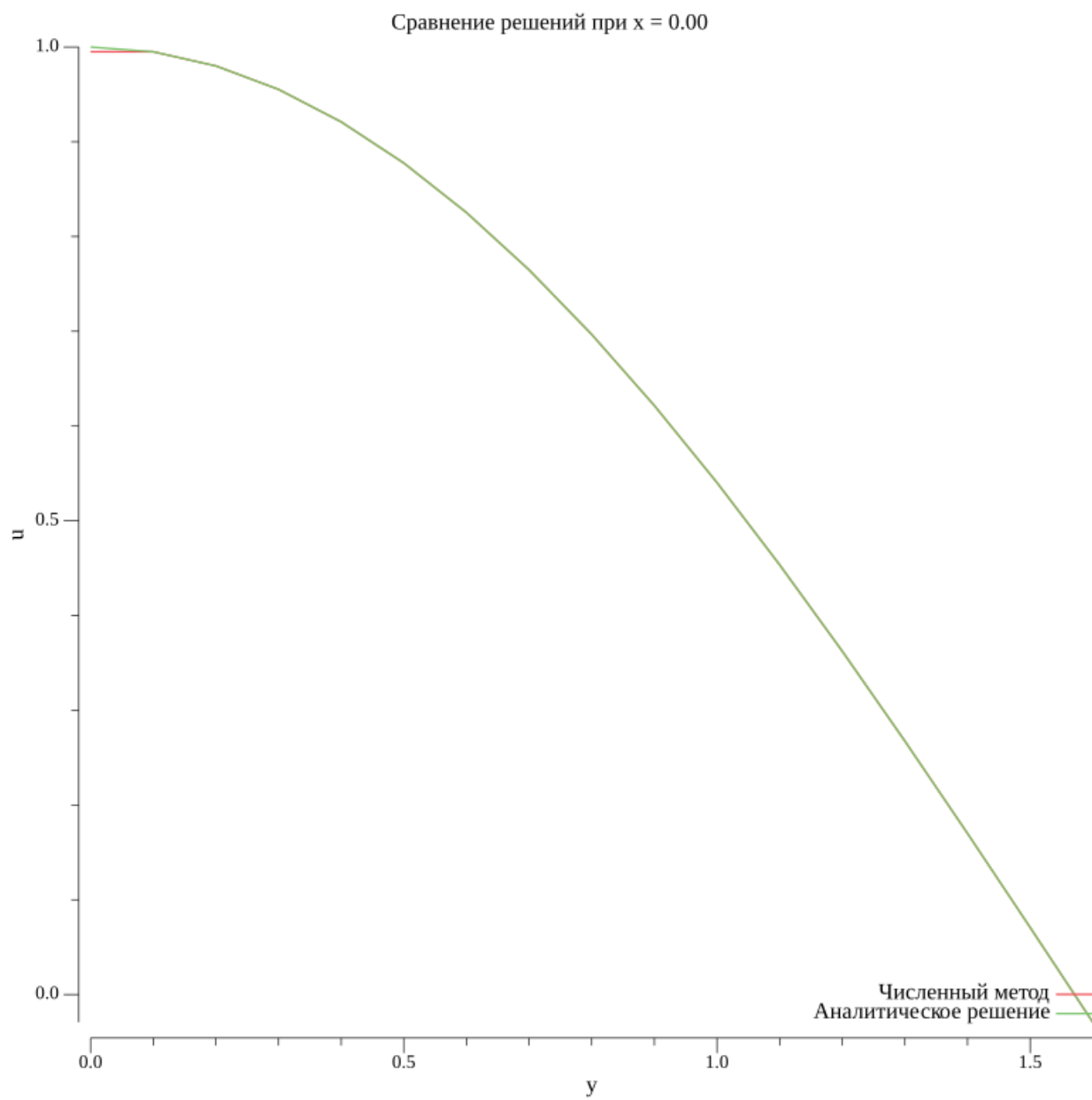


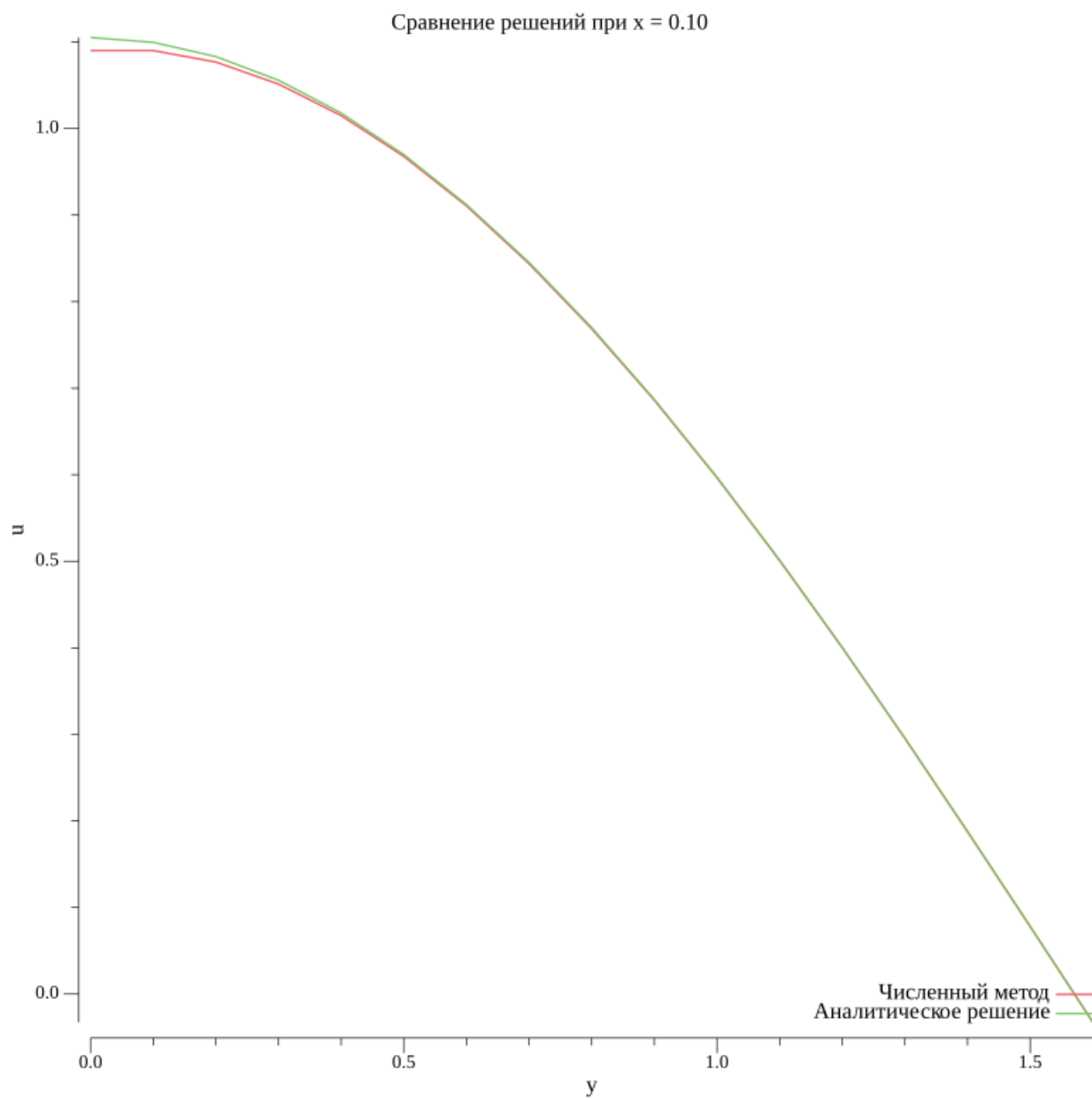


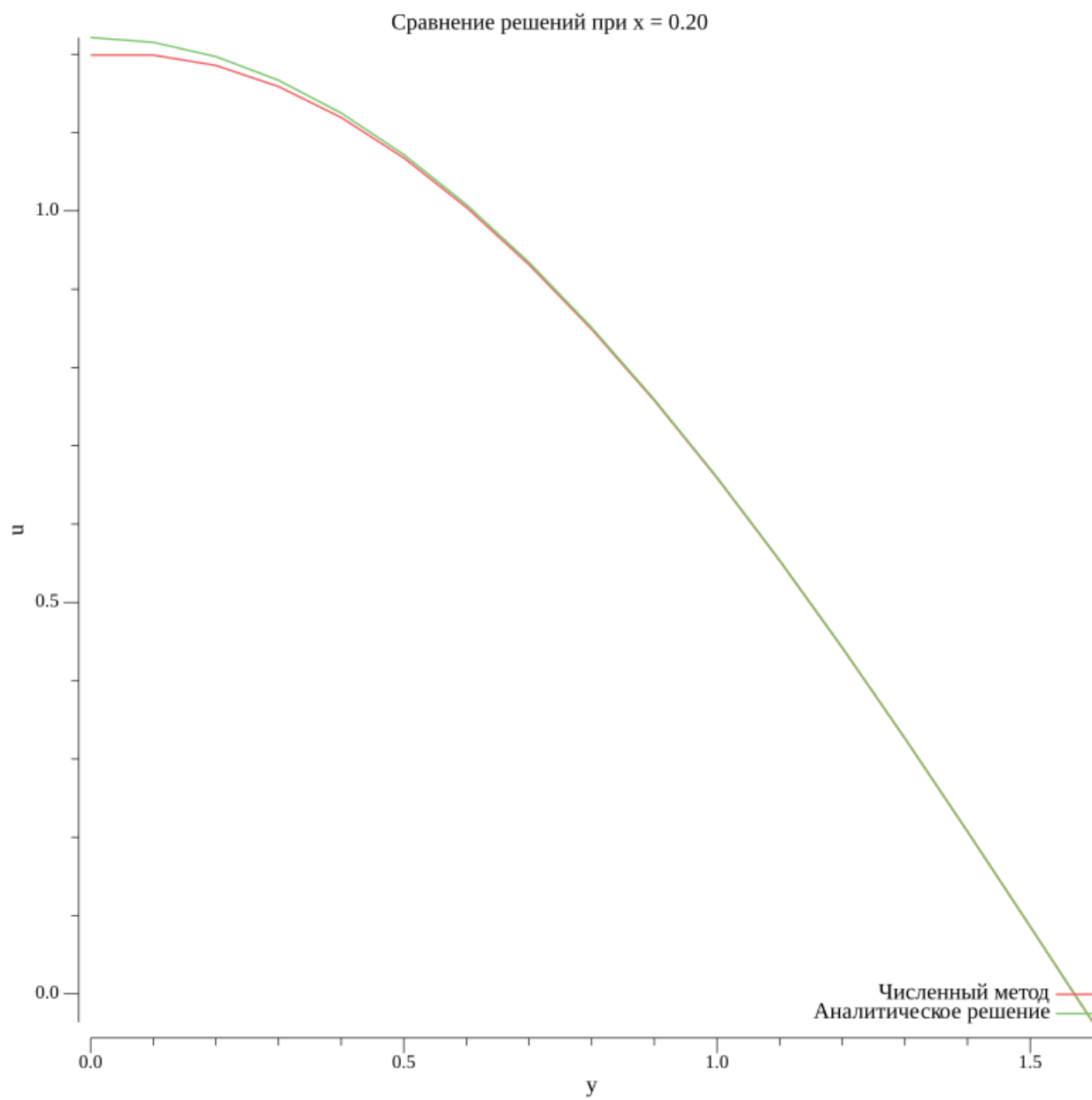


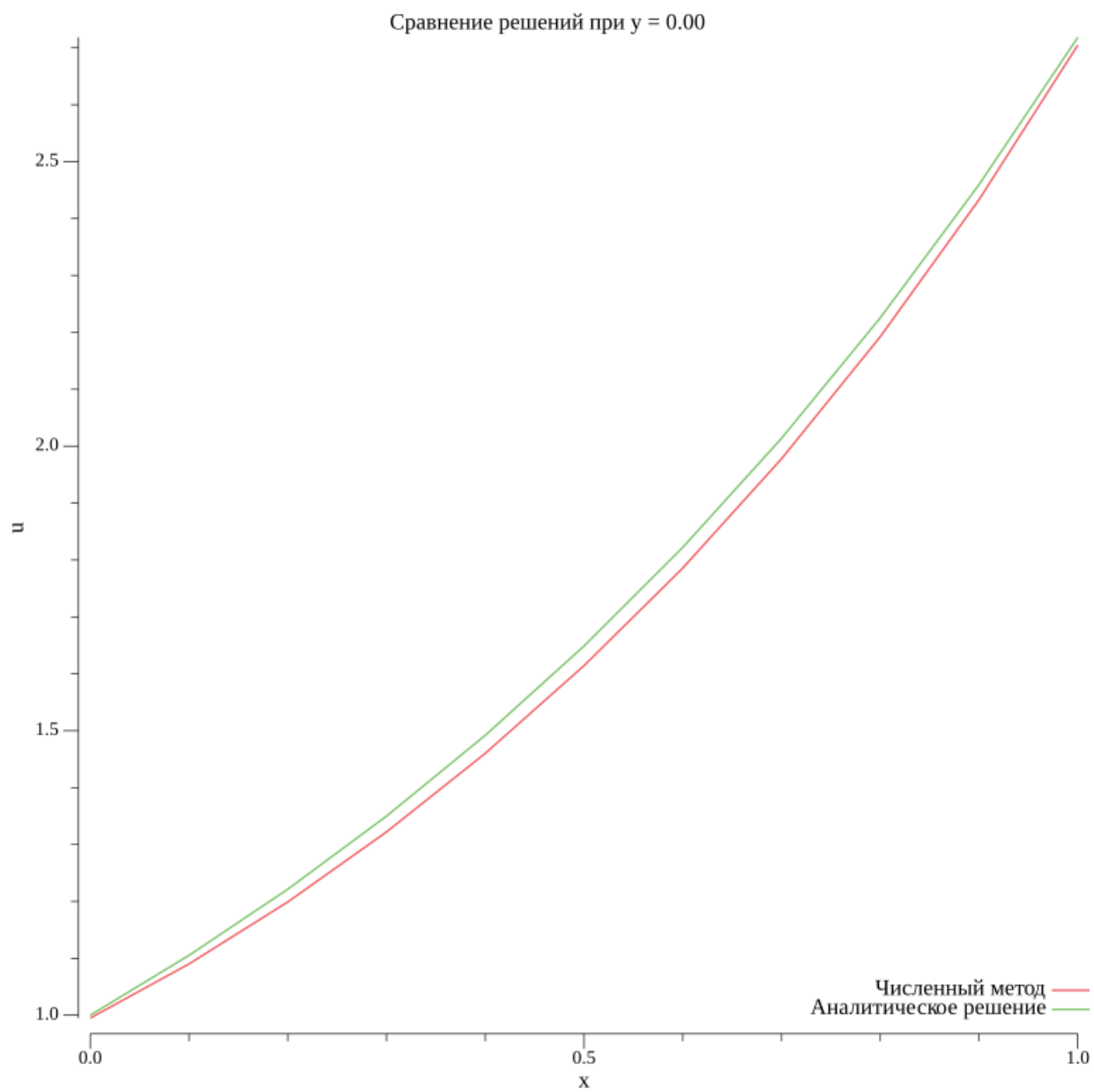
Метод простых итераций с верхней релаксацией

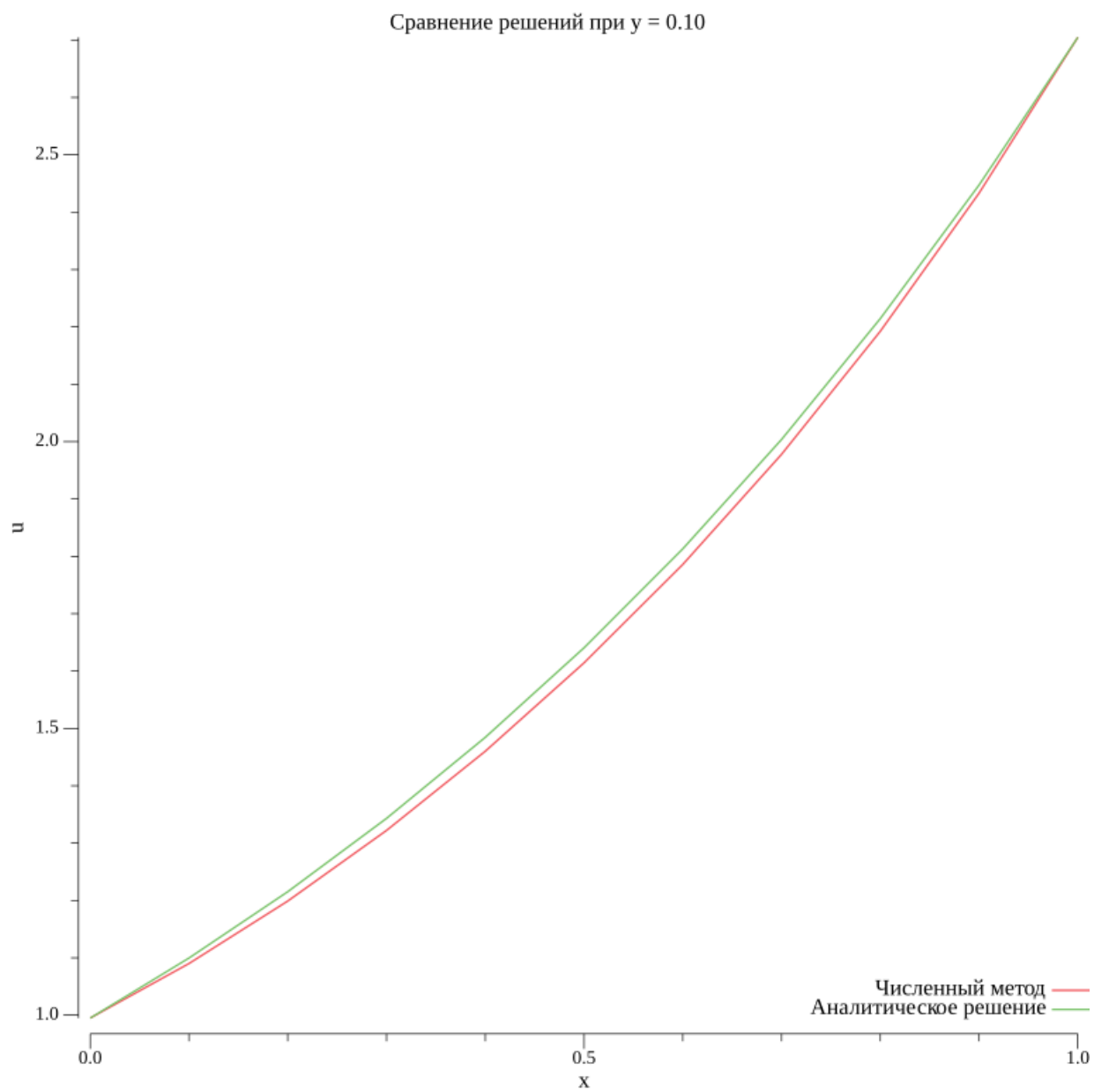


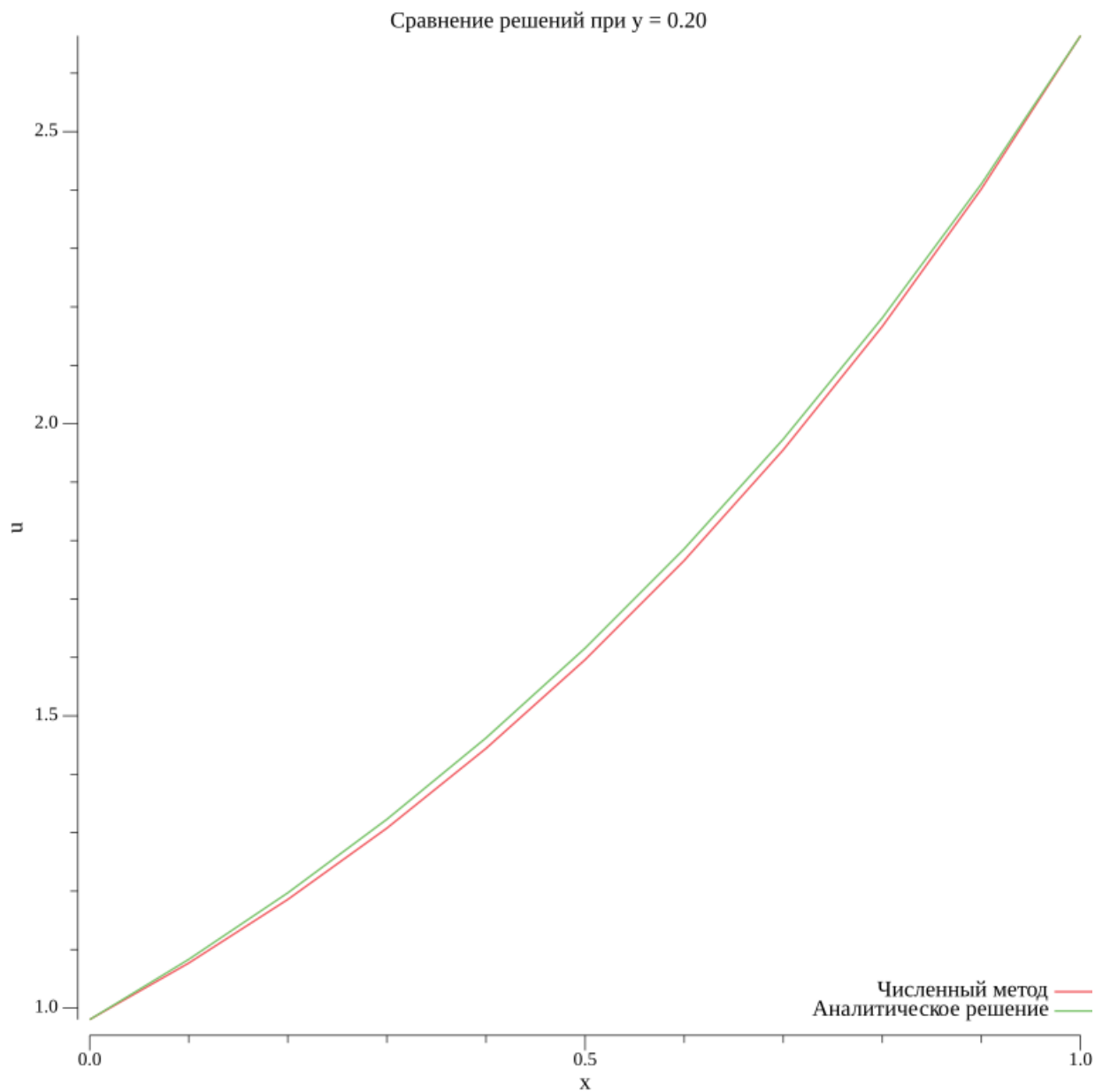












Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы мной была успешно решена задача с начальными и граничными условиями для уравнения эллиптического типа. Я применил три разнообразных метода для решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений и осуществил анализ точности полученных результатов, сопоставив их с заданными параметрами точности.