МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*1*
по курсу «Численные методы»

Выполнил: А.В. Клитная
Группа: 8О-408Б-20

Москва, 2023

Условие

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a > 0,$$

$u(0,t) = 0,$

$u(1,t) = 0,$

$u(x,0) = \sin(2\pi x)$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-4\pi^2 at)\sin(2\pi x)$.

Метод решения

Изначально задаём начальные условия.

Тк в нашей задаче граничные условия 1 рода равные 0 , которые аппроксимируются точно в узлах на границе рассчетной области, соответсвенно, аппроксимировать их не нужно.

Сами схемы были реализованы по формуле:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + (1-\theta)a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

где θ - вес неявной части конечно-разностной схемы, 1–θ - вес для явной части, причем 0≤θ≤1. При θ=1 имеем полностью неявную схему, при θ=0 - полностью явную схему, и при θ=1/2 - схему *Кранка-Николсона.*

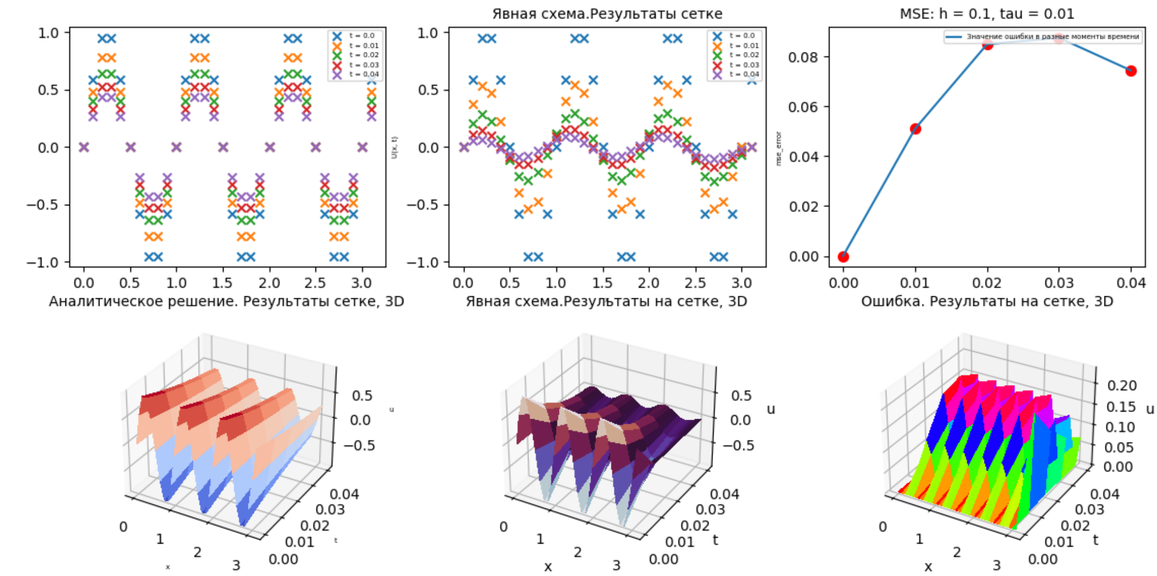
Описание программы

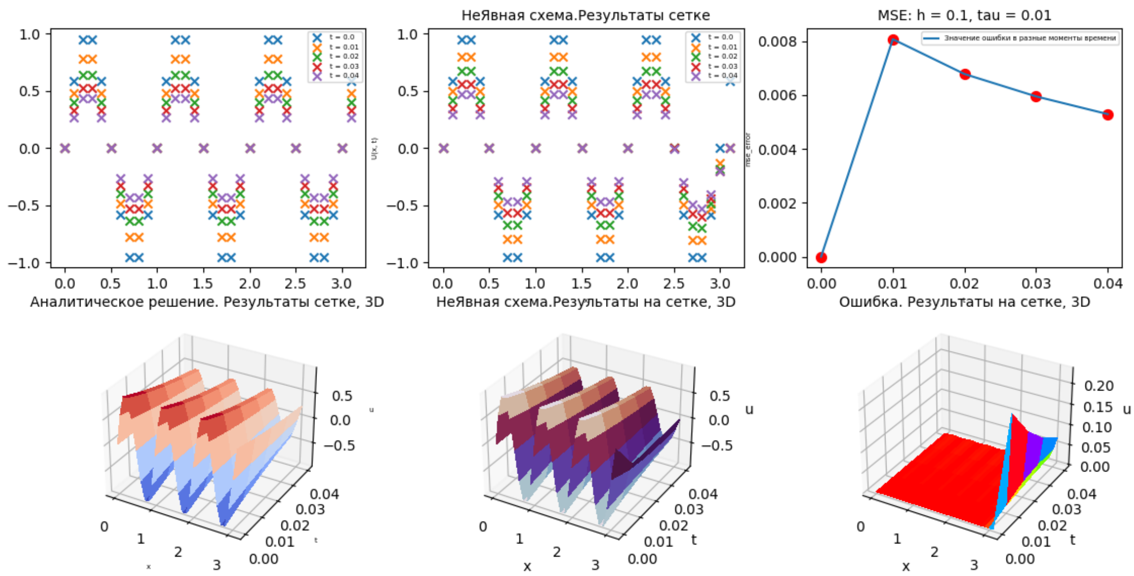
Программа состоит из 1 файла.

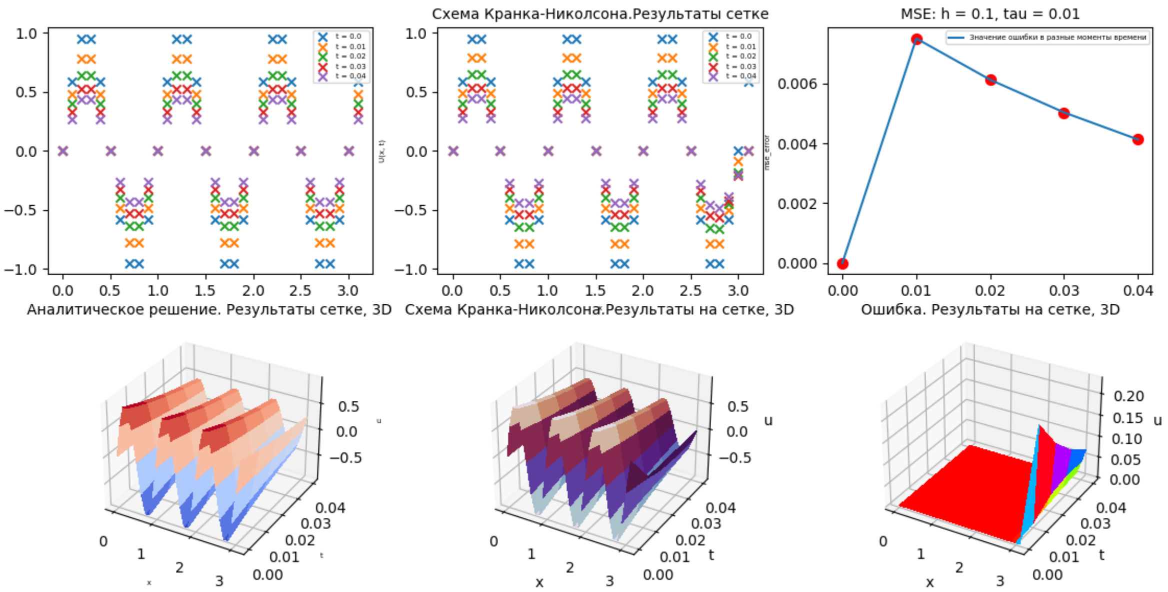
В программе задаются граничные условия, начальное условие и аналитическое решение в качестве отдельных функций. Поскольку в задаче в качестве граничных условий 1 рода представлены функции равные 0 => они были заданы единой функцией u_gr

Далее задаем необходимый коэффициент а, шаг по пространственной и временной сетке, а также кол-во слоев сетки. Затем переносим на сетку аналитическое решение analitic_on_net и задаем параметры для построения фигуры. При помощи функции update_plot определяем по какой схеме строить и строим при помощи plot_function в которую подается необходимая схема высчитанная в одной из функций(explicit_solution, implicit_solve, KN_solve) . перемещения между построениями были настроены через кнопки right / left а также высчитанна функция ошибок error.

Результаты


Явная схема.Результаты сетке
MSE: h = 0.1, tau = 0.01
Значение ошибки в разные моменты времени
Аналитическое решение. Результаты сетке, 3D
Явная схема.Результаты на сетке, 3D
Ошибка. Результаты на сетке, 3D


НеЯвная схема.Результаты сетке
MSE: h = 0.1, tau = 0.01
Значение ошибки в разные моменты времени
Аналитическое решение. Результаты сетке, 3D
НеЯвная схема.Результаты на сетке, 3D
Ошибка. Результаты на сетке, 3D



Выводы

Выполнив данную работу я смогла убедится, схема Кранка-Николсона является самой эффективной. Это связано с тем, что функция аппроксимируется со вторым порядком и по пространственной, и по временной переменным.