Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

Факультет прикладной математики и физики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Отчет по лабораторным работам

по курсу «Численные методы»

Вариант 2

Выполнил: Примаченко А.А.

Группа: М8О-408Б-20

Проверил: проф. Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a > 0,$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u(1,t) = 1,$$

$$u(x,0) = x + \sin \pi x$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = x + \exp(-\pi^2 at)\sin(\pi x)$

Ход решения

Так как на границах $x = 0$ и $x = l = 1$ заданы краевые условия вида $u(0,t) = 0, u(1,t) = 1,$ т.е. граничные условия первого рода, и, кроме того, заданы начальные условия $u(x,0) = x + \sin \pi x$ то решаемую задачу называют <u>первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности.</u>

Подобные задачи решаются методом конечных разностей. Для этого на пространственно-временную область $0 \le x \le l, 0 \le t \le T$ наносится конечно-разностная сетка $\omega_{h\tau} = \{x_j = jh, j = \overline{0,N}; t^k = k\tau, k = \overline{0,K}\}$ с пространственным шагом $h = \frac{l}{N}$ и шагом по времени $\tau = \frac{T}{K}$.

Сеточная функция u_j^k задачи – однозначное отображение целых аргументов j, k в значение функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$.

На введенной сетке введем сеточные функции u_j^k, u_j^{k+1}, первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для её нахождения аппроксимируем $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2).$$

Заметим, так как в моем варианте даны условия первого рода, мы можем сразу же заполнить первый и последний столбцы сетки – u_0^k и u_N^k соответственно, а также её нижнюю строку u_j^0.

Подставляя полученные аппроксимации в исходное уравнение получаем <u>явную конечно-разностную схему:</u>

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, K-1},$$

$$u_0^k = 0, u_N^k = 1, k = \overline{0, K}, u_j^0 = x_j + \sin \pi x_j\,, j = \overline{0, N}.$$

Из всех переменных нам неизвестна только u_j^{k+1}. Выразим её явно:

$$u_j^{k+1} = \sigma u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma) u_j^k + \sigma u_{j-1}^k, \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}.$$

Схема хороша тем, что позволяет получить ответ сразу, не решая СЛАУ, однако также она обладает существенным недостатком – она является условно устойчивой с условием $\sigma \leq \frac{1}{2}$.

Если в исходное уравнение подставить следующую аппроксимацию:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2),$$

то получим <u>неявную конечно-разностную схему:</u>

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, K-1},$$

$$u_0^{k+1} = 0, u_N^{k+1} = 1, k = \overline{0, K}, u_j^0 = x_j + \sin \pi x_j\,, j = \overline{0, N}.$$

Домножим обе стороны равенства на τ:

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \sigma\left(u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}\right),$$

сгруппируем и окончательно получаем:

$$-u_j^k = \sigma u_{j+1}^{k+1} - (2\sigma + 1)u_j^{k+1} + \sigma u_{j-1}^{k+1},$$

где $a_j = \sigma, b_j = -(2\sigma + 1), c_j = \sigma$ – коэффициенты трехдиагональной матрицы, $d_j = -u_j^k$ – компоненты вектора правой стороны. Причем стоит учитывать, что $d_1 = -u_1^k, d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma)$. Полученную СЛАУ лучше всего решать методом прогонки, так как матрица получилась трехдиагональной.

Рассмотрим неявно-явную схему:

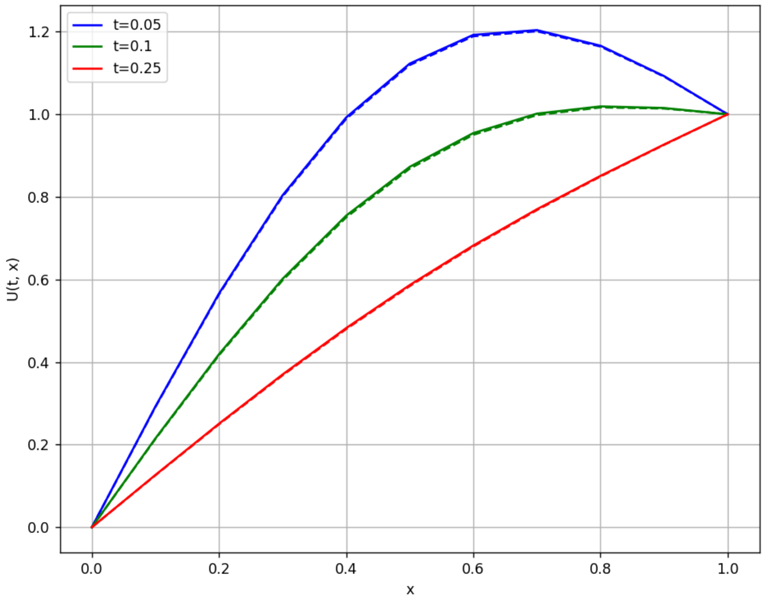
$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2\theta \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + a^2(1-\theta)\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2},$$

где θ – вес неявной части конечно-разностной схемы, $(1-\theta)$ – вес для явной части, причем $0 \leq \theta \leq 1$. При $\theta = \frac{1}{2}$ имеем схему Кранка-Николсона. Она абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственной переменной x.

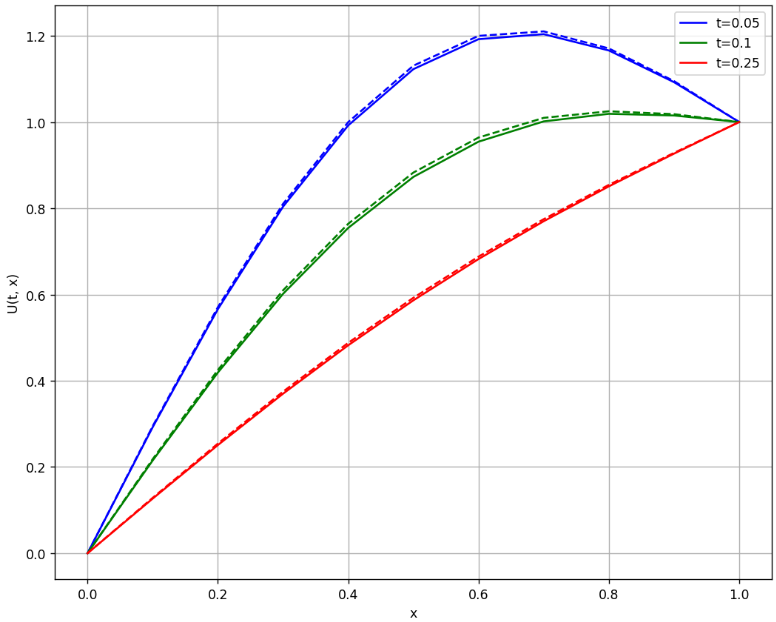
Производя аналогичные преобразования получаем СЛАУ, где коэффициенты трёхдиагональной матрицы равны: $a_j = \sigma\theta, b_j = -(2\sigma\theta + 1), c_j = \sigma\theta$, а компоненты вектора правой стороны - $d_j = -(1-\theta)\sigma u_{j+1}^k + (2\sigma(1-\theta) - 1)u_j^k - (1-\theta)\sigma u_{j-1}^k$. Аналогично, стоит учесть, что $d_1 = -(1-\theta)\sigma\left(u_2^k + u_0^k\right) + (2\sigma(1-\theta) - 1)u_1^k, d_{N-1} = -(1-\theta)\sigma\left(u_N^k + u_{N-2}^k\right) + (2\sigma(1-\theta) - 1) * u_{N-1}^k - \sigma\theta$.

Результат работы программы

Программа считает задачу с одним заранее заданным $\sigma = \frac{2}{5}$. На основании этого значения она рассчитывае шаги по времени и координате таким образом, чтобы выполнялось условие устойчивости для явного метода. На графики она выводит значение функции при трёх различных фиксированных t. Сплошной линией на графике изображено точное решение, пунктирной – рассчитанное численно. Для построения графика погрешностей методов перебирается 5 различных разбиений сетки по координате x.



Явная схема



Неявная схема

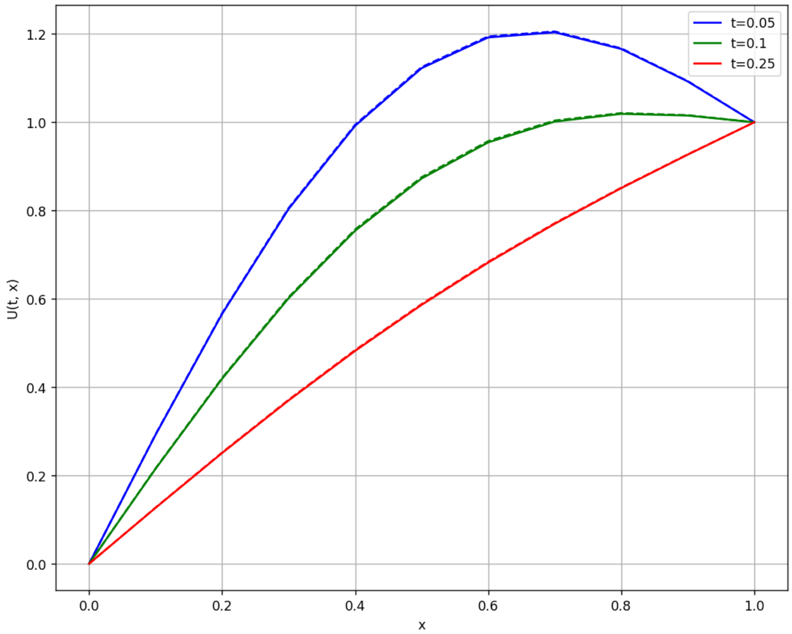


Схема Кранка-Николсона

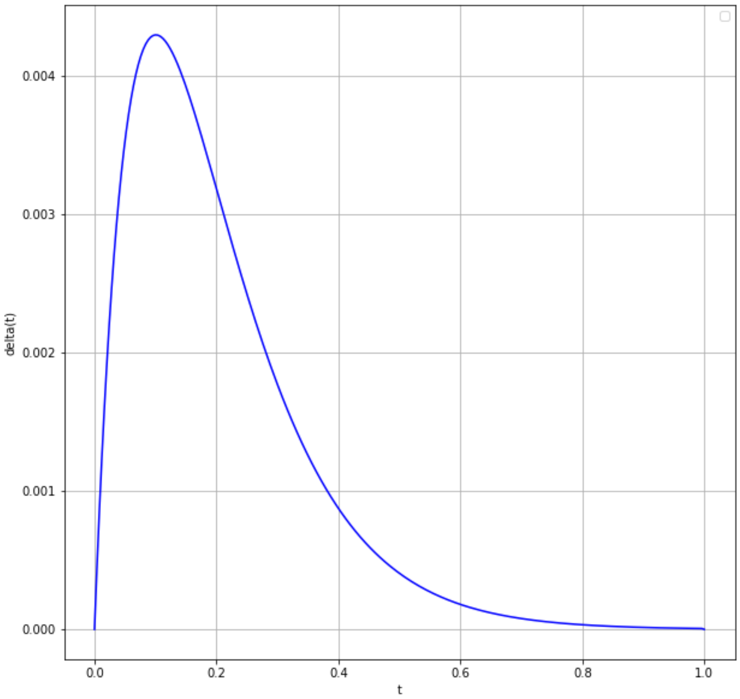


График погрешностей

Вывод

При решении уравнения каждым из трёх методов при выбранной σ решение оказалось достаточно точным. Наилучшим образом показал себя метод Кранка-Николсона. При увеличении длины шага по координате x погрешность вычислений закономерно увеличивается.

Код программы

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['figure.figsize'] = [10, 10]

def U(x, t):
    return x + np.exp(-np.pi**2*t)*np.sin(np.pi*x)

def psi(x):
    return x + np.sin(np.pi*x)

l=1; u_0=0; u_l=1
a = 1; T = 1; N = 10; sigma = 0.4; theta=0.5
h = l/N
tau = sigma*h**2/a
K = int(round(T/tau))

def Check(A):
    if np.shape(A)[0] != np.shape(A)[1]:
        return False
    n = np.shape(A)[0]
    for i in range(n):
        sum = 0
        for j in range(n):
            if i != j:
                sum += abs(A[i][j])
        if abs(A[i][i]) < sum:
            return False
    return True

def solve(a, b):
    if (Check(a)):
        p = np.zeros(len(b))
        q = np.zeros(len(b))
        p[0] = -a[0][1] / a[0][0]
        q[0] = b[0] / a[0][0]
        for i in range(1, len(p) - 1):
            p[i] = -a[i][i + 1] / (a[i][i] + a[i][i - 1] * p[i - 1])
            q[i] = (b[i] - a[i][i - 1] * q[i - 1]) / (a[i][i] + a[i][i - 1] *
p[i - 1])
        i = len(a) - 1
        p[-1] = 0
```

```
        q[-1] = (b[-1] - a[-1][-2] * q[-2]) / (a[-1][-1] + a[-1][-2] * p[-2])
        x = np.zeros(len(b))
        x[-1] = q[-1]
        for i in reversed(range(len(b) - 1)):
            x[i] = p[i] * x[i + 1] + q[i]
        return x

def error(sigma, l, a, T, U):
    N_array = [5, 8, 11, 14, 17]
    size = np.size(N_array)
    h_array = np.zeros(size)
    tau_array = np.zeros(size)
    K_array = np.zeros(size)
    errors1 = np.zeros(size)
    errors2 = np.zeros(size)
    errors3 = np.zeros(size)

    for i in range(0, size):
        h_array[i] = l/N_array[i]
        tau_array[i] = np.sqrt(sigma * h_array[i]**2 / a)
        K_array[i] = int(round(T/tau_array[i]))
        x_array = np.arange(0, l+h_array[i], h_array[i])
        u1 = Explicit_Method(N_array[i], int(K_array[i]), sigma)
        u2 = Implicit_Method(N_array[i], int(K_array[i]), sigma)
        u3 = Crank_Nickolson(N_array[i], int(K_array[i]), sigma)
        t = tau_array[i] * K_array[i]/2

        if (np.size(x_array)!=N_array[i]+1):
            x_array = x_array[:N_array[i]+1]

        u_correct = U(x_array, t)
        u1_calculated = u1[int(K_array[i]/2)]
        u2_calculated = u2[int(K_array[i]/2)]
        u3_calculated = u3[int(K_array[i]/2)]
        errors1[i] = np.amax(np.abs(u_correct - u1_calculated))
        errors2[i] = np.amax(np.abs(u_correct - u2_calculated))
        errors3[i] = np.amax(np.abs(u_correct - u3_calculated))

    return N_array, errors1, errors2, errors3

def show_solution(h, tau, K, l, u, U):
    x_array = np.arange(0, l + h, h)
```

```
    fig, ax = plt.subplots()
    t = [int(K * 0.05), int(K * 0.1), int(K * 0.25)]
    colors = ['blue', 'green', 'red']

    for i in range(len(t)):
        u_correct = U(x_array, t[i] * tau)
        u_calculated = u[t[i]]
        plt.plot(x_array, u_correct, color=colors[i], label='t=%s' % round(t[i]
* tau, 2))
        plt.plot(x_array, u_calculated, color=colors[i], linestyle='--')
    ax.set_xlabel('x')
    ax.set_ylabel('U(t, x)')
    plt.grid()
    ax.legend()
    plt.show()

def show_errors(sigma, l, a, T, U):
    N_array, errors1, errors2, errors3 = error(sigma, l, a, T, U)
    colors = ['blue', 'green', 'red']
    deltaX = np.zeros(np.size(N_array))
    for i in range(np.size(N_array)):
        deltaX[i] = l / N_array[np.size(N_array) - i - 1]
    fig, ax = plt.subplots()
    plt.plot(deltaX, errors1, color=colors[0], label='Явный метод')
    plt.plot(deltaX, errors2, color=colors[1], label='Неявный метод')
    plt.plot(deltaX, errors3, color=colors[2], label='Метод Кранка-Николсона')
    ax.set_xlabel('delta X')
    ax.set_ylabel('Epsilon')
    plt.grid()
    ax.legend()
    plt.show()

def Explicit_Method(N, K, sigma):
    # Проверка на устойчивость
    u = np.zeros((K + 1, N + 1))
    for i in range(0, N):
        u[0][i] = psi(i * h)
    for i in range(0, K):
        u[i][0] = u_0
        u[i][N] = u_l
    if (sigma > 0.5):
        raise Exception("Измените параметры сетки")
    for k in range (1, K):
```

```python
        for j in range (1, N):
            u[k][j] = sigma * u[k-1][j+1] + (1-2*sigma) * u[k-1][j] + sigma *
u[k-1][j-1]
    return u

def Implicit_Method(N, K, sigma):
    a_j = sigma
    b_j = -(1 + 2 * sigma)
    c_j = sigma
    u = np.zeros((K + 1, N + 1))
    for i in range(0, N):
        u[0][i] = psi(i * h)
    for i in range(0, K):
        u[i][0] = u_0
        u[i][N] = u_l
    # Заполняем верхние слои по неявной конечно-разностной схеме
    for k in range(1, K + 1):
        # Создаем матрицу и столбец для решения СЛАУ
        matrix = np.zeros((N - 1, N - 1))
        d = np.zeros(N - 1)
        # Первая строка
        matrix[0][0] = b_j
        matrix[0][1] = c_j
        d[0] = -(u[k-1][1] + sigma*u_0
        # Строки с первой по N-2
        for j in range(1, N-2):
            matrix[j][j-1] = a_j
            matrix[j][j] = b_j
            matrix[j][j+1] = c_j
            d[j] = -u[k-1][j+1]
        # Последняя строка
        matrix[N-2][N-3] = a_j
        matrix[N-2][N-2] = b_j
        d[N-2] = -(u[k-1][N-1] + sigma * u_l)
        # Решем СЛАУ методом прогонки
        ans = solve(matrix, d)
        u[k][1:N] = an
    return u

def Crank_Nickolson(N, K, sigma):
    a_j = sigma * theta
    b_j = -(1 + 2*sigma*theta)
    c_j = sigma * theta
```

```
    u = np.zeros((K + 1, N + 1))
    for i in range(0, N):
        u[0][i] = psi(i * h)
    for i in range(0, K):
        u[i][0] = u_0
        u[i][N] = u_l
    # Заполняем верхние слои
    for k in range(1, K+1):
        # Создаем матрицу и столбец для решения СЛАУ
        matrix = np.zeros((N-1, N-1))
        d = np.zeros(N-1)
        # Первая строка
        matrix[0][0] = b_j
        matrix[0][1] = c_j
        d[0] = -sigma*(1-theta)*(u[k-1][2]+u[k-1][0]) + (2*sigma*(1-theta)-
1)*u[k-1][1] - sigma*theta*u_0
        # Строки с первой по N-2
        for j in range(1, N-2):
            matrix[j][j-1] = a_j
            matrix[j][j] = b_j
            matrix[j][j+1] = c_j
            d[j] = -sigma*(1-theta)*(u[k-1][j+2]+u[k-1][j]) + (2*sigma*(1-
theta)-1)*u[k-1][j+1]
        # Последняя строка
        matrix[N-2][N-3] = a_j
        matrix[N-2][N-2] = b_j
        d[N-2] = -sigma*(1-theta)*(u[k-1][N]+u[k-1][N-2]) + (2*sigma*(1-
theta)-1)*u[k-1][N-1] - sigma*theta*u_l
        # Решем СЛАУ методом прогонки
        ans = solve(matrix, d)
        u[k][1:N] = ans
    return u


def main():
    u1 = Explicit_Method(N, K, sigma)
    show_solution(h, tau, K, l, u1, U)
    u2 = Implicit_Method(N, K, sigma)
    show_solution(h, tau, K, l, u2, U)\
    u3 = Crank_Nickolson(N, K, sigma)
    show_solution(h, tau, K, l, u3, U)
    show_errors(sigma, l, a, T, U)

main()
```