МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

**Лабораторная работа №5**
**по курсу «Численные методы»**

***Численное решение уравнений параболического типа.***

Выполнил: *К. Д. Каширин*
Группа: *М8О-408Б-20*
Преподаватель: Д. Е. Пивоваров

Москва, 2023

## Условие

1. Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров $\tau, h$.
2. Вариант 10:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad a > 0,\ b > 0,\ c < 0.$$

$$u_x(0,t) + u(0,t) = \exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -\exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$$

$$u(x,0) = \sin x.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin(x+bt)$.

## Метод решения

Сеточная функция представлена матрицей U размерности KxN, где K — число временных слоёв, N — число пространственных шагов.

Явная конечно-разностная схема:

$$u_j^{k+1} = (\sigma + \mu) * u_{j+1}^k + (1 - 2*\sigma + \tau * c) * u_j^k + (\sigma - \mu) * u_{j-1}^k.$$

Неявная конечно-разностная схема:

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, j = 1 \ldots N-2, k = 0,1,2,\ldots$$

где (для двухточечной аппроксимации с первым порядком)

$$a_j = \frac{a*\tau}{h^2} - \frac{\tau * b}{2*h},$$

$$b_j = \tau * \frac{c - 2*a}{h^2} - 1,$$

$$c_j = \frac{a*\tau}{h^2} + \frac{\tau*b}{2*h}, j = 1,\ldots,N-2.$$

$$a_0 = 0,$$

$$b_0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0}{h},$$

$$c_0 = \frac{\alpha_0}{h},$$

$$a_{N-1} = -\frac{\alpha_1}{h},$$

$$b_{N-1} = \beta_1 + \frac{\alpha_1}{h},$$
$$c_{N-1} = 0.$$

Схема Кранка-Николсона:
$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, j = 1 \dots N-2, k = 0, 1, 2, \dots$$
где
$$a_j = \sigma \frac{a * \tau}{h^2} - \frac{\tau * b}{2 * h},$$
$$b_j = \tau * \frac{c - \sigma * 2 * a}{h^2} - 1,$$
$$c_j = \sigma \frac{a * \tau}{h^2} + \frac{\tau * b}{2 * h}, j = 1, \dots, N-2.$$
$$a_0 = \beta_0 - \frac{3\alpha_0}{2h},$$
$$b_0 = 2\frac{\alpha_0}{h},$$
$$c_0 = -\frac{\alpha_0}{2h},$$
$$a_{N-1} = \frac{\alpha_1}{2h},$$
$$b_{N-1} = -\frac{2\alpha_1}{h},$$
$$c_{N-1} = \beta_1 + \frac{3\alpha_1}{2h}.$$

В конце работы программа записывает параметры условия, сеточную функцию и вектор ошибок в файл для скрипта отрисовки графиков.

## Описание программы

Программа состоит из одного файла main.cpp, включающего функции граничного условия, аналитического решения; функцию, осуществляющую двухточечную аппроксимацию с первым/вторым порядком, трёхточечную аппроксимацию со вторым порядком, функцию метода прогонки для решения СЛАУ с трёхдиагональной матрицей,  функцию для запуска неявной конечно-разностной схемы, принимающая вид аппроксимации граничных условий, функция, осуществляющая двухточечную/трехточечную аппроксимацию с первым/вторым порядком, функцию запуска метода Кранка-Николса

## Результаты

Для построения графиков функций (аналитического решения и численного) была написана программа на языке Python, использующая библиотеки numpy и matplotlib. Графики были построены для временного слоя timeSlice = 200, оранжевый цвет использовался для аналитического решения, чёрный — для численного.

```
● k.d.kashirin@macbook-C02F11GJMD6M Contest % g++ -std=c++11 lab5.cpp
● k.d.kashirin@macbook-C02F11GJMD6M Contest % ./a.out
  Data written to file: explicit2point1order.txt
  Data written to file: explicit3point2order.txt
  Data written to file: explicit2point2order.txt
  Data written to file: implicit2point1order.txt
  Data written to file: implicit3point2order.txt
  Data written to file: implicit2point2order.txt
  Data written to file: crankNicholson.txt
```

Рис. 1. Консольное взаимодействие программы с пользователем.

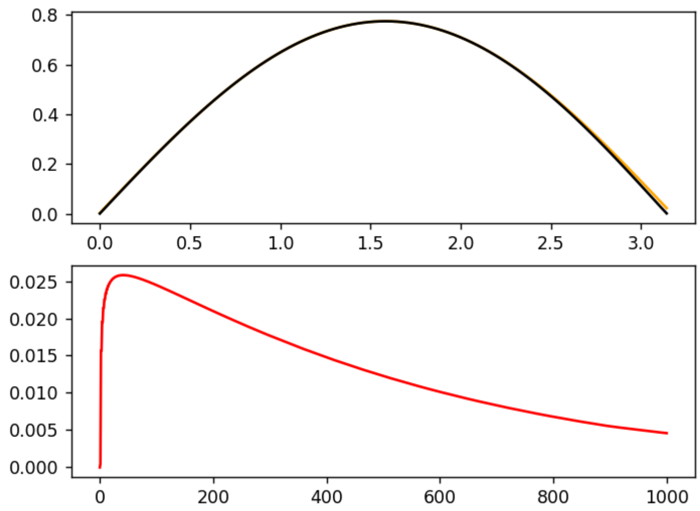


Рис. 2. График численного решения явной конечно-разностной схемой с двухточечной аппроксимацией второго порядка.

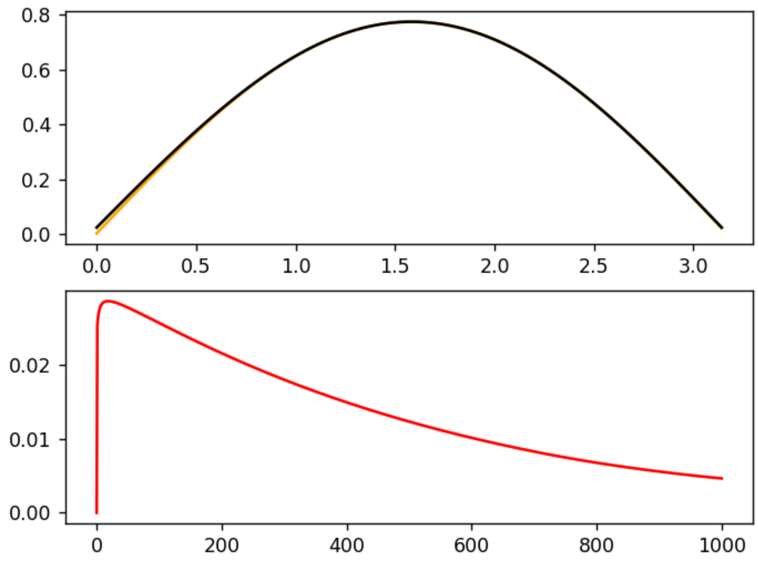


Рис. 3. График численного решения неявной конечно-разностной схемой с трёхточечной аппроксимацией второго порядка.

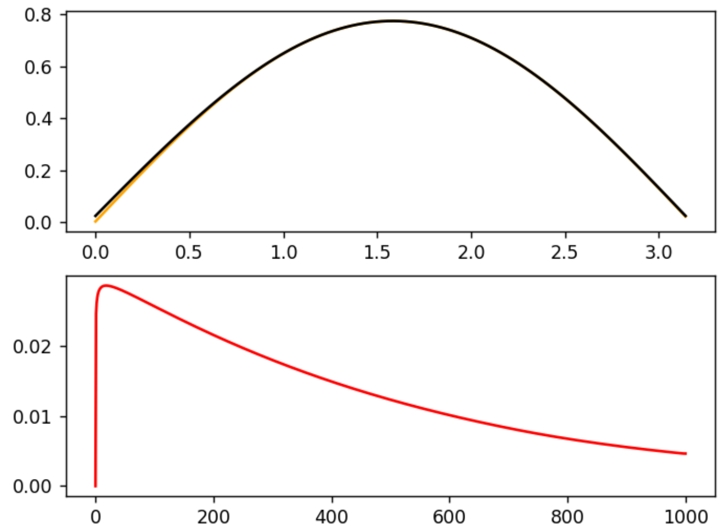


Рис. 4. График численного решения схемой Кранка-Николсона.

## Выводы

В результате выполнения данной лабораторной работы я освоил численные методы для решения уравнений параболического типа, включая явные и неявные конечно-разностные схемы, а также схему Кранка-Николсона. Полученные навыки могут быть применены в моделировании физических процессов как в научных исследованиях, так и в разработке специализированного программного обеспечения.

Кроме того, эти методы численного решения уравнений параболического типа позволяют эффективно моделировать различные физические явления, такие как теплопроводность, диффузия, распространение волн и другие процессы, имеющие важное значение в различных областях науки и техники. Полученные знания могут быть также применены для анализа и оптимизации систем, где подобные физические явления играют ключевую роль.