Московский авиационный институт

(Национальный исследовательский университет)

Факультет прикладной математики и физики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Отчет по лабораторным работам

по курсу «Численные методы»

Вариант 2

Выполнил: Примаченко А.А.

Группа: М8О-408Б-20

Проверил: проф. Пивоваров Д.Е.

Дата:

Оценка:

Москва, 2023

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задание

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y.

Вариант 2

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

$u_x(0, y) = 0,$

$u(1, y) = 1 - y^2,$

$u_y(x, 0) = 0,$

$u(x, 1) = x^2 - 1.$

Аналитическое решение: $U(x, y) = x^2 - y^2$.

Ход решения

На прямоугольнике $x \in [0, l_x], y \in [0, l_y]$ наложим сетку $\omega_{h_1,h_2} = \{x_i = ih_x, i = \overline{0, N_x}, y_j = jh_y, j = \overline{0, N_y}\}$. Согласно граничным условиям мы можем сразу явно заполнить верхнюю строку и последний столбец сетки, так они задаются граничными условиями первого рода. На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} + O\left(h_x^2 + h_y^2\right) = 0$$

Выражаем из этого соотношения интересующий нас член $u_{i,j}$, который мы можем найти одним из трех представленных ниже методов:

Метод Либмана

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}} \left(\frac{u_{i-1j}^{(k-1)} + u_{i+1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)}}{h_y^2} \right)$$

Метод Зейделя

$$u_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}} \left(\frac{u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k)}}{h_y^2} \right)$$

Метод простых итераций с верхней релаксацией

$$u_{ij}^{(k)} = \theta \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}} \left(\frac{u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k)}}{h_y^2} \right) + (1-\theta) *$$

$$* \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}} \left(\frac{u_{i-1j}^{(k-1)} + u_{i+1j}^{(k-1)}}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1}^{(k-1)} + u_{ij+1}^{(k-1)}}{h_y^2} \right)$$

Точки в первом столбце и нижней строке сетки получаются из аппроксимации граничных условий:

$$u_{i0} = u_{i1} - h_y * 0$$

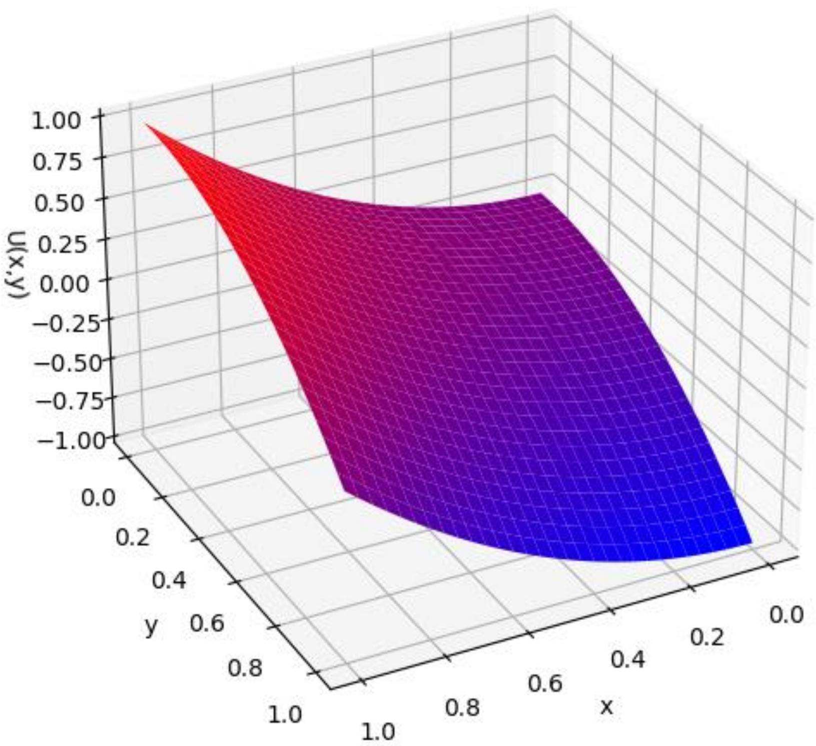
$$u_{0j} = u_{1j} - h_x * 0$$

Результат работы программы

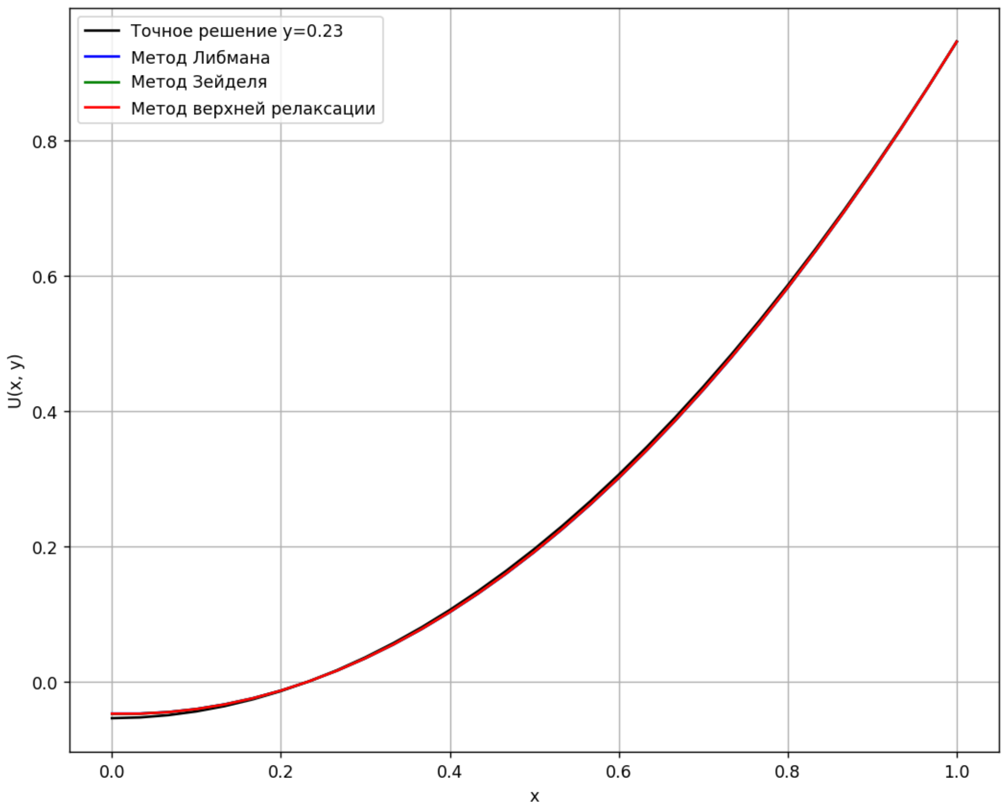
Кол-во итераций метода Либмана: 851

Кол-во итераций метода Зейделя: 498

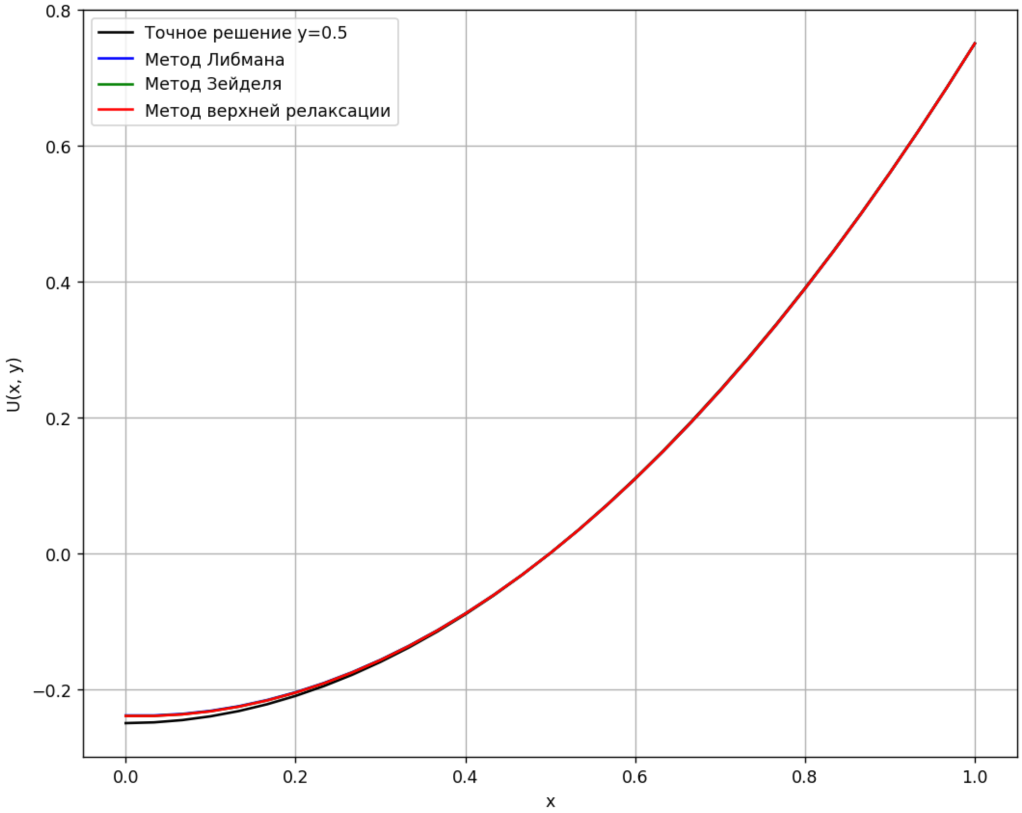
Кол-во итераций верхней релаксации: 411



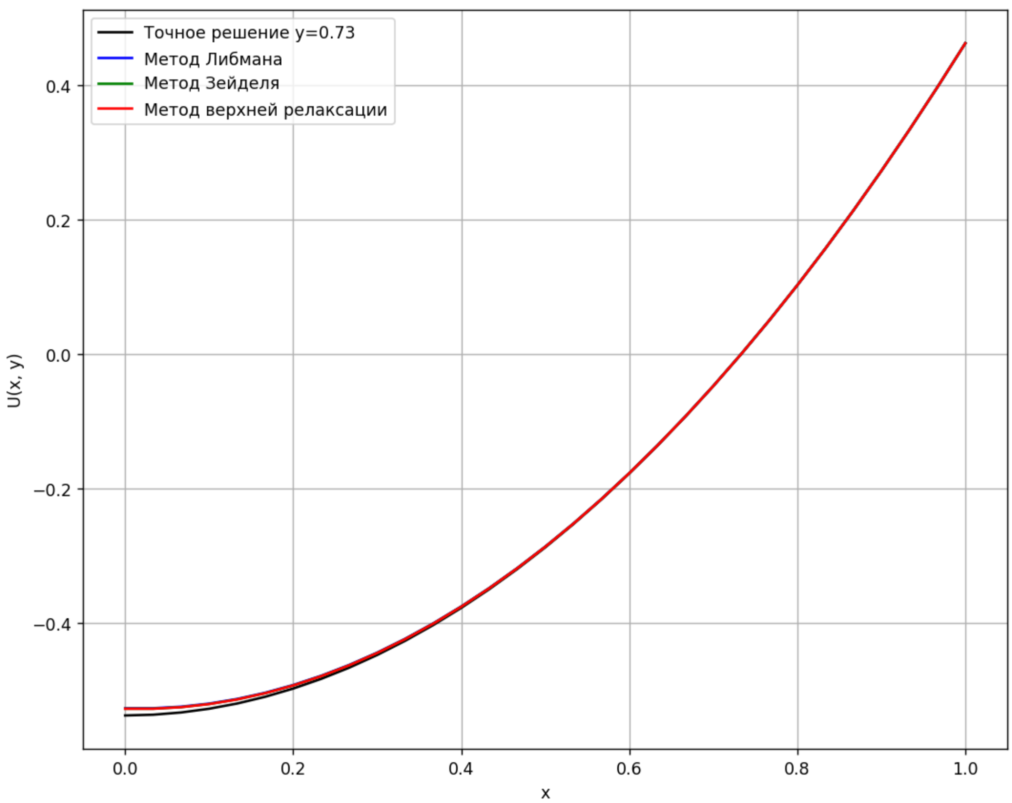
Поверхность, которая задается точным решением



Точное и численные решения, полученные при фиксированном $y = 0{,}23$



Точное и численные решения, полученные при фиксированном $y = 0{,}5$



Точное и численные решения, полученные при фиксированном $y = 0{,}73$

Вывод

Из результатов выполненной лабораторной работы можно заключить, что все рассмотренные методы примерно в равной степени точны, однако количество итераций, за которое эта точность достигается, у каждого из них отличается. Самым быстрым оказался метод простых итераций с верхней релаксацией, за ним следует метод Зейделя, а самым медленным оказался метод простых итераций. Также из графика погрешностей можно заметить четкую тенденцию – при увеличении длины шага увеличивается и погрешность используемого метода.

Код программы

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from copy import deepcopy
from matplotlib.colors import LinearSegmentedColormap
plt.rcParams['figure.figsize'] = [10, 10]

# Граничные условия
def phi1(y):
    return 0

def phi2(y):
    return 1-y*y

def phi3(x):
    return 0

def phi4(x):
    return x*x-1

#Точное решение
def U(x, y):
    return x*x-y*y

# Норма
def norm(v1, v2):
    return np.amax(np.abs(v1 - v2))

# Функция для вычисления погрешностей
```

```
def error(lx, hy, Ny, eps, theta):
    Nx_array = [5, 10, 20, 40]
    size = np.size(Nx_array)
    hx_array = np.zeros(size)
    errors1 = np.zeros(size)
    errors2 = np.zeros(size)
    errors3 = np.zeros(size)
    for i in range(0, size):
        hx_array[i] = lx/Nx_array[i]
        x_array = np.arange(0, lx+hx_array[i], hx_array[i])
        u1, tmp = Liebman(hx_array[i], hy, Nx_array[i], Ny, eps)
        u2, tmp = Seidel(hx_array[i], hy, Nx_array[i], Ny, eps)
        u3, tmp = SOR(hx_array[i], hy, Nx_array[i], Ny, eps, theta)
        if (np.size(x_array)!=Nx_array[i]+1):
            x_array = x_array[:Nx_array[i]+1]
        y=hy*Ny/5
        u_correct = np.zeros(np.size(x_array))
        for j in range(np.size(x_array)):
            u_correct[j] = U(x_array[j], y)
        u1_calculated = u1[:, int(Ny/5)]
        u2_calculated = u2[:, int(Ny/5)]
        u3_calculated = u3[:, int(Ny/5)]
        errors1[i] = norm(u_correct, u1_calculated)
        errors2[i] = norm(u_correct, u2_calculated)
        errors3[i] = norm(u_correct, u3_calculated)
    return Nx_array, errors1, errors2, errors3

# Функция для построения графика ошибок
def show_errors(lx, hy, Ny, eps, theta):
    Nx_array, errors1, errors2, errors3 = error(lx, hy, Ny, eps, theta)
    colors = ['blue', 'green', 'red']
    deltaX = np.zeros(np.size(Nx_array))
    for i in range(np.size(Nx_array)):
        # deltaX[i] = lx / Nx_array[np.size(Nx_array) - i - 1]
        deltaX[i] = lx / Nx_array[i]
    fig, ax = plt.subplots()
    plt.plot(deltaX, errors1, color=colors[0], label='Метод Либмана')
    plt.plot(deltaX, errors2, color=colors[1], label='Метод Зейделя')
    plt.plot(deltaX, errors3, color=colors[2], label='Метод верхней релакса-
ции')
    ax.set_xlabel('delta X')
    ax.set_ylabel('Epsilon')
    plt.grid()
```

```
    ax.legend()
    plt.show()

# Функция для отрисовки решения
def show_solution(Nx, Ny, hx, hy, U, ulieb, usei, usor):
    x_array = np.array([i * hx for i in range(Nx + 1)])
    y = [int(Ny * 0.25), int(Ny * 0.5), int(Ny * 0.75)]
    colors = ['black', 'blue', 'green', 'red']
    for i in range(len(y)):
        fig, ax = plt.subplots()

        u_correct = U(x_array, y[i] * hy)
        u_liebman = ulieb[y[i]]
        u_seidel = usei[y[i]]
        u_sor = usor[y[i]]

        plt.plot(x_array, u_correct, color=colors[0], label='Точное решение
y=%s' % round(y[i] * hy, 2))
        plt.plot(x_array, u_liebman, color=colors[1], label='Метод Либмана')
        plt.plot(x_array, u_seidel, color=colors[2], label='Метод Зейделя')
        plt.plot(x_array, u_sor, color=colors[3], label='Метод верхней релак-
сации')

        ax.set_xlabel('x')
        ax.set_ylabel('U(x, y)')
        plt.grid()
        ax.legend()
        plt.show()

# Функция для построения трёхмерного графика решения
def show_solution3d(Nx, Ny, hx, hy, u, elev=45, azim=45):
    x = np.array([i*hx for i in range(Nx+1)])
    y = np.array([j*hy for j in range(Ny+1)])
    xgrid, ygrid = np.meshgrid(x, y)
    z = u
    fig = plt.figure()
    axes = fig.add_subplot(projection='3d')
    cmap = LinearSegmentedColormap.from_list('red_blue', ['b','r'], 256)
    axes.view_init(elev=elev, azim=azim)
    axes.set_xlabel('x')
    axes.set_ylabel('y')
    axes.set_zlabel('U(x,y)')
```

```
    axes.plot_surface(xgrid, ygrid, z, color='#11aa55', cmap=cmap, rcount=Nx+1,
ccount=Ny+1)
    plt.show()

# Метод простых итераций (Либмана)
def Liebman(hx, hy, Nx, Ny, eps):
    u = np.zeros((Nx + 1, Ny + 1))
    # Заполняем граничные условия 1-го рода
    for i in range(Nx + 1):
        u[i][Ny] = phi4(i * hx)
    for j in range(Ny + 1):
        u[Nx][j] = phi2(j * hy)
    # Итерационный процесс
    iter_num = 0
    while True:
        u_next = deepcopy(u)
        for i in range(1, Nx):
            for j in range(1, Ny):
                u_next[i][j] = 1 / (2 / hx ** 2 + 2 / hy ** 2) * (
                            (u[i - 1][j] + u[i + 1][j]) / hx ** 2 + (u[i][j -
1] + u[i][j + 1]) / hy ** 2)

        # Заполняем граничные условия 2-го рода
        for i in range(Nx):
            u_next[i][0] = u_next[i][1] - hy * phi3(i * hx)
        for j in range(Ny):
            u_next[0][j] = u_next[1][j] - hx * phi1(j * hy)

        # Условие прекращения цикла
        if norm(u, u_next) < eps:
            break
        u = deepcopy(u_next)
        iter_num += 1
    return u, iter_num

#  Метод Зейделя
def Seidel(hx, hy, Nx, Ny, eps):
    u = np.zeros((Nx + 1, Ny + 1))

    # Заполняем граничные условия 1-го рода
    for i in range(Nx + 1):
        u[i][Ny] = phi4(i * hx)
    for j in range(Ny + 1):
```

```
        u[Nx][j] = phi2(j * hy)

    # Итерационный процесс
    iter_num = 0
    while True:
        u_prev = deepcopy(u)
        for i in range(1, Nx):
            for j in range(1, Ny):
                u[i][j] = 1 / (2 / hx ** 2 + 2 / hy ** 2) * (
                            (u[i - 1][j] + u[i + 1][j]) / hx ** 2 + (u[i][j -
1] + u[i][j + 1]) / hy ** 2)

        # Заполняем граничные условия 2-го рода
        for i in range(Nx):
            u[i][0] = u[i][1] - hy * phi3(i * hx)
        for j in range(Ny):
            u[0][j] = u[1][j] - hx * phi1(j * hy)

        # Условие прекращения цикла
        if norm(u, u_prev) < eps:
            break
        iter_num += 1
    return u, iter_num
# Метод верхней релаксации
def SOR(hx, hy, Nx, Ny, eps, theta):
    u = np.zeros((Nx + 1, Ny + 1))
    # Заполняем граничные условия 1-го рода
    for i in range(Nx + 1):
        u[i][Ny] = phi4(i * hx)
    for j in range(Ny + 1):
        u[Nx][j] = phi2(j * hy)
    # Итерационный процесс Зейделя
    iter_num = 0
    while True:
        u_prev = deepcopy(u)
        for i in range(1, Nx):
            for j in range(1, Ny):
                u[i][j] = 1 / (2 / hx ** 2 + 2 / hy ** 2) * (
                            (u[i - 1][j] + u[i + 1][j]) / hx ** 2 + (u[i][j -
1] + u[i][j + 1]) / hy ** 2)
        # Заполняем граничные условия 2-го рода
        for i in range(Nx):
            u[i][0] = u[i][1] - hy * phi3(i * hx)
```

```
        for j in range(Ny):
            u[0][j] = u[1][j] - hx * phi1(j * hy)
        # Релаксация
        u = theta * u + (1 - theta) * u_prev
        # Условие прекращения цикла
        if norm(u, u_prev) < eps:
            break
        iter_num += 1
    return u, iter_num

def main():
    # Параметры задачи
    lx = 1
    ly = 1
    Nx = 30
    Ny = 30
    eps = 0.00001
    theta = 1.25

    hx = lx / Nx
    hy = ly / Ny

    u1, iter_num1 = Liebman(hx, hy, Nx, Ny, eps)
    print("Кол-во итераций метода Либмана:", iter_num1)
    u2, iter_num2 = Seidel(hx, hy, Nx, Ny, eps)
    print("Кол-во итераций метода Зейделя:", iter_num2)
    u3, iter_num3 = SOR(hx, hy, Nx, Ny, eps, theta)
    print("Кол-во итераций верхней релаксации:", iter_num3)

    show_solution3d(Nx, Ny, hx, hy, u1.T, elev=20, azim=110)
    show_solution(Nx, Ny, hx, hy, U, u1.T, u2.T, u3.T)
    show_errors(lx, hy, Ny, eps, theta)

main()
```