Лабораторная работа 5

Васютинский В.А.

М8О-408Б-20

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

Вариант 5:

dU/dt = (dU)^2 / (dx)^2 + 0.5 * exp(-0.5t) * cos(x)

U_x(0, t) = exp(-0.5t)

U_x(Pi/2, t) = exp(-0.5t)

U(x, 0) = sin(x)

Аналитическое решение:

U(x, t) = exp(-0.5t) * sin(x)

Для решения задачи используются 3 вида конечно-разностных схем: 1. явная схема

$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau}=a\frac{u_{i-1}^k-2u_i^k+u_{i+1}^k}{h^2}+b\frac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h}+c\,u_i^k+f\left(x_i,t^{k+1}\right)$$

2. неявная схема

$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau}=a\frac{u_{i-1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i+1}^{k+1}}{h^2}+b\frac{u_{i+1}^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{2h}+c\,u_i^{k+1}+f\left(x_i,t^k\right)$$

3. схема Кранка-Николсона $(\theta=0.5)$

$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau}=\theta\left(a\frac{u_{i-1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i+1}^{k+1}}{h^2}+b\frac{u_{i+1}^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{2h}+c\,u_i^{k+1}+f\left(x_i,t^k\right)\right)+(1-\theta)\left(a\frac{u_{i-1}^k-2u_i^k+u_{i+1}^k}{h^2}+b\frac{u_{i+1}^k-u_{i-1}^k}{2h}+c\,u_i^k+f(x$$

Для решения задачи используются 3 вида аппроксимации граничных условий: 1. двухточечная аппроксимация с первым порядком

$$\frac{du}{dx}¿_{j=0}^{k+1}=\frac{u_1^{k+1}-u_0^{k+1}}{h}$$

$$\frac{du}{dx}¿_{j=N}^{k+1}=\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}$$

2. трехтоточная аппроксимация со вторым порядком

$$\frac{du}{dx}¿_{j=0}^{k+1}=\frac{-3u_0^{k+1}+4u_1^{k+1}-u_2^{k+1}}{2h}$$

$$\frac{du}{dx}¿_{j=N}^{k+1}=\frac{u_{N-2}^{k+1}-4u_{N-1}^{k+1}+3u_N^{k+1}}{2h}$$

3. двухточечная аппроксимация со вторым порядком

Разложим в граничных узлах на точном решении значение u_1^{k+1} и u_{N-1}^{k+1} в окрестности точки $x=0$ в ряд Тейлора по переменной x до третьей производной включительно

$$u_1^{k+1}=u\left(0+h,t^{k+1}\right)=u_0^{k+1}+\frac{du}{dx}¿_0^{k+1}\cdot h+\frac{d^2u}{dx^2}¿_0^{k+1}\cdot\frac{h^2}{2}$$

$$u_{N-1}^{k+1}=u\left(l-h,t^{k+1}\right)=u_N^{k+1}-\frac{du}{dx}¿_N^{k+1}\cdot h+\frac{d^2u}{dx^2}¿_N^{k+1}\cdot\frac{h^2}{2}$$

Input equation type (example: explicit / implicit)

```
equation_type = str(input())

explicit

N = 15
K = 400
T = 1
curr_time = 0

params = {
    'l': np.pi,
    'psi':  lambda x: np.sin(x),
    'f':    lambda x, t: 0.5 * np.exp(-0.5 * t) * np.cos(x),
    'phi0': lambda t: np.exp(-0.5 * t),
    'phi1': lambda t: -np.exp(-0.5 * t),
    'solution': lambda x, t: np.exp(-0.5 * t) * np.sin(x),
    'bound_type': 'a1p1',
}

params['bound_type'] = 'a1p1'
```

```
def implicit_solver(self, N, K, T):
    lst = get_zeros(N, K)
    a = lst[0]
    b = lst[1]
    c = lst[2]
    d = lst[3]
    u = lst[4]

    for i in range(1, N - 1):
        u[0][i] = self.data.psi(i * self.h)
    u[0][-1] = 0

    for k in range(1, K):
        self.calculate(a, b, c, d, u, k, N, T, K)
        u[k] = tma(a, b, c, d)

    return u

def explicit_solver(self, N, K, T):
    u = np.zeros((K, N))
    t = np.arange(0, T, T / K)
    x = np.arange(0, np.pi / 2, np.pi / 2 / N)
    for j in range(1, N - 1):
        u[0][j] = self.data.psi(j * self.h)

    for k in range(1, K):
        for j in range(1, N - 1):


            u[k][j] = (u[k - 1][j + 1] * (self.a * self.tau / self.h
** 2.0 + self.b * self.tau / 2.0 / self.h)
                        + u[k - 1][j] * (-2 * self.a * self.tau /
self.h ** 2.0 + self.c * self.tau + 1)
                        + u[k - 1][j - 1] * (self.a * self.tau /
self.h ** 2.0 - self.b * self.tau / 2.0 / self.h)
                        + self.tau * self.data.f(x[j], t[k]))

        if self.data.bound_type == 'a1p1':
            u[k][0] = (self.data.phi0(t[k]) - self.alpha / self.h *
u[k][1]) / (self.beta - self.alpha / self.h)
            u[k][-1] = (self.data.phi1(t[k]) + self.gamma / self.h *
u[k][-2]) / (self.delta + self.gamma / self.h)
        elif self.data.bound_type == 'a1p2':
            u[k][0] = (((2.0 * self.alpha * self.a / self.h / (2.0 *
self.a - self.h * self.b)) * u[k][1] +
                        (self.alpha * self.h / self.tau / (2.0 *
self.a - self.h * self.b)) * u[k - 1][0] +
                        (self.alpha * self.h / (2.0 * self.a - self.h
* self.b)) * self.data.f(0, t[k]) -
                        self.data.phi0(t[k]) /
```

```
                        ((2.0 * self.alpha * self.a / self.h / (2.0 *
self.a - self.h * self.b)) + (
                                self.alpha * self.h / self.tau / (2.0
* self.a - self.h * self.b)) -
                            (self.alpha * self.h / (2.0 * self.a -
self.h * self.b)) * self.c - self.beta)))
            u[k][-1] = (((2.0 * self.gamma * self.a / self.h / (2.0 *
self.a + self.h * self.b)) * u[k][-2] +
                            (self.gamma * self.h / self.tau / (2.0 *
self.a + self.h * self.b)) * u[k - 1][-1] +
                            (self.gamma * self.h * self.c / (2.0 *
self.a + self.h * self.b)) * self.data.f(
                        self.data.l, t[k]) + self.data.phi1(t[k])) / (
                                (2.0 * self.gamma * self.a / self.h /
(2.0 * self.a + self.h * self.b)) + (
                                self.gamma * self.h / self.tau / (2.0
* self.a + self.h * self.b)) - (
                                        self.gamma * self.h * self.c /
(
                                        2.0 * self.a + self.h *
self.b)) * self.c + self.delta))
        elif self.data.bound_type == 'a1p3':
            u[k][-1] = (self.data.phi1(k * self.tau) + u[k][-2] /
self.h + 2 * self.tau * u[k - 1][-1] / self.h) / \
                        (1 / self.h + 2 * self.tau / self.h)
    return u

def calculate(self, a, b, c, d, u, k, N, T, K):
        t = np.arange(0, T, T / K)
        for j in range(1, N):
            a[j] = self.sigma
            b[j] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[j] = self.sigma
            d[j] = -u[k - 1][j]

        if self.data.bound_type == 'a1p1':
            a[0] = 0
            b[0] = -(self.alpha / self.h) + self.beta
            c[0] = self.alpha / self.h
            d[0] = self.data.phi0(t[k])
            a[-1] = self.gamma / self.h
            b[-1] = self.gamma / self.h + self.delta
            c[-1] = 0
            d[-1] = self.data.phi1(t[k])
        elif self.data.bound_type == 'a1p2':
            a[0] = 0
            b[0] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[0] = self.sigma
            d[0] = -(u[k - 1][0] + self.sigma * self.data.phi0(k *
self.tau)) - \
```

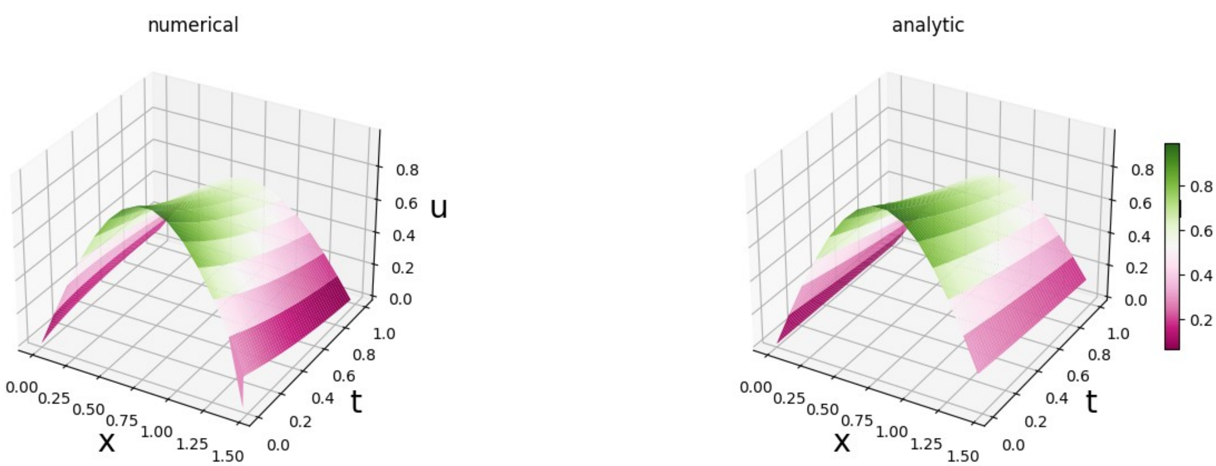
```
                   self.tau * self.data.f(0, k * self.tau)
            a[-1] = self.sigma
            b[-1] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[-1] = 0
            d[-1] = -(u[k - 1][-1] + self.sigma * self.data.phi1(k *
self.tau)) - \
                    self.tau * self.data.f((N - 1) * self.h, k *
self.tau)
        elif self.data.bound_type == 'a1p3':
            a[0] = 0
            b[0] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[0] = self.sigma
            d[0] = -((1 - self.sigma) * u[k - 1][1] + self.sigma / 2 *
u[k - 1][0]) - self.tau \
                   * self.data.f(0, k * self.tau) - self.sigma *
self.data.phi0(
                k * self.tau)
            a[-1] = self.sigma
            b[-1] = -(1 + 2 * self.sigma)
            c[-1] = 0
            d[-1] = self.data.phi1(k * self.tau) + self.data.f((N - 1)
* self.h, k * self.tau) \
                    * self.h / (2 * self.tau) * u[k - 1][-1]


def crank_nicolson_solver(self, N, K, T):
    theta = 0.5
    lst = get_zeros(N, K)
    a = lst[0]
    b = lst[1]
    c = lst[2]
    d = lst[3]
    u = lst[4]
    for i in range(1, N - 1):
        u[0][i] = self.data.psi(i * self.h)

    for k in range(1, K):
        self.calculate(a, b, c, d, u, k, N, T, K)

        tmp_imp = tma(a, b, c, d)

        tmp_exp = np.zeros(N)
        tmp_exp[0] = self.data.phi0(self.tau)
        for j in range(1, N - 1):
            tmp_exp[j] = self.sigma * u[k - 1][j + 1] + (1 - 2 *
self.sigma) * u[k - 1][j] + \
                         self.sigma * u[k - 1][j - 1] + self.tau *
self.data.f(j * self.h, k * self.tau)
        tmp_exp[-1] = self.data.phi1(self.tau)
```

```
        for j in range(N):
            u[k][j] = theta * tmp_imp[j] + (1 - theta) * tmp_exp[j]
    return u
solver = ParabolicSolver(params, equation_type)

dict_ans = {
        'numerical': solver.solve(N, K, T).tolist(),
        'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T).tolist()
    }

print("Sigma: ",solver.sigma)
```

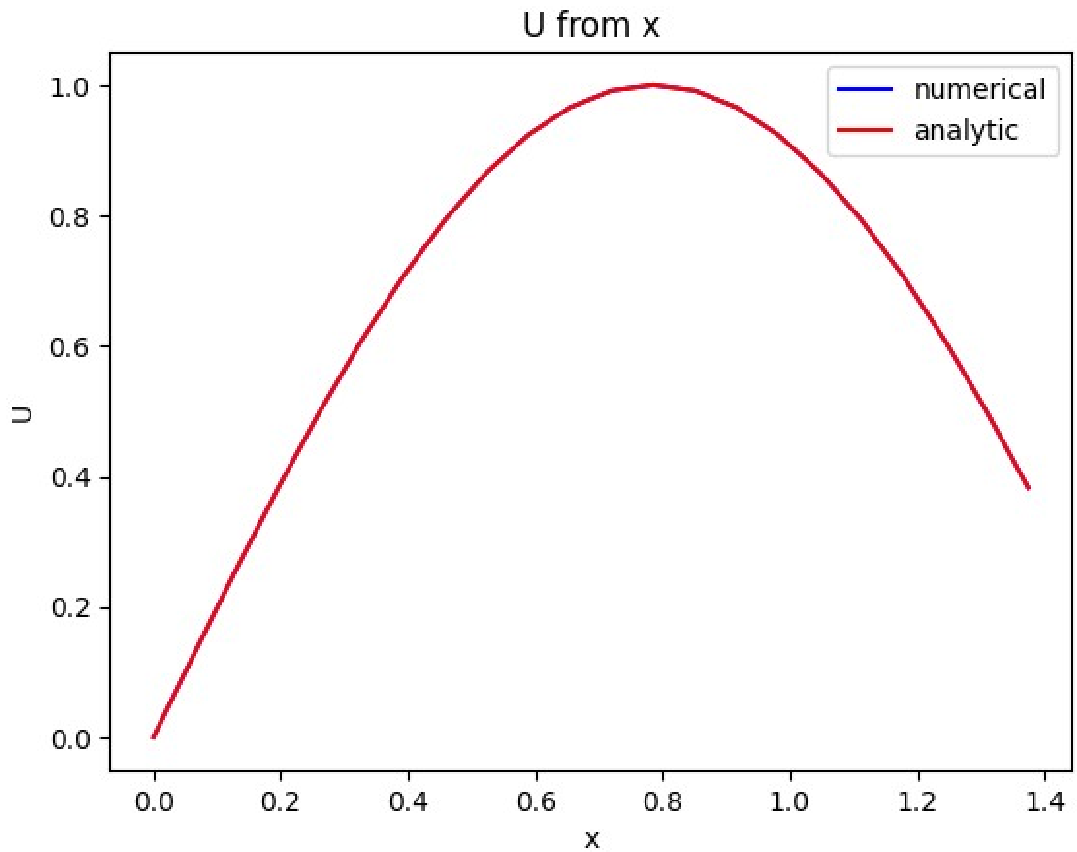
```
Sigma:  0
```

```
def draw(dict_, N, K, T, save_file="plot.png"):
    fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(0.3))
    # Make data
    x = np.arange(0, np.pi / 2, np.pi / 2 / N)
    t = np.arange(0, T, T / K)
    x, t = np.meshgrid(x, t)
    z1 = np.array(dict_['numerical'])
    z2 = np.array(dict_['analytic'])

    # Plot the surface.
    ax = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection='3d')
    plt.title('numerical')
    ax.set_xlabel('x', fontsize=20)
    ax.set_ylabel('t', fontsize=20)
    ax.set_zlabel('u', fontsize=20)
    ax.plot_surface(x, t, z1, cmap=cm.PiYG,
                    linewidth=0, antialiased=True)

    ax = fig.add_subplot(1, 2, 2, projection='3d')
    ax.set_xlabel('x', fontsize=20)
    ax.set_ylabel('t', fontsize=20)
    ax.set_zlabel('u', fontsize=20)
    plt.title('analytic')
    surf = ax.plot_surface(x, t, z2, cmap=cm.PiYG,
                           linewidth=0, antialiased=True)
    # # Customize the z axis
    # ax.set_zlim(-1.01, 1.01)

    # # Add a color bar which maps values to colors.
    fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=15)

    plt.savefig(save_file)
    plt.show()

def draw_u_x(dict_, N, K, T, time=0, save_file="plot_u_x.png"):
    fig = plt.figure()
    x = np.arange(0, np.pi / 2, np.pi / 2 / N)
```

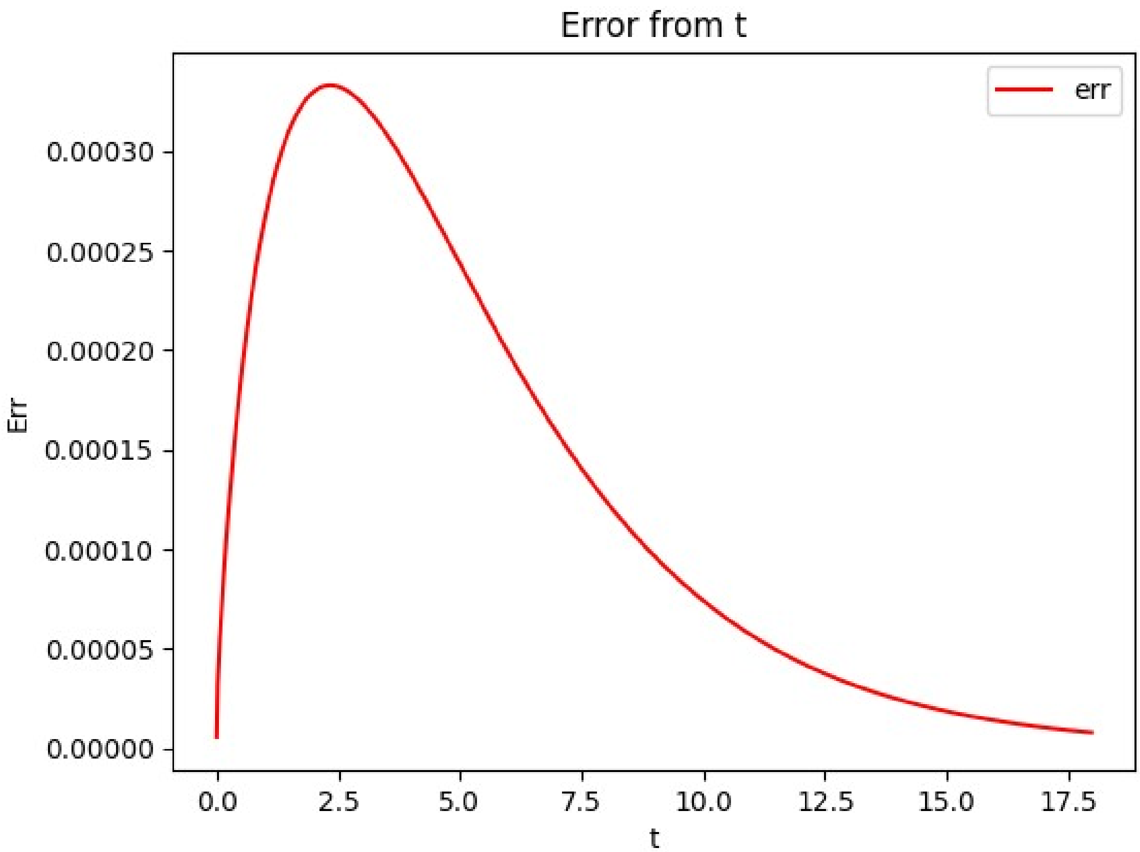
```
    t = np.arange(0, T, T / K)
    z1 = np.array(dict_['numerical'])
    z2 = np.array(dict_['analytic'])

#     print(z1)

    plt.title('U from x')
    plt.plot(x[0:-2], z1[time][0:-2], color='b', label='numerical')
    plt.plot(x[0:-2], z2[time][0:-2], color='r', label='analytic')
    plt.legend(loc='best')
    plt.ylabel('U')
    plt.xlabel('x')
    plt.savefig(save_file)
    plt.show()

    err = []
    error = compare_error(dict_ans)
    for i in range(len(error)):
        tmp = 0
        for j in error[i]:
            tmp += j
        err.append(tmp/len(error[i])/1000)
    plt.title('Error from t')
    plt.plot(t, err, color='r', label='err')
    plt.legend(loc='best')
    plt.ylabel('Err')
    plt.xlabel('t')
    plt.savefig('err.png')
    plt.show()

draw(dict_ans, N, K, T)
```




```
draw_u_x(dict_ans, N, K, T, curr_time)
```



U from x
numerical
analytic
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
U
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
x




```
error = compare_error(dict_ans)
avg_err = 0.0
for i in error:
    for j in i:
        avg_err += j
    avg_err /= N
```

First elements in error array:

```
print(error[0])
```

```
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.20791169081775973]
```

Middle elements in error array:

```
print(error[int(K/2)])
```

```
[0.08095185139751016, 0.08214171835941295, 0.07259736480814499,
0.05578028877416352, 0.034827738907620476, 0.012410764974746247,
0.009359049269149877, 0.028978246775185013, 0.04556153075816716,
0.05881917224222655, 0.06900656894318624, 0.0768491053366892,
0.08344422456718442, 0.09014232406084183, 0.09840895012861858]
```

Last elements in error array:

```
print(error[-1])
```

```
[0.09055482532632883, 0.09148265370892378, 0.08140044343220618,
0.06320148022433109, 0.03969934574890277, 0.013478931111025494,
0.013225544152500768, 0.038621004982602236, 0.061411831095585456,
0.0808211577094683, 0.09657802524501752, 0.10887280343931482,
0.11828472256599448, 0.1256865751419088, 0.13213268259724725]
```

```
print(f'Average error in each N: {avg_err}')
```

```
Average error in each N: 0.0825298966446859
```

```
print(f'Average error\t\t: {avg_err / K}')
```

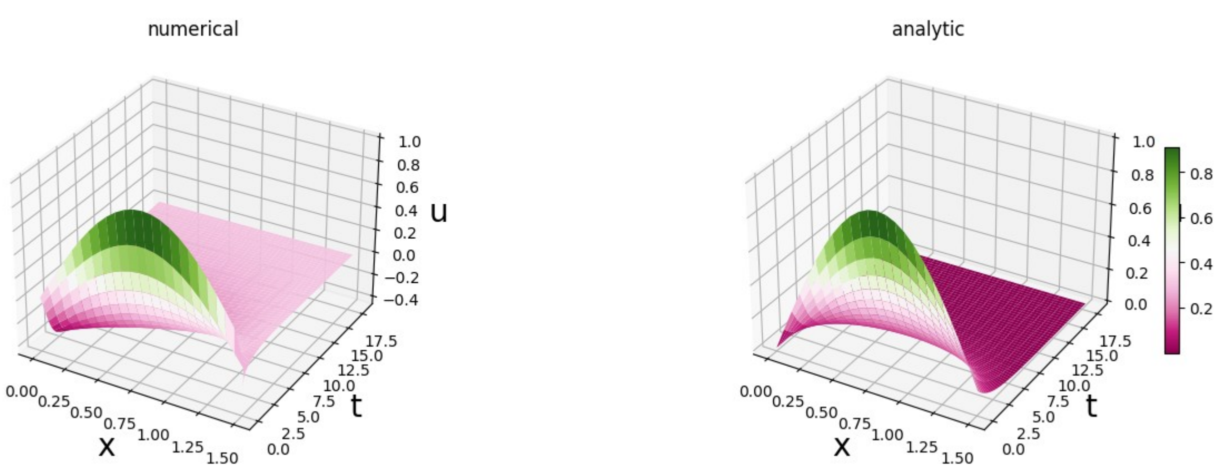
```
Average error		: 0.00020632474161171475
```

```
equation_type = str(input())
```

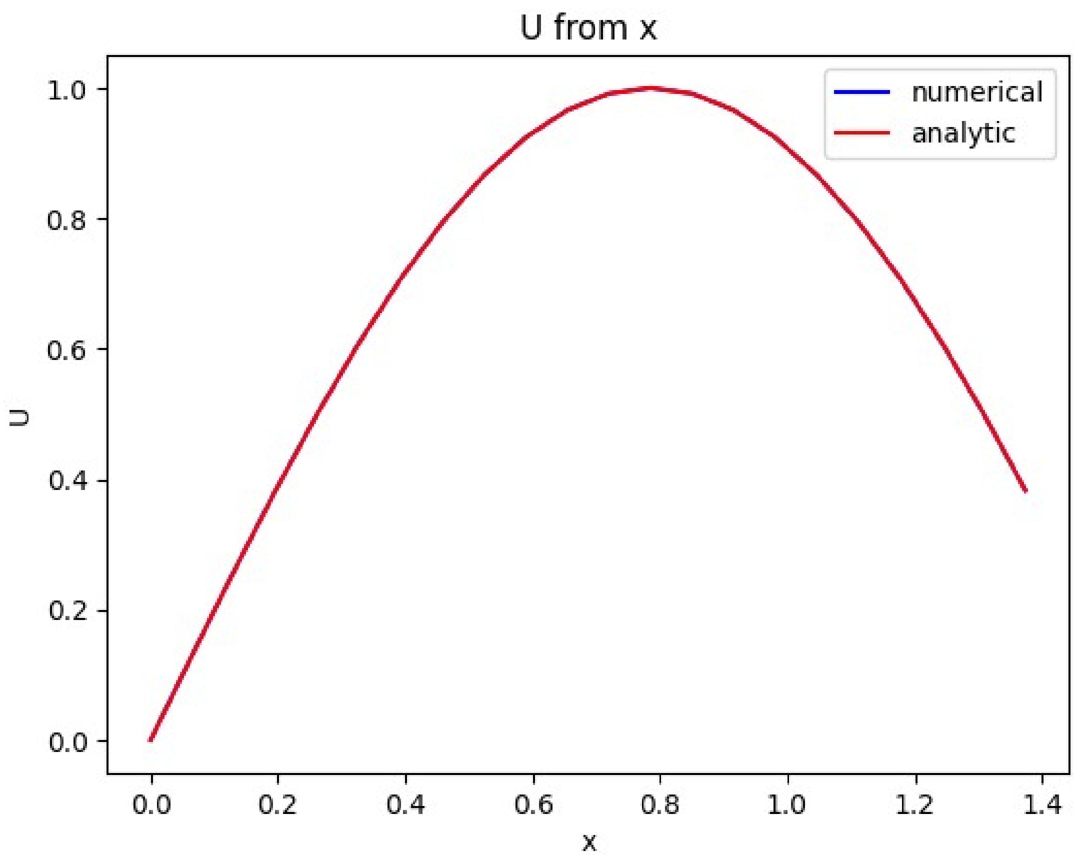
```
implicit
```

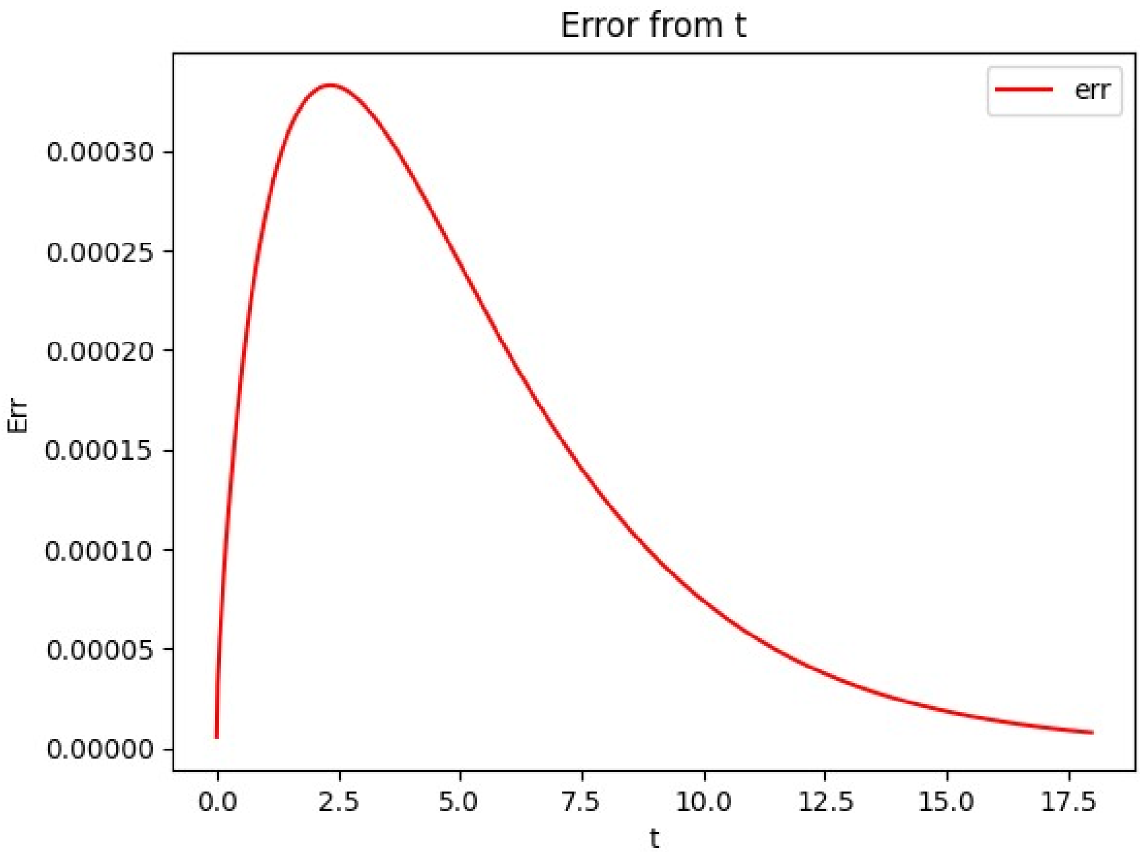
```
N = 24
K = 800
T = 18
curr_time = 0
params['bound_type'] = 'a1p1'
solver = ParabolicSolver(params, equation_type)
dict_ans = {
        'numerical': solver.solve(N, K, T).tolist(),
        'analytic': solver.analyticSolve(N, K, T).tolist()
    }
print("Sigma: ",solver.sigma)
draw(dict_ans, N, K, T)
```

```
Sigma:  1.3131225400046977
```



```
draw_u_x(dict_ans, N, K, T, curr_time)
```






```
print(error[int(K/2)])
```

```
[0.15004323820867924, 0.15003908897981438, 0.14936905048260124,
0.14802353229739648, 0.1459959414158312, 0.14328297214661226,
0.1398848734691995, 0.13580568803885318, 0.1310534574451474,
0.12564038882426248, 0.11958297851440504, 0.11290208911315253,
0.10562297703359104, 0.09777526844980879, 0.08939288235767477,
0.0805139003391925, 0.071180383492943, 0.06143813786389161,
0.05133643055787989, 0.040927659544548405, 0.030266980922935578,
0.019411898133123107, 0.008421818232685858, 0.002642419092700911]
```

```
print(error[-1])
```

```
[0.012334146727334022, 0.012334100112082183, 0.012272310337819916,
0.012148946166527067, 0.011964485133377644, 0.0117197139928831,
0.011415727524155636, 0.011053925651563613, 0.010636008848490695,
0.010163971804324615, 0.009640095348056793, 0.009066936635819759,
0.00844731762416014, 0.007784311865663499, 0.007081229678526632,
0.006341601756619593, 0.005569161301297136, 0.00476782477051005,
0.0039416713544368955, 0.003094921299717477, 0.0022319132162416586,
0.001357080511163347, 0.00047492710421674275, 0.00040999741362547854]
```

```
print(f'Average error in each N: {avg_err}')
```

```
Average error in each N: 0.008100242309372108
```

Вывод

Как видно из графиков погрешности, в первую очередь на неё влияет веоичина параметра tau (чем она меньше, тем погрешность ниже), а вот количество шагов h у меня оказывает негативное влияние, увеличивая погрешность многократно Отдельно стоит отметить, что конечно-разностные схемы для решения уравнений параболического типа имеют высокую точность и, при достаточной мелкости tau, способны достигать настолько маленькую погрешность, что ей можно будет прене- бречь при решении реальных задач математической физики.