МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*2*
по курсу «Численные методы»

Выполнил: А.В. Клитная
Группа: 8О-408Б-20

Москва, 2023

Условие

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a^2 > 0,$$

$u(0,t) = -\sin(at),$
$u(\pi,t) = \sin(at),$

$u(x,0) = \sin x,$

$u_t(x,0) = -a\cos x.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \sin(x - at)$

Метод решения

Изначально задаём начальные условия и условия на границах. Затем также задаётся и аналитические решение. Используем следующую конечно-разностную схему:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2), \quad j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1,2,\dots \qquad (5.38)$$

Аппроксимация 1 порядка рассчитывалась по формуле:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

2 порядка по формуле:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2\psi_1''(x_j)\frac{\tau^2}{2}.$$

Описание программы

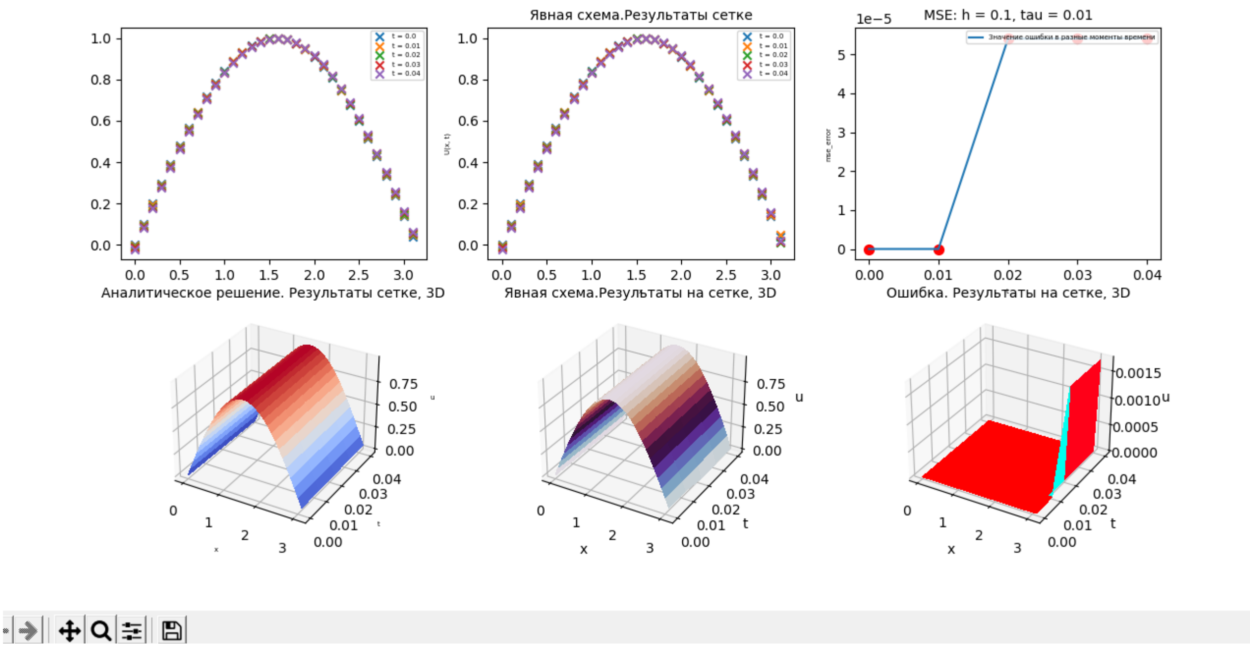
Программа состоит из 1 файла.

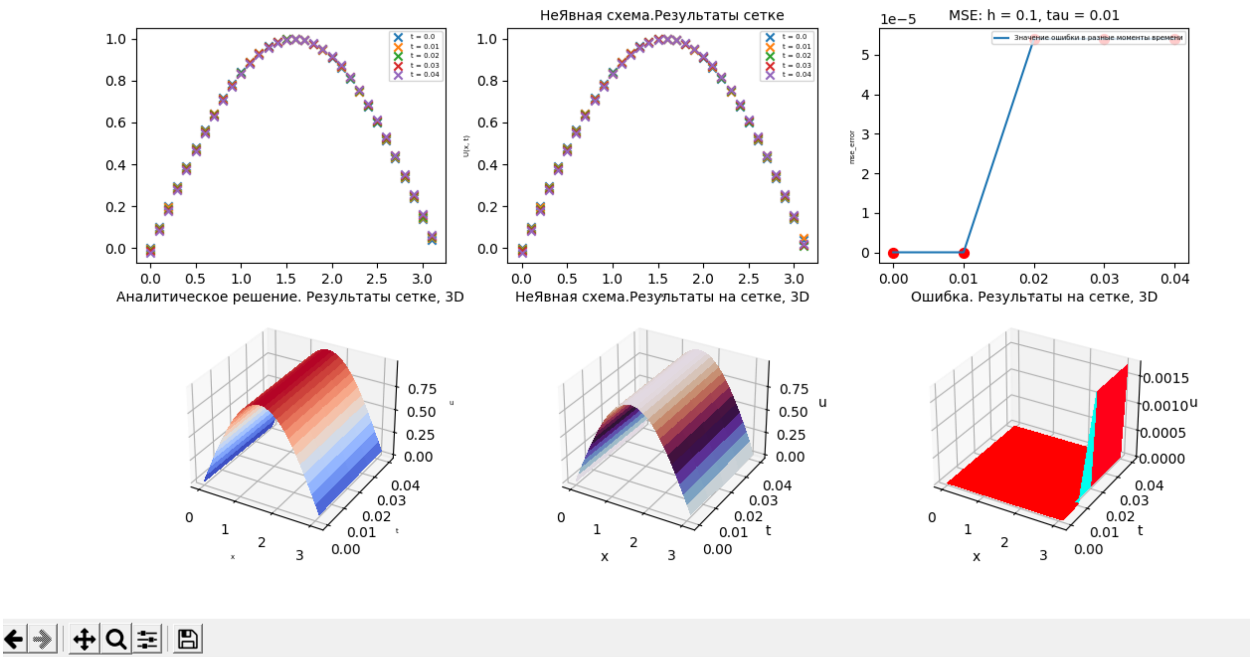
В программе задаются граничные условия, начальное условие и аналитическое решение в качестве отдельных функций.

Далее задаем необходимый коэффициент а, шаг по пространственной и временной сетке, а также кол-во слоев сетки и порядок аппроксимации. Затем переносим на сетку аналитическое решение analitic_on_net . Далее рассчитываем значения по явной и неявной схеме, отталкиваясь от различий в их формулах. Данные выводим в виде импровизированной таблицы в выводе C++. И отдельно выводим ошибки рассчитанные в отдельной функции как среднеквадратическая ошибка.

Также была реализована программа на Python для работы с ошибками и более наглядного представления ситуации. Также при работе было учитано условие устойчивости при использовании явной схемы.

Результаты





Выводы

При работе с данной лабораторной работой я изучила методы численного решения гиперболических уравнений. Также было выявлено, что для моего случая более уместно применять неявную схему, которая будет более точной.