Лабораторная работа №8 по курсу "Численные методы"

Выполнил студент группы М8О-408Б-20 Меджидли Махмуд.

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Задание:

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением u(x, y, t). Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ и hx, hy.

Вариант 6

Уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, a>0$$

$$\begin{cases} u(0,y,\ t)=\sinh y\cdot e^{-3at} \\ u(\frac{\pi}{4},y,\ t)=-2\sinh y\cdot e^{-3at} \\ u(x,0,\ t)=\cos 2x\cdot e^{-3at} \\ u'_y(x,\ln 2,\ t)=\frac{3}{4}\cos 2x\cdot e^{-3at} \\ u(x,y,0)=cos2x\sinh y \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$u(x,y,t)=e^{-3at}\cos 2x\sinh y$$

Будем решать задачу на заданной площади от 0 до l_x по координате x, от 0 до l_y по координате y и на промежутке от 0 до заданного параметра T по времени t.

Рассмотрим конечно-разностную схему решения краевой задачи на сетке с граничными парамерами l_x, l_y, T и параметрами насыщенности сетки N_x, N_y, K. Тогда размер шага по каждой из координат определяется:

$$h_x=\frac{l_x}{N_x-1}, h_y=\frac{l_y}{N_y-1}, \tau=\frac{T}{K-1}$$

Конечно-разностная схема решения параболического типа в сетке на временном слое t^{k+1} определяется с помощью 2-ух этапов, на каждом из которых решается трёхдиагональное уравнение с помощью метода прогонки:

- Считая, что значения функции $u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t^k)$ на временном слое t^k известно, попробуем определить значения функции на временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$ путем разностной апроксимации производной по времени: $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^k) = (1+\gamma)\frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k}{\tau}$, неявной аппроксимацией производной по x: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^k) = \frac{u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2}$ и явной аппроксимацией по y: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^k) = \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h_y^2}$ получаем уравнение:

$$-a\tau h_x^2 \gamma u_{i,j-1}^k - \left((1+\gamma)h_x^2 h_y^2 - 2a\tau h_x^2\gamma\right)u_{i,j}^k - a\tau h_x^2 \gamma u_{i,j+1}^k = a\tau h_y^2 u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \left(2a\tau h_y^2 + (1+\gamma)h_x^2 h_y^2\right)u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + a\tau h_y^2 u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

- Считая, что значения функции $u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = u\left(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}\right)$ на временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$ известно из прошлого этапа, попробуем определить значения функции на временном слое t^{k+1} путем разностной апроксимации производной по времени: $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}\right) = (1+\gamma)\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau}$, явной аппроксимацией производной по x: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_x^2}$ и неявной аппроксимацией по y: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{u_{i,j-1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}}{h_y^2}$ получим второе уравнение:

$$-a\tau h_y^2 \gamma u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \left((1+\gamma)h_x^2 h_y^2 - 2a\tau h_y^2\gamma\right)u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - a\tau h_y^2 \gamma u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = a\tau h_x^2 u_{i,j-1}^{k+1} - \left(2a\tau h_x^2 + (1+\gamma)h_x^2 h_y^2\right)u_{i,j}^{k+1} + a\tau h_x^2 u_{i,j+1}^{k+1}$$

При $\gamma = 1$ получаем метод переменных направлений, когда как при $\gamma = 0$ - метод дробных шагов.

Значения на слое $u_{i,j}^0$ и на границах сетки определяются с помощью заданных граничных условий и их аппроксимаций.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def tma(a, b, c, d):
    size = len(a)
    p, q = [], []
```

```
    p.append(-c[0] / b[0])
    q.append(d[0] / b[0])

    for i in range(1, size):
        p_tmp = -c[i] / (b[i] + a[i] * p[i - 1])
        q_tmp = (d[i] - a[i] * q[i - 1]) / (b[i] + a[i] * p[i - 1])
        p.append(p_tmp)
        q.append(q_tmp)

    x = [0 for _ in range(size)]
    x[size - 1] = q[size - 1]

    for i in range(size - 2, -1, -1):
        x[i] = p[i] * x[i + 1] + q[i]

    return x

class Data:
     def __init__(self, args):
          self.a = args['a']
          self.b = args['b']
          self.c = args['c']
          self.d = args['d']
          self.lx = args['lx']
          self.ly = args['ly']
          self.f = args['f']
          self.alpha1 = args['alpha1']
          self.alpha2 = args['alpha2']
          self.beta1 = args['beta1']
          self.beta2 = args['beta2']
          self.gamma1 = args['gamma1']
          self.gamma2 = args['gamma2']
          self.delta1 = args['delta1']
          self.delta2 = args['delta2']
          self.phi11 = args['phi11']
          self.phi21 = args['phi21']
          self.phi12 = args['phi12']
          self.phi22 = args['phi22']
          self.psi = args['psi']
          self.solution = args['solution']


class ParabolicSolver:
     def __init__(self, args, nx, ny, T, K):
          self.data = Data(args)
          self.hx = self.data.lx / nx
          self.hy = self.data.ly / ny
          self.tau = T / K
          self.x, self.y, self.t = self.prepare(nx, ny, T, K)
          self.uu = self.initalizeU(self.x, self.y, self.t)
```

```
    def getCoeffs(self, n):
        aa = np.zeros(len(n))
        bb = np.zeros(len(n))
        cc = np.zeros(len(n))
        dd = np.zeros(len(n))

        return aa, bb, cc, dd

    def computeCoeffs(self, x, y, t2, j):
        aa, bb, cc, dd = self.getCoeffs(x)
        bb[0] = self.hx * self.data.alpha2 - self.data.alpha1
        bb[-1] = self.hx * self.data.beta2 + self.data.beta1
        cc[0] = self.data.alpha1
        aa[-1] = -self.data.beta1
        dd[0] = self.data.phi11(y[j], t2) * self.hx
        dd[-1] = self.data.phi12(y[j], t2) * self.hx

        return aa, bb, cc, dd

    def prepare(self, nx, ny, T, K):
        self.hx = self.data.lx / nx
        self.hy = self.data.ly / ny
        self.tau = T / K
        x = np.arange(0, self.data.lx + self.hx, self.hx)
        y = np.arange(0, self.data.ly + self.hy, self.hy)
        t = np.arange(0, T + self.tau, self.tau)

        return x, y, t

    def initalizeU(self, x, y, t):
        u = np.zeros((len(x), len(y), len(t)))
        for i in range(len(x)):
            for j in range(len(y)):
                u[i][j][0] = self.data.psi(x[i], y[j])

        return u

    def analyticSolve(self, nx, ny, T, K):
        x, y, t = self.prepare(nx, ny, T, K)

        uu = np.zeros((len(x), len(y), len(t)))

        for i in range(len(x)):
            for j in range(len(y)):
                for k in range(len(t)):
                    uu[i][j][k] = self.data.solution(x[i],
y[j], t[k])

        return uu
```

```
    def parallelDirections_solver(self):
        for k in range(1, len(self.t)):
            u1 = np.zeros((len(self.x), len(self.y)))
            t2 = self.t[k] - self.tau / 2
            for j in range(len(self.y) - 1):
                aa, bb, cc, dd = self.computeCoeffs(self.x,
self.y, t2, j)
                for i in range(len(self.x) - 1):
                    aa[i] = self.data.a - self.hx * self.data.c
/ 2
                    bb[i] = self.hx ** 2 - 2 * (self.hx ** 2) /
self.tau - 2 * self.data.a
                    cc[i] = self.data.a + self.hx * self.data.c
/ 2
                    dd[i] = -2 * (self.hx ** 2) * self.uu[i][j]
[k - 1] / self.tau
                    - self.data.b * (self.hx ** 2) *
(self.uu[i][j + 1][k - 1]

       - 2 * self.uu[i][j][k - 1] + self.uu[i][j - 1][k - 1]) /
(self.hy ** 2)
                    - self.data.d * (self.hx ** 2) *
(self.uu[i][j + 1][k - 1] - self.uu[i][j - 1][k - 1]) / (2 * self.hy
** 2)
                    - (self.hx ** 2) * self.data.f(self.x[i],
self.y[j], self.t[k])

                xx = tma(aa, bb, cc, dd)
                for i in range(len(self.x)):
                    u1[i][j] = xx[i]
                    u1[i][0] = (self.data.phi21(self.x[i], t2)
- self.data.gamma1 * u1[i][1] / self.hy) / (
                                self.data.gamma2 -
self.data.gamma1 / self.hy)
                    u1[i][-1] = (self.data.phi22(self.x[i], t2)
+ self.data.delta1 * u1[i][-2] / self.hy) / (
                                self.data.delta2 +
self.data.delta1 / self.hy)
            for j in range(len(self.y)):
                u1[0][j] = (self.data.phi11(self.y[j], t2) -
self.data.alpha1 * u1[1][j] / self.hx) / (
                                self.data.alpha2 -
self.data.alpha1 / self.hx)
                u1[-1][j] = (self.data.phi12(self.y[j], t2) +
self.data.beta1 * u1[-2][j] / self.hx) / (
                                self.data.beta2 +
self.data.beta1 / self.hx)
            u2 = np.zeros((len(self.x), len(self.y)))
```

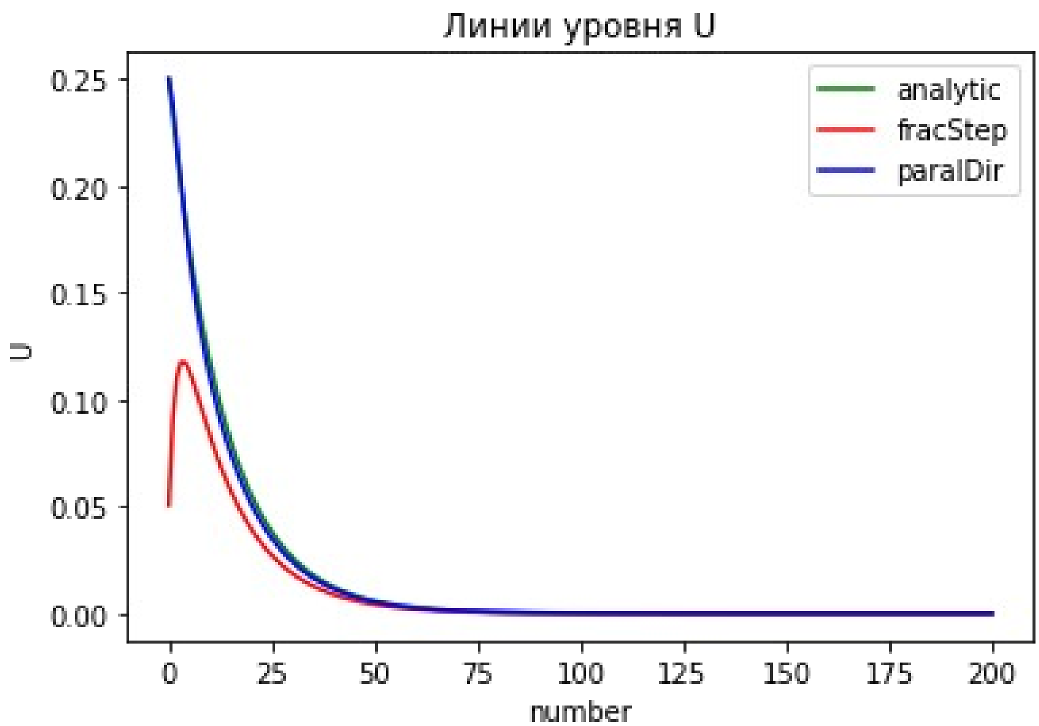
```
                for i in range(len(self.x) - 1):
                    aa, bb, cc, dd = self.getCoeffs(self.y)
                    bb[0] = self.hy * self.data.gamma2 -
self.data.gamma1
                    bb[-1] = self.hy * self.data.delta2 +
self.data.delta1
                    cc[0] = self.data.gamma1
                    aa[-1] = -self.data.delta1
                    dd[0] = self.data.phi21(self.x[i], self.t[k]) *
self.hy
                    dd[-1] = self.data.phi22(self.x[i], self.t[k]) *
self.hy

                    for j in range(len(self.y) - 1):
                        aa[j] = self.data.b - self.hy * self.data.d
/ 2
                        bb[j] = self.hy ** 2 - 2 * (self.hy ** 2) /
self.tau - 2 * self.data.b
                        cc[j] = self.data.b + self.hy * self.data.d
/ 2
                        dd[j] = -2 * (self.hy ** 2) * u1[i][j] /
self.tau
                        - self.data.a * (self.hy ** 2) * (u1[i + 1]
[j]

       - 2 * u1[i][j] + u1[i - 1][j]) / (self.hx ** 2)
                        - self.data.c * (self.hy ** 2) * (u1[i + 1]
[j] - u1[i - 1][j]) / (2 * self.hx ** 2)
                        - (self.hy ** 2) * self.data.f(self.x[i],
self.y[j], self.t[k])
                    xx = tma(aa, bb, cc, dd)
                    for j in range(len(self.y)):
                        u2[i][j] = xx[j]
                        u2[0][j] = (self.data.phi11(self.y[j],
self.t[k]) - self.data.alpha1 * u2[1][j] / self.hx) / (
                                        self.data.alpha2 -
self.data.alpha1 / self.hx)
                        u2[-1][j] = (self.data.phi12(self.y[j],
self.t[k]) + self.data.beta1 * u2[-2][j] / self.hx) / (
                                        self.data.beta2 +
self.data.beta1 / self.hx)
                for i in range(len(self.x)):
                    u2[i][0] = (self.data.phi21(self.x[i],
self.t[k]) - self.data.gamma1 * u2[i][1] / self.hy) / (
                                    self.data.gamma2 -
self.data.gamma1 / self.hy)
                    u2[i][-1] = (self.data.phi22(self.x[i],
self.t[k]) + self.data.delta1 * u2[i][-2] / self.hy) / (
                                    self.data.delta2 +
```

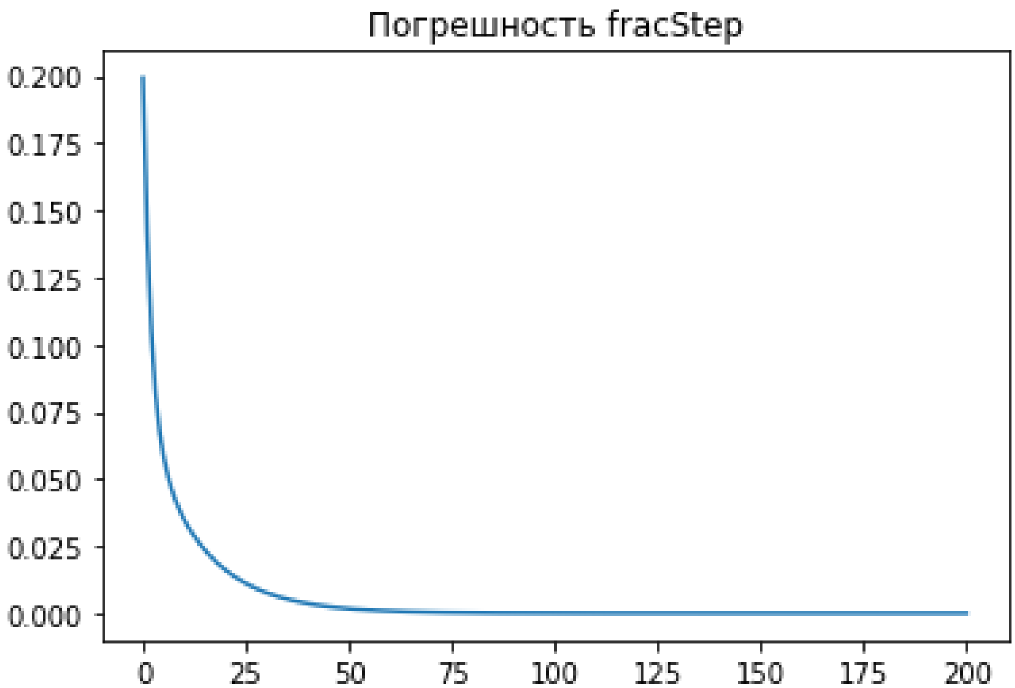
```
self.data.delta1 / self.hy)
                for i in range(len(self.x)):
                    for j in range(len(self.y)):
                        self.uu[i][j][k] = u2[i][j]
            return self.uu

    def fractionalSteps_solver(self):
        for k in range(len(self.t)):
            u1 = np.zeros((len(self.x), len(self.y)))
            t2 = self.t[k] - self.tau / 2
            for j in range(len(self.y) - 1):
                aa, bb, cc, dd = self.computeCoeffs(self.x,
self.y, t2, j)
                for i in range(len(self.x) - 1):
                    aa[i] = self.data.a
                    bb[i] = -(self.hx ** 2) / self.tau - 2 *
self.data.a
                    cc[i] = self.data.a
                    dd[i] = -(self.hx ** 2) * self.uu[i][j][k -
1] / self.tau - (self.hx ** 2) * self.data.f(self.x[i], self.y[j],


          t2) / 2
                xx = tma(aa, bb, cc, dd)
                for i in range(len(self.x)):
                    u1[i][j] = xx[i]
                    u1[i][0] = (self.data.phi21(self.x[i], t2)
- self.data.gamma1 * u1[i][1] / self.hy) / (
                            self.data.gamma2 -
self.data.gamma1 / self.hy)
                    u1[i][-1] = (self.data.phi22(self.x[i], t2)
+ self.data.delta1 * u1[i][-2] / self.hy) / (
                            self.data.delta2 +
self.data.delta1 / self.hy)
            for j in range(len(self.y)):
                u1[0][j] = (self.data.phi11(self.y[j], t2) -
self.data.alpha1 * u1[1][j] / self.hx) / (
                        self.data.alpha2 - self.data.alpha1 /
self.hx)
                u1[-1][j] = (self.data.phi12(self.y[j], t2) +
self.data.beta1 * u1[-2][j] / self.hx) / (
                        self.data.beta2 + self.data.beta1 /
self.hx)
            #####
            u2 = np.zeros((len(self.x), len(self.y)))
            for i in range(len(self.x) - 1):
                aa, bb, cc, dd = self.getCoeffs(self.y)
                bb[0] = self.hy * self.data.gamma2 -
self.data.gamma1
```

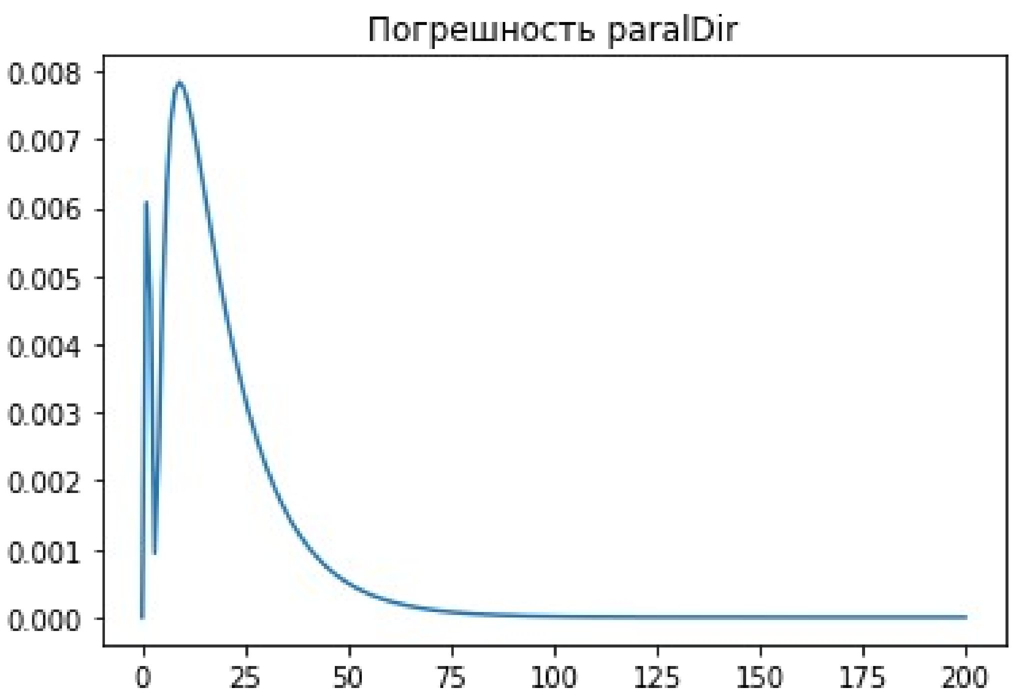
```
                      bb[-1] = self.hy * self.data.delta2 +
self.data.delta1
                      cc[0] = self.data.gamma1
                      aa[-1] = -self.data.delta1
                      dd[0] = self.data.phi21(self.x[i], self.t[k]) *
self.hy
                      dd[-1] = self.data.phi22(self.x[i], self.t[k]) *
self.hy

                      for j in range(len(self.y) - 1):
                           aa[j] = self.data.b
                           bb[j] = -(self.hy ** 2) / self.tau - 2 *
self.data.b
                           cc[j] = self.data.b
                           dd[j] = -(self.hy ** 2) * u1[i][j] /
self.tau - (self.hy ** 2) * self.data.f(self.x[i], self.y[j],
self.t[k]) / 2
                      xx = tma(aa, bb, cc, dd)
                      for j in range(len(self.y)):
                           u2[i][j] = xx[j]
                           u2[0][j] = (self.data.phi11(self.y[j],
self.t[k]) - self.data.alpha1 * u2[1][j] / self.hx) / (
                                     self.data.alpha2 -
self.data.alpha1 / self.hx)
                           u2[-1][j] = (self.data.phi12(self.y[j],
self.t[k]) + self.data.beta1 * u2[-2][j] / self.hx) / (
                                     self.data.beta2 +
self.data.beta1 / self.hx)
                 for i in range(len(self.x)):
                      u2[i][0] = (self.data.phi21(self.x[i],
self.t[k]) - self.data.gamma1 * u2[i][1] / self.hy) / (
                                self.data.gamma2 - self.data.gamma1 /
self.hy)
                      u2[i][-1] = (self.data.phi22(self.x[i],
self.t[k]) + self.data.delta1 * u2[i][-2] / self.hy) / (
                                self.data.delta2 + self.data.delta1 /
self.hy)
                 for i in range(len(self.x)):
                      for j in range(len(self.y)):
                           self.uu[i][j][k] = u2[i][j]
           return self.uu

def presontation(dict_, data, args, y_point, time):

  plt.title('Линии уровня U')
  plt.plot(dict_['analytic'][time][y_point], color='g',
label='analytic')
  plt.plot(dict_['fracStep'][time][y_point], color='r',
label='fracStep')
  plt.plot(dict_['paralDir'][time][y_point], color='b',
```

```
label='paralDir')
  plt.legend(loc='best')
  plt.ylabel('U')
  plt.xlabel('number')
  plt.show()


  plt.title('Погрешность fracStep')
  plt.plot(abs(dict_['analytic'][time][y_point] - dict_['fracStep']
[time][y_point]))
  plt.show()


  plt.title('Погрешность paralDir')
  plt.plot(abs(dict_['analytic'][time][y_point] - dict_['paralDir']
[time][y_point]))
  plt.show()


data = {'a': 1, 'nx': 40, 'ny': 40, 'T': 5, 'K': 200}
a, nx, ny, T, K = int(data['a']), int(data['nx']), int(data['ny']),
int(data['T']), int(data['K'])
args = {
      'a': a,
      'b': a,
      'c': 0,
      'd': 0,
      'lx': np.pi / 4,
      'ly': np.log(2),
      'f': lambda x, y, t: 0,
      'alpha1': 0,
      'alpha2': 1,
      'beta1': 1,
      'beta2': 0,
      'gamma1': 1,
      'gamma2': 0,
      'delta1': 0,
      'delta2': 1,
      'phi11': lambda y, t: np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi12': lambda y, t: -2 * np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi21': lambda x, t: np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi22': lambda x, t: 3 / 4 * np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'psi': lambda x, y: np.cos(2 * x) * np.sinh(y),
      'solution': lambda x, y, t: np.cos(2 * x) * np.sinh(y) * np.exp(-
3 * a * t)
}

solver = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverFrac = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverParal = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
```

```
ans = {
      'fracStep': solverFrac.fractionalSteps_solver(),
      'paralDir': solverParal.parallelDirections_solver(),
      'analytic': solver.analyticSolve(nx, ny, T, K)
}

presontation(ans, data, args, 20, 20)
```



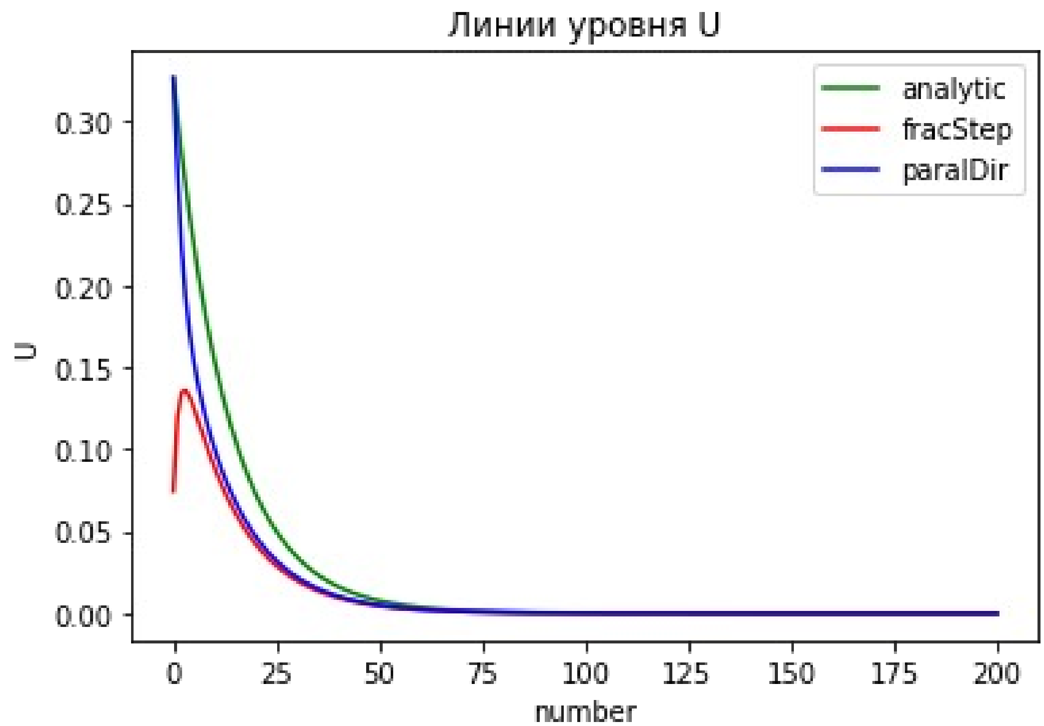


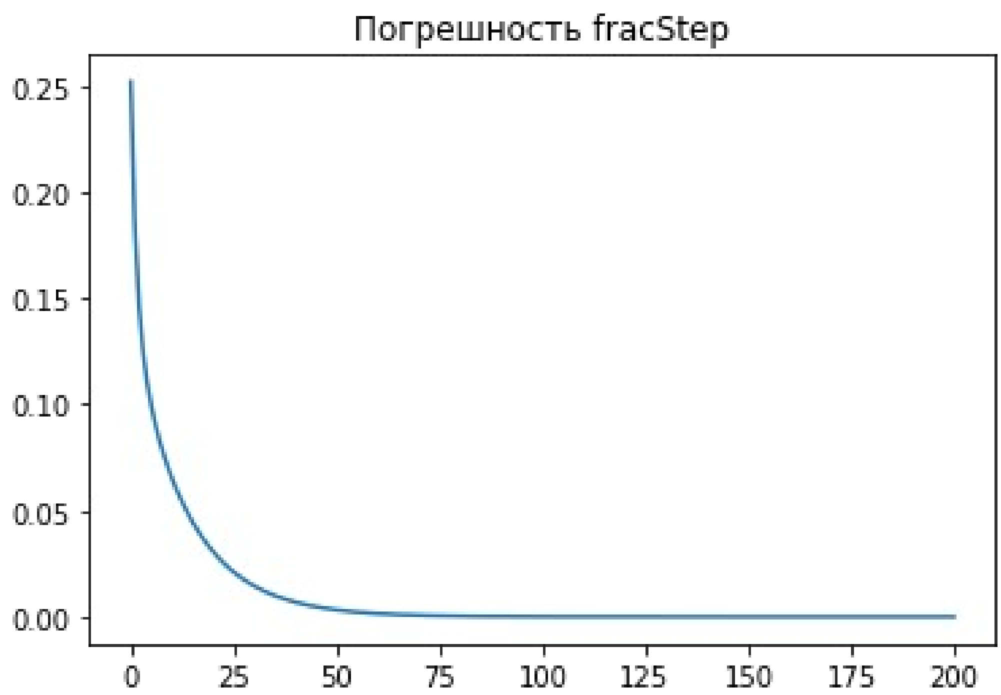


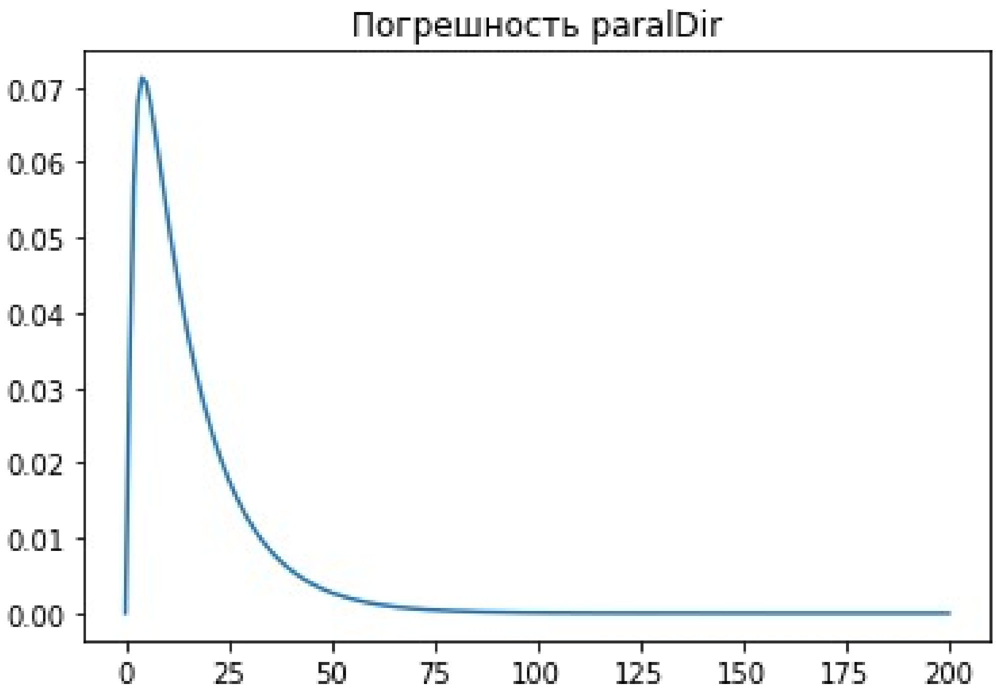
Исследование зависимости погрешности от параметров tau, hx, hy

```
data = {'a': 1, 'nx': 80, 'ny': 40, 'T': 5, 'K': 200}
a, nx, ny, T, K = int(data['a']), int(data['nx']), int(data['ny']), int(data['T']), int(data['K'])
```

```
args = {
      'a': a,
      'b': a,
      'c': 0,
      'd': 0,
      'lx': np.pi / 4,
      'ly': np.log(2),
      'f': lambda x, y, t: 0,
      'alpha1': 0,
      'alpha2': 1,
      'beta1': 1,
      'beta2': 0,
      'gamma1': 1,
      'gamma2': 0,
      'delta1': 0,
      'delta2': 1,
      'phi11': lambda y, t: np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi12': lambda y, t: -2 * np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi21': lambda x, t: np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi22': lambda x, t: 3 / 4 * np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'psi': lambda x, y: np.cos(2 * x) * np.sinh(y),
      'solution': lambda x, y, t: np.cos(2 * x) * np.sinh(y) * np.exp(-
3 * a * t)
}

solver = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverFrac = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverParal = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
ans = {
      'fracStep': solverFrac.fractionalSteps_solver(),
      'paralDir': solverParal.parallelDirections_solver(),
      'analytic': solver.analyticSolve(nx, ny, T, K)
}

presontation(ans, data, args, 20, 20)
```

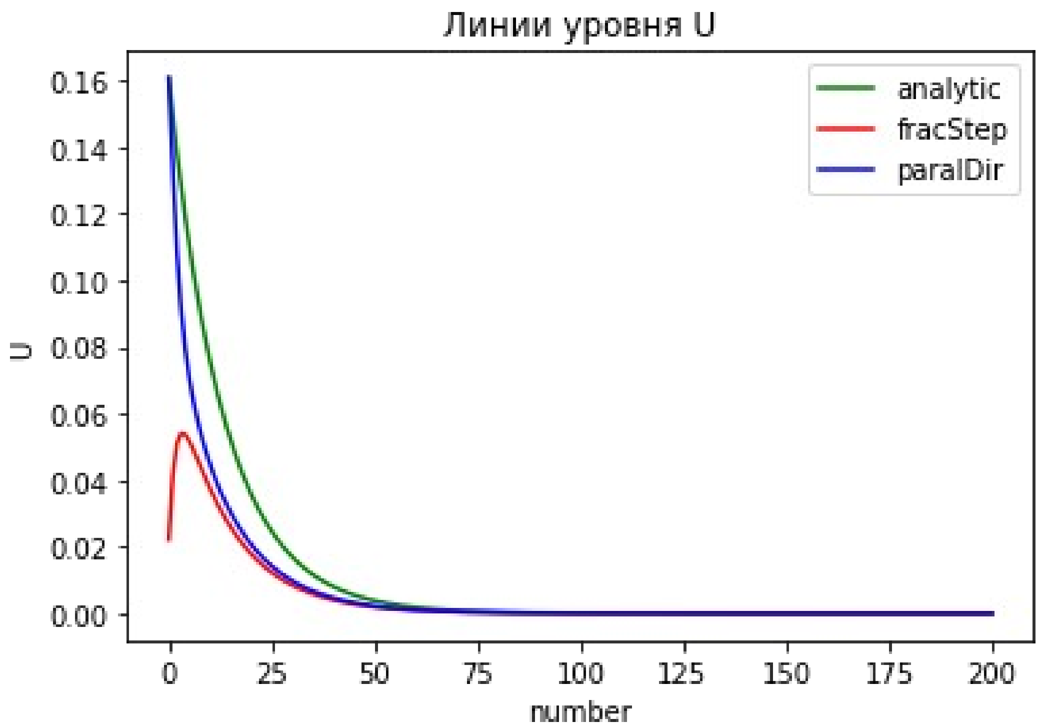

Линии уровня U
analytic
fracStep
paralDir
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
U
0
25
50
75
100
125
150
175
200
number

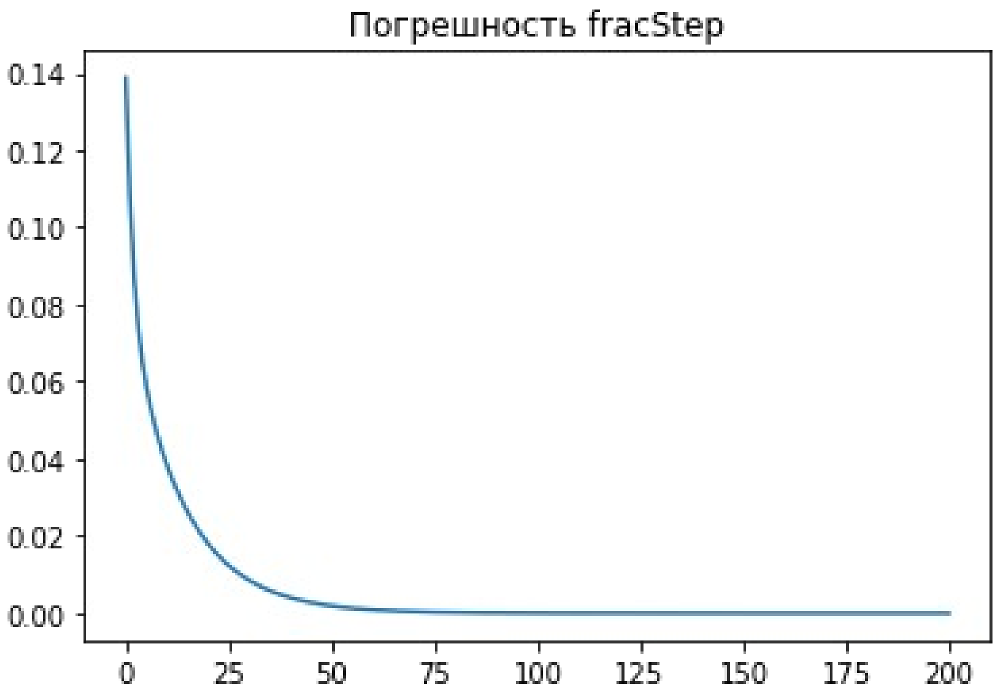

Погрешность fracStep
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
25
50
75
100
125
150
175
200

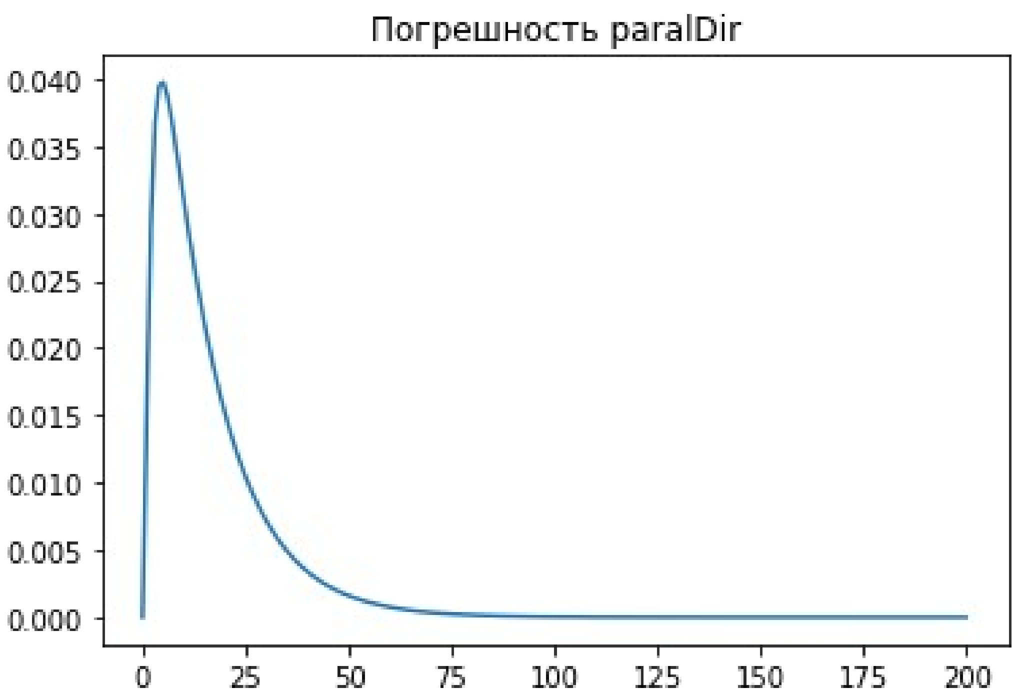



```
data = {'a': 1, 'nx': 80, 'ny': 80, 'T': 5, 'K': 200}
a, nx, ny, T, K = int(data['a']), int(data['nx']), int(data['ny']),
int(data['T']), int(data['K'])
args = {
      'a': a,
      'b': a,
      'c': 0,
      'd': 0,
      'lx': np.pi / 4,
      'ly': np.log(2),
      'f': lambda x, y, t: 0,
      'alpha1': 0,
      'alpha2': 1,
      'beta1': 1,
      'beta2': 0,
      'gamma1': 1,
      'gamma2': 0,
      'delta1': 0,
      'delta2': 1,
      'phi11': lambda y, t: np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi12': lambda y, t: -2 * np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi21': lambda x, t: np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi22': lambda x, t: 3 / 4 * np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'psi': lambda x, y: np.cos(2 * x) * np.sinh(y),
      'solution': lambda x, y, t: np.cos(2 * x) * np.sinh(y) * np.exp(-
3 * a * t)
}
```

```
solver = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverFrac = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverParal = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
ans = {
      'fracStep': solverFrac.fractionalSteps_solver(),
      'paralDir': solverParal.parallelDirections_solver(),
      'analytic': solver.analyticSolve(nx, ny, T, K)
}

presontation(ans, data, args, 20, 20)
```

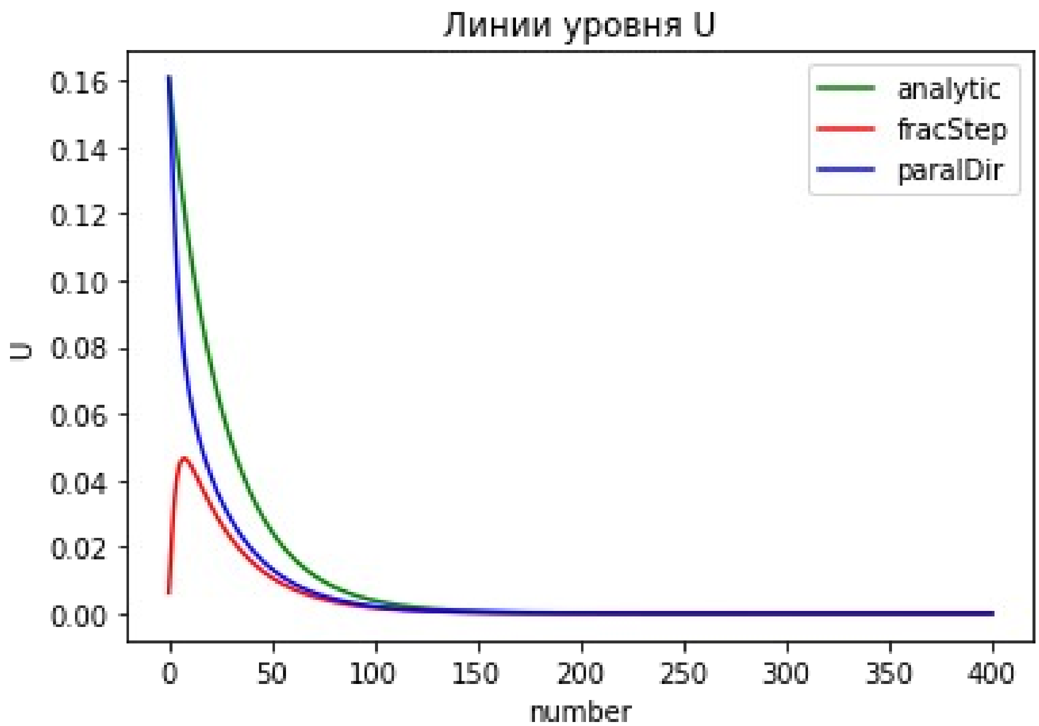


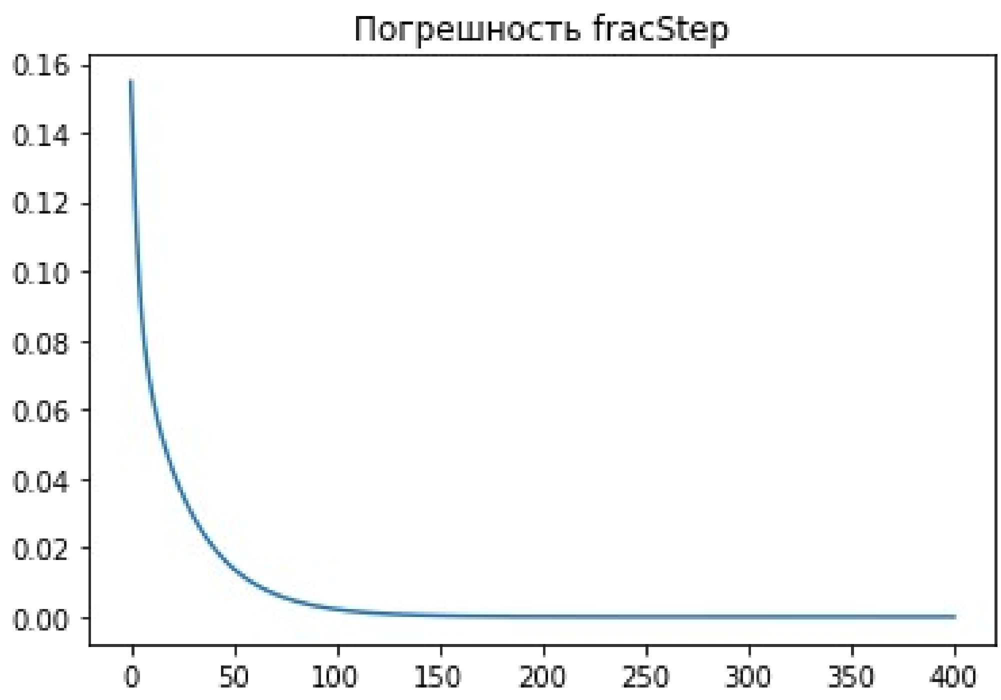


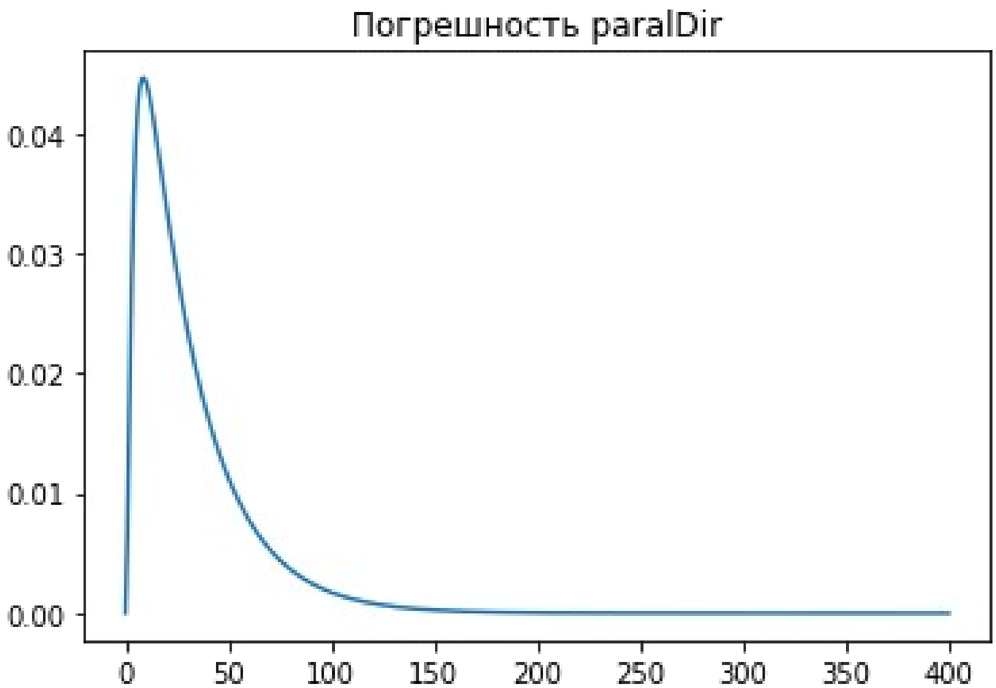



```
data = {'a': 1, 'nx': 80, 'ny': 80, 'T': 5, 'K': 400}
a, nx, ny, T, K = int(data['a']), int(data['nx']), int(data['ny']),
int(data['T']), int(data['K'])
args = {
      'a': a,
      'b': a,
```

```
      'c': 0,
      'd': 0,
      'lx': np.pi / 4,
      'ly': np.log(2),
      'f': lambda x, y, t: 0,
      'alpha1': 0,
      'alpha2': 1,
      'beta1': 1,
      'beta2': 0,
      'gamma1': 1,
      'gamma2': 0,
      'delta1': 0,
      'delta2': 1,
      'phi11': lambda y, t: np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi12': lambda y, t: -2 * np.sinh(y) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi21': lambda x, t: np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'phi22': lambda x, t: 3 / 4 * np.cos(2 * x) * np.exp(-3 * a * t),
      'psi': lambda x, y: np.cos(2 * x) * np.sinh(y),
      'solution': lambda x, y, t: np.cos(2 * x) * np.sinh(y) * np.exp(-
3 * a * t)
}

solver = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverFrac = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
solverParal = ParabolicSolver(args, nx, ny, T, K)
ans = {
      'fracStep': solverFrac.fractionalSteps_solver(),
      'paralDir': solverParal.parallelDirections_solver(),
      'analytic': solver.analyticSolve(nx, ny, T, K)
}

presontation(ans, data, args, 20, 20)
```


Линии уровня U
analytic
fracStep
paralDir
U
number
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
50
100
150
200
250
300
350
400


Погрешность fracStep
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
50
100
150
200
250
300
350
400



Вывод:

Как видно на графиках погрешности, МДШ на своём старте имеет высокую погрешность, но она монотонно убывает, стремясь к 0, и уже к 0.25 пути имеет приемлемо низкий показатель. МПН же в 0 точке имеет краевое значение функций, однако уже на следующем шаге погрешность кратковременно возрастает, однако после скачка, также как и МДШ, монотонно стремится к 0. Из исследования погрешности можно сделать вывод, что она зависит от мелкости параметров hxhy, , 0, , .