Курсовая работа учебного года 2023-2024 по курсу «Численные методы»

Выполнил: Зинин В.В.
Группа: М8О-408Б-20
Преподаватель: Пивоваров Д.Е.
Вариант курсовой работы: 12

Вариант 12

Численное решение жестких систем ОДУ с использованием неявных методов Рунге-Кутты.

Метод решения

В рамках курсового проекта "Численное решение жестких систем ОДУ с использованием неявных методов Рунге-Кутты" был разработан код на языке программирования Python, реализующий неявный метод Рунге-Кутты для решения системы из трех связанных ОДУ. Ниже приведено описание компонентов этого кода:

1. Определение Системы ОДУ:

Функции f, g, и h представляют собой компонентные функции системы ОДУ, где каждая функция возвращает производную соответствующей переменной (x, y, z) по времени.

2. Метод Ньютона:

Функция newton_method реализует численный метод Ньютона для нахождения корней нелинейного уравнения. Этот метод используется на каждом шаге интеграции для решения неявного уравнения.

3. Неявный Метод Рунге-Кутты:

Функция implicit_runge_kutta выполняет численную интеграцию системы ОДУ с использованием неявного метода Рунге-Кутты. В этой функции реализуется итерационный процесс с использованием метода Ньютона для решения на каждом временном шаге.

4. Функции G и J_G:

G представляет собой функцию для неявного метода Рунге-Кутты, возвращающую невязку между предполагаемым и рассчитанным значениями y. J_G — это Якобиан функции G, необходимый для метода Ньютона.

5. Функция F и Якобиан J_F:

F возвращает вектор производных системы ОДУ, а J_F — это Якобиан системы, необходимый для вычисления приращений в методе Ньютона.

6. Начальные Условия и Параметры Интеграции:

Задаются начальные условия y0 для переменных x, y, z, а также временной интервал t0 до tf и шаг интеграции hh.

7. Вычисление и Визуализация Решения:

После вычисления численного решения с помощью неявного метода Рунге-Кутты, полученные значения переменных x, y, z в зависимости от времени визуализируются на графиках.

Описание программы и инструкция к запуску

Программа состоит из одного файла – cp.py
Для запуска необходимо запустить команду python3 cp.py
Для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в данном коде использовались следующие ключевые формулы и методы:

1. Формулы для Системы ОДУ:

Система ОДУ состоит из трех уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z) = -0.04 * x + 1.4 * y * z,$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z) = 0.04 * x - 1.4 * y * z - 3 * y^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z) = -0.1 * z + 1 + x.$$

2. Неявный Метод Рунге-Кутты:

Используется для численной интеграции системы ОДУ. В общем виде формула для неявного метода Рунге-Кутты для одного шага с временным интервалом h выглядит так:

$$y_{n+1} = y_n + h + \Phi(t_n, y_n, h),$$

где Ф — это некоторая функция, зависящая от выбранного конкретного варианта метода Рунге-Кутты.

3. Функция G:

В контексте метода Рунге-Кутты используется функция:

$$G(y, y_{prev}, t, h) = y - y_{prev} - \frac{h}{2} * (F(t, y) + F(t - h, y_{prev})),$$

которая представляет собой дискретную форму интегрального уравнения, опираясь на среднее значение функции F на текущем и предыдущем шагах.

4. Метод Ньютона:

Используется для решения неявного уравнения, получаемого в методе Рунге-Кутты. Формула метода Ньютона для нахождения корня функции G:

$$y_{new} = y - J_G^{-1}(y) * G(y),$$

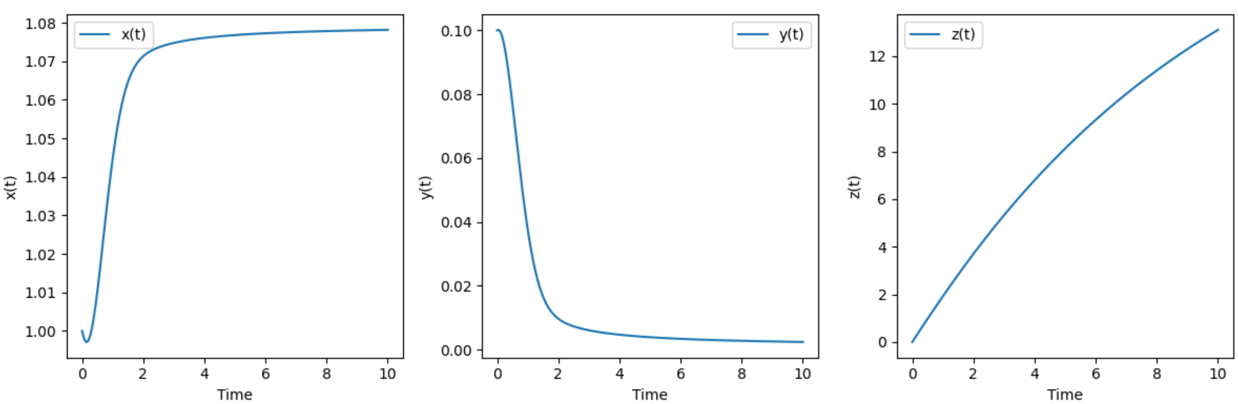
где J_G – Якобиан функции G.

5. Якобиан J_F:

Якобиан J_F функции F используется в методе Ньютона и представляет собой матрицу частных производных функций f, g и h по переменным x, y и z.

Результаты работы

На графиках показано изменение переменных x(t), y(t), z(t) во времени от t = 0 до t = 10 с временным шагом h = 0.01



Вывод

В рамках данного курсового проекта была проведена работа по изучению и применению неявных методов Рунге-Кутты для численного решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение этих методов позволило успешно решить систему ОДУ, которая описывает сложные динамические процессы и может проявлять жесткие свойства в зависимости от параметров системы и начальных условий.