Курсовая работа учебного года 2023-2024 по курсу «Численные методы»

Выполнил Зубко Д.В.

Группа: М8О-408Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д.Е.

Вариант курсовой работы: 10

Вариант 10

Вычисление несобственных интегралов численными методами.

Метод решения

Определённый интеграл называется несобственным, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий.

1. Область интегрирования является бесконечной - интеграл 1 рода.
2. Подынтегральная функция является неограниченной в окрестности некоторых точек области интегрирования - интеграл 2 рода.

Несобственный интеграл 2 рода можно свести к интегралу 1 рода с помощью замены переменной. Поэтому в данной работе будем рассматривать несобственные интегралы 1 рода

1. Сведение к определенному интегралу

Рассмотрим преобразование из мат анализа, выполненное с помощью замены переменной:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{1/b}^{1/a} \tfrac{1}{t^2} f(\tfrac{1}{t})dt \text{ при } ab > 0$$

Можем разложить несобственный интеграл на сумму интегралов.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-A} f(x)dx + \int\limits_{-A}^{B} f(x)dx + \int\limits_{B}^{+\infty} f(x)dx \text{ при } -A < 0 \text{ и } B > 0$$

Первый и последний интегралы можем преобразовать с помощью формулы выше. Так мы можем посчитать каждый из этих трех интегралов (например, методом прямоугольников) и сложить получившиеся результаты.

2. Предельный переход

Запишем предельный переход для несобственного интеграла 1 рода:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b->\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Будем вычислять правый интеграл (например, методом прямоугольников) до тех пор, пока следующее слагаемое не станет меньше заданного эпсилон.

Описание программы и инструкция к запуску

Данная лабораторная работа была сделана в одном файле.

Запустить можно при помощи команды **python main.py** в терминале.

Программа

```
import math

INF = 1e10


def f(x):
    return 1.0 / (1 + x**2)


def integrate_rectangle_method(f, l, r, h):
    result = 0
    cur_x = l
    while cur_x < r:
        result += h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
        cur_x += h
    return result


def integrate_with_definite_integral(f, l, r, h=0.01, eps=1e-6):
    def f_new(t):
        return (1.0 / t**2) * f(1.0 / t)

    result = 0
    if r == INF:
        new_r = max(eps, l)
        result += integrate_rectangle_method(f_new, eps, 1.0 / new_r - eps, h)
    else:
        new_r = r
    if l == -INF:
        new_l = min(-eps, r)
        result += integrate_rectangle_method(f_new, 1.0 / new_l + eps, -eps, h)
    else:
        new_l = l
    if new_l < new_r:
        result += integrate_rectangle_method(f, new_l, new_r, h)
    return result


def integrate_lim(f, l, r, h=0.1, eps=1e-6):
    result = 0
    iters = 0
    if r == INF:
        finish = False
        cur_x = max(l, 0)
        while not finish:
            iters += 1
```

```
            new_result = result + h * f((cur_x + cur_x + h) * 0.5)
            cur_x += h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        result += integrate_rectangle_method(f, 0, r, h)
    if l == -INF:
        finish = False
        cur_x = min(0, r)
        while not finish:
            iters += 1
            new_result = result + h * f((cur_x - h + cur_x) * 0.5)
            cur_x -= h
            if abs(new_result - result) < eps:
                finish = True
            result = new_result
    else:
        result += integrate_rectangle_method(f, l, 0, h)
    return result, iters


if __name__ == "__main__":
    a = -INF
    b = INF
    h = 0.1
    eps = 1e-9
    print("Transforming to definite integral")
    res_definite = integrate_with_definite_integral(f, a, b, h, eps)
    print("Integral =", res_definite)
    print()

    print("Limit method")
    res_limit, iters_limit = integrate_lim(f, a, b, h, eps)
    print("Integral =", res_limit)
    print("Iterations:", iters_limit)
    print()
```

Примеры и результаты работы

Для примера будем вычислять следующий интеграл:

$$\int_{l}^{r} \frac{1}{1+x^2}$$

1. l = 3, r = ∞
Transforming to definite integral Integral = 0.3277407823690935
Limit method Integral = 0.32075031473059007
Iterations: 99701

2. l = -∞, r = -9 Transforming to definite integral Integral = 0.11954685365990542
Limit method Integral = 0.10965722035305618
Iterations: 99101

3. l = -∞, r = 10 Transforming to definite integral Integral = 3.08832958701484
Limit method Integral = 3.042588970590539
Iterations: 31624

4. l = -∞, r = ∞ Transforming to definite integral Integral = 3.2867676296096793
Limit method Integral = 3.140960222545892
Iterations: 63248

Вывод по лабораторной работе

В процессе выполнения этой работы я ознакомился с методами численного решения несобственных интегралов. К таким методам относятся:

1. Превращение в сумму определенных интегралов

2. Использование концепции пределов

Я реализовал оба эти метода и проверил их эффективность на различных функциях, которые интегрировались в разных границах. Результаты, которые я получил, были весьма приближены к тем, что были вычислены аналитическим путем.