МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*8*
по курсу «Численные методы»

Численное решение двумерных уравнений параболического типа.

Выполнил: *К. Д. Каширин*
Группа: *М8О-408Б-20*
Преподаватель: Д. Е. Пивоваров

Москва, 2023

Условие

1. Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.
2. Вариант 10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y(\mu\cos\mu t + (a+b)\sin\mu t)$$

$$u(0,y,t) = 0,$$

$$u_x(\pi,y,t) = -\sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x,0,t) = 0,$$

$$u_y(x,\pi,t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x,y,0) = 0$$

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

Метод решения

Для решения задачи используется 2 метода: метод переменных направлений, метод дробных шагов.

Метод переменных направлений – схема метода имеет вид:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^{k}}{\tau/2} = a\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + b\frac{u_{i,j-1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k}}{h_y^2} + f(x_i, y_j, t^{k+1/2})$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} = a\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + b\frac{u_{i,j-1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}}{h_y^2} + f(x_i, y_j, t^{k+1})$$

Проведем ряд преобразований:

$$(-a\tau h_y^2)u_{i-1,j}^{k+1/2} + (2h_x^2h_y^2 + 2ah_y^2\tau)u_{i,j}^{k+1/2} + (-a\tau h_y^2)u_{i+1,j}^{k+1/2} = (u_{i,j-1}^{k} - 2u_{i,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k})bh_x^2\tau + 2h_x^2h_y^2u_{i,j}^{k} + h_x^2h_y^2\tau f(x_i, y_j, t^{k+1/2})$$

$$(-b\tau h_x^2)u_{i,j-1}^{k+1} + (2h_x^2h_y^2 + 2bh_x^2\tau)u_{i,j}^{k+1} + (-b\tau h_x^2)u_{i,j+1}^{k+1} = (u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2})ah_y^2\tau + 2h_x^2h_y^2u_{i,j}^{k+1/2} + h_x^2h_y^2\tau f(x_i, y_j, t^{k+}$$

Метод дробных шагов – схема метода имеет вид:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2} - u_{i,j}^{k}}{\tau} = a\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2} - 2u_{i,j}^{k+1/2} + u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2} + \frac{f(x_i, y_j, t^k)}{2}$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1/2}}{\tau} = b\frac{u_{i,j-1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}}{h_y^2} + \frac{f(x_i, y_j, t^{k+1})}{2}$$

Проведем ряд преобразований:

$$(-2\tau a)u_{i-1,j}^{k+1/2} + (2h_x^2 + 4\tau a)u_{i,j}^{k+1/2} + (-2\tau a)u_{i+1,j}^{k+1/2} = 2h_x^2 u_{i,j}^k + \tau h_x^2 f(x_i, y_j, t^k)$$

$$(-2\tau b)u_{i,j-1}^{k+1} + (2h_y^2 + 4\tau b)u_{i,j}^{k+1} + (-2\tau b)u_{i,j+1}^{k+1} = 2h_y^2 u_{i,j}^{k+1/2} + \tau h_y^2 f(x_i, y_j, t^{k+1})$$

Описание программы

Программа состоит из 4 файлов. Файл graphics.py состоит из функций построения графиков. Файл methods.py содержит реализацию численных методов переменных направлений, дробных шагов. parameters.py – определения параметров, функций и переменных. Файл main.py – точка входа в программу.

Результаты

Для построения графиков функций (аналитического решения и численного) была написана программа на языке Python, использующая библиотеки numpy и matplotlib.

```
k.d.kashirin@macbook-C02F11GJMD6M lab8 % python3 main.py
nx: 20, ny: 20
hx: 0.157, hy: 0.157
tau: 0.02
x[kt]: 0.785, y[kt]: 0.785, t[kt]: 0.1
```

Рис. 1. Консольное взаимодействие программы с пользователем.

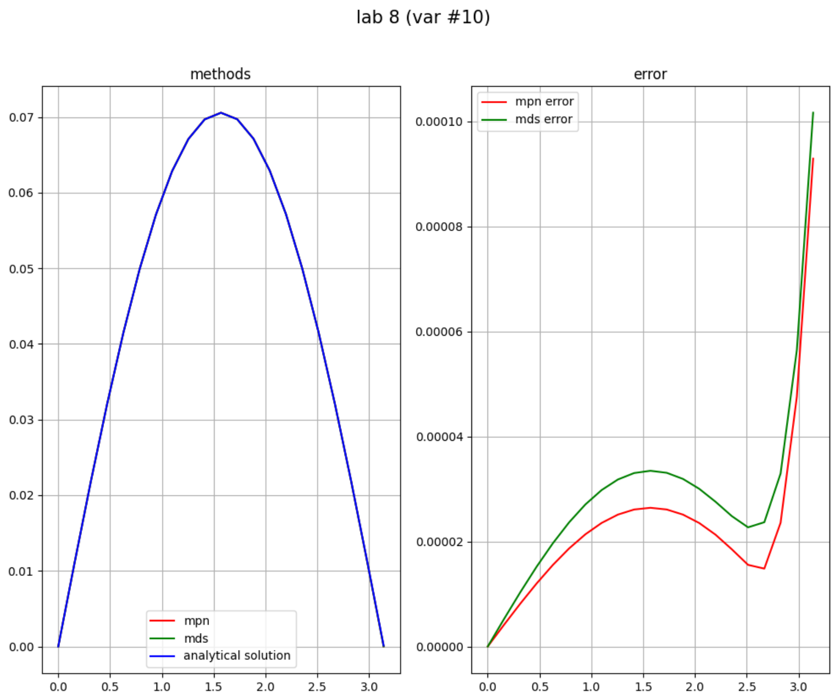

Рис. 2. График численного решения методом переменных направлений, методом дробных шагов.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы, я освоил методы переменных направлений и дробных шагов, используемые для эффективного решения двумерных уравнений параболического типа. Эти методы позволяют численно аппроксимировать решения дифференциальных уравнений, таких как уравнение теплопроводности, используя комбинацию явных и неявных методов для учета пространственных и временных изменений.

Применение численных методов для решения уравнений параболического типа позволяет описывать и предсказывать поведение систем в условиях изменяющихся параметров и граничных условий. Такие моделирования могут быть важными инструментами для понимания физических процессов в реальных системах и помогать в принятии решений при проектировании и оптимизации различных технических и научных устройств и процессов.