Московский Авиационный Институт

(Национальный исследовательский университет)

Лабораторная работа №7

По курсу «Численные методы»

Студент:	Ивченко А.В.
Группа:	М8О-408Б-20
Преподаватель:	Пивоваров Д. Е.

Москва, 2023

Задание:

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением U(x, y) . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y

Вариант:

9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial y} - 3u\,,$$

$$u(0, y) = \exp(-y)\cos y,$$

$$u(\frac{\pi}{2}, y) = 0,$$

$$u(x,0) = \cos x\,,$$

$$u(x, \frac{\pi}{2}) = 0\,.$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-y)\cos x\cos y$.

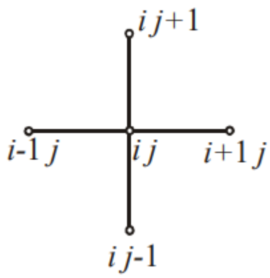
Теория:

В прямоугольнике $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ введем сетку

$$\omega_{h_1 h_2} = \{\, x_i = i h_x,\ i = 0 \ldots N;\ y_j = j h_y,\ j = 0 \ldots N \}$$

На этой сетке аппроксимируем дифференциальную задачу во внутренних узлах с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = -\ 2\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} - 3u_{i,j}$$



Рассмотрим разностно-итерационный метод Либмана. Для простоты изложения этого метода примем h1 = h2 = h :

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4-2h-3h^2}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k}\right)$$

Процесс Либмана прекращается, когда:

$$\left|\left|u^{k+1} - u^{k}\right|\right| \le \varepsilon, \ \left|\left|u^{k}\right|\right| = |u_{i,j}^{k}|$$

В методе Зейделя в формулу подставляются значения не только с прошлой, но и с текущей итерации:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4-2h-3h^2}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1}\right)$$

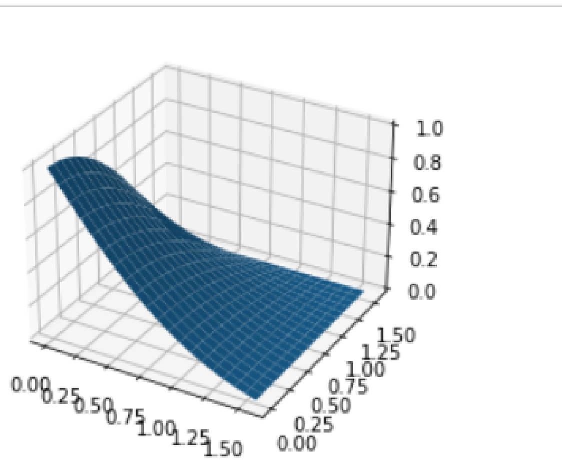
Код программы:

```
def Libman(n):
    u = [0]*len(x)
    for i in range(len(y)):
        u[i] = [0]*len(y)

    for i in range(n):
        u[i][0] = np.cos(x[i])
        u[i][-1] = 0
        u[0][i] = np.exp(-y[i])*np.cos(y[i])
        u[-1][i] = 0
        for j in range(1,n-1):
            u[j][i] = u[0][i] - x[j]*(u[-1][i]-u[0][i])/m.pi/2

    U = copy.deepcopy(u)

    u1 = np.zeros((n,n))

    norma = 1
    eps = 0.0001
    while(norma > eps):
        for i in range(1,n-1):
            for j in range(1,n-1):
                U[i][j] =
(-u[i+1][j]-u[i-1][j]+(-1-2*h)*u[i][j+1]-u[i][j-1])/(-4-2*h+3*h**2)

        for i in range(n):
            for j in range(n):
                u1[i,j] = np.abs(U[i][j] - u[i][j])

        norma = u1.max()
        #print(norma)
        #print(u1)
        u = copy.deepcopy(U)

    return u
def relaxation(n,omega):
```

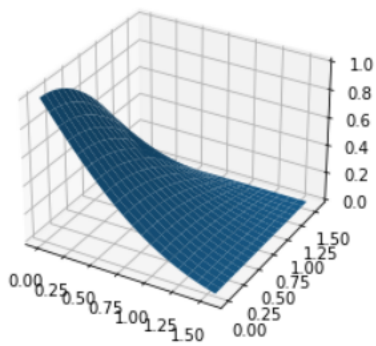
```
    u = [0]*len(x)
    for i in range(len(y)):
        u[i] = [0]*len(y)

    for i in range(n):
        u[i][0] = np.cos(x[i])
        u[i][-1] = 0
        u[0][i] = np.exp(-y[i])*np.cos(y[i])
        u[-1][i] = 0
        for j in range(1,n-1):
            u[j][i] = u[0][i] - x[j]*(u[-1][i]-u[0][i])/m.pi/2


    u1 = np.zeros((n,n))

    norma = 1
    eps = 0.0001
    while(norma > eps):
        U = copy.deepcopy(u)
        for i in range(1,n-1):
            for j in range(1,n-1):
                u[i][j] += omega * ((u[i-1][j] + U[i+1][j] + u[i][j-1] +
U[i][j+1]) / 4 - U[i][j])

        for i in range(n):
            for j in range(n):
                u1[i,j] = np.abs(U[i][j] - u[i][j])

        norma = u1.max()

    return u
```

Результат:

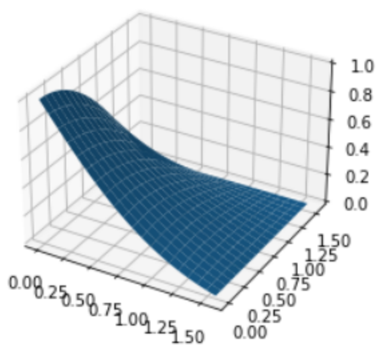
Аналитическое решение



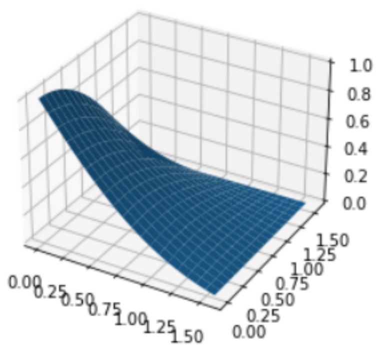
Метод Либмана:



Метод Зейделя:



Метод верхней релаксации (метод Зейделя с параметром 1.5)



Вывод:

В данной проделанной работе, мной была проведена работа по реализации центрально-разностной схемы для решения начально-краевой задачи дифференциального уравнения эллиптического типа. Для получения численного решения были применены методы Либмана, Зейделя и верхней релаксации. Сравнив результаты, можно сказать, что метод Либмана выдал наиболее неточный результат, в то время как метод верхней релаксации показал наиболее точный результат.