Лабораторная работа №6 по курсу «Численные методы»

Выполнил студент группы М8О-408Б-20 Блинов Максим.
Преподаватель: Пивоваров Д. Е.

Цель

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением U(x, t).

Вариант 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u,$$
$$u(0,t) = \sin(2t),$$
$$u(\pi,t) = -\sin(2t),$$
$$u(x,0) = 0,$$
$$u_t(x,0) = 2\cos x.$$

Аналитическое решение:

$$U(x,t) = \cos x \sin(2t).$$

О программе

Программа была реализована на языке программирования Go и включает в себя три численных метода для решения дифференциальных уравнений: явный метод (explicit), неявный метод (implicit) и метод Кранка-Николсона (Crank-Nicolson). Для визуализации результатов использовалась библиотека Gonum, которая предоставляет широкие возможности для построения графиков в среде Go. Результаты вычислений иллюстрируют поведение решений в зависимости от времени и начальных условий, а также позволяют оценить точность численных методов путём сравнения с аналитическим решением задачи. Графики ошибок демонстрируют различия между аналитическими и численными решениями на протяжении всего временного интервала. Все вычислительные эксперименты и генерация графиков проводились в рамках данной программы.

Инструкция к запуску

Для запуска программы на Go, решающей гиперболические дифференциальные уравнения, убедитесь, что у вас установлена последняя версия Go (на данный момент 1.21, проверьте на официальном сайте). Создайте рабочее пространство, затем установите необходимые зависимости go mod tidy.

Явная конечно-разностная схема

В исходном уравнении перейдем от производных к их численным приближениям. Вторую производную будем аппроксимировать по значениям нижнего временного слоя.

Получим рекуррентное соотношение:

$$u_j^{k+1} = \sigma \left(u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\right) + \left(2 - 3\tau^2\right) u_j^k - u_j^{k-1}$$

где $\sigma = \frac{\tau^2}{h^2}$.

Для нижнего временного ряда:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j)$$

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau$$

Остальные значения u в нижнем временном ряду известны из начальных условий. Далее можем в цикле проходиться по сетке и рекуррентно считать значения в ней по полученной формуле.

Примечание: можно было повысить порядок аппроксимации для u_j^1, но т.к. в моем случае $\psi_1 = 0$, то и вторая производная от нее будет равна нулю, а следовательно повышение порядка бессмысленно.

Неявная конечно-разностная схема

В исходном уравнении перейдем от производных к их численным приближениям. Вторую производную будем аппроксимировать по значениям верхнего временного слоя.

Чтобы получить значения u в одном временном ряду, необходимо решить систему уравнений:

$$\{\, b_1\, u_j^{k+1} + c_1 u_{j+1}^{k+1} = d_1, j = 1, a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, j = 2 \ldots N-2, a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, j = N-1.$$

где

$$a_j = c_j = \sigma$$

$$b_j = -(1 + 2\sigma + 3\tau^2)$$

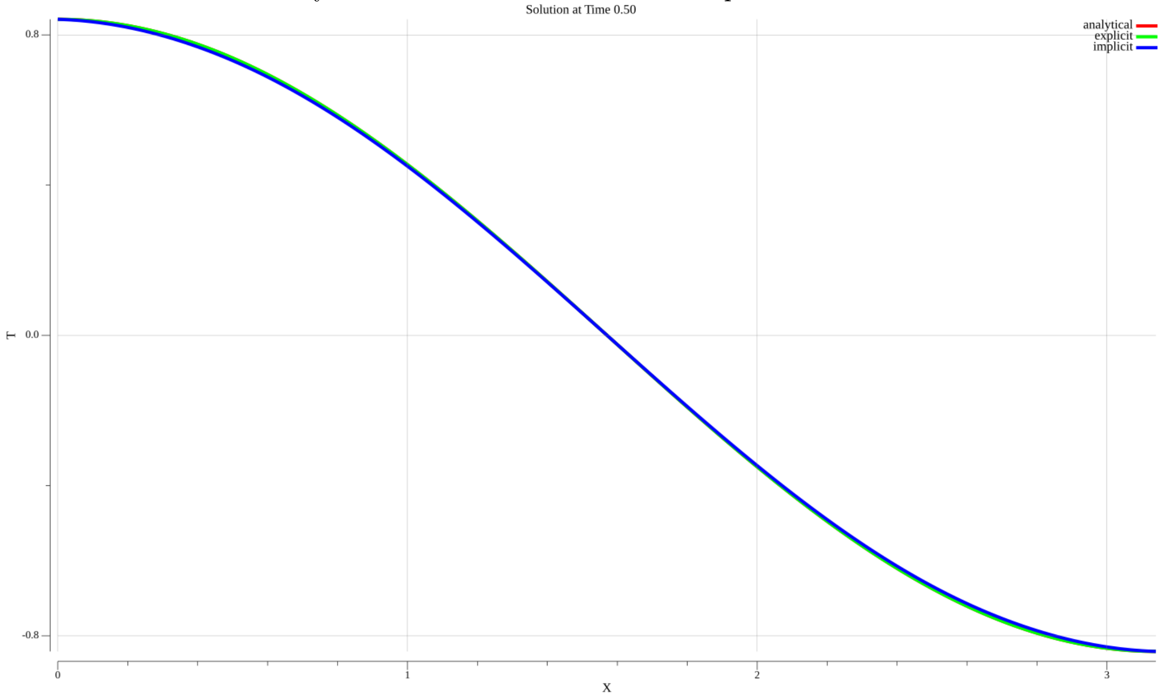
$$d_j = -2u_j^k + u_j^{k-1}, \quad j = 2 \ldots N-2$$

$$d_1 = -(u_1^k + \sigma\phi(t^{k+1}))$$

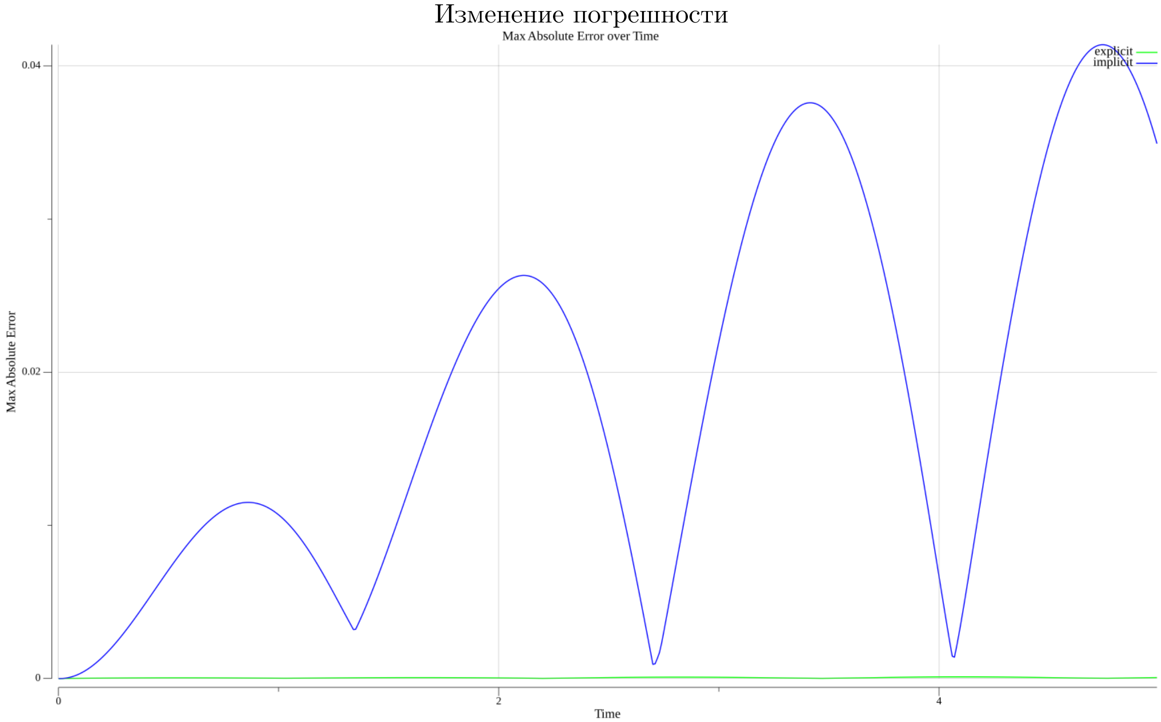
$$d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\phi(t^{k+1}))$$

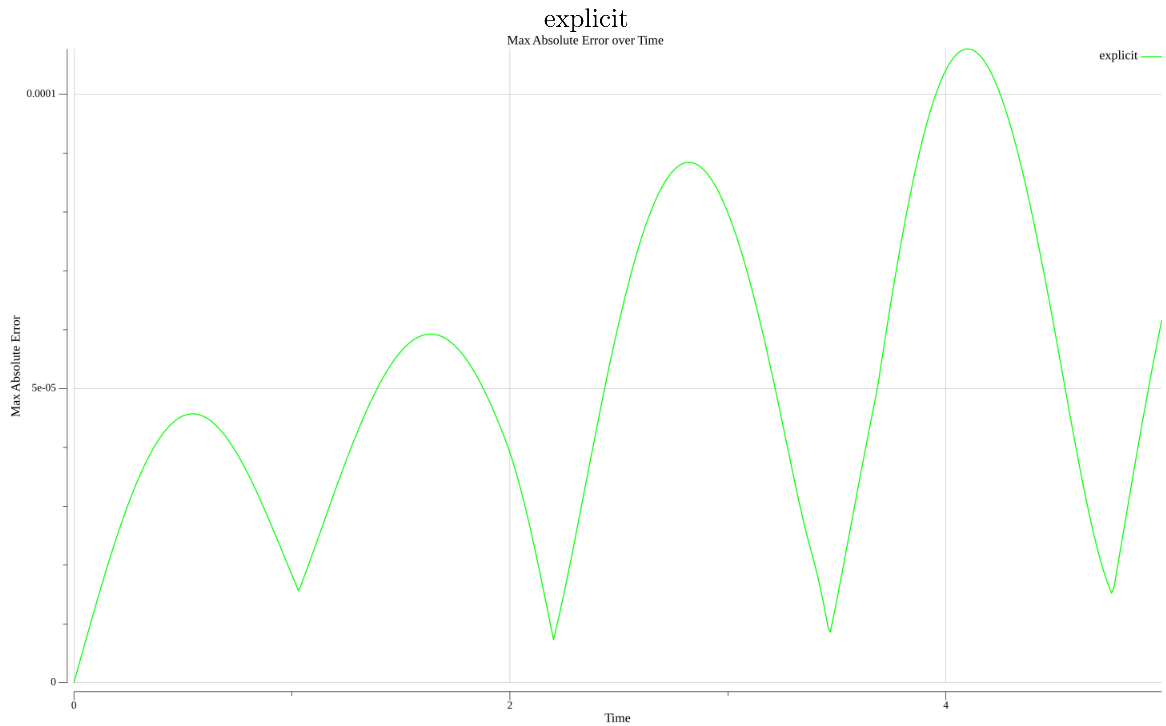
Результаты

Полученные вычисления на момент времени $t = 0.5$



Изменение погрешности





Вывод программы

```
Explicit
max abs error = 0.000107716316
mean abs error = 0.000029333841

Implicit
max abs error = 0.041387088531
mean abs error = 0.011644992636
```

Вывод

В ходе выполнения данной работы мной были освоены методы решения начально-краевых задач для гиперболических дифференциальных уравнений, а именно:

- Использование явной конечно-разностной схемы.

- Применение неявной конечно-разностной схемы. Оба метода позволили достичь адекватной точности в решении поставленной задачи.

Отмечу, что явная схема отличается простотой вычислений, однако ее применимость ограничена условной устойчивостью и требует аккуратного подбора параметров сетки для получения достоверного результата.

В то же время, неявная схема требует более глубоких вычислений, но обеспечивает абсолютную устойчивость, что делает ее предпочтительной для широкого диапазона параметров.