МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №*8*
по курсу «Численные методы»

Численное решение двумерных уравнений параболического типа.

Выполнил: *К. А. Полонский*
Группа: *М8О-408Б-20*
Преподаватель: Д. Е. Пивоваров

Москва, 2023

Условие

1. Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.
2. Вариант 1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0,y,t) = \cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2+\mu_2^2)at),$$

$$u(\pi,y,t) = (-1)^{\mu_1}\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2+\mu_2^2)at),$$

$$u(x,0,t) = \cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2+\mu_2^2)at),$$

$$u(x,\pi,t) = (-1)^{\mu_2}\cos(\mu_1 x)\exp(-(\mu_1^2+\mu_2^2)at),$$

$$u(x,y,0) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение: $U(x,y,t) = \cos(\mu_1 x)\cos(\mu_2 y)\exp(-(\mu_1^2+\mu_2^2)at)$.

2). $\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1$.

Метод решения

Программа позволяет пользователю с помощью консольного ввода выбрать режим ввода параметров и метод решения параболического уравнения.

Сеточная функция представлена трёхмерным массивом U размерности Nt x Nx x Ny, где Nt — число временных шагов, Nx — число шагов по оси X, Ny — число шагов по оси Y.

Метод переменных направлений реализован в 2 этапа, на каждом из которых решается СЛАУ.

Этап 1:

$$Bu_{1j}^{k+1/2} + Cu_{2j}^{k+1/2} = D_1,$$

$$Au_{i-1j}^{k+1/2} + Bu_{ij}^{k+1/2} + Cu_{i+1j}^{k+1/2} = D,\ i = 2, \dots, Nx-2$$

$$Au_{Nx-2j}^{k+1/2} + Bu_{Nx-1j}^{k+1/2} = D_{Nx-1}$$

где

$$A = C = -a\tau h_y^2,\ B = 2h_x^2h_y^2 + 2a\tau h_y^2,\ D = a\tau h_x^2 u_{ij-1}^k + \left(2h_x^2h_y^2 - 2a\tau h_x^2\right)u_{ij}^k + a\tau h_x^2 u_{ij+1}^k,$$

$$D_1 = D - au_{0j}^{k+1/2},\ D_{Ny-1} = D - cu_{Nx-1j}^{k+1/2}.$$

Этап 2:

$$Bu_{1j}^{k+1} + Cu_{2j}^{k+1} = D_1,$$

$Au_{i-1j}^{k+1} + Bu_{ij}^{k+1} + Cu_{i+1j}^{k+1} = D,\ i = 2,\ \dots,\ Ny - 2$

$Au_{Ny-2j}^{k+1} + Bu_{Ny-1j}^{k+1} = D_{Ny-1}$

где

$A = C =- a\tau h_x^2,\ B = 2h_x^2h_y^2 + 2a\tau h_x^2,\ D = a\tau h_y^2u_{i-1j}^{k+1/2} + \left(2h_x^2h_y^2 - 2a\tau h_y^2\right)u_{ij}^{k+1/2} + a\tau h_y^2u_{i+1j}^{k+1/2},$

$D_1 = D - au_{i0}^{k+1},\ D_{Ny-1} = D - cu_{iNy-1}^{k+1}.$

Метод дробных шагов также реализован в 2 этапа, на которых решаются СЛАУ.

Этап 1:

$Bu_{1j}^{k+1/2} + Cu_{2j}^{k+1/2} = D_1,$

$Au_{i-1j}^{k+1/2} + Bu_{ij}^{k+1/2} + Cu_{i+1j}^{k+1/2} = D,\ i = 2,\ \dots,\ Nx - 2$

$Au_{Nx-2j}^{k+1/2} + Bu_{Nx-1j}^{k+1/2} = D_{Nx-1}$

где

$A = C =- a\tau,\ B = h_x^2 + 2a\tau,\ D = h_x^2u_{ij}^k,$

$D_1 = D - au_{0j}^{k+1/2},\ D_{Ny-1} = D - cu_{Nx-1j}^{k+1/2}.$

Этап 2:

$Bu_{1j}^{k+1} + Cu_{2j}^{k+1} = D_1,$

$Au_{i-1j}^{k+1} + Bu_{ij}^{k+1} + Cu_{i+1j}^{k+1} = D,\ i = 2,\ \dots,\ Ny - 2$

$Au_{Ny-2j}^{k+1} + Bu_{Ny-1j}^{k+1} = D_{Ny-1}$

где

$A = C =- a\tau h_x^2,\ B = 2h_x^2h_y^2 + 2a\tau h_x^2,\ D = a\tau h_y^2u_{i-1j}^{k+1/2} + \left(2h_x^2h_y^2 - 2a\tau h_y^2\right)u_{ij}^{k+1/2} + a\tau h_y^2u_{i+1j}^{k+1/2},$

$D_1 = D - au_{i0}^{k+1},\ D_{Ny-1} = D - cu_{iNy-1}^{k+1}.$

В конце работы программа записывает параметры сеточной функции, саму сеточную функцию и вектор ошибок в файл для скрипта отрисовки графиков.

Описание программы

Программа состоит из одного файла lab8.cpp, включающего функции:

- double phi0(double y, double t) — функция граничного условия
- double phi1(double y, double t) — функция граничного условия
- double phi2(double x, double t) — функция граничного условия
- double phi3(double x, double t) — функция граничного условия
- double psi(double x, double y) — функция начального условия
- double analSol(double x, double y, double t) — функция аналитического решения

- double tridiagonalAlgo(std::vector<double>& a, std::vector<double>& b, std::vector<double>& c, std::vector<double>& d, std::vector<double>& x, int step, double prevP, double prevQ) — функция решения СЛАУ методом прогонки
- gridF alterDirec() — функция решения двумерного уравнения параболического типа методом переменных направлений
- gridF fractSteps() — функция решения двумерного уравнения параболического типа методом дробных шагов
- std::vector<double> getError(gridF& U) — функция, вычисляющая погрешность относительно аналитического решения

Результаты

Для построения графиков функций (аналитического решения и численного) была написана программа на языке Python, использующая библиотеки numpy и matplotlib. Графики были построены для временного среза sliceT = 1 и среза по оси X sliceX = 1, оранжевый цвет использовался для аналитического решения, чёрный — для численного. График красного цвета отражает зависимость ошибки от времени.

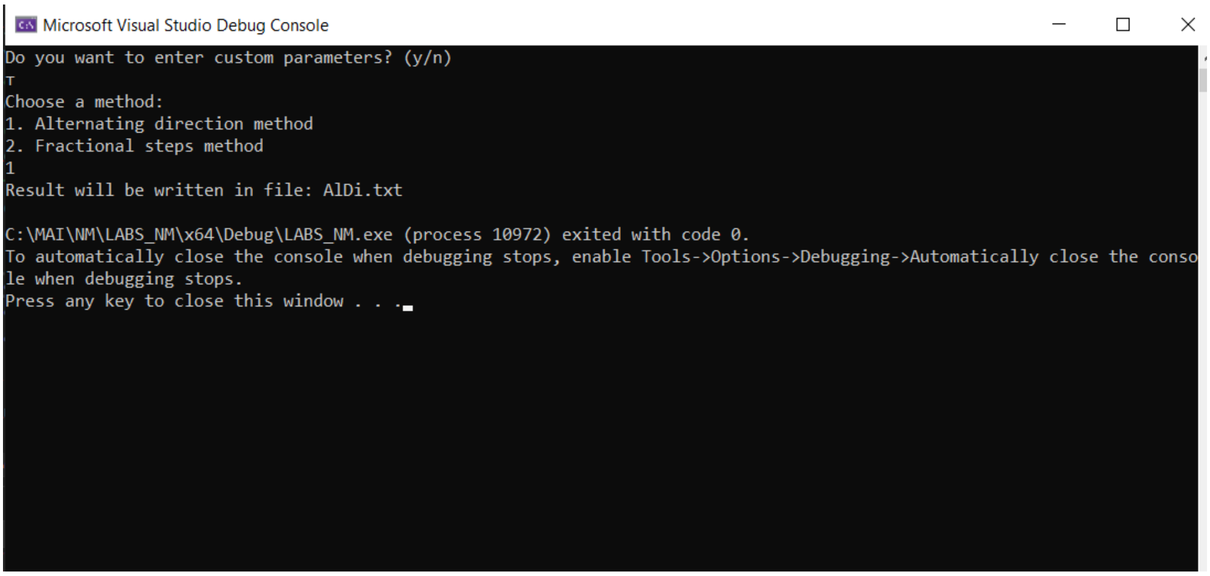

Рис. 1. Консольное взаимодействие программы с пользователем.

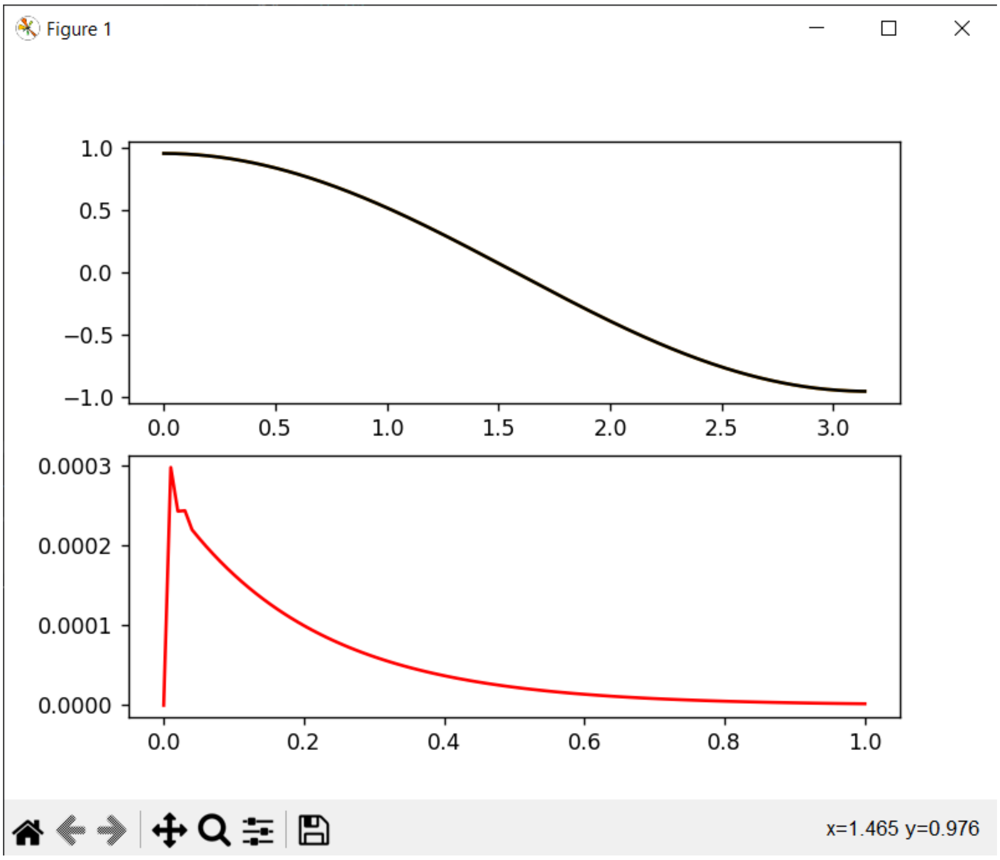

Рис. 2. График численного решения методом переменных направлений.

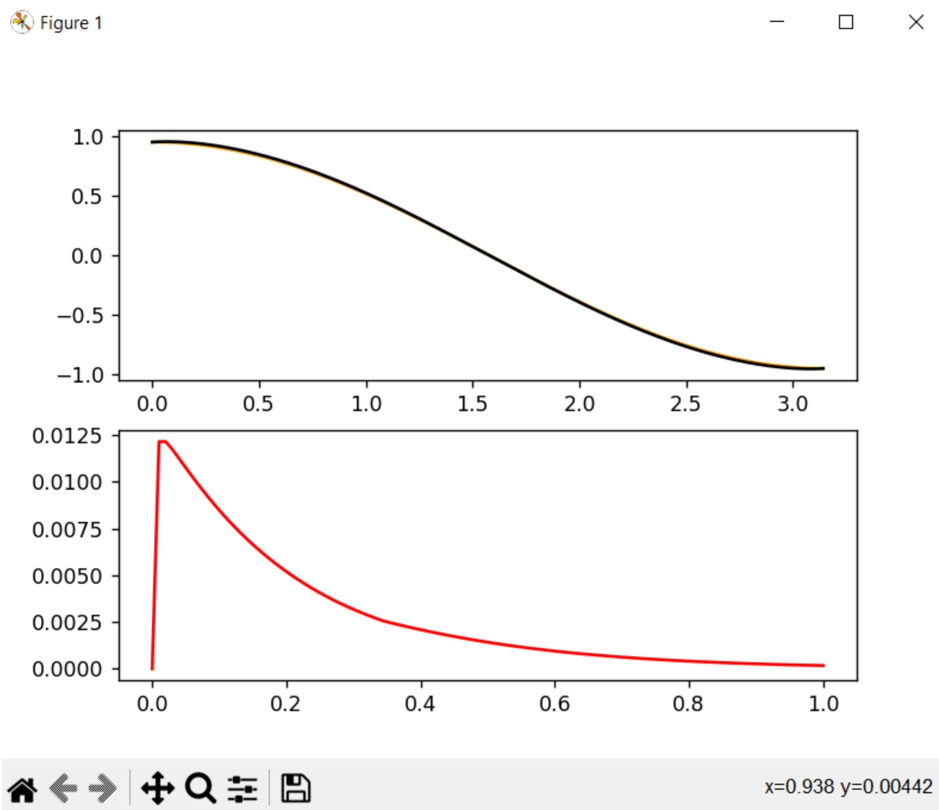

Рис. 3. График численного решения методом дробных шагов.

Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы я освоил методы переменных направлений и дробных шагов, использующихся для решения двумерных уравнений параболического типа. Практическое применение решения данной задачи лежит в области моделирования физических процессов и иллюстрации физических явлений и может применяться как при исследовательской деятельности, так и при разработке специализированного ПО.