

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа №7
по курсу «Численные методы»

Численное решение уравнений эллиптического типа.

Выполнил: *К. Д. Каширин*

Группа: *М8О-408Б-20*

Преподаватель: *Д. Е. Пивоваров*

Москва, 2023

Условие

1. Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y .

2. Вариант 10:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u,$$

$$u(0, y) = \exp(-y) \cos y,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \exp(-x) \cos x,$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = \exp(-x - y) \cos x \cos y$.

Метод решения

Программа позволяет пользователю с помощью консольного ввода выбрать режим ввода параметров и метод решения эллиптического уравнения.

Сеточная функция представлена матрицей U размерности $N_x \times N_y$, где N_x — число шагов по оси X , N_y — число шагов по оси Y .

Метод Либмана был записан в форме:

$$u_{i,j}^n = \delta * \left((hxc + ac) * u_{i-l,j}^{n-l} + (hxc - ac) * u_{i+l,j}^{n-l} + (hyc + bc) * u_{i,j-l}^{n-l} \right) + \delta * (hyc - bc) * u_{i,j+l}^{n-l}, \text{ где}$$

n — номер итерации,

$$\delta = \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + c}, hxc = \frac{1}{h_x^2}, hyc = \frac{1}{h_y^2}, ac = \frac{a}{2h_x}, bc = \frac{b}{2h_y}.$$

Метод Зейделя был записан следующем виде:

$$u_{i,j}^n = \delta * \left((hxc + ac) * u_{i-l,j}^{n-l} + (hxc - ac) * u_{i+l,j}^{n-l} + (hyc + bc) * u_{i,j-l}^{n-l} \right) + \delta * (hyc - bc) * u_{i,j+l}^{n-l}, \text{ где}$$

n — номер итерации,

$$\delta = \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + c}, hxc = \frac{1}{h_x^2}, hyc = \frac{1}{h_y^2}, ac = \frac{a}{2h_x}, bc = \frac{b}{2h_y}.$$

Метод простых итераций с верхней релаксацией был записан в форме:

$$u_{i,j}^n += \omega * \{ \delta * [(hxc + ac) * u_{i-1,j}^{n-1} + (hxc - ac) * u_{i+1,j}^{n-1} + (hyc + bc) * u_{i,j-1}^{n-1}] + \delta * (hyc - bc) * u_{i,j+1}^{n-1}] - u_{i,j}^n \}, \text{ где}$$

n — номер итерации,

$$\delta = \frac{1}{\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} + c}, hxc = \frac{1}{h_x^2}, hyc = \frac{1}{h_y^2}, ac = \frac{a}{2h_x}, bc = \frac{b}{2h_y}.$$

В конце работы программа записывает параметры сеточной функции, саму сеточную функцию и вектор ошибок в файл для скрипта отрисовки графиков.

Описание программы

Программа состоит из 4 файлов. Файл graphics.py состоит из функций построения графиков (аналитическое решение, графики для метода Либманна, графики для метода Зейделя, графики для метода верхней репликации). Файл methods.py содержит определения функций для численного решения дифференциальных уравнений (методы Либманна, Зейделя, верхней релаксации и другие). Он также содержит вспомогательные функции для интерполяции, проверки условия останова и вычисления ошибки решения. Файл parameters.py – определения параметров, функций и переменных. Файл main.py – точка входа в программу.

Результаты

Для построения графиков функций (аналитического решения и численного) была написана программа на языке Python, использующая библиотеки numpy и matplotlib.

```
k.d.kashirin@macbook-C02F11GJMD6M lab7 % python3 main.py
K: 50, N: 50
hx: 0.031415926535897934, hy: 0.031415926535897934
x[tt]: 0.16028533946886697
```

Рис. 1. Консольное взаимодействие программы с пользователем.

lab 7 (var #10)

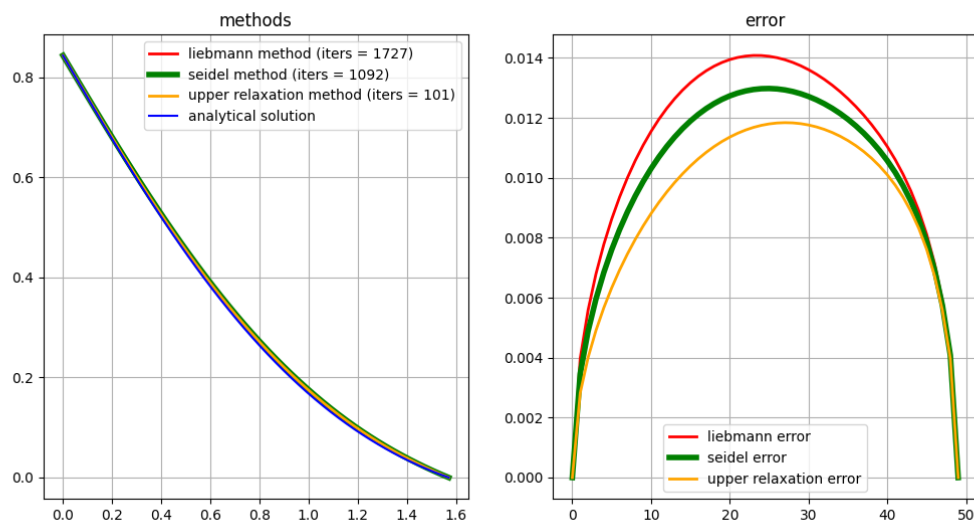


Рис. 2. Графики численного решения методом Либмана, методом Зейделя, методом простых итераций с верхней релаксацией.

Выводы

В результате выполнения лабораторной работы я ознакомился с методами численного решения уравнений эллиптического типа, такими как метод Либмана, метод Зейделя и метод простых итераций с верхней релаксацией.

Метод Либмана позволяет находить приближенные численные решения путем итеративного улучшения значений в узлах сетки на основе средних значений их соседей. Этот метод широко используется в моделировании физических процессов, таких как распределение температуры, электрических или магнитных полей в пространстве.

Метод Зейделя также является итерационным методом, который учитывает обновление значений на основе предыдущих значений узлов сетки, учитывая как предыдущие значения соседних узлов, так и обновленные значения во время итерации. Он эффективен и обычно быстрее, чем метод Либмана, особенно для сходимости в случае симметричных уравнений.

Метод простых итераций с верхней релаксацией представляет собой модификацию метода Зейделя с дополнительным параметром релаксации. Этот метод позволяет ускорить сходимость итераций к решению за счет управляемого изменения значений в узлах сетки.

Использование этих методов позволяет эффективно моделировать сложные физические процессы и обеспечивать точные численные решения для анализа различных явлений и систем.