

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне
Факультет вычислительной математики и кибернетики



Направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выпускная квалификационная работа

**Численный и аналитический анализ интегральных
уравнений, возникающих в модели стационарных
биологических сообществ**

Работу выполнил
студент **Ван Юйфэн**

Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент, **А.А.Никитин**

**Шэньчжэнь
2022**

Содержание

1	Введение	2
2	Биологическая модель и пространственный подход	3
2.1	Экологическая модель для пространственных моделей сообществ	3
2.2	Анализ уравнения равновесия и его несообразности	6
2.3	Получение уравнения-близнеца	8
3	Примеры с аналитическими решениями	9
3.1	Рациональные ядра	9
3.2	Экспоненциальные ядра	9
4	Численные методы для решения уравнения	11
4.1	Метод Коллокации	11
4.2	Метод ряда Неймана	13
4.2.1	Анализ метода ряда Неймана	13
4.2.2	Реализация метода ряда Неймана	16
4.3	Метод Нистрёма	18
5	Сравнение и недостатки численных методов	20
5.1	Сравнение относительной ошибки	20
5.2	Сравнение временная сложность	21
5.3	Недостатки	22
6	Заключение	22

1 Введение

Пространственные закономерности в биологических популяциях и влияние пространственных закономерностей на экологические взаимодействия сегодня являются одной из центральных тем математической экологии. Были разработаны различные подходы, позволяющие нам понять их. Пространственно явные модели, основанные на отдельных индивидах, контрастируют с моделями, лишенными пространственной структуры, широко используемыми в теоретической экологии в прежние времена. Мир полон пространственной структуры, и простые модели не смогли успешно доказать явления, наблюдаемые в природных системах. Модели, основанные на индивидуальностях (individual-based models) - важный шаг вперед, но это гораздо сложнее. В статье [Law; Dieckmann; and Metz; 2000] приводится такой пример. Давайте представим себе сообщество, моделируемое на пространственной решетке из 100 ячеек, и предположим, что размеры населения в ячейках достаточно велики, чтобы можно было игнорировать стохастичность. Если у нас есть только 10 видов в сообществе, наша динамическая система состоит из 1000 уравнений.

Поэтому экологам нужны новые идеи и методы, чтобы иметь дело с динамикой процессов в пространственной обстановке. Мы надеемся, что эта работа должна стать примером разумного математического сотрудничества. Но это только начинается, и нам еще многое предстоит сделать. Проблема, которую мы исследуем, исходит из стохастических моделей случайных событий (индивидуальных рождений, смертей и перемещений) в конечной популяции [Law and Dieckmann; 2000; Bolker and Pacala; 1997]. Мы используем рост и конкуренцию растений в явно пространственной среде для изучения свойств моментных приближений индивидуальной динамики в непрерывном пространстве [Law and Dieckmann, 2000; Murrel, Dieckmann and Law 2004]. И наша цель состоит в том, чтобы провести математический анализ метода моментных приближений. Этот метод открывает перспективы для лежащих в основе, вовлеченных, индивидуальных процессов. Но в этом есть и некоторые недостатки. Этот метод хорошо работает только в небольшом пространственном масштабе, и диапазон пространственных структур, над которыми работает метод момента, должен быть детализирован. Будет показано, что уравнение первичного равновесия имеет несогласованность. Это значит, что мы можем анализировать модели стационарных биологических сообществ с помощью нескольких интегральных уравнений. Давайте поговорим более подробно: мы проанализируем динамику популяции в два момента. На первый момент динамика популяции связана с уровнем рождаемости, смертности и

интенсивностью конкуренции между особями. Во второй момент динамика популяции связана с динамикой первого момента, уровнем рождаемости, уровнем смертности и перемещение новорожденных индивидуумов. Эти уравнения являются объектом нашего исследования.

Наш подход сочетает в себе аналитические и численные математические методы для его анализа. Чтобы облегчить анализ, мы можем упростить эти уравнения в единое уравнение и проанализировать его с помощью различных численных методов. Чтобы получить точное численное решение, мы предлагаем три численных метода. Эти три метода имеют свои особенности и дают разные идеи для решения уравнений.

Во второй части мы построим модель пространственных сообществ и обсудим связанные с ней вопросы авновесия и несообразности, в конце мы можем получить интегральное уравнение, которое может лучше описать модель пространственных моделей сообществ.

В третьей части мы приводим два конкретных аналитических решения, изменяя ядра уравнения.

В четвертой части мы вводим три численных метода и используем эти численные методы для получения численных решений, соответствующих аналитическим решениям третьей части.

В пятой части мы сравним эти численные методы и найдем недостатки.

2 Биологическая модель и пространственный подход

2.1 Экологическая модель для пространственных моделей сообществ

Рассмотрим популяцию одновидового растения [Murrel, Dieckmann and Law 2004]. Предположим, что это популяция удовлетворяет следующим условиям:

- 1 Оно находится в непрерывной пространственной области, пространство которой берется как двумерное и достаточно большое, чтобы краевые эффекты были незначительными. Следовательно, мы можем предположить, что инди-

виды растений расположены в точках $x = (x_1; x_2)$ в этой плоскости. Для простоты мы имеем здесь дело только с видами и местоположением. Пространственная структура индивидов $p(x)$ представляет собой сумму всех дельта-функций Дирака [Dieckmann and Law 2000; pp 416-417].

- 2 Также мы предполагаем, что абиотическая среда однородна в пространстве, и любая развитая пространственная структура генерируется внутри сообщества. Пространственная структура меняется со временем, как только индивиды рождаются, умирают и перемещаются. Когда происходит событие, генерируется новый пространственный шаблон $p(x)$. Все соответствующие события являются стохастическими. Особые моменты в момент времени t имеют свои собственные распределения вероятностей. Таким образом, динамика численности населения может быть описана в терминах статистики этих распределений.

Динамическая система, которую мы изучаем, имеет первый момент N и второй момент $C(x)$ в качестве переменных состояния. Эта система была получена аналитически из индивидуального процесса в непрерывном пространстве [Dieckmann and Law; 2000 ; pp 252 - 270]. Динамика первых моментов (*средние плотности*) задается по формуле:

$$\dot{N} = (b - d)N - \int_{-\infty}^{\infty} d'w(y)C(y)dy \quad (2.1.1)$$

Положительными параметрами b и d в этом уравнении являются постоянные гомогенные показатели соответственно рождаемости и смертности. $w(y)$ - это ядро конкуренции. Это функция расстояния, которая определяет силу конкуренции между двумя индивидуумами на заданном расстоянии друг от друга. Без потери общности можно предположить, что ядро конкуренции ограничено нулем и единицей, и максимально возможная конкуренция получается, когда расстояние равно нулю. Итак, у нас есть:

$$w(0) = 1, \lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x) = 0 \quad (2.1.2)$$

$C(y)$ содержит *плотность пары* при перемещении y . Было показано [Murrel; Dieckmann and Law 2004; стр. 422-424], что если плотности пар устанавливаются на

константы на больших расстояниях, нам нужно следующее асимптотическое ограничение для плотностей пары:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} C(y) = N^2 \quad (2.1.3)$$

Достаточным условием для этого утверждения является отсутствие крупномасштабной пространственной структуры. Это условие превращает уравнение (2.1.1) в замкнутую динамическую систему, которая известна как логистическое уравнение [T edJ: Case 2000; стр. 107-134]. Параметр d' измеряет, насколько сильно увеличивается уровень смертности при местной конкуренции. Давайте заметим, что уравнение первого момента представляет, как динамика первого момента связана с динамикой второго момента через функцию $C(y)$:

$$\begin{aligned} \dot{C}(x) = & + \int_{-\infty}^{\infty} bm(y)C(x+y)dy \\ & + bm(x)N \\ & - dC(x) \\ & - C(x) \int_{-\infty}^{\infty} d'w(y)C(y)/Ndy \\ & - d'w(x)C(x) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Эта динамика второго порядка должна учитываться для всех событий, которые влияют на отдельных индивидуумов в паре. Новым экологическим параметром здесь является *ядро перемещения* $m(x)$, которое описывает плотность вероятности, с которой новорожденное потомство перемещается на расстояние x от своих родителей, то есть, мы предполагаем, что перемещения связаны только с рождением нового индивида. Чтобы быть точным, мы предположим, что ядро перемещения $m(x)$ нормализовано так, что интеграл по всем перемещениям равен единице. Кроме того, мы также предполагаем, что интеграл с ядром конкуренции по всем перемещениям конечен.

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(y)dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(y)dy = 1 \quad (2.1.5)$$

Следует подчеркнуть, что из экологической интерпретации функции $w(x), m(x), C(x)$ должны быть неотрицательными. Так:

$$w(x) \geq 0, m(x) \geq 0, C(x) \geq 0 \quad (2.1.6)$$

Эти функции могут быть равны нулю для некоторых x , но не для всех. Параметры рождаемости и смертности и мера смертности в соответствии с их смыслом также должны быть неотрицательными. Следовательно, мы предполагаем выполнение этих корреляций между "параметрами рождаемости и смертности".

$$b > d > 0, \quad d' > 0 \quad (2.1.7)$$

Последнее предположение будет заключаться в том, что конкуренция и перемещения отсутствуют в бесконечности. Следовательно:

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} m(y) = 0, \quad \text{and} \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} w(y) = 0 \quad (2.1.8)$$

2.2 Анализ уравнения равновесия и его несообразности

Мы изучаем уравнения (2.1.1) и (2.1.4) в случае равновесия. Мы говорим, что равновесие достигнуто, если рождаемость равна смертности и популяция каждого вида перестала расти по определению. [T edJ: Case 2000; стр. 423–425] В этом случае производные в левой части этих уравнениях равны нулю, и после некоторых вычислений может быть получено такое уравнение, которое является основным предметом нашего исследования.

$$\begin{aligned} [b + d'w(x)] C(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} bm(y)C(x+y)dy + \\ & + \frac{b}{(b-d)}m(x) \int_{-\infty}^{\infty} d'w(y)C(y)dy \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

[Ulf Dieckmann; "IIASA's Spring Workshop on Methodology"; 2005]

Мы будем называть уравнение (2.2.1) "модельным" или "равновесным" уравнением. В этом уравнении $w(x)$ и $m(x)$ заданы положительно значные непрерывные функции, определенные на $(-1, 1)$, а $C(x)$ - искомая функция, определенная на $(-\infty, +\infty)$. Также мы делаем следующие общие допущения и условия (2.1.2), (2.1.3), (2.1.5) - (2.1.8).

Замечание. Далее мы рассмотрим такие функции $C(x)$ и $w(x)$, которые удовлетворяют условиям (2.1.2) - (2.1.8), для которых последний интеграл в правой части (2.2.1) хорошо определен.

Определение. Мы называем ограниченную непрерывную вещественнозначную функцию $C(x)$, которая удовлетворяет условиям (2.1.3) и (2.1.6) и определена на $(-\infty, +\infty)$, *решением уравнения равновесия*, если (2.2.1) для каждого $x \in (-\infty, +\infty)$ выполняется.

Но это уравнение-только некоторое приближение. И есть некоторые необходимые условия для ее разрешимости. Пусть функции $w(x)$, $m(x)$ и $\tilde{C}(x) = C(x) - N^2$ уменьшаются экспоненциально. В этом случае можно показать, что проблема равновесия не имеет решений, как указано выше.

Следующая теорема была получена из статьи:

[A:Davydov; "On the solvability of the "EEP"integral equation"].

На самом деле, давайте перепишем уравнение (2.2.1) как:

$$\begin{aligned} & b \left(N^2 + \tilde{C}(x) \right) + d'w(x)C(x) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} bm(y) \left(N^2 + \tilde{C}(x+y) \right) dy + \frac{b}{(b-d)}m(x) \int_{-\infty}^{\infty} d'w(y)C(y)dy \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Для $\int_{-\infty}^{\infty} m(y)dy = 1$ мы получим:

$$b\tilde{C}(x) + d'w(x)C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} bm(y)\tilde{C}(x+y)dy + \frac{b}{(b-d)}m(x) \int_{-\infty}^{\infty} d'w(y)C(y)dy \quad (2.2.3)$$

для функций, определенных выше, мы можем применить преобразование Фурье $\left(\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2\pi i p t} dt \right)$ к последнему уравнению и переписать его как:

$$b\tilde{C}(p) + d'\widetilde{wC}(p) = b\tilde{m}(p)\tilde{C}(p) + \frac{b}{(b-d)}\tilde{m}(p) \int_{-\infty}^{\infty} d'w(y)C(y)dy \quad (2.2.4)$$

где $\tilde{C}(p)$, $\widetilde{wC}(p)$, $\tilde{m}(p)$ - преобразование Фурье функций $C(x)$, $w(x)C(x)$ и $m(x)$ соответственно. Рассмотрим уравнение(2.2.2) для $p = 0$ и используем $\tilde{m}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)dt = 1$, после некоторых алгебраических манипуляций мы получим:

$$d' \frac{d}{(b-d)} \int_{-\infty}^{\infty} w(y)C(y)dy = 0 \quad (2.2.5)$$

Это означает, что выполняются следующие альтернативы:

- 1 либо $\int_{-\infty}^{\infty} w(y)C(y)dy = 0$. Поскольку функции $C(y)$ и $w(y)$ неотрицательны, мы получаем, что для каждого y либо наше уравнение имеет тривиальное решение, либо $w(y) = 0$. Второй случай приводит к уравнению (параметр $b \neq 0$).

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} m(y)C(x+y)dy \quad (2.2.6)$$

который можно было бы легко изучить. Итак, в этой альтернативе у нас нет никаких решений;

- 2 или $dd' = 0$. Но это противоречит (2.1.7).

Отметим, что случаи $\int_{-\infty}^{\infty} w(y)C(y)dy = 0$ и $d' = 0$ не соответствуют действительности не только с экологической точки зрения, но и имеют тривиальный математический анализ. Случай $d = 0$ также очень сложен для интерпретации с точки зрения экологии. Это предельный случай. (модель без смерти) Но с математической точки зрения это очень полезно, потому что позволяет получить аналитическое решение. Это решение используется для сравнения численных методов для интегральных уравнений.

2.3 Получение уравнения-близнеца

Рассмотрим уравнение(2.2.1) с параметром N , вместо последнего интеграла в нем. Мы будем называть этот параметр управляющим параметром, и уравнение (для удобства работы мы записываем переменную d' как s)

$$(b + sw(x))C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} bm(x-y)C(x)dy + N \cdot m(x) \quad (2.3)$$

мы будем называть уравнением-близнецом. Мы будем изучать динамику популяций растений с помощью численного решения этого уравнения.

3 Примеры с аналитическими решениями

Следующая цель-получение решения уравнения-близнеца с помощью нескольких численных методов. Это требует от нас предоставления определенных аналитических решений уравнения-близнеца для сравнения этих численных методов.

Мы приведем два примера с аналитическими решениями, выписываемыми в явном виде, соответствующих рациональным ядрам и экспоненциальным ядрам.

3.1 Рациональные ядра

В этом примере, мы предполагаем, что ядро разброса $w(x)$ и ядро ращброса $m(x)$ равны

$$m(x) = \frac{p}{\pi} \frac{1}{(x^2 + p^2)} \quad w(x) = \frac{A}{x^2 + (n+1)^2 p^2} \quad p > 0, A > 0, n \in N \quad (3.1.1)$$

Здесь параметры b, s равны 1, Для фиксированных параметров A, p и $n = 2$, следующая формула предоставляют формулу для вычисления значений управляющего параметра N :

$$N = \frac{(A + 5p^2)(A + 8p^2)}{A^2 + 21Ap^2 + 120p^4} \quad (3.1.2)$$

Когда $A = p = 1$, уравнение-близнец может написываться в форме

$$\left[1 + \frac{1}{x^2 + 9}\right] C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y^2 + 1)\pi} C(x+y) dy + \frac{27}{71} \pi \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)\pi} \quad (3.1.3)$$

В этом случае аналитическое решение этого примера будет получено:

$$C_1(x) = 1 + \frac{24}{71} \frac{1}{(x^2 + 1)} + \frac{40}{71} \frac{1}{(x^2 + 4)} \quad (3.1.4)$$

График функции $C_1(x)$ имеет вид:

3.2 Экспоненциальные ядра

В этом примере, мы предполагаем, что ядро конкуренции $w(x)$ и ядро ращброса $m(x)$ равны

$$m(x) = e^{-2|x|} \quad w(x) = \frac{e^{-|x|} Q(x)}{1 + e^{-|x|} R(x)} \quad (3.2.1)$$

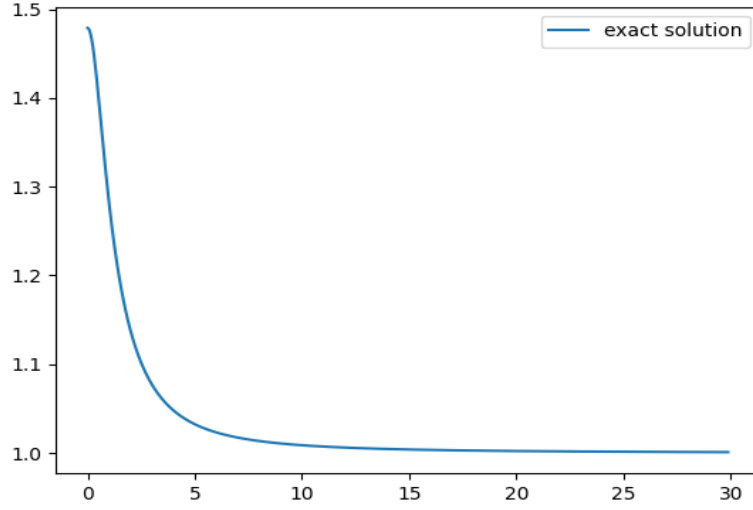


Рис. 1: Аналитическое решение для случая рационального ядра (3.1.1)

где

$$Q(x) = \frac{1}{3}Ax^2 - \frac{16}{9}A|x| + \frac{56}{27}A + \frac{1}{3}B \quad \text{and} \quad R(x) = Ax^2 + B \quad (3.2.2)$$

Управляющий параметр N равен:

$$N = \frac{2}{3}B + \frac{52}{27}A \quad (3.2.3)$$

Пусть параметры $A = 0, B = 1$, другие параметры b, s эквивалентны примеру рационального ядра. Уравнение-близнец может написываться в форме:

$$\left[1 + \frac{e^{-|x|}}{3(1 + e^{-|x|})}\right] C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|} C(x+y) dy + \frac{2}{3} \cdot e^{-2|x|} \quad (3.2.4)$$

В этом случае аналитическое решение этого примера будет получено:

$$C_2(x) = 1 + e^{-|x|} \quad (3.2.5)$$

График функции $C_2(x)$ имеет вид:

Далее в настоящей работе эти решения будут использоваться для оценки численного алгоритма, который обеспечивает решение уравнения-близнеца, являющееся хорошим приближением к известным аналитическим в особых случаях.

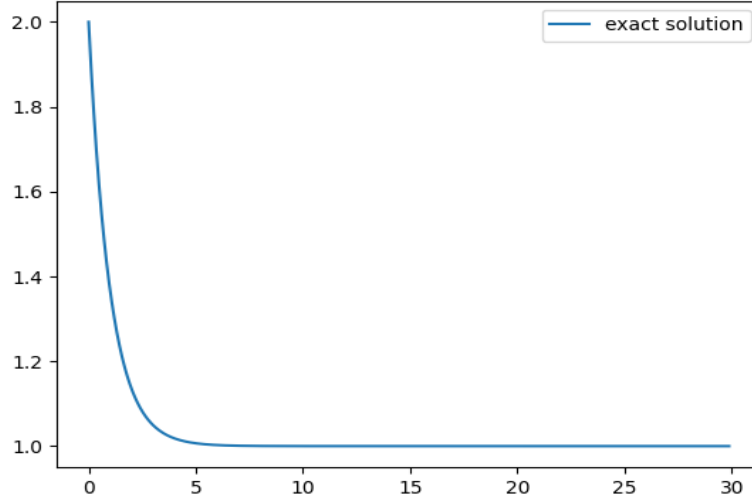


Рис. 2: Аналитическое решение для случая экспоненциальные ядра (3.2.1)

4 Численные методы для решения уравнения

4.1 Метод Коллокации

Давайте начнем с метода коллокации для решения интегральных уравнений. Рассмотрим интегральное уравнение-близнец (2.3), и напишите приближение в форме

$$\tilde{C}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (4.1.1)$$

где a_i - неизвестные коэффициенты, а $\phi_i(x)$ - заданные функции, которые не зависят от интегрального ядра $m(y)$. Естественным выбором функций $\phi_i(x)$ являются те, которые обычно используются для аппроксимации известной функции. В частности, мы можем выбрать ортогональные функции, такие как полином Лагерра или полином Лежандра с весом или сплайнами. Теперь для любого из таких вариантов замена $\tilde{C}(x)$ в соответствующее интегральное уравнение. И мы можем получить *остальное*:

$$r(x) = \tilde{C}(x) - \frac{1}{b + d'w(x)} \int_{-\infty}^{\infty} bm(y) \tilde{C}(x + y) dy - \frac{bm(x)}{b + d'w(x)} \cdot N \quad (4.1.2)$$

На выбор a_i могут быть наложены подходящие ограничения, которые гарантируют, что остаточный $r(x)$ в некотором смысле "мал". В методе коллокации выбирается набор различных точек z_j , где $j = 0, 1, \dots, n$. И пусть условие $r(z_j) = 0$ верно для всех $j = 0, 1, \dots, n$.

Мы можем получить систему линейных уравнений для уравнения-близнеца с помощью коэффициентов a_i и полиномов $\phi_i(x)$:

$$\sum_{i=1}^n \left[\phi_i(z_j) - \frac{1}{b + d'w(z_j)} \int_{-\infty}^{\infty} bm(y - z_j) \phi_i(y) dy \right] a_i = \frac{bm(z_j)}{b + d'w(z_j)} N, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.1.3)$$

Замечание Будем считать, что точки коллокации z_j и ортогональные функции $\phi_i(x)$ таковы, что матрица $n \times n$ $\|\phi_i(z_j)\|$ обратима.

Для правильной аппроксимации в бесконечности мы используем такую приближенную форму:

$$\tilde{C}(x) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-|x|} L_i(|x|) \quad (4.1.4)$$

где $L_i(\tau)$ -ортогональные полиномы Лагерра.

Полином Лагерра является стандартным решением уравнения Лагерра. Ниже приводится уравнение Лагерра:

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 \quad (4.1.5)$$

Когда n является целым числом, решение уравнения выражается в виде следующего многочлена:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (4.1.6)$$

С помощью языка программирования python и его библиотеки функций numpy, scipy и matplotlib, в конце мы получим результат коэффициентов a_i , полиномов $L_i(\tau)$, функции $C(x)$ в форме вектора.

Для случая рационального ядра мы выберем 50 точек сетки и получаем графику численного решения и его относительной ошибки.

Для случая экспоненциального ядра мы выберем 50 точек сетки и получаем графику численного решения и его относительной ошибки.

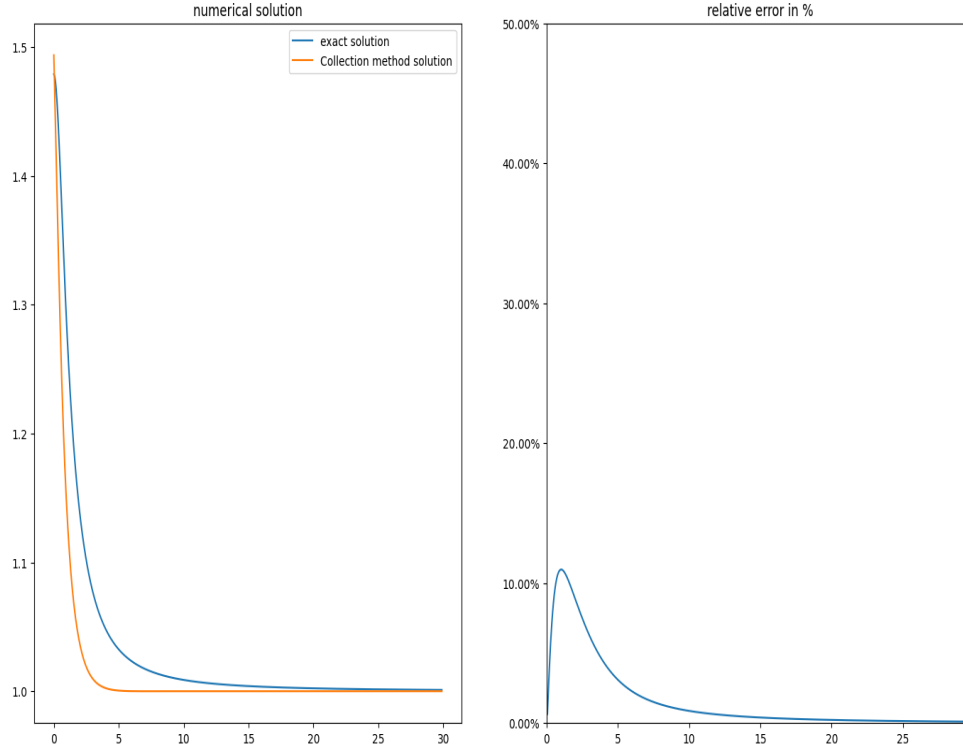


Рис. 3: График численного решения для рационального ядра (3.1.1) с помощью метода коллокации

Для различных численных методов, чтобы визуальнo сравнить аналитические решения и численные решения, мы представим численные решения в виде массивов (векторов) и покажем их на изображениях функций. Кроме того, чтобы разумно количественно оценить разрыв между аналитическим решением и численным решением, для каждой точки x мы вводим формулу "относительной ошибки" $E(x)$:

$$E(x) = \frac{C_1(x) - \tilde{C}(x)}{C_1(x)} \cdot 100\% \quad (4.1.7)$$

4.2 Метод ряда Неймана

4.2.1 Анализ метода ряда Неймана

Этот метод требует некоторой предварительной аналитической работы, результаты которых были взяты из работы А.А.Никитина. Давайте рассмотрим

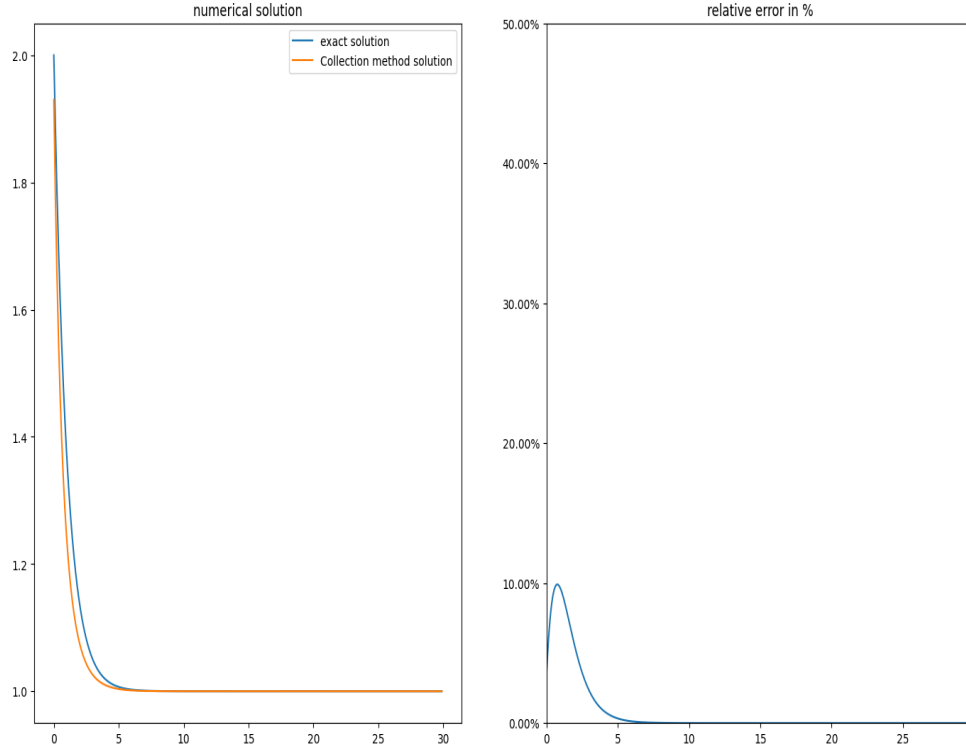


Рис. 4: График численного решения для экспоненциального ядра (3.2.1) с помощью метода коллокации

уравнение-близнец. Разделив обе части уравнения на уравнение $b + sw(x)$ одновременно, мы можем получить уравнение о $C(x)$:

$$C(x) = \frac{b}{b + d'w(x)} \int_{-\infty}^{\infty} m(y)C(x + y)dy + Nf(x) \quad (4.2.1)$$

где

$$f(x) = \frac{bm(x)}{b + d'w(x)} \quad (4.2.2)$$

Мы можем определить несколько интегральный оператор, который называется K :

$$K(C)(x) = \frac{b}{b + d'w(x)} \int_{-\infty}^{\infty} m(y)C(x + y)dy \quad (4.2.3)$$

С помощью этого оператора, Мы можем изменить уравнение-близнец на форму: $C = K(C) + Nf$

Мы тоже можем определить интегральный оператор $\tilde{K}(C)(x) = K(C) + Nf = C$:

$$\tilde{K}(C)(x) = \frac{b}{b + d'w(x)} \int_{-\infty}^{\infty} m(y)C(x+y)dy + Nf(x) \quad (4.2.4)$$

Сейчас мы можем создать процесс итерации, чтобы получить аппроксимацию решения. Мы выбираем константу 1 в качестве нулевого приближения и применяем к ней оператор К несколько раз. Поэтому мы получим:

$$\tilde{K}^n(1)(x) = N(f(x) + K(f)(x) + K^2(f)(x) + \dots + K^{n-1}(f)(x)) + K^n(1)(x) \quad (4.2.5)$$

Теорема 1 (А. Давыдов) Для любых ограниченных неотрицательных интегрируемых ядер $m(x)$ и $w(x)$ последовательность приближений $\sum_{i=0}^n K^i f + K^{n+1}$ сходится к непрерывной ограниченной функции, если существует положительное M , что $0 \leq f(x) \leq M \cdot h(x)$, где $h(x) = 1 - \frac{b}{b+sw(x)}$.

Замечание $0 \leq f(x) \leq M \cdot h(x)$, это значит, что функция $\frac{m(x)}{h(x)}$ ограничена.

Доказательство.

Следующую формулу можно легко доказать:

$$K^n(1)(x) = 1 - (h(x) + K(h)(x) + \dots + K^{n-1}(h)(x)) \quad (4.2.6)$$

Эта последовательность функций монотонна и не увеличивается. Она ограничена снизу с границы 0, потому что линейность неотрицательных ограниченных функций инвариантна относительно оператора К. Следовательно, она сходится к некоторой неотрицательной ограниченной функции $1 - H(x)$.

Из сходимости ряда $H(x) = h(x) + K(h)(x) + \dots + K^n(h)(x) + \dots$ и неравенства $0 \leq f(x) \leq M \cdot h(x)$ можно доказать сходимость ряда $F(x) = f(x) + K(f)(x) + K^2(f)(x) + \dots + K^n(f)(x) + \dots$ с помощью теоремы Вейерштрасса.

Из формул (4.2.5) и (4.2.6) следует, что последовательность $\tilde{K}^n(1)(x)$ сходится к функции $1 + NF(x) - H(x)$. Мы можем изменить интеграцию и лимит. Таким образом, предельные функции должны удовлетворять уравнению.

$$F(x) = K(F)(x) + f(x) \text{ and } 1 - H(x) = K(1 - H)(x) \quad (4.2.7)$$

Мы можем обозначить эту функцию в форме с оператора K :

$$\begin{aligned} 1 + NF(x) - H(x) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} K^n(f(x)N - h(x)) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} K^n \left(\frac{bm(x)}{b + d'w(x)}N - 1 - \frac{b}{b + d'w(x)} \right) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Пусть есть функция

$$g(x) = \frac{bm(x)}{b + d'w(x)}N - 1 - \frac{b}{b + d'w(x)} \quad (4.2.9)$$

Мы можем получить вывод, что функция $\tilde{C}(x) = C(x) - 1$ сходится к ряду функции $\sum_{n=0}^{\infty} K^n(g)(x)$.

Теперь мы готовы применить эту теорему для построения итерационного метода для интегрального уравнения.

4.2.2 Реализация метода ряда Неймана

Следующая задача - представить предыдущую формулу(4.2.8) с помощью программы. Из уравнения(2.3) имеем, что $g(x)$ на бесконечности стремится к 0. Это значит интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(x-y)}{b+sw(x)}g(y)dy$ будет близок к интегралу $\int_{-A}^A \frac{m(x-y)}{b+sw(x)}g(y)dy$ при достаточно большом A .

В данной работе мы воспользуемся способом, который использовать узлов в сетке и провести итераций. Мы можем заменить, что численное интегрирование обычно представляет собой замену:

$$\int_{-A}^A K(x, y)g(y)dy = \sum_{j=1}^N w_j K(x, t_j) g(t_j) \quad (4.2.10)$$

где w_j - некоторые веса(не обязательно длины отрезков), t_j - точки сетки, $K(x, y) = \frac{bm(x-y)}{b+sw(x)}$.

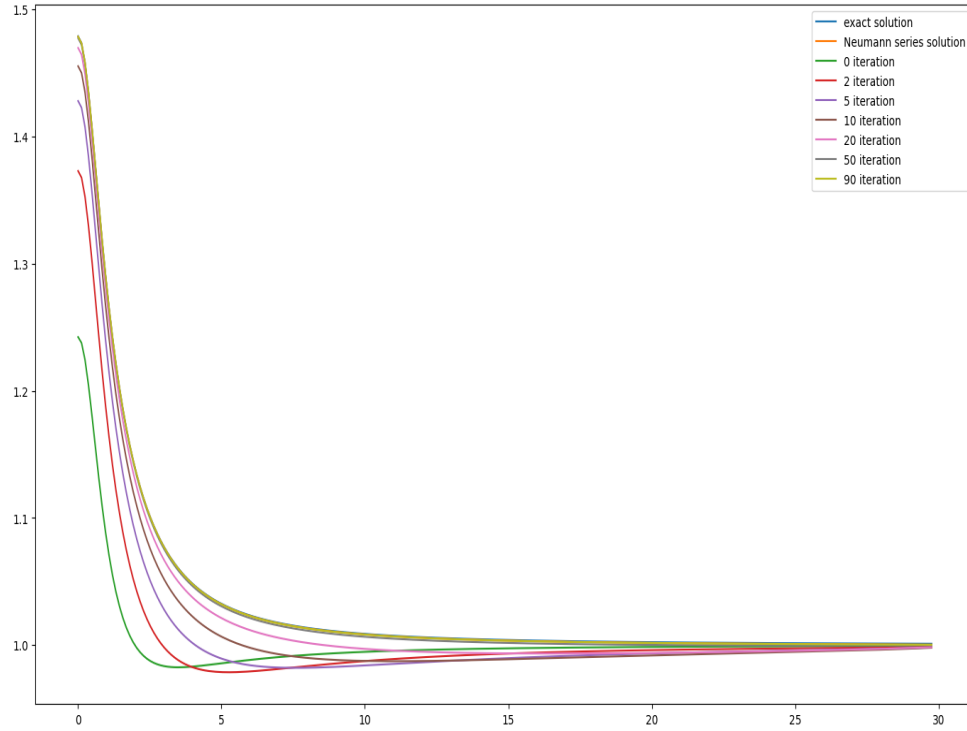


Рис. 5: График сравнения разных итераций в процесса для рационального ядра (3.1.1) с помощью метода ряда Неймана

Если мы только хотим значения искомой функции, мы можем получить систему линейных уравнений вида:

$$C(x_i) = 1 + \sum_{j=1}^N w_j K(x_i, x_j) g(x_j) \quad (4.2.11)$$

Мы можем вычислить вектор $\vec{g}_i = g(x_i)$ и матрицу $\vec{K}_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$. Поэтому с помощью метода ряда Неймана, мы можем выразить вектор \vec{C}_i в виде $\vec{C}_i = 1 + \sum_{i=0}^n \vec{K}_{ij} \vec{g}$.

Данный подход даёт хорошие результаты. Границы округления интеграла - $[-30, 30]$, число точек на сетке - 500, число итераций метода Неймана - 100.

Чтобы визуальнo увидеть процесс итерации, мы можем использовать (Рис.5), чтобы увидеть изменение значения C в случае разных итераций.

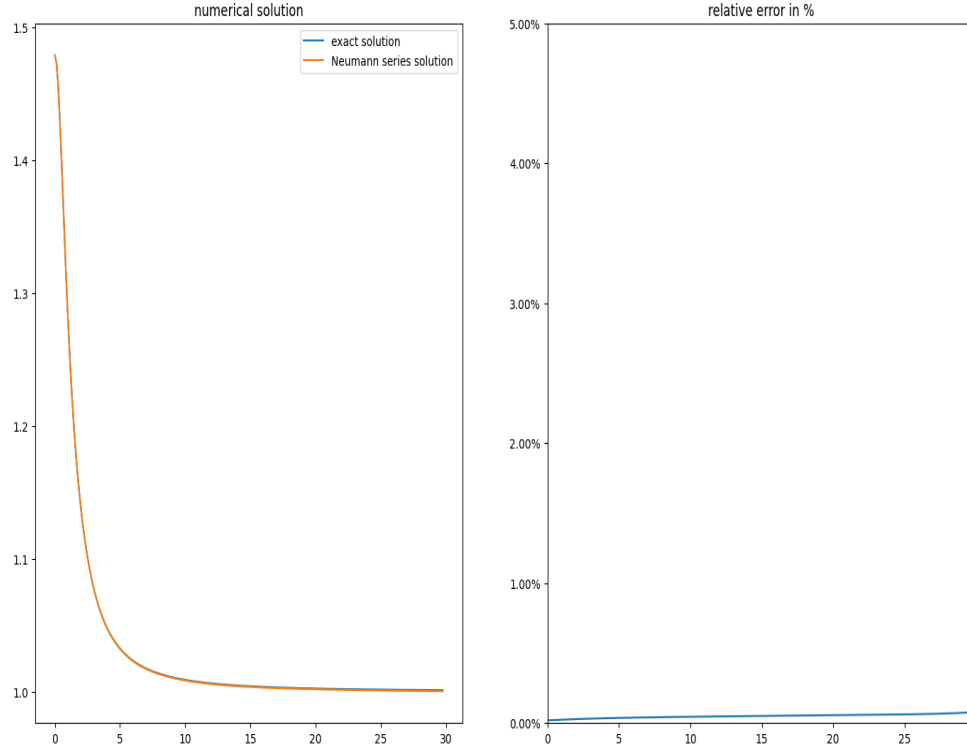


Рис. 6: График численного решения для рационального ядра (3.1.1) с помощью метода ряда Неймана

Теперь рассмотрим графику численного и аналитического решения для рационального ядра (3.1.1)(Рис.1) и экспоненциального ядра(3.2.1)(Рис.2) с помощью метода ряда Неймана.С помощью формулы относительной ошибки (4.1.7) можем получить относительную ошибку для метода ряда Неймана.

4.3 Метод Нистрёма

Из аналитического и реализованного процесса метода ряда Неймана,мы можем доказать,что решение уравнения-близнеца сходится к функции:

$$1 + NF(x) - H(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} K^n(f(x)N - h(x)) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} K^n \left(\frac{bm(x)}{b + d'w(x)}N - 1 - \frac{b}{b + d'w(x)} \right) \quad (4.3.1)$$

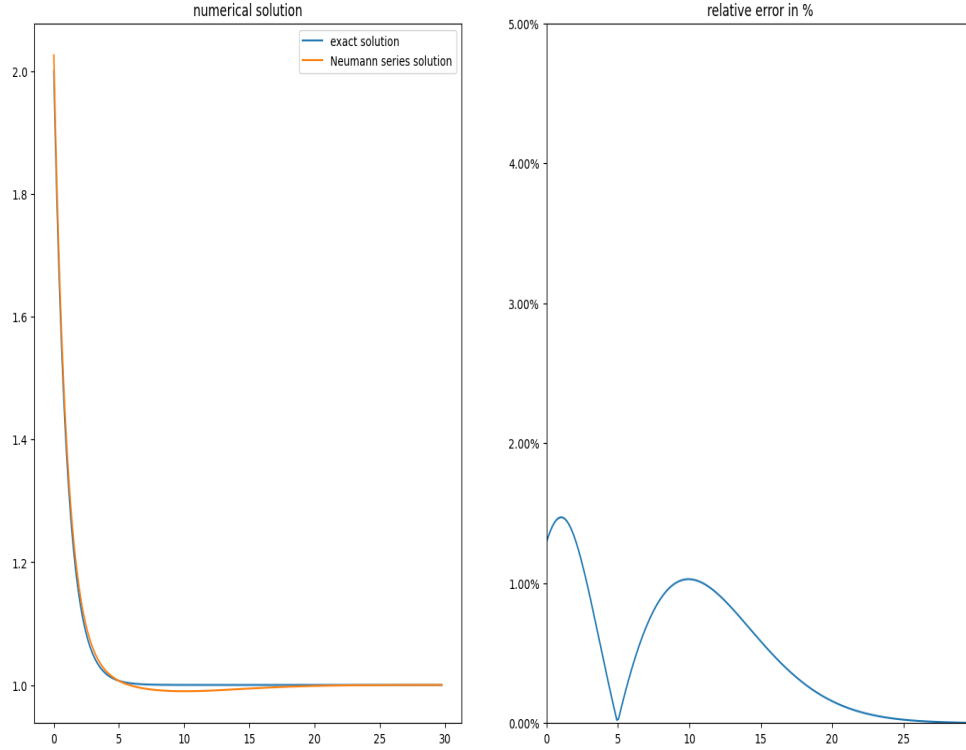


Рис. 7: График численного решения для экспоненциального ядра (3.2.1) с помощью метода ряда Неймана

А функция

$$g(x) = \frac{bm(x)}{b + d'w(x)} N - 1 - \frac{b}{b + d'w(x)} \quad (4.3.2)$$

Это значит, что решение $C(x)$ удовлетворяет равенству:

$$C(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} K^n(g)(x) \quad (4.3.3)$$

С помощью обозначения векторов и матрицы мы можем получить систему линейных уравнений вида:

$$C(x_i) = 1 + \sum_{j=1}^N w_j K(x_i, x_j) g(x_j) \quad (4.3.4)$$

Пусть $K_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$, и $c(x_i) = C(x_i) - 1$, мы можем получить уравнение вектора, что:

$$c = \sum_{n=0}^N K_{ij} \cdot g = g + K_{ij} \cdot g + K_{ij}^2 \cdot g + \dots \quad (4.3.5)$$

Поэтому связь между векторами c и g получается:

$$c = (I + K_{ij} + K_{ij}^2 + \dots)g \quad (4.3.6)$$

А матрица $(I + K_{ij} + K_{ij}^2 + \dots)$ удовлетворяет равенство:

$$(I + K_{ij} + K_{ij}^2 + \dots)(I - K_{ij}) = (I - K_{ij}^n) \quad (4.3.7)$$

В случае бесконечности для числа n , матрица K_{ij}^n сходится к нулевой матрице, поэтому мы можем получить более простое векторное уравнение, чем метод ряда Неймана:

$$c = (I - K_{ij})^{-1} \cdot g \quad (4.3.8)$$

Теперь рассмотрим графику численного и аналитического решения для рационального ядра (3.1.1)(Рис.1) и экспоненциального ядра(3.2.1)(Рис.2) с помощью метода Нистрема. С помощью формулы относительной ошибки (4.1.7) можем получить относительную ошибку для метода Нистрема.

Благодаря упрощению итерационного процесса мы можем увеличить количество точек сетки. Из 500 точек для метода ряда Неймана до 5000 точек для метода Нистрема.

5 Сравнение и недостатки численных методов

5.1 Сравнение относительной ошибки

Для метода коллокации относительная ошибка достигла 10%.

Для метода ряда Неймана относительная ошибка рационального ядра очень мала, но относительная погрешность экспоненциального ядра составляет около 1%.

Для метода Нистрема относительная ошибка рационального ядра и экспоненциального ядра составляет около 0,1%.

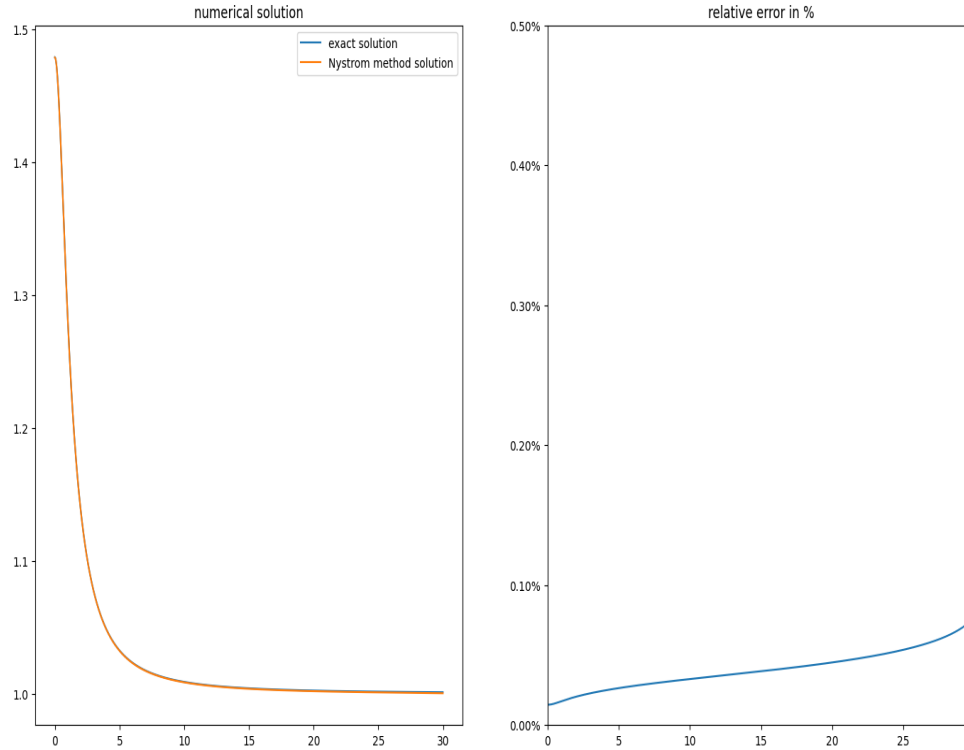


Рис. 8: График численного решения для рационального ядра (3.1.1) с помощью метода Нистрома

Поэтому мы можем получить вывод-для точности численных решений метод Нистрома является лучшим методом.

5.2 Сравнение временная сложность

Для метода коллокации время выполнения зависит от количества выбранных точек z_j - n . Величина n определяет количество уравнений в системе линейных уравнений, то есть размерность матрицы в векторном уравнении. Кроме того, количество выбранных точек z_j также влияет на сложность полинома.

Для метода ряда Неймана время выполнения зависит от количества точек сетки- n и количества итераций.

Для метода Нистрома время выполнения зависит только от количества точек сетки- n . Благодаря уменьшению временной сложности по сравнению с методом ряда Неймана, метод Нистрома позволяет выбирать больше точек.

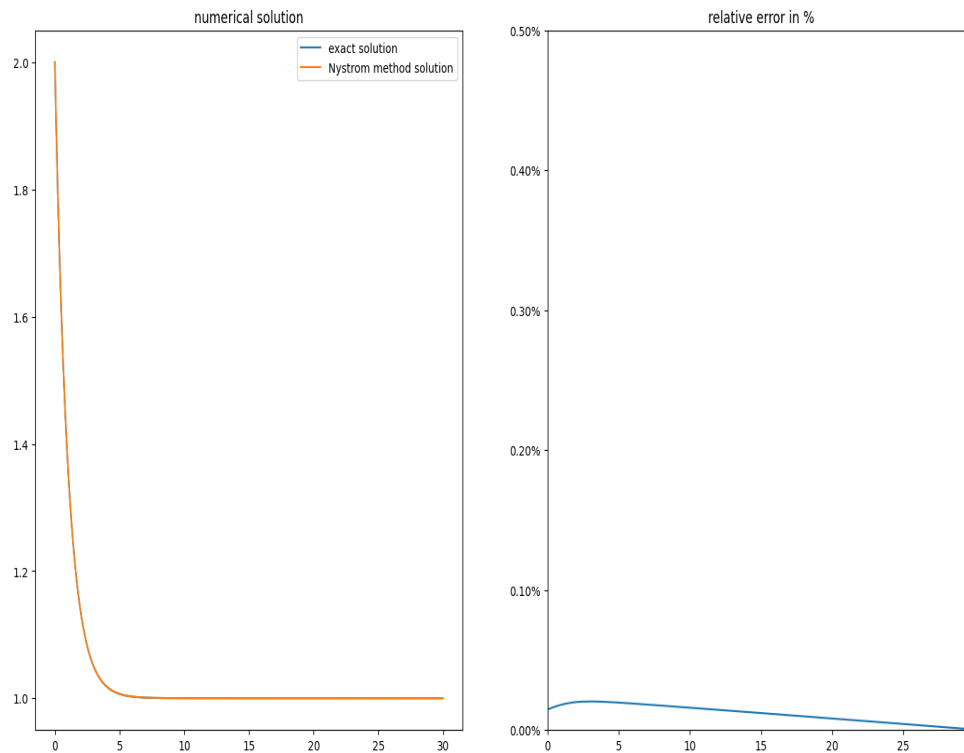


Рис. 9: График численного решения для экспоненциального ядра (3.2.1) с помощью метода Нистрема

5.3 Недостатки

1. Для метода коллокации, когда выбранная точка не подходит, мы не можем получить соответствующее численное решение.

2. Для метода ряда Неймана количество итераций ограничивает количество точек сетки. Эта проблема может быть решена методом Якоби.

3. На основе приведенного выше анализа мы можем сказать, что метод Нистрома является лучшим численным методом для решения уравнения-близнеца. Но для других моделей нам необходимо повторно проанализировать осуществимость этого метода.

6 Заключение

Подводя итог всему вышенаписанному.

В этой работе, посредством серии вычислительных экспериментов, мы выражаем динамическую модель в совокупности через интегральное уравнение (уравнение-близнец) и пытаемся получить численное решение уравнения-близнец, и анализируем точность численного решения относительно аналитического решения через относительную ошибку. В процессе анализа мы использовали соответствующие математические знания, такие как математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей, функциональный анализ и численные методы. Благодаря этой работе мы узнали о возможности построения моделей и решения проблем в реальных биологических динамических моделях. Основываясь на этой модели, мы можем в дальнейшем анализировать более сложные проблемы, такие как модель , в которой сосуществует популяции растений.

Список литературы

- [1] *Nikitin A. YSSP annual report (2007)*
- [2] *H. Bateman and A Erdelyi, Higher transcendental functions, Volume 2, (1953)*
- [3] *L. M. Delves and J. Walsh, Numerical solution of Integral equations. Clarendon Press - Oxford (1974)*
- [4] *A. Davydov, "On the solvability of the "EEP"integral equation"*
- [5] *Ted J. Case, An Illustrated Guide to Theoretical Ecology, New York Oxford Oxford University Press, 2000*
- [6] *Dieckmann U and Law R (2000). Relaxation projections and the method of moments. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity, eds. Dieckmann U, Law R and Metz JAJ, pp. 412-455. Cambridge University Press*
- [7] *Bolker B and Pacala S (1997). Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems. Theoretical Population Biology 52*
- [8] *Murrell D, Dieckmann U and Law R (2004). On moment closures for population dynamics in continuous space. Journal of Theoretical Biology 229: 421-432*