Ejercicios de raíces por el método de Newton-Raphson

Stefania García, Santiago Torres, Esteban Villa, Julian Tarazona

5 de septiembre de 2020

Este documento tiene como fin resolver y analizar los ejercicios de raíces por el método de Newton-Raphson a través de la herramienta Phyton y graficados por la herramienta Spyder

El método de Newton Raphson es un procedimiento algorítmico que permite hallar raíces de funciones, conocido un valor numérico cercano a la raíz. Es un método abierto e iterativo, en general de rápida convergencia, muy útil para el cálculo de raíces cuadradas y de mayor grado, aunque para algunos casos el método presenta inconvenientes, por ejemplo si existen raíces múltiples, en este caso se tendría que aplicar diferentes soluciones para así lograr encontrar la raíz sin abandonar el método.

Las funciones a las cuales se les debe hallar las raíces son:

$f(x) = cos^2(2x) - x^2$
$f(x) = xsin(x) - 1[-1, 2]$
$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

SOLUCIÓN DE PREGUNTAS:

1. ¿Cuáles son condiciones para aplicar el método?

Respuesta: Es necesario que la función sea derivable. Si la raíz es múltiple, el método no se puede aplicar,pues su derivada sería nula. Puede sustituirse f(x) por $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, que tiene los mismos ceros de f(x) pero todos simples.

Para poder garantizar la convergencia se requiere algún conocimiento extra de la primera y segunda derivadas.

En particular, si $f'(x)$ y $f''(x)$ no se invalidan y mantienen el signo en [a, b] y $f(x_0)\Delta f''(x_0) > 0$, con x_0 y la raíz pertenecientes a [a, b], el método converge.
Si no se cumplen estas condiciones, el proceso probablemente sea divergente.

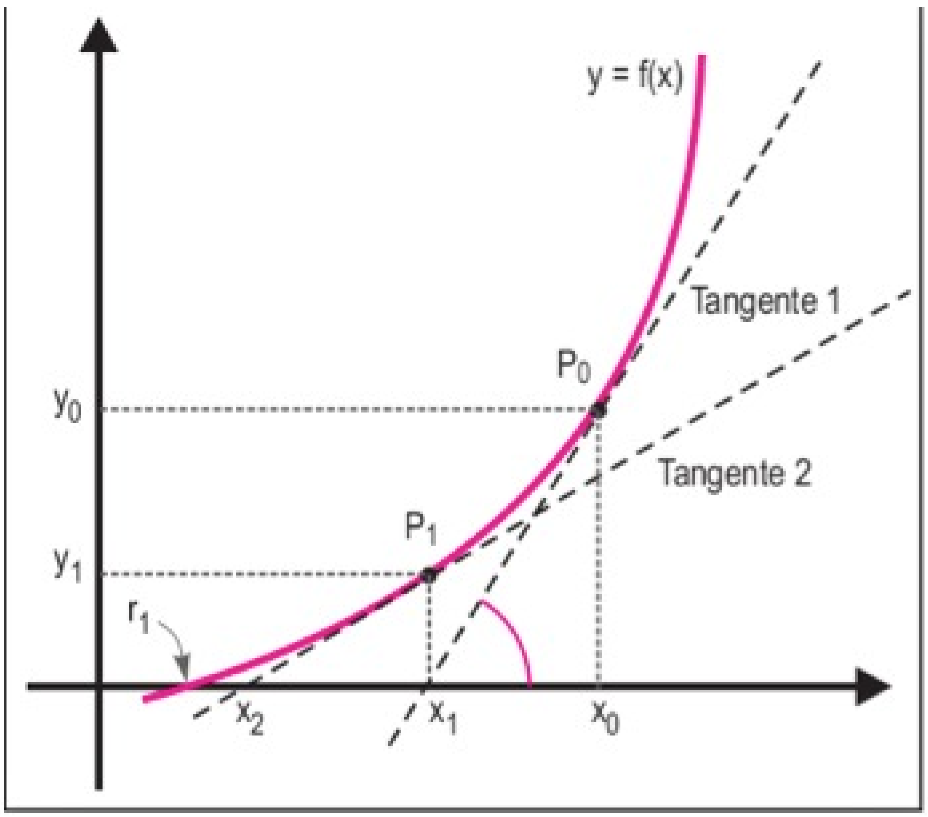
2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo

Respuesta: La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(p_n, f(p_n)$ viene dado por:
$y - f(p_n) = f'(p_n)(x - p_n)$

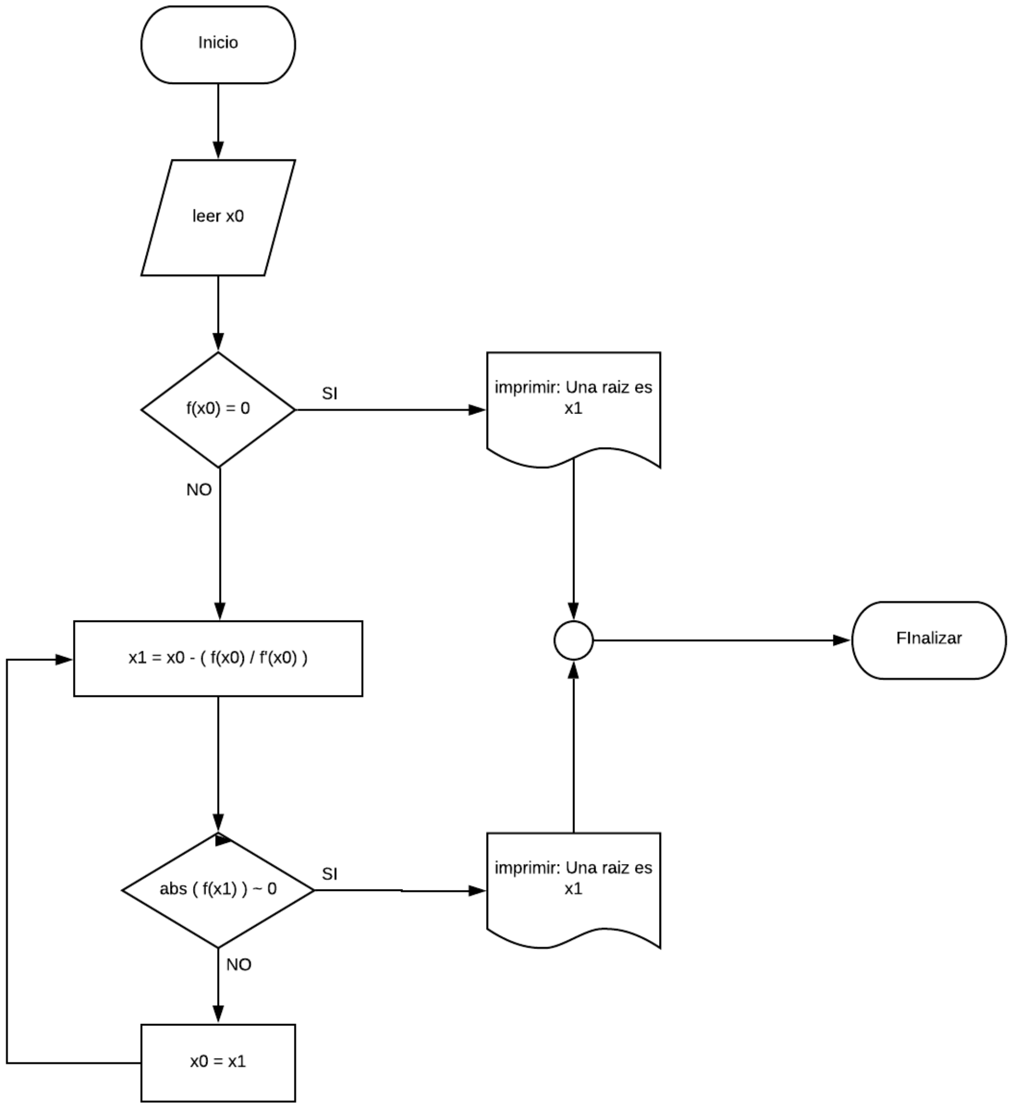
Si hacemos $y = 0$, $x = p_{n+1}$,obtenemos:

$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}}{f'(p_{n-1}}$

Para tener en cuenta: El método de Newton converge siempre que tomemos un p_0 muy cercano al valor de la raíz.



3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo.



4. Cuáles son las raíces. Valide su resultado.

- Para la función $f(x) = cos^2(2x) - x^2$:

Resultado método Newton-Raphson:

- Raiz: 0.5198385291729037

- Número de iteraciones: 16

Resultado por Geogebra:

- Raiz: 0.514933018868

- Para la función $f(x) = xsin(x) - 1$ en $[-1, 2]$

Resultado método Newton-Raphson:

- Raiz: 1.1141571408719302

- Número de iteraciones: 4

Resultado por Geogebra:

- Raiz: 1.1141571459607

- Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

Resultado método Newton-Raphson:

- Raiz: 0.666662458056358

- Número de iteraciones: 8

Resultado por Geogebra:

- Raiz: 0.6666702540581

5. Cómo se comporta el método en cuánto: pérdida de significancia, número de iteraciones, la convergencia en cada caso.

- Para la función $f(x) = cos^2(2x) - x^2$:

- En esta función la pérdida de significancia fue de $4{,}905510304903715e - 3$ esto es debido a que en el metodo de Newton-Raphson da como resultado una raiz muy por encima de la esperada y no es lo suficientemente preciso como se desearía.

- El número de iteraciones fue 16, se utilizó este número de iteraciones porque al aumentar su número de iteraciones el resultado era más distante del valor real, por lo que se optó por escoger el número de iteraciones que dio el valor más cercano a la raíz verdadera.

- Como a medida que las iteraciones crecen, el valor se va distanciando más de la raíz esperada y ademas las graficas de geogebra (verde) y python (rojo) muestran un distanciamiento evidente, basandose en la siguiente inducción matematica:

$$f(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n} \; f'(s) \neq 0 \; x_n converge$$

$$\lim_{x\to\infty} x_n = s$$

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x_n - \lim_{x\to\infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n}$$

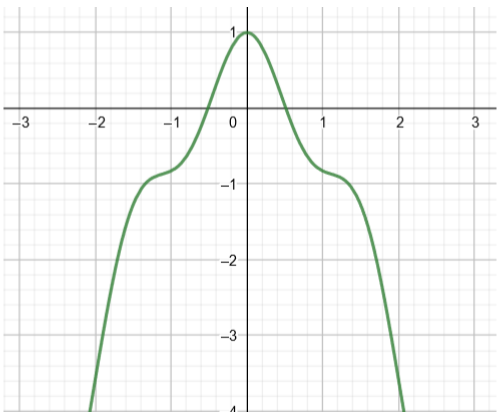
$$s = s - \frac{\lim_{x\to\infty} f(x_n)}{\lim_{x\to\infty} f'(x_n)}$$

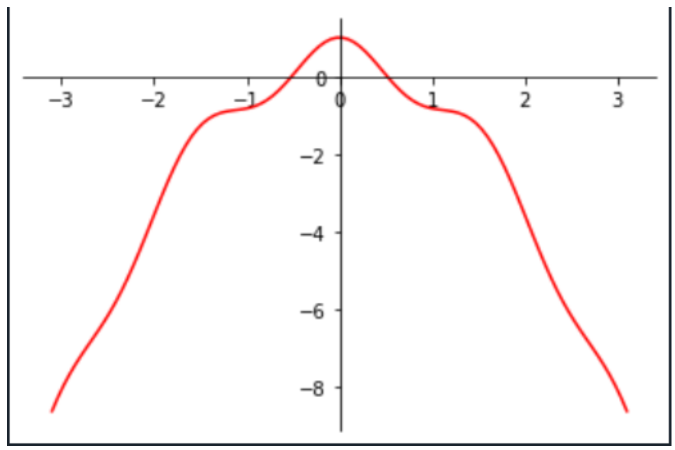
$$0 = \frac{f(\lim_{x\to\infty} x_n)}{f'(\lim_{x\to\infty} x_n)}$$

$$0 = \frac{f(s)}{f'(s)}$$

$f(s) = 0$

Se puede concluir que por medio del metodo de Newton-Raphson la solucion diverge del valor real.



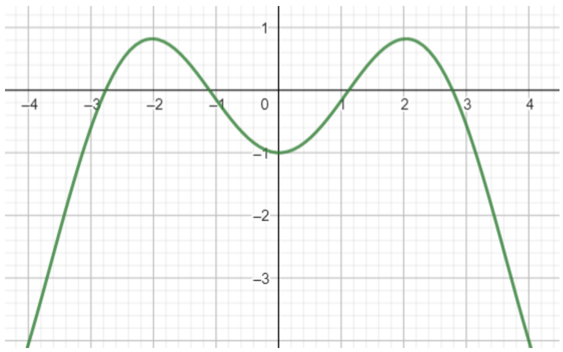


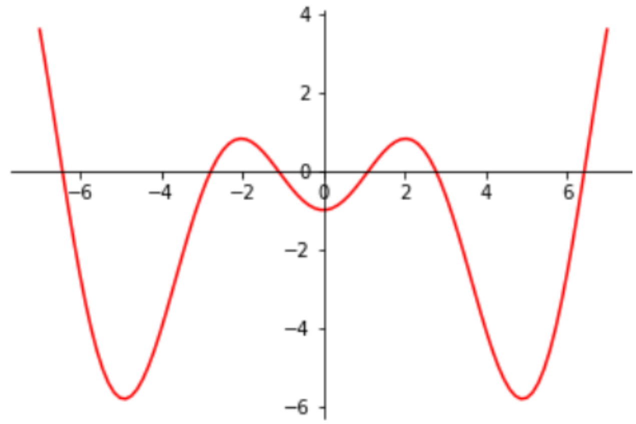
- Para la función $f(x) = xsin(x) - 1$ en $[-1, 2]$

-En esta funcion la perdida de significancia fue de 5,088769849947994$e^{-}09$ por lo que se puede decir que la perdida de significancia es pequeña entre el metodo y el valor real.

- El número de iteraciones fue 4, se necesitaron muy pocas iteraciones debido a que el valor inicial que se proporciono para esta función era muy cercano al valor de la raíz.

- Como a medida que las iteraciones crecen, el valor se va acercando más a la raíz esperada y ademas las graficas de geogebra (verde) y python (rojo) muestran un acercamiento evidente basandose en la anterior inducción matematica, se puede concluir a través del metodo de Newton-Raphson que la solucion converge al valor real.



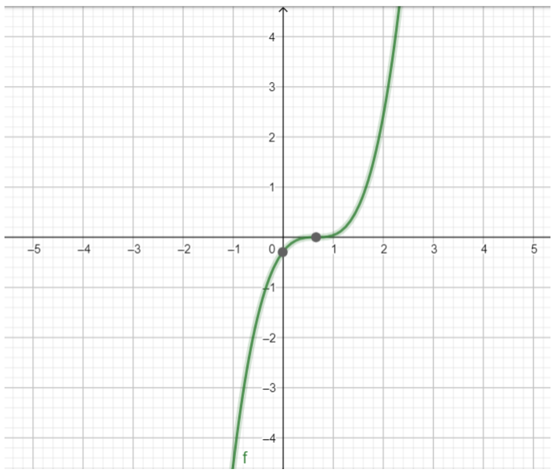


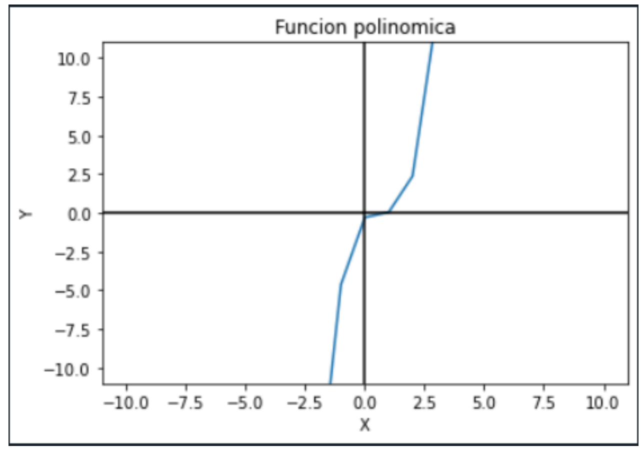
- Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

-En esta funcion la perdida de significancia fue de 7,796001742e^{-}6 por lo que se puede decir que la perdida de significancia es pequeña entre el metodo y el valor real.

- El número de iteraciones fue 8, se necesitaron muy pocas iteraciones debido a que el valor inicial que se proporciono para esta función era muy cercano al valor de la raíz.

- Como a medida que las iteraciones crecen, el valor se va acercando más a la raíz esperada y ademas las graficas de geogebra (verde) y python (azúl) muestran un acercamiento evidente basandose en la anterior inducción matematica, se puede concluir a través del metodo de Newton-Raphson que la solucion converge al valor real.





6. ¿Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o está destinado al fracaso?

Usualmente se presenta una párdida de significancia cuando se realizan operaciones aritméticas con números que contienen errores. En este caso cuando usamos metodos numéricos para aproximar los valores de la distintas raices halladas en los sistemas computacionales, tienen una limitación la cual es el épsilon de la maquina que definimos como: El épsilon es el número decimal más pequeño que, sumado a 1, la computadora nos arroja un valor diferente de 1, es decir, que no es redondeado, representa la exactitud relativa de la aritmética del computador. La existencia del épsilon de la máquina es una consecuencia de la precisión finita de la aritmética en coma flotante.

Teniendo en cuenta esta logica para hallar el épsilon de la máquina con python realizamos el siguiente procedimiento para saber cual seria el mínimo valor flotante aceptado por nuestra máquina.
Proceso:

```python
import sys
sys.float_info.epsilon

eps = 1.0
while eps + 1 > 1:
    eps /= 2
eps *= 2
print("The machine precision is:", eps)
```

```
The machine precision is: 2.220446049250313e-16
```

7. ¿Qué pasa con el método cuándo hay más de dos raíces? Explique su respuesta

Las raíces múltiples ofrecen algunas dificultades al método, el problema radica en el hecho de que no sólo f(x), sino f'(x) se aproxima a cero en la raíz. Estos problemas afectan por que de acuerdo con la fórmula del método la derivada se encuentra en el denominador, provocando una división entre cero cuando la solución converge muy cerca de la raíz. Para evitar este problema se demuestra teóricamente en que f(x) siempre alcanzará un valor cero antes que f'(x). Al comparar f(x) contra cero, entonces los cálculos se pueden terminar antes de que f'(x) llegue a cero.

Para solucionar este problema se utiliza:

$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i}{f'(x_i}$

Donde m es la multiplicidad de la raíz. Se trata de una alternativa que depende de la multiplicidad de la raíz por lo que no es tan satisfactoria.

8. ¿Qué pasa con el método cuándo la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Cuando la funcion es periodica pueden ocurrir varios errores. En caso de tomar un punto de inflexion f'(x) = 0 la pendiente en ese punto va a ser paralela al eje x.Esto provocaría que el metodo hiciera una división entre 0, lo cual ocasiona que la solución se dispare horizontalmente y jamas toque al eje x.

Otro inconveniente es el salto de raices, ocurre cuando la pendiente de un punto es muy cercana a un punto de inflexión,lo que causa que al entrar en contaco con el eje X, el valor de Xn+1 se aleje de la raiz mas cercana a Xn.

Un inconveniente que puede ocurrir con las funciones es que el método tiende a oscilar alrededor de un minimo o un maximo local.

9. Realice una gráfica que muestre la relación entre E_{i+1} y E_i, ¿qué representa esa gráfica? y encuentre una relación de la forma $E_{i+1} = f(E_i)$

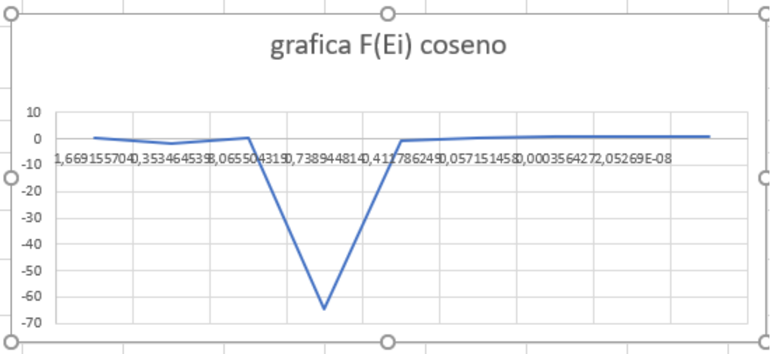
Cuando el método de Newton-Raphson converge, se obtienen resultados en relativamente pocas interacciones, ya que para raíces no repetidas este método converge con orden 2 y el error E_{i+1} es proporcional al cuadrado del resultado anterior E_i.

- Para la función $f(x) = cos^2(2x) - x^2$

X(i)	X(i+1)
1,6	1,144607421
1,144607421	-1,710524790
-1,710524790	-1,263812048
-1,263812048	0,178870749
0,178870749	0,685183662
0,685183662	0,485331021
0,485331021	0,514749718
0,514749718	0,514933254
0,514933254	0,514933265
0,514933265	

Relacion de $E_{i+1} = f(E_i)$:

error	F(error)
0,397859189	0,331388585
1,669155704	-1,82428242
0,353464539	0,453210191
8,065504319	-64,2209024
0,738944814	-0,53743259
0,411786249	0,292294826
0,057151458	0,983725354
0,000356427	0,999999365
2,05269E-08	1

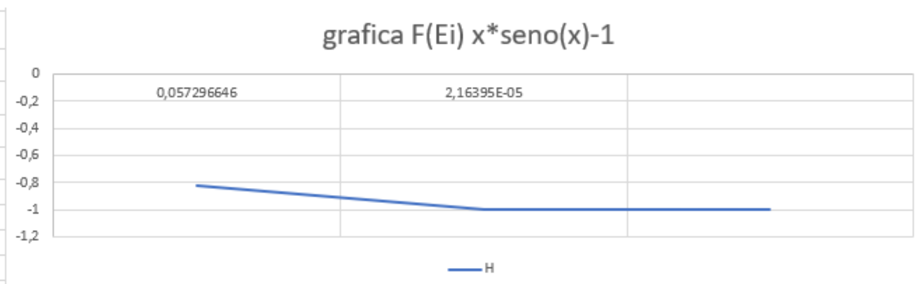


- Para la función $f(x) = xsin(x) - 1$ en $[-1, 2]$

x(i)	x(i+1)
1,5	1,050342
1,050342	1,114181
1,114181	1,114157
1,114157	

Relacion de $E_{i+1} = f(E_i)$:

Error	F(error)
0,428105727	-0,82227267
0,057296646	-0,99671889
2,16395E-05	-1

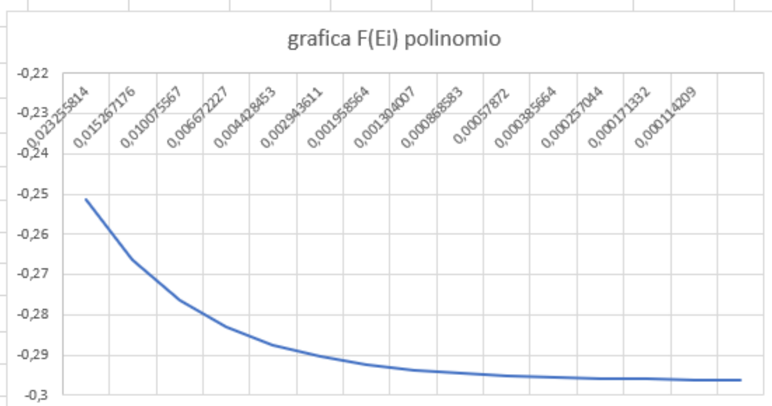


- Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

X(i)	X(i+1)
0.6	0,622222222
0,622222222	0,637037037
0,637037037	0,64691358
0,64691358	0,653497942
0,653497942	0,657887517
0,657887517	0,6608139
0,6608139	0,662764822
0,662764822	0,664065437
0,664065437	0,664932514
0,664932514	0,665510565
0,665510565	0,665895932
0,665895932	0,666152844
0,666152844	0,666324118
0,666324118	0,6664383
0,6664383	0,666514423
0,666514423	

Relacion de $E_{i+1} = f(E_i)$:

error	f(error)
0,035714286	-0,25118272
0,023255814	-0,26635763
0,015267176	-0,27640268
0,010075567	-0,28306422
0,006672227	-0,28748873
0,004428453	-0,29043083
0,002943611	-0,29238879
0,001958564	-0,29369254
0,001304007	-0,29456102
0,000868583	-0,29513969
0,00057872	-0,29552534
0,000385664	-0,29578237
0,000257044	-0,2959537
0,000171332	-0,29606791
0,000114209	-0,29614404

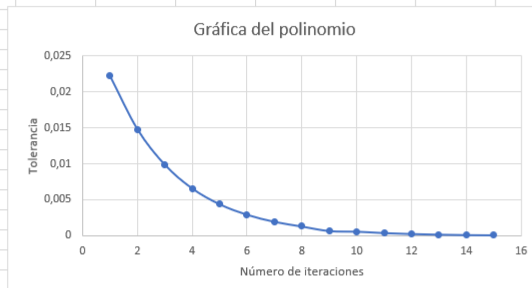


10. Realice una gráfica que explique como se comporta el método en cada

caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

- Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

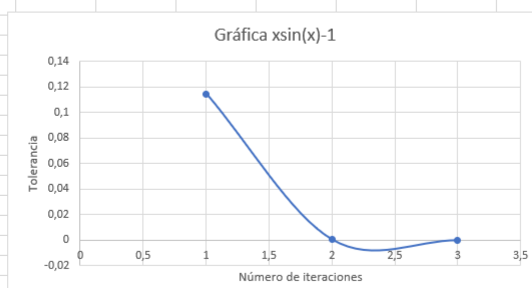
Paso	x	f(x)	[x(i)-x(i+1)]
x1	1	-0,00009	0,02222
x2	2	-0,00003	0,01481
x3	3	-1,00000E-05	9,88E-03
x4	4	0,00000	0,00658
x5	5	0,00000	0,00439
x6	6	0,00000	0,00293
x7	7	0,00000	0,00195
x8	8	0,00000	0,0013
x9	9	0,00000	0,00067
x10	10	0,00000	0,00059
x11	11	0,00000	0,00039
x12	12	0,00000	0,00026
x13	13	0,00000	0,00017
x14	14	0,00000	0,00011
x15	15	0,00000	0,00008



Error global: 0.103995257

- Para la función $f(x) = xsin(x) - 1$ en $[-1, 2]$

Paso	x	f(x)	[x(i)-x(i+1)]
x1	1	0,00079372895	0,114728672
x2	2	-1,949E-08	0,000571546
x3	3	0,00000E+00	1,40E-06



Error global: 0.485424013

- Para la función $f(x) = cos^2(2x) - x^2$

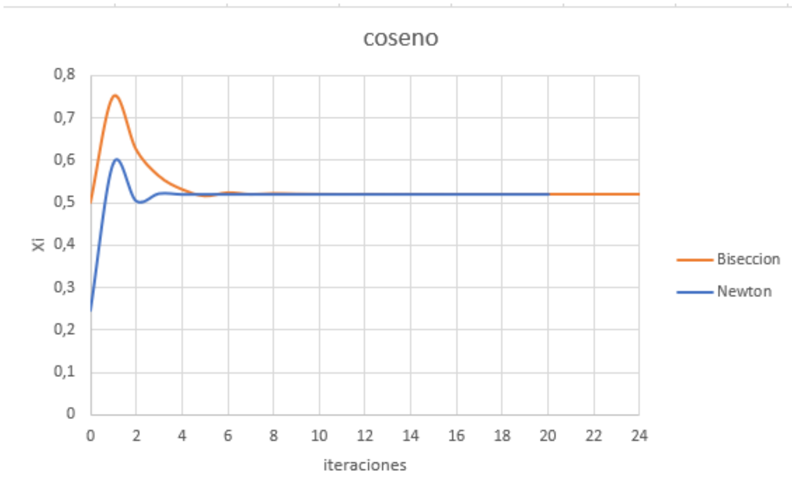
Paso	x	f(x)	[x(i)-x(i+1)]
x1	1,6		
x2	1,144607421	0,87690565	0,45539258
x3	-1,71052479	-2,001979E+00	2,86E+00
x4	-1,263812048	-0,929130262	0,446712743
x5	0,178870749	0,845393502	1,442682796
x6	0,685183662	-0,429839917	0,506312913
x7	0,485331021	0,083400088	0,199852641
x8	0,514749718	0,0051314	0,029418697
x9	0,514933254	0,00000002954	0,000183536
x10	0,514933265	0,00000	1,06E-08

Error global: 11.69422272

11. Como se comporta el método con respecto al de bisección

- Para la función $f(x) = cos^2(2x) - x^2$

```
-- Metodo de biseccion --
Iteraciones:  48
0.5198385291729029 2.7755575615628914e-15
```



Si se comparan las iteraciones y el resultado del metodo de bisección con las iteraciones y el resultado del metodo de Newton-Raphson se puede concluir que para el mismo resultado el metodo de bisección necesita muchas mas iteraciones en especifico necesita 32 iteraciones más que el metodo de Newton-Raphson por lo que se puede decir, que para esta funcion el metodo de Newton-Raphson es más eficiente.

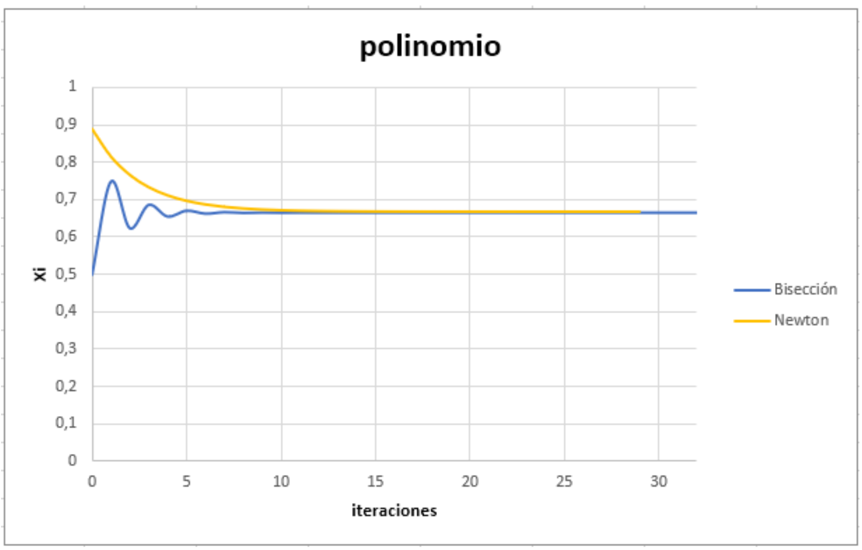
- Para la función $f(x) = xsin(x) - 1$ en $[-1, 2]$

```
-- Metodo de biseccion --
Iteraciones:  54
1.1141571408719302 2.220446049250313e-16
```

Si se comparan nuevamente para esta ocasion las iteraciones y el resultado del metodo de bisección con las iteraciones y el resultado del metodo de Newton-Raphson se puede concluir de nuevo que para el mismo resultado el metodo de bisección necesita muchas más iteraciones en especifico necesita 50 iteraciones más que el metodo de Newton-Raphson por lo que se puede decir, que para esta funcion el metodo de Newton-Raphson también es más eficiente.

- Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$

```
-- Metodo de biseccion --
Iteraciones:  53
0.6666638851711468 -1.1102230246251565e-16
```



En este caso si se comparan las iteraciones y el resultado del metodo de bisección con las iteraciones y el resultado del metodo de Newton-Raphson se puede observar que para obtener un resultado muy similar el metodo de bisección necesita muchas más iteraciones que el metodo de Newton-Raphson en especifico necesita 45 iteraciones más que el metodo de Newton-Raphson por lo que se puede decir, que para esta funcion el metodo de Newton-Raphson también es más eficiente.

En conclusión evaluando las tres funciones con ambos metodos se puede declarar que el metodo de Newton-Raphson es mas eficiente que el metodo de bisección debido a que en las tres funciones ambos metodos llegaban a resultados iguales o muy similares pero el metodo de bisección necesitaba más iteraciones para un resultado muy similar.

Referencias

[1] (2020). Retrieved 2 September 2020, from https://www.studocu.com/co/document/universidad-tecnologica-de-bolivar/calculo-3/resumenes/metodo-de-newton-raphson/2611966/view

[2] (2020). Retrieved 2 September 2020, from https://www.researchgate.net/publication/328571353 $_{M}etodo_{d}e_{N}ewton_{R}aphson$Métodos Numéricos. (2020). Retrieved 2 September 2020,