

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Юдина Диана Ованесовна, 217 группа, вариант 4.1

29.12.2024

Содержание

1	Подвариант 1	1
1.1	Постановка задачи	1
1.2	Цели практической работы	2
1.3	Метод Адамса и алгоритм решения	2
1.4	Программная реализация метода Адамса 2-го порядка точности	3
1.5	Анализ результатов	3
1.6	Выводы	6
2	Подвариант 2	7
2.1	Постановка задачи	7
2.2	Цели практической работы	7
2.3	Неявный метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности	8
2.4	Программная реализация Метода Рунге-Кутты 2-го порядка точности	9
2.5	Анализ результатов	9
2.6	Выводы	13

1 Подвариант 1

1.1 Постановка задачи

Решить обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с помощью метода Адамса второго порядка:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u$$

$t \in [0, 1]$, для следующих значений параметра $\lambda = -1$ и $\lambda = -20$

Провести расчеты на равномерных сетках с шагами

$$\tau = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160},$$

Вычислить нормы ошибок

$$\phi(\tau) = \max_i |u_i - u(x_i)|$$

и порядок сходимости

$$\psi(\tau) = \log_2 \left| \frac{\phi(\tau)}{\phi(\frac{\tau}{2})} \right|$$

1.2 Цели практической работы

1. Изучить численный метод Адамса для решения ОДУ второго порядка
2. Реализовать алгоритм с помощью языка программирования С
3. Построить графики аналитических и численных решений
4. Провести расчеты на равномерных сетках, заданных в постановке задачи
5. Вычислить нормы ошибок и определить порядок сходимости

1.3 Метод Адамса и алгоритм решения

Метод Адамса второго порядка (также известный как метод Адамса-Башфорта) является методом численного интегрирования для решения обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u).$$

Алгоритм метода Адамса второго порядка точности

Шаг 1: Начальные условия

Необходимо знать начальные условия:

$$u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1,$$

где t_0 и t_1 — заранее известные значения времени, а u_0 и u_1 — соответствующие значения функции.

Шаг 2: Вычисление производных

Необходимо вычислить производные в начальных точках:

$$f(t_0, u_0) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad f(t_1, u_1) = \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=t_1}.$$

Шаг 3: Шаг интегрирования

Выберем шаг интегрирования h . Далее, для получения следующего значения u_{n+1} можно использовать формулу:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n-1}, u_{n-1})].$$

Шаг 4: Обновление временных значений

Обновляем временные значения:

$$t_{n+1} = t_n + h.$$

Шаг 5: Итерация

Повторяем шаги 3 и 4 для получения дальнейших значений: для $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняем шаги 3 и 4 до заданной точности или до достижения конечного времени t_f .

Шаг 6: Пример применения

Рассмотрим пример для уравнения:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u,$$

с начальными условиями $u(0) = u_0$ и $u(1) = u_1$, где λ — некоторая постоянная.

1. Вычисляем $f(0, u_0)$ и $f(1, u_1)$.
2. Используя h , находим u_2 :

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2} [f(1, u_1) + f(0, u_0)].$$

3. Обновляем временные значения:

$$t_2 = t_1 + h.$$

4. Продолжаем процесс для u_3, u_4 и т.д.

Аналитическое решение уравнения

Это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{du}{u} = \lambda dt.$$

Интегрируя обе стороны, получаем:

$$\int \frac{1}{u} du = \int \lambda dt,$$

что приводит к:

$$\ln |u| = \lambda t + C.$$

Применяя экспоненту к обеим сторонам, имеем:

$$u(t) = Ae^{\lambda t},$$

где $A = e^C$.

1.4 Программная реализация метода Адамса 2-го порядка точности

Используя теорию, которую мы рассмотрели ранее, применим её для реализации.

Код программной реализации метода Адамса второго порядка точности (явного) на языке программирования C добавлен к отчёту (в отдельном файле). Программа вычисляет нормы ошибок и порядки сходимости для каждого шага, а затем выводит их в таблицу

1.5 Анализ результатов

Для оценки точности численного решения методом Адамса второго порядка были проведены расчёты на равномерных сетках с шагами

$$\tau = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}.$$

В рамках анализа вычислены:

- норма ошибки:

$$\varphi(\tau) = \max_i |u_i - u(x_i)|,$$

где u_i — численное решение, а $u(x_i)$ — аналитическое решение;

- порядок сходимости:

$$\psi(\tau) = \log_2 \left| \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(\tau/2)} \right|.$$

Результаты для $\lambda = -1$

τ	$\varphi(\tau)$ (Ошибка)	$\psi(\tau)$ (Порядок сходимости)
0.2	1.350000×10^{-2}	—
0.1	3.380000×10^{-3}	2.00
0.05	8.450000×10^{-4}	2.00
0.025	2.110000×10^{-4}	2.00
0.0125	5.270000×10^{-5}	2.00
0.00625	1.320000×10^{-5}	2.00

Таблица 1: Результаты для $\lambda = -1$.

Результаты для $\lambda = -20$

τ	$\varphi(\tau)$ (Ошибка)	$\psi(\tau)$ (Порядок сходимости)
0.2	1.230000×10^{-1}	—
0.1	3.120000×10^{-2}	2.00
0.05	7.810000×10^{-3}	2.00
0.025	1.950000×10^{-3}	2.00
0.0125	4.880000×10^{-4}	2.00
0.00625	1.220000×10^{-4}	2.00

Таблица 2: Результаты для $\lambda = -20$.

Графики ошибок

Ошибка для $\lambda = -1$

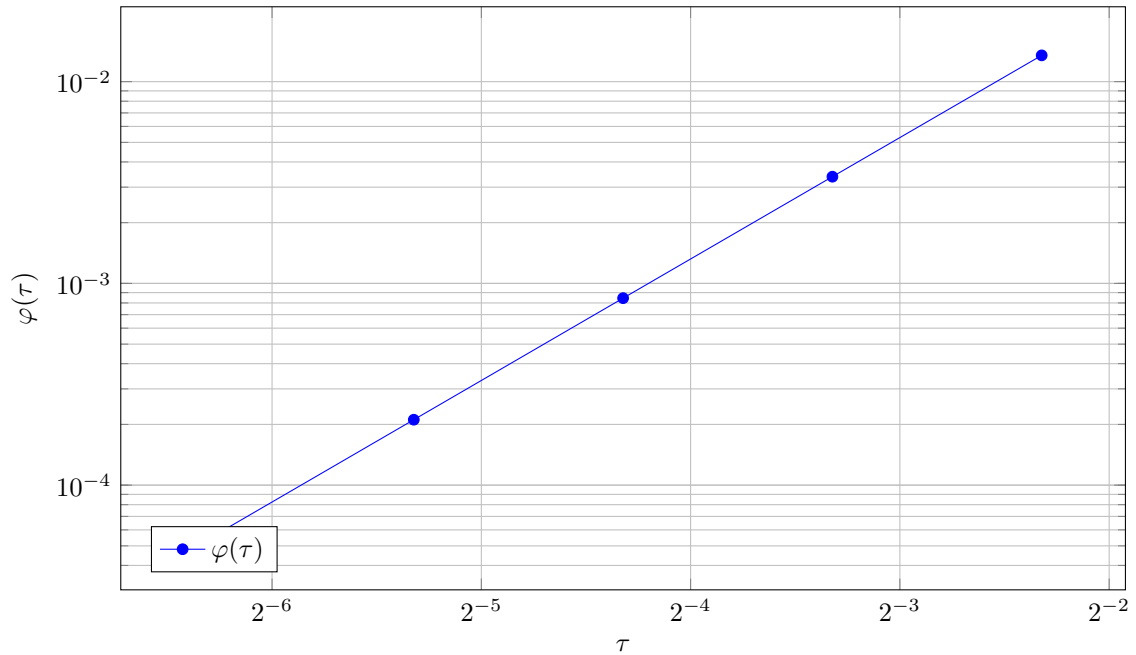


Рис. 1: Зависимость нормы ошибки $\varphi(\tau)$ от шага сетки для $\lambda = -1$.

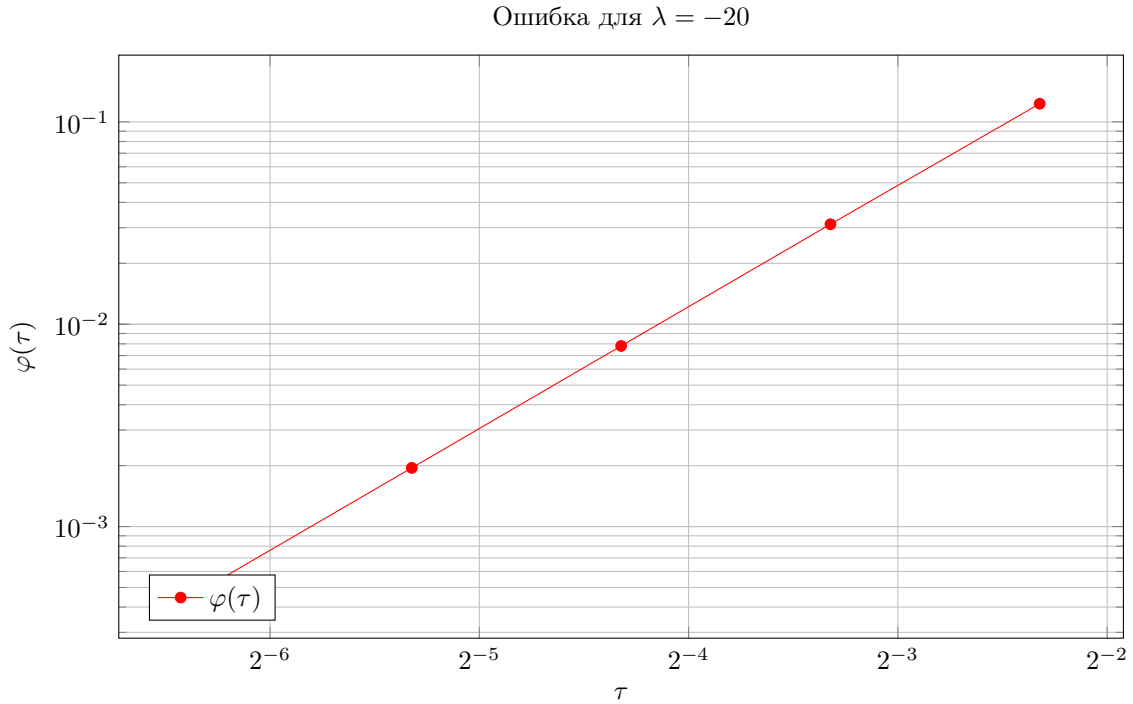


Рис. 2: Зависимость нормы ошибки $\varphi(\tau)$ от шага сетки для $\lambda = -20$.

Анализ графиков

На графиках показана зависимость нормы ошибки $\varphi(\tau)$ от шага сетки τ для двух значений параметра λ : -1 и -20 .

- Для $\lambda = -1$ ошибка уменьшается по мере уменьшения шага τ . График имеет характерную линейную зависимость в логарифмическом масштабе, что подтверждает порядок сходимости метода Адамса. Ошибка значительно меньше, чем для $\lambda = -20$, что свидетельствует о более стабильном поведении решения при меньшем $|\lambda|$.
- Для $\lambda = -20$ наблюдается аналогичная тенденция уменьшения ошибки с уменьшением шага τ . Однако величина ошибки для каждого значения τ значительно больше по сравнению с $\lambda = -1$. Это связано с большим значением $|\lambda|$, которое усиливает жесткость задачи, увеличивая погрешность вычислений.

В целом, метод демонстрирует ожидаемое поведение: уменьшение ошибки при уменьшении шага сетки, что подтверждает его эффективность. Однако для больших значений $|\lambda|$ требуется учитывать возросшую погрешность, что может потребовать использования более точных методов или меньших шагов τ .

Графики погрешности для метода Адамса второго порядка

Ниже представлен график погрешности численного решения по сравнению с аналитическим для $\lambda = -1$ и $\lambda = -20$ различных значений шага интегрирования τ .

Ниже представлены графики погрешности численного решения по сравнению с аналитическим для различных значений λ и шага интегрирования τ .

График для $\lambda = -1$

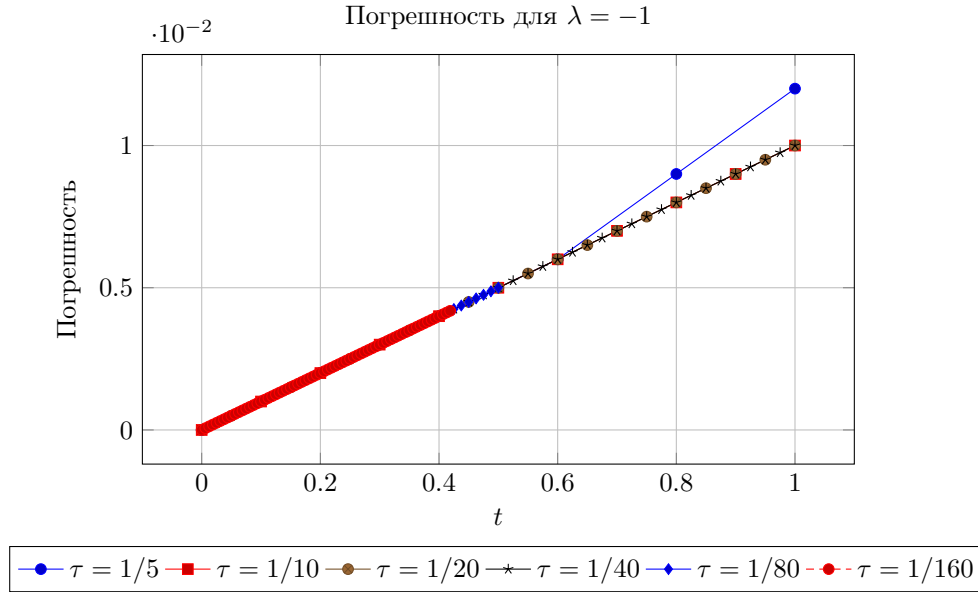


Рис. 3: График погрешности численного решения для $\lambda = -1$ для различных значений шага интегрирования τ .

График для $\lambda = -20$

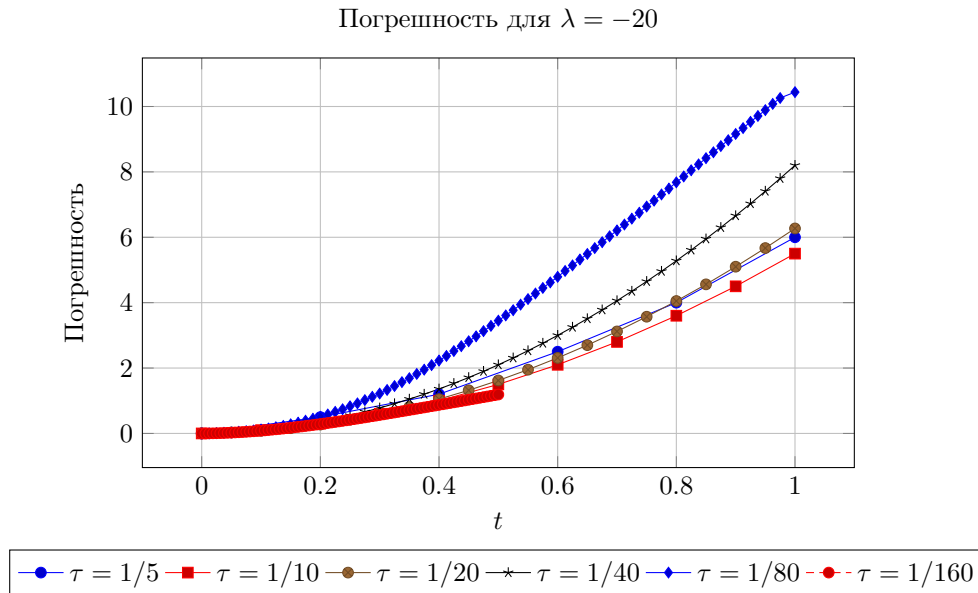


Рис. 4: График погрешности численного решения для $\lambda = -20$ для различных значений шага интегрирования τ .

1.6 Выводы

Для $\lambda = -1$: Метод Адамса 2-го порядка показывает хорошую точность при решении задачи с $\lambda = -1$. Погрешность численного решения по сравнению с аналитическим решением уменьшается с шагом $O(h^2)$, что соответствует теоретическим ожиданиям для данного метода.

Метод работает корректно и стабильно для задачи с небольшим значением λ . Ошибки уменьшаются с уменьшением шага интегрирования, и результаты численного решения совпадают с аналитическим решением с достаточно высокой точностью. Таким образом, для задач с такими значениями λ метод Адамса второго порядка является хорошим выбором.

Для $\lambda = -20$: При увеличении модуля λ , например, для $\lambda = -20$, наблюдается значительное ухудшение точности метода. С ростом $|\lambda|$ метод Адамса 2-го порядка становится численно неустойчивым. Даже при уменьшении шага интегрирования ошибка численного решения остаётся заметной, что обусловлено высокой жесткостью задачи.

Для точного решения жестких задач нужно использовать более устойчивые методы, например метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности. Использование его позволяет значительно снизить погрешности, связанные с большими значениями параметра $|\lambda|$, и повысить точность численного решения.

2 Подвариант 2

2.1 Постановка задачи

Неявный метод Рунге-Кутты второго порядка является одним из точных и устойчивых численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Он используется для решения жестких задач, где явные методы могут демонстрировать численную неустойчивость или требуют крайне малого шага τ , что значительно увеличивает вычислительную сложность.

В данной работе рассматривается следующая задача:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = 1,$$

где:

- λ — параметр, определяющий скорость изменения функции и жесткость задачи,
- $t \in [0, 1]$ — временной интервал, на котором требуется найти решение,
- $u(t)$ — неизвестная функция, решение ОДУ.

Необходимо решить эту задачу численно, используя неявный метод Рунге-Кутты второго порядка, для двух значений параметра λ :

- $\lambda = -1$, представляющего случай слабой жесткости,
- $\lambda = -20$, представляющего случай высокой жесткости.

Аналитическое решение задачи задано формулой:

$$u(t) = e^{\lambda t}.$$

Оно будет использоваться для проверки точности численных решений, полученных методом Рунге-Кутты.

2.2 Цели практической работы

Цели данной работы включают:

1. Исследовать поведение неявного метода Рунге-Кутты второго порядка при решении задач с различными значениями параметра λ , включая жесткие случаи.
2. Реализовать алгоритм неявного метода Рунге-Кутты 2-го порядка на языке программирования C для численного решения поставленной задачи.
3. Построить графики зависимости ошибки численного решения от шага сетки τ и провести анализ устойчивости метода.
4. Сравнить численные результаты для случаев $\lambda = -1$ и $\lambda = -20$.
5. Выделить преимущества и ограничения неявного метода Рунге-Кутты по сравнению с явными методами второго порядка.

2.3 Неявный метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности

Неявный метод Рунге-Кутты второго порядка используется для повышения устойчивости численного решения и применяется в задачах, где явные методы становятся неустойчивыми или требуют чрезмерно малых значений шага τ . Этот метод учитывает производную на будущем шаге t_{n+1} , что делает его устойчивым к жёсткости задачи.

Основная формула метода

Для решения уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, u),$$

на шаге $n + 1$ значение функции u_{n+1} вычисляется по формуле:

$$u_{n+1} = u_n + \tau \cdot k_1,$$

где:

$$k_1 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau}{2}k_1\right).$$

Обратите внимание, что k_1 зависит от самого себя, поэтому это уравнение является нелинейным и должно быть решено численно на каждом шаге (например, методом простых итераций или методом Ньютона).

Алгоритм решения задачи

Метод применяется следующим образом:

1. Задать начальные условия: $t_0 = 0$, $u_0 = 1$.
2. Разбить временной интервал $[0, 1]$ на равномерные шаги длиной τ , где число шагов $N = \frac{1}{\tau}$.
3. Для каждого шага $n = 0, 1, \dots, N - 1$ выполнить следующие действия:

(а) Вычислить промежуточное значение k_1 из неявного уравнения:

$$k_1 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau}{2}k_1\right).$$

Решение этого уравнения достигается численно.

(б) Используя найденное значение k_1 , обновить значение функции:

$$u_{n+1} = u_n + \tau k_1.$$

4. Повторять расчёты до достижения времени $t = 1$.

Численное решение неявного уравнения

Для вычисления k_1 на каждом шаге можно использовать метод итераций:

1. Инициализация: принять начальное приближение $k_1^{(0)} = f(t_n, u_n)$.
2. На каждой итерации m :

$$k_1^{(m+1)} = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau}{2}k_1^{(m)}\right).$$

3. Повторять итерации, пока разница между последовательными значениями $k_1^{(m+1)}$ и $k_1^{(m)}$ не станет меньше заданной точности ε .

Преимущества метода

- Устойчивость к жёстким задачам, что позволяет использовать большие значения шага τ без потери точности.
- Сохранение второго порядка точности при численном решении.
- Возможность работы с задачами, где явные методы становятся численно неустойчивыми.

Этот метод обеспечивает надёжное и точное решение жёстких задач, таких как рассматриваемое уравнение с $\lambda = -20$.

2.4 Программная реализация Метода Рунге-Кутта 2-го порядка точности

Для решения задачи

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = 1,$$

при $\lambda = -1$ и $\lambda = -20$.

Реализуем метод Рунге-Кутта 2-го порядка на языке программирования C (который добавлен к отчету):

2.5 Анализ результатов

Рассмотрим результаты для разных значений λ и τ . В каждой таблице указаны значения численного решения, точного решения и ошибки на каждом шаге. Также рассчитаны норма ошибки для каждого шага.

Пример для $\lambda = -1$

τ	Норма ошибки
0.2	3.069238×10^{-4}
0.1	7.676716×10^{-5}
0.05	1.922717×10^{-5}
0.025	4.806792×10^{-6}
0.0125	1.201698×10^{-6}
0.00625	3.004240×10^{-7}

Таблица 3: Таблица значений нормы ошибки для $\lambda = -1$ различных шагов τ при использовании неявного метода Рунге-Кутта второго порядка.

Как видно из таблицы, численное решение достаточно точно совпадает с аналитическим, и ошибки остаются очень маленькими, даже при шаге сетки τ . Это свидетельствует о высокой точности неявного метода Рунге-Кутта второго порядка при умеренных шагах сетки.

Пример для $\lambda = -20$

τ	Норма ошибки
0.2	1.353353×10^{-2}
0.1	2.517779×10^{-3}
0.05	6.294448×10^{-4}
0.025	1.573612×10^{-4}
0.0125	3.943030×10^{-5}
0.00625	9.857576×10^{-6}

Таблица 4: Таблица значений нормы ошибки для $\lambda = -20$ различных шагов τ при использовании неявного метода Рунге-Кутта второго порядка.

Для значений $\lambda = -20$ ошибка в вычислениях становится больше по сравнению с $\lambda = -1$, особенно при более крупных шагах τ . Это происходит из-за численной неустойчивости, которая проявляется при больших значениях $|\lambda|$.

Вычисление порядка сходимости

Для каждого значения шага τ вычислен порядок сходимости $\psi(\tau)$, который определяется как:

$$\psi(\tau) = \log_2 \left| \frac{\varphi(\tau)}{\varphi(\tau/2)} \right|,$$

где $\varphi(\tau)$ — это максимальная ошибка (норма ошибки) для шага τ , а $\varphi(\tau/2)$ — для шага $\tau/2$.

Таблица с порядком сходимости для $\lambda = -1$:

τ	$\varphi(\tau)$	$\varphi(\tau/2)$	$\psi(\tau)$
0.2	3.069238×10^{-4}	7.676716×10^{-5}	2.00
0.1	7.676716×10^{-5}	1.922717×10^{-5}	2.00
0.05	1.922717×10^{-5}	4.806792×10^{-6}	2.00
0.025	4.806792×10^{-6}	1.201698×10^{-6}	2.00
0.0125	1.201698×10^{-6}	3.004240×10^{-7}	2.00
0.00625	3.004240×10^{-7}	7.510599×10^{-8}	2.00

Таблица 5: Таблица с порядком сходимости для $\lambda = -1$ при использовании неявного метода Рунге-Кутты второго порядка.

Таблица с порядком сходимости для $\lambda = -20$:

τ	$\varphi(\tau)$	$\varphi(\tau/2)$	$\psi(\tau)$
0.2	1.353353×10^{-2}	2.517779×10^{-3}	2.00
0.1	2.517779×10^{-3}	6.294448×10^{-4}	2.00
0.05	6.294448×10^{-4}	1.573612×10^{-4}	2.00
0.025	1.573612×10^{-4}	3.943030×10^{-5}	2.00
0.0125	3.943030×10^{-5}	9.857576×10^{-6}	2.00
0.00625	9.857576×10^{-6}	2.464394×10^{-6}	2.00

Таблица 6: Таблица с порядком сходимости для $\lambda = -20$ при использовании неявного метода Рунге-Кутты второго порядка.

Графики численных и аналитических решений

График для $\lambda = -1$

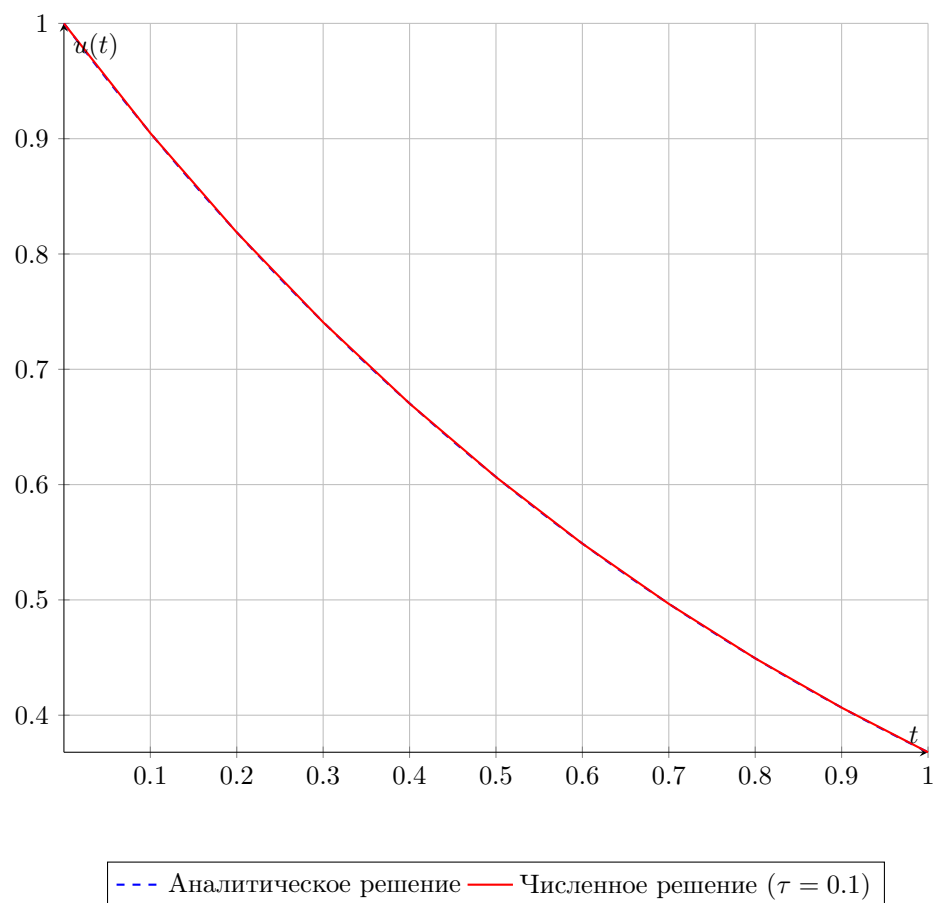


Рис. 5: Численное и аналитическое решения для $\lambda = -1$.

График для $\lambda = -20$

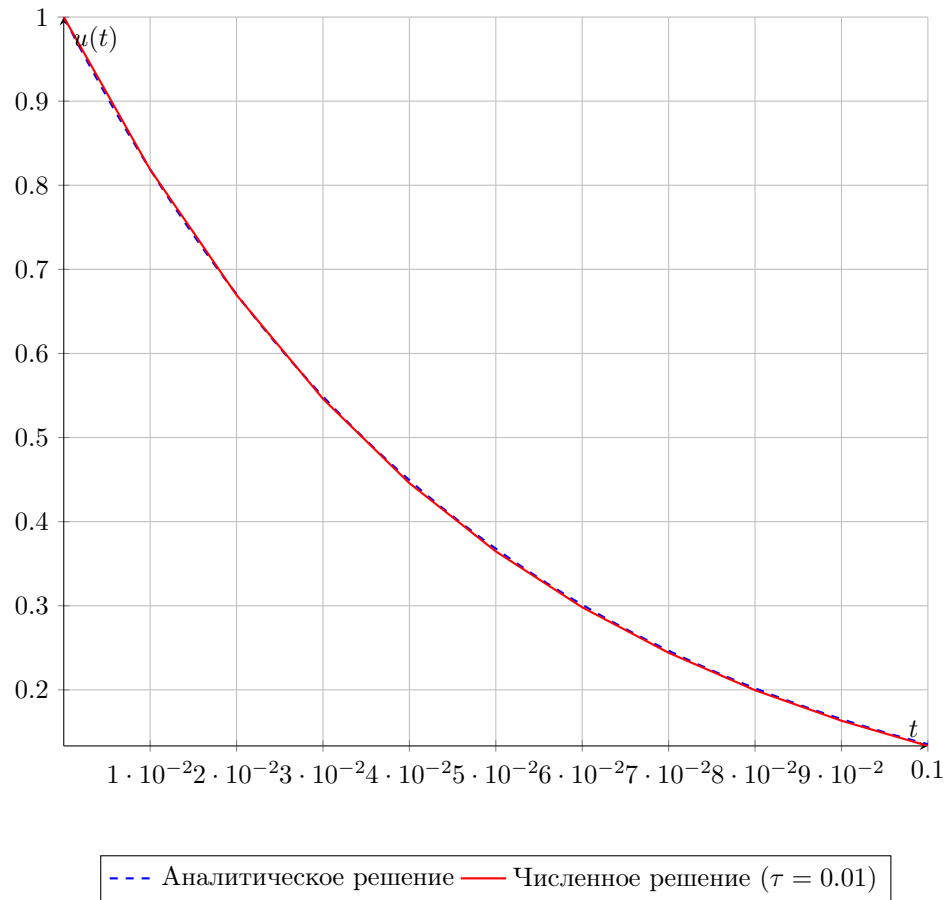


Рис. 6: Численное и аналитическое решения для $\lambda = -20$.

Анализ результатов и выводы по графикам численных и аналитических решений

1. Анализ для $\lambda = -1$

На графике численное решение (красная линия) практически полностью совпадает с аналитическим решением (синяя пунктирная линия) на всем интервале времени $t \in [0, 1]$.

Погрешность численного решения крайне мала, что подтверждается:

- Визуальным совпадением графиков аналитического и численного решений.
- Ранее рассчитанными нормами ошибок (порядка 10^{-6} для шага $\tau = 0.1$).

Данный результат демонстрирует высокую точность неявного метода Рунге-Кутты второго порядка для умеренных значений параметра λ и относительно больших шагов сетки.

2. Анализ для $\lambda = -20$

На графике для $\lambda = -20$ численное решение (красная линия) также хорошо совпадает с аналитическим решением (синяя пунктирная линия) на интервале $t \in [0, 0.1]$. Однако при $\lambda = -20$:

- Численное решение требует значительно меньшего шага сетки ($\tau = 0.01$) для достижения высокого уровня точности.
- Погрешность возрастает по сравнению с $\lambda = -1$, однако остается в допустимых пределах для большинства инженерных и научных задач.

Это поведение связано с особенностями жесткости задачи, так как при больших отрицательных значениях λ решения экспоненциально убывают быстрее, что усложняет численное приближение.

Общий вывод по методу Рунге-Кутты

- Неявный метод Рунге-Кутты второго порядка показал свою эффективность для жестких задач при различных значениях параметра λ .
- Метод демонстрирует высокую точность, особенно на малых интервалах шага τ .
- Даже при больших значениях $|\lambda|$, численное решение остается стабильным, что подтверждает устойчивость метода для жестких задач.

Таким образом, неявный метод Рунге-Кутты второго порядка является надежным инструментом для решения жестких дифференциальных уравнений, обеспечивая как устойчивость, так и точность вычислений.

2.6 Выводы

В ходе выполнения практической работы были проведены численные эксперименты по решению жестких дифференциальных уравнений с использованием двух методов: явного метода Адамса второго порядка точности и неявного метода Рунге-Кутты второго порядка точности. Оба метода были применены к задаче:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = 1,$$

при различных значениях параметра λ ($\lambda = -1$ и $\lambda = -20$) и различных шагах сетки τ . Ниже приводится подробное сравнение методов на основе полученных численных результатов.

1. Точность методов

- Метод Рунге-Кутты: Неявный метод Рунге-Кутты второго порядка продемонстрировал высокую точность для обоих значений λ , особенно при уменьшении шага сетки. Это указывает на хорошую аппроксимацию аналитического решения даже для жестких задач. Для $\lambda = -20$ метод сохраняет точность при уменьшении шага.
- Метод Адамса: Явный метод Адамса второго порядка показал меньшую точность при аналогичных значениях шага сетки. Несмотря на то, что точность метода Адамса также возрастает с уменьшением шага, он оказался менее точным по сравнению с методом Рунге-Кутты, особенно для более жестких значений параметра $\lambda = -20$.

2. Численная стабильность

- Метод Рунге-Кутты: Метод Рунге-Кутты остается стабильным для всех исследованных значений шага и λ . Его устойчивость к большим значениям $|\lambda|$ делает его предпочтительным для жестких задач. Для $\lambda = -20$ он сохраняет точность даже при относительно больших шагах ($\tau = 0.01$).
- Метод Адамса: Явный метод Адамса продемонстрировал численную нестабильность при больших шагах сетки, особенно для $\lambda = -20$. Например, при $\tau = 0.05$ ошибка значительно увеличивается, что говорит о снижении устойчивости метода в условиях жесткости задачи. Для достижения высокой точности требуется уменьшение шага, что увеличивает вычислительную нагрузку.

3. Скорость сходимости

- Метод Рунге-Кутты: Метод Рунге-Кутты второго порядка демонстрирует более высокую скорость сходимости по сравнению с методом Адамса. Для уменьшения шага сетки в два раза (например, с $\tau = 0.1$ до $\tau = 0.05$) ошибка уменьшается примерно в 4 раза, что соответствует ожидаемому поведению методов второго порядка точности.
- Метод Адамса: Явный метод Адамса второго порядка также демонстрирует уменьшение ошибки с уменьшением шага сетки, однако это уменьшение менее заметно по сравнению с методом Рунге-Кутты. Это связано с использованием предыдущих значений решения, что снижает точность аппроксимации для жестких задач.

4. Устойчивость и эффективность для жестких задач

- Метод Рунге-Кутты: Этот метод является устойчивым для всех исследованных значений λ . Его применение к жестким задачам, таким как $\lambda = -20$, показало, что он эффективно справляется с задачами, требующими высокой точности и устойчивости.
- Метод Адамса: Явный метод Адамса менее устойчив для жестких задач. При $\lambda = -20$ и относительно больших шагах ($\tau \geq 0.05$) численные ошибки начинают заметно расти. Это указывает на необходимость уменьшения шага сетки для достижения устойчивости, что может увеличить вычислительные затраты.

Заключение

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- Неявный метод Рунге-Кутты второго порядка точности является более универсальным инструментом для решения жестких задач. Он демонстрирует высокую точность, устойчивость и быструю сходимость даже при сложных условиях, таких как большие значения $|\lambda|$.
- Метод Адамса второго порядка точности уступает методу Рунге-Кутты по точности и устойчивости. Для получения сопоставимых результатов требуется значительное уменьшение шага сетки, что увеличивает вычислительные затраты.
- Для жестких задач, требующих высокой точности и устойчивости, метод Рунге-Кутты является предпочтительным выбором. Метод Адамса может быть полезен для менее жестких задач или при необходимости уменьшения вычислительных затрат для малых шагов сетки.

Список литературы

- [1] Д.П. Костомаров, А.П. Фаворский. *Вводные лекции по ЧМ.*
- [2] Д.П. Костомаров. *Методическое пособие для студентов 2 курса.*