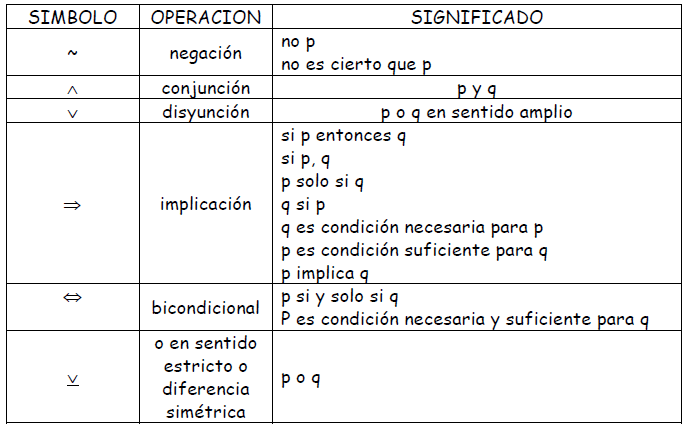
UNIDAD 1

**Proposición** es toda oración que tenga valor de verdad, es decir, que expresa una verdad o una falsedad.



TAUTOLOGIA - Contradicción - CONTINGENCIA

Si al evaluar una tabla de verdad, resulta que todos los valores de verdad resultantes son siempre V para cualquier combinación de sus valores, decimos que dicha fórmula es una Tautología o Ley lógica

Si al estudiar una fórmula lógica, a diferencia de los ejemplos anteriores resulta que para cualquier valor de verdad de las proposiciones intervinientes el resultado de dicha fórmula es siempre falso, decimos que dicha fórmula es una Contradicción.

Si una proposición no es una tautología ni una contradicción (con al menos un valor V y otro F) es una contingencia.

LEYES DEL ALGEBRA PROPOSICIONAL

Involución ~(~p) ⇔ p (se lee "no, no p, equivale a p")

Idempotencia (p ∧ ~p) ⇔ p

(p ∨ ~p) ⇔ p

Conmutatividad

a) de la disyunción: p ∨ q ⇔ q ∨ p

b) de la conjunción: p ∧ q ⇔ q ∧ p

Asociatividad

a) de la disyunción: (p ∨ q) ∨ r ⇔ p ∨ (q ∨ r)

b) de la conjunción: (p ∧ q) ∧ r ⇔ p ∧ (q ∧ r)

Distributividad

a) de la conjunción respecto de la disyunción:

(p ∨ q) ∧ r ⇔ (p ∧ r) ∨ (q ∧ r)

b) de la disyunción respecto de la conjunción:

(p ∧ q) ∨ r ⇔ (p ∨ r) ∨ (q ∨ r)

Leyes de De Morgan

~ (p ∨ q) ⇔ ~p ∧ ~q

" La negación de una disyunción equivale a la conjunción de las negaciones"

~ (p ∧ q) ⇔ ~p ∨ ~q

"La negación de una conjunción equivale a la disyunción de las negaciones"

Sea la implicación p → q

A la forma p → q se la llama implicación directa

A la forma ~p → ~q se la llama implicación contraria

A la forma q → p se la llama implicación reciproca

A la forma ~q → ~p se la llama implicación contra reciproca

Capítulo 2

FUNCIONES ESQUEMAS Y CUANTIFICADORES

ESQUEMA PROPOSICIONAL

Si en la proposición: "cinco es mayor que tres" (en símbolos: 5 > 3) reemplazamos al número 5 por la letra x, se obtiene la expresión "x es mayor que tres" (x > 3), y si convenimos que x no represente necesariamente al número 5, sino a un número cualquiera, entonces al enunciado x > 3 se le denomina esquema proposicional siempre que al reemplazar la variable por la constante elegida esa expresión se convierta en proposición

CUANTIFICADORES

A partir de los esquemas proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la indeterminada x, introducimos los símbolos ∀ x y ∃ x, llamados cuantificador universal y cuantificador existencial respectivamente. Las expresiones

Para todo x, se verifica p(x) se denota por ∀ x: p(x)

Existe x, tal que se verifica p(x) se denota por ∃ x / p(x)

NEGACION DE UN ESQUEMA PROPOSICIONAL CUANTIFICADO

1) Sea ∀(x): P[x] su negación será:

∼ ∀(x): P[x] por 1 es equivalente a ∃(x): ∼ P[x] análogamente

2) Sea ∃(x): P[x] su negación será:

∼ ∃(x): P[x] es equivalente a ∀(x): ∼ P[x]

UNIDAD 2

Capítulo 1

METODOS DE DEMOSTRACION

Razonamiento: Un razonamiento es un conjunto de proposiciones en el cual una de ellas llamada conclusión, se afirma sobre la base de las demás llamadas premisas.

Se considera un razonamiento válido cuando de premisas verdaderas no se puede llegar a una conclusión falsa.

METODO DIRECTO

Es un método de demostración que supone las premisas verdaderas y trata de probar que la conclusión es necesariamente verdadera.

METODO INDIRECTO

La demostración por el método indirecto infiere la conclusión «si el evento p implica el evento q, entonces no evento q implica no evento p», o, matemáticamente:

(p → q) ↔ (∼ q → ∼ p)

La afirmación "si no q entonces no p" se llama la contrarrecíproca de la afirmación de "si p entonces q ".

DEMOSTRACION POR REDUCCION AL ABSURDO

En la demostración por contradicción (también conocida como reductio ad absurdum, que significa ‘por reducción al absurdo’ en latín), se muestra que, si cierta afirmación es verdadera, ocurre una contradicción lógica, por tanto, esa afirmación es falsa.

Es usado para demostrar la validez o invalidez de proposiciones categóricas; se parte por suponer como hipótesis la negación o falsedad de la tesis de la proposición a demostrar, y la afirmación de la hipótesis y mediante una concatenación de inferencias lógicas válidas se pretende arribará una contradicción lógica, un absurdo; de derivarse una contradicción, se concluye que la hipótesis de partida (la negación de la original) ha de ser falsa, y la original es verdadera y la proposición o argumento es válido.

Más sencillo, cuando intento aplicar el método de reducción al absurdo, afirmo la hipótesis, niego la tesis, empleo todos mis conocimientos adquiridos anteriormente y pretendo llegar a una contradicción.

Si el encuentro demostré la validez de la proposición.

Resolución 4 a

Un ejemplo famoso de demostración por contradicción que es un número irracional:

Supóngase que es un número racional, así por definición donde a y b son dos enteros diferentes de cero sin factores comunes o sea indivisible

Por tanto.

Elevando al cuadrado ambos lados se tiene que.

Como 2 divide el lado izquierdo, es par, entonces si a2 es par (pues son iguales ambos enteros).

Sí es par, implica que debe ser también par (lo demostramos en otro ejercicio).

Así que podemos escribir, donde c también es entero.

Substituyendo en la ecuación original tenemos.

Dividiendo a ambos lados por 2 tenemos. Pero entonces, por el mismo argumento de antes, 2 divide a, entonces b debe ser par. De todas maneras, si a y b son ambos enteros, comparten un factor, que es 2. Esto contradice nuestra asunción, así que nos vemos forzados a concluir que es un número irracional.

Capítulo 2

MÉTODO DE INDUCCION COMPLETA

Si A es un subconjunto de N que verifica

• 1 es un elemento de A

• Si n es un elemento de A entonces n+1 también es un elemento de A

entonces A=N

Cuando un conjunto tiene estas propiedades decimos que es un conjunto inductivo

Podemos aplicar el principio de inducción matemática para demostrar que cierto esquema proposicional P(n) es verdadero

Es decir, queremos analizar si el conjunto de verdad de una proposición es el conjunto de los N.

Si P(n) es una función proposicional que verifica:

• 1∈ V(P)

• Si k ∈ V(P)→ (k+1) ∈ V(P)

Entonces V(P)= N

O, dicho de otra forma:

• P (1) es V

• Si para un numero k cualquiera P(K) es V → es V(k+1) es verdadera

Entonces P(n) es verdadera para todo natural n

UNIDAD 3: Teoría de Conjuntos y Relaciones

Capítulo1: Teoría de Conjuntos

Se llama conjunto a toda agrupación, colección o reunión de individuos (cosas, animales, personas o números) bien definidos que cumplen una propiedad determinada. A los objetos del conjunto se los denomina “elementos”.

Relación de pertenencia

Sea A un conjunto cualquiera y x un elemento, para indicar que x es elemento de A o simplemente que x está en A, se simboliza: x ∈ A.

La relación de pertenencia se da entre elementos y conjuntos.

Relación de Inclusión de conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, esta relación se utiliza para indicar que el conjunto A es subconjunto del conjunto B, lo cual se escribe A C B

y se lee: A es subconjunto de B, o A está incluido en B, o A está contenido en B, o B incluye a A.

A C B ↔ (∀𝐱) ∶ (𝐱𝛜𝐀 →𝐱 𝛜𝐁),

que se lee: “para todo x, si x está en A, entonces x está en B.”

Relación de igualdad de conjuntos

La igualdad de dos conjuntos A y B denotada A=B se caracteriza por:

que se lee “A = B es si y sólo si A C B y B C A, es decir, vale la doble inclusión.

Operaciones entre conjuntos

1) Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos comunes de ambos conjuntos (sin repetir elementos), y se denota 𝐀∩𝐁, es decir:

𝐀∩𝐁 = {𝐱∶𝐱 𝛜 𝐀 ∧ 𝐱 𝛜 𝐁}

2) Unión de conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los

elementos que están en A o en B (donde se está considerando un “o”

inclusivo, es decir, los elementos comunes de ambos conjuntos

están también en la unión), y se denota AU B, es decir:

𝐀𝐔𝐁 = {𝐱∶𝐱 𝛜 𝐀 𝐯 𝐱 𝛜 𝐁}

3) Producto cartesiano entre conjuntos

Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, a partir de ellos formamos un nuevo conjunto que llamamos “producto cartesiano de A y B” (en ese orden), lo indicamos AxB, y sus elementos son todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y su segunda componente es un elemento de B.

A x B = {(x,y) / x ∈ A ∧ y ∈ B}

Capítulo 2: RELACIONES

Definiciones

Una relación R entre un conjunto A y un conjunto B es un conjunto de pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y su segunda componente, un elemento de B.

Una relación de A en B es entonces cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B. Al conjunto A se lo llama conjunto de partida de la relación, y al conjunto B, conjunto de llegada.

Dada una relación R entre A y B, se llama dominio de R o conjunto de definición de R, al conjunto de los elementos de A que son primera componente de algún par ordenado de R; y se llama imagen de R o conjunto de valores de R, al conjunto de elementos de B que son segunda componente de algún par ordenado de R.

Dom (R) = {x / x ∈ A ∧ (x, y) ∈ R} Im (R) = {y / y ∈ B ∧ (x, y) ∈ R}

Si R es una relación entre A y B, la expresión x R y significa que (x, y) ∈ R, o sea, que x está relacionado con y por la relación R.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea A un conjunto y R una relación definida en A

• R es **reflexiva** si para todo x ∈ A, el par (x, x) ∈ R.

∀ x, x ∈ A ⇒ (x, x) ∈ R

• R es **simétrica** si siempre que un par (x, y) ∈ R, el par (y, x) también pertenece a R.

∀x∈ A, ∀y ∈ A, [(x, y) ∈ R ⇒ (y, x) ∈ R]

• R es **antisimétrica** si no existen elementos diferentes x e y en A tales que (x, y) ∈ R y también (y, x) ∈ R.

∀x∈ A, ∀y∈ A, [(x, y) ∈ R ∧ (y, x) ∈ R ⇒ x = y]

• R es **transitiva** si siempre que un par (x, y) ∈ R y un par (y, x) ∈ R entonces también pertenece a R el par (x, z).

∀x∈ A, ∀y∈ A, ∀z∈ A, [(x, y) ∈ R ∧ (y, z) ∈ R ⇒ (x, z) ∈ R]