МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

В. В. ВІТЛІНСЬКИЙ, Л. Г. ТАРАСОВА, С. С. САВІНА

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

1906
КНЕУ
КИЇВ 2014

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.193я73
В 54

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою КНЕУ
Протокол № 7 від 12.06.2014 року

Вітлінський В. В.
В 54 Математичне програмування і дослідження операцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. / В. В. Вітлінський, Л. Г. Тарасова, С. С. Савіна. — К. : КНЕУ, 2014. — 347 с.
ISBN 978-966-483-850-1

У посібнику у доступній формі подається широкому загалу читачів задачі, методологічні принципи й засоби науки, відомі як *дослідження операцій*, що останніми роками набуває дедалі ширшого визнання з погляду прикладних її можливостей.

У посібнику «Математичне моделювання і дослідження операцій» для успішного опанування матеріалу подаються численні задачі прикладного, зокрема економічного, змісту, розв'язування яких передбачає пошук оптимальних рішень (розв'язків) із застосуванням ґрунтовно розробленого математичного апарату дослідження економічних моделей.

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.193я73

ISBN 978-966-483-850-1

ЗМІСТ

ВСТУП

Коли мова заходить про використання математичних методів в економічних дослідженнях, то мається на увазі не просто здійснення різного роду економічних розрахунків, а застосування математики, як особливого засобу, інструментарію для вивчення економічних закономірностей і одержання теоретичних та практичних економічних висновків.

У наш час важко знайти теоретичні і практичні проблеми економіки, в розв'язанні яких не використовувалися б математичні методи. І не випадково, що з моменту заснування Нобелівської премії по економіці, вона присуджувалась, як правило, за економіко-математичні дослідження. Про це свідчать прізвища вчених-економістів Нобелівських лауреатів: Р. Фріш, Я. Тірберген, П. Самуельсон, Д. Хікс, К. Ерау, В. Леонтьєв.

Бурхливий розвиток науки на сучасному етапі, XXI століття, потребує залучення нових напрямків і технологій для розв'язання задач, які постають перед людством.

Мета посібника — у доступній формі подати широкому загалу читачів задачі, методологічні принципи й засоби науки, відомі як *дослідження операцій*, що останніми роками набуває дедалі ширшого визнання з погляду прикладних її можливостей.

Зауважимо, що ця наука порівняно молода. Уперше дослідження операцій як науковий напрям почали розглядати в роки Другої світової війни, коли в збройних силах Англії, а згодом і США було сформовано спеціальні групи наукових працівників (економістів, математиків, фізиків), які мали розв'язувати конкретні задачі з підготовки проектів для реалізації рішень військовими штабами з метою досягнення успіху військових операцій. Ці рішення безпосередньо стосувалися розподілу й використання зброї та матеріальних ресурсів по різних театрах бойових дій, а також у тилу. Нині важко назвати галузь людської діяльності, де в тому чи іншому вигляді не використовувалися б методи та математичні моделі, які належать до класу задач дослідження операцій.

Нині актуальність усіх математичних моделей незрівнянно вища, ніж у момент їх створення. Адже, скажімо, поява «всесвітньої павутини» — інформаційної мережі Internet, глобалізація економіки, інформатизація суспільства — усі ці та багато інших досягнень цивілізації були б неможливими без практичного використання сучасних методів моделювання, яким присвячено цей навчальний посібник по дисципліні «Математичне моделювання і дослідження операцій» .

У посібнику « Математичне моделювання і дослідження операцій» для успішного опанування матеріалу подаються численні задачі прикладного, зокрема економічного, змісту, розв'язування яких передбачає пошук оптимальних рішень (розв'язків) із застосуванням ґрунтовно розробленого математичного апарату дослідження економічних моделей.

Рівень засвоєння знань з кожної програмної теми визначається за допомогою контрольних питань і завдань для самостійної роботи.

Мета дисципліни полягає у вивчені концептуальних положень і інструментарію побудови математичних моделей дослідження операцій на базі комп'ютерних технологій та їх застосування в аналізі та управлінні соціо-економічними системами.

Завдання дисципліни полягає у вивченні інструментарію розв'язування прикладних задач дослідження операцій для аналізу соціо-економічних процесів з використанням теорії математичного програмування та теорії випадкових процесів.

Предметом вивчення дисципліни є методологія та інструментарій побудови та застосування прикладних математичних моделей дослідження операцій для аналізу та управління економічними процесами.

У результаті вивчення даної дисципліни студент повинен:

- знати концептуальні положення побудови математичних моделей дослідження операцій, як засобу прийняття ефективних рішень;
- знати та володіти сучасним інструментарієм математичного моделювання економічних процесів на базі теорії математичного програмування та випадкових процесів:
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі дослідження операцій та розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ;
- вміти грамотно застосовувати моделі дослідження операцій при прийняті рішень в умовах невизначеності, аналізувати одержані результати і робити фахові висновки.

СТРУКТУРА ПОСІБНИКА

Розділ 1. Дослідження операцій як науковий підхід до аналізу економічних процесів.
Розділ 2. Методи та моделі лінійного програмування.
Розділ 3. Теорія двоїстості у лінійному програмуванні.
Розділ 4. Методи та моделі задач цілочислового лінійного програмування.
Розділ 5. Методи та моделі задач нелінійного програмування.
Розділ 6. Моделювання розвитку економічних систем на основі застосування марковських випадкових процесів.
Розділ 7. Прикладні моделі дослідження операцій із використанням марковських процесів.
Розділ 8. Марківські процеси з дискретним станом і неперервним часом та їх використання в дослідженні операцій.
Розділ 9. Дослідження систем масового обслуговування.
Розділ 10. Методи та моделі мережного планування та управління.
Розділ 11. Теорія управління запасами в задачах дослідження операцій
Розділ 12. Моделювання конфліктності у соціо-економічних системах. Ігрові моделі.

РОЗДІЛ 1

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЯК НАУКОВИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати теоретичні аспекти та концептуальні положення побудови математичних моделей дослідження операцій та їх класифікацію;
- вміти грамотно визначати тип економіко-математичної моделі, аналізувати одержані по моделі розв'язки і робити фахові висновки.

1.1. Концептуальні положення теорії дослідження операцій

Головне завдання фахівців з економіки та підприємництва — керувати економічними системами, розробляючи і впроваджуючи стратегічні та тактичні плани. Керування економічними системами — це, по суті, використання знань про системи, здобуття нової інформації та застосування її з метою відшукання найефективніших способів досягнення заданих результатів.

Для керування економічними системами необхідна інформація. Людство вступило у XXI століття, у якому стрімко відбуваються процеси інформатизації та інтелектуалізації суспільства. Знання та індивідуальний підхід перетворюються на основну цінність інформатизованого суспільства.

Сутність задач дослідження операцій у загальних рисах можна розкрити так: організовується цілеспрямований захід (система дій), який можна здійснити в той чи той спосіб, тобто для його реалізації необхідно вибрати один варіант із множини можливих варіантів. При цьому відомо, що кожному варіанту цієї множини притаманні як певні переваги, так і певні недоліки.

Через складність реальної ситуації не відразу стає очевидним, який із варіантів найкращий. Тому щоб дослідити ситуацію та порівняти різні варіанти можливих дій для прийняття остаточного рішення, виконують серію математичних розрахунків, які мають допомагати тим, хто безпосередньо відповідає за вибір того чи того рішення, критично проаналізувати відповідну ситуацію та здобуті результати, вибравши оптимальний варіант.

Такі задачі, що зводяться до вибору оптимального варіанта, постають у різних галузях людської діяльності. До розв'язування таких задач потрібно підходити із загальних, а не вузьковідомчих позицій, оскільки саме такий підхід забезпечує важливі переваги, розширюючи кругозір дослідника та сприяючи взаємному збагаченню наукових методів і засобів.

У загальному розумінні операція — це певна система дій, об'єднаних єдиним задумом і спрямованих на досягнення деякої заздалегідь визначеної мети (цілі).

Будь-яка операція є завжди керованою, тобто залежить від присутності конкретної людини (людського фактора), яка розв'язує питання вибору певних параметрів, що характеризують структуру досліджуваної операції.

Поняття «структура операції» слід розуміти в широкому сенсі, вважаючи, що воно охоплює певну організацію фахівців, а також систему технічних засобів, за допомогою яких і реалізується запланована операція.

Вибір параметрів для певної операції, що його здійснює людина, називають *рішенням* (*розв'язком*). Рішення при цьому можуть бути вдалими і невдалими, доцільними і недоцільними.

Оптимальним називають таке рішення (розв'язок), яке за наперед визначеними ознаками має перевагу перед іншими.

Метою дослідження операцій є попереднє кількісне і якісне обґрунтування оптимальних рішень (розв'язків).

Іноді (порівняно рідко) вдається вибрати з множини рішень (розв'язків) одне, строго оптимальне, здебільшого визначається лише певна множина рішень (розв'язків), у межах якої можна здійснити остаточний вибір одного рішення (розв'язку). Для прийняття ефективних рішень необхідно володіння достатнім інструментарієм сучасних підходів оцінки можливих варіантів в тій чи тій практичній ситуації.

1.2. Дослідження операцій як засіб прийняття ефективних рішень

У найрізноманітніших галузях практики, таких як організація виробництва й постачання, експлуатація транспорту, кадрова структура виробничих систем, обслуговування в системах зв'язку, залізничного, повітряного та водного транспорту, обчислювальних систем і т. ін., постають задачі, які є однаковими за своєю сутністю і мають цілий комплекс спільних ознак. А отже, ці задачі можна розв'язувати одними й тими самими методами, які для зручності їх використання об'єднано спільною назвою — *задачі дослідження операцій.*

Економіко-математичне моделювання, яке використовується в досліджені операцій, як один із засобів прийняття ефективних рішень на сучасному етапі має свої особливості.

Завдяки комп'ютеризації всіх галузей наукової, народногосподарської діяльності, а також сфери управління стало можливим реалізувати проекти значної складності, які вимагають при їх реалізації обробки великих масивів інформації, що було неможливо здійснити в минулі часи, до комп'ютерної ери. Це знайшло своє відображення в математичному моделюванні.

Якщо в минулому використання математичних моделей вимагало термінової обробки великих масивів інформації, реалізувати яку було просто неможливо, то в сучасному комп'ютерному світі це не викликає ніяких перешкод. Особливо це стосується моделей, які імітують системи, що працюють в реальному масштабі часу. Окрім цього слід наголосити ще на такому важливому, з точки зору побудови і аналізу математичних моделей, явищі, що одні і ті ж економічні процеси (системи) увесь час перебувають в стані змін та із-за безлічі зв'язків між складовими частинами цих процесів, не можливо своєчасно виявити і оцінити ці зміни. А тому математичні моделі, що відображають економічні процеси в минулому, в загальному випадку, будуть не адекватними тим же процесам, які відбуваються в наш час, у зв'язку із зміною економічних умов, які впливають на ці процеси. Цю думку наочно ілюструє, зокрема, модель «Гарвардського барометра».

У зв'язку із цим на сучасному етапі постає питання про створення таких математичних моделей, які б, в певні мірі, могли б, так би мовити, адаптуватися до змін, які відбуваються в моделювальному соціально-економічному процесі під впливом зовнішніх і внутрішніх факторів.

Моделювання в наукових дослідженнях використовувалось із давніх часів і поступово охоплювало все нові області наукових знань: технічне копіювання, будівництво і архітектуру, астрономію і класичну фізику, хімію і біологію, економіку і соціологію.

Із врахуванням складності економічних структур і зв'язків між її складовими частинами, на сучасному етапі математичного моделювання набули широкого використання інструментарії, які включають значно складніший математичний апарат — диференційні та інтегральні рівняння, теорія нечітких множин, теорія графів, однорідні ланцюги Маркова та марковські процеси із дискретними станами і неперервним часом.

В останні часи моделювання виконує роль універсального методу наукового пізнання і виступає одним із засобів прийняття ефективних рішень.

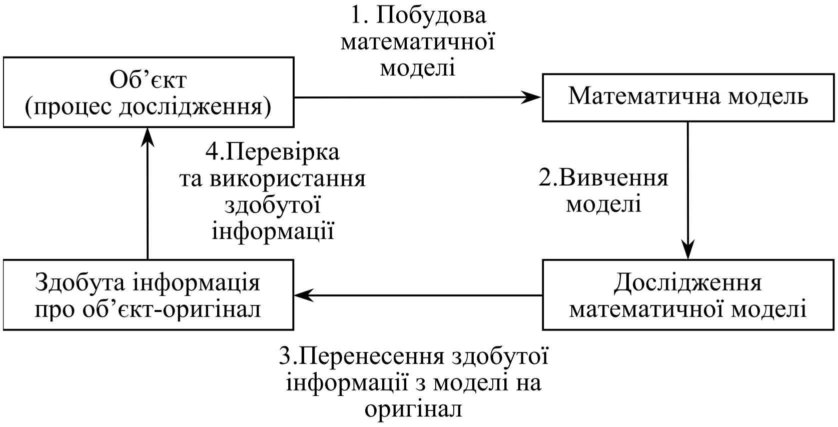
1.3. Зміст економіко-математичних моделей дослідження операцій та методологія їх побудови

Щоб зробити кількісно і якісно обґрунтований вибір рішення (розв'язку) у процесі дослідження операцій у будь-якій галузі людської діяльності, завжди доводиться використовувати математичні методи, втілені в математичних моделях.

Термін «модель» широко застосовують у різних сферах людської діяльності. Що слід розуміти під цим терміном? Модель — це матеріальне або символьне (у вигляді математичних співвідношень) відображення (подання) реального об'єкта (системи, процесу) — так званого об'єкта-оригіналу, таке, що в процесі дослідження є замінником об'єкта-оригіналу такою мірою, що в результаті безпосереднього його вивчення можна діставати необхідну інформацію про модельований об'єкт-оригінал, прогнозуючи завдяки цьому його поведінку в майбутньому, виходячи з певних цілей дослідження.

Застосовувати моделювання доводиться з огляду на те, що більшість об'єктів, систем, процесів або не підлягають безпосередньому дослідженню з метою прогнозування їхньої подальшої поведінки (наприклад, ядро Землі, Всесвіт), або вони ще реально не існують (майбутній стан економіки, потреби суспільства в певній продукції), або дослідження потребує багато часу і великих матеріальних витрат.

Процес моделювання, тобто побудова математичної моделі, ілюструє така схема:



Згідно з наведеною схемою процес побудови моделі можна поділити на чотири етапи:

1-й етап — побудова моделі. На цьому етапі дослідник вибирає тип моделі;

2-й етап — вивчення моделі. Тепер модель виконує роль самостійного об'єкта дослідження, який піддається модельним експериментам;

3-й етап — перенесення здобутої інформації з моделі на оригінал з одночасною інтерпретацією цієї інформації з мови моделі на мову оригіналу;

4-й етап — перевірка на відповідність здобутої інформації безпосередньо на об'єкті-оригіналі.

Пізнавальні можливості будь-якої моделі зумовлені тим, наскільки точно вона імітує (відображає) найістотніші, з погляду дослідника та цілей дослідження, характеристики об'єкта-оригіналу.

Модель втрачає своє призначення як у разі повної її тотожності оригіналу (тоді вона втрачає свої функції моделі), так і в разі значної її розбіжності з об'єктом-оригіналом.

Отже, побудова моделі неодмінно супроводжується відмовою від одних рис модельованого об'єкта на користь інших, істотніших з позиції дослідника, який безпосередньо здійснює процес моделювання, а через це будь-якій моделі завжди притаманний елемент суб'єктивізму.

Економіко-математичною моделлю називається аналітичне співвідношення між основними, найсуттєвішими величинами, характеристиками досліджуваного соціально-економічного процесу (системи), які можуть мати форму системи рівнянь і нерівностей, диференційних та інтегральних рівнянь. Може бути використаний інший математичний апарат, теорія графів, теорія нечітких множин, однорідні ланцюги Маркова та інше.

Головною методичною проблемою при побудові та використанні математичних моделей і здійсненні процесу моделювання є відсутність у дослідженнях високоякісної інформації про досліджуваний соціально-економічний процес.

Повнота і вірогідність первинної інформації, реальні можливості її одержання та статистичної обробки в багатьох випадках визначають вибір типу моделі. Залежно від специфіки модельованих об'єктів і призначення моделей первинна інформація має різний опис. Умовно її можна поділити на три типи:

— інформація про минулий стан об'єктів моделювання;
— інформація про сучасний стан;
— інформація про майбутній розвиток об'єктів.

Ці типи інформації є наслідком самостійних досліджень, які також можуть бути одержані шляхом моделювання. Оскільки в економіці багато процесів є масовими, то виявити економічні тенденції їх розвитку на основі одного або кількох спостережень є неможливим. Тому моделювання в економічній галузі базується на інформації, здобутої шляхом проведення масових спостережень. Враховуючи те, що соціально-економічні процеси відбуваються в динаміці, необхідно постійно одержувати нову інформацію про них. Окрім цього, оскільки для обробки інформації про ці процеси потрібно витратити певний час, то при побудові математичних моделей економіки необхідно здійснювати певне корегування із врахуванням її «старіння».

Дослідження економічних процесів базується на економічних вимірюваннях. Точність вимірювання значною мірою визначає точність кінцевих результатів аналізу шляхом моделювання. Тому необхідною умовою ефективного використання результатів математичного моделювання є удосконалення економічних вимірювань.

Як відомо, в економіці практично повністю відсутні однорідні елементи (однакові підприємства, однакові за своїми потребами та смаками споживачі), а тому введення певної одиниці виміру для них потребує серйозних досліджень. Значно ускладнюється проблема, коли необхідно вимірювати неоднорідну за своїм призначенням та якістю продукцію. При цьому використання фізичних одиниць вимірювання обмежується. Потрібно використовувати спеціальні економічні одиниці виміру. Наприклад, загальні обсяги виготовленої продукції можна вимірювати в оптових цінах або в роздрібних, у цінах виробника або в цінах споживача. Складніше вимірювати суспільно корисну продукцію, потреби населення. При цьому в економіці часто трапляються явища, які взагалі не підлягають вимірюванню. Будь-яка економічна модель базується на певній системі економічних вимірюваннях: первинна — виготовлена продукція, ресурси, витрати і т.ін.; вторинна — ціни на продукцію галузей, вимірювання валової продукції різних галузей, вимірювання валового внутрішнього продукту і т.ін.

Так як економічна інформація характеризує досліджувані процеси, то важливе значення має обробка цієї інформації для прийняття оптимальних рішень. Залежно від економічної інформації приймаються рішення, які задовольняють поставленим вимоги. Інформація повинна бути достовірною, вірно відображати економічні процеси. Обробку її необхідно здійснювати науковими методами і сучасним засобами.

Нині, при використанні комп'ютерної техніки, є всі можливості одержання достовірної інформації для побудови економіко-математичних моделей, розв'язку їх і прийняття оптимальних рішень.

1.4. Математичне програмування як інструментарій теорії дослідження операцій

Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming*, що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети і є інструментарієм теорії дослідження операцій. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак і розв'язуються подібними методами.

Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо). Розглянемо математичну постановка задачі математичного програмування, яку будемо використовувати у наступних розділах.

Подамо схематично довільну економічну систему у такому вигляді (рис. 1.1):

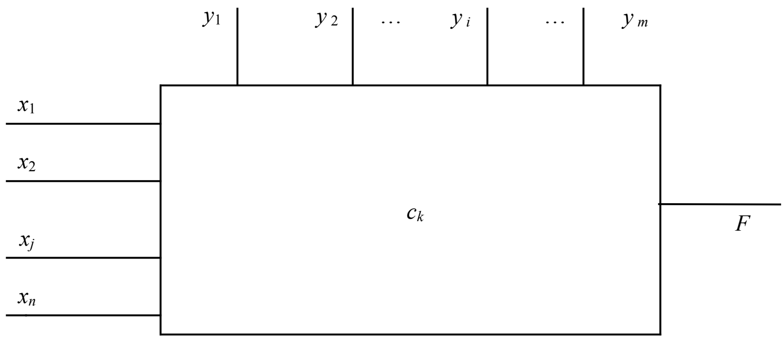


Рис. 1.1. Схема економічної системи

Параметри c_k ($k = 1, 2, ..., l$) є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як сільськогосподарське підприємство, то його параметрами є наявні ресурси (земельні угіддя, робоча сила, сільськогосподарська техніка, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур, продуктивності тварин, норми витрат ресурсів, ціни та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Частина параметрів c_k для певної системи може бути сталими величинами, наприклад, норми висіву насіння сільськогосподарських культур, норми споживання тваринами кормів тощо, а частина — змінними, тобто залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість корів, неперервною — площа посіву озимої пшениці, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою — кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j ($j = 1, 2, ..., n$), значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_i ($i = 1, 2, ..., m$), значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_m; c_1, c_2, ..., c_l). \tag{1.1}$$

Функцію F називають цільовою функцією, або функцією мети. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j}(\min) F^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ c_1, c_2, \ldots, c_l)\ . \tag{1.2}$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов’язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m; c_1, c_2, \ldots, c_l)\{\le, =, \ge\}0; \quad (i = 1, 2, \ldots, S). \tag{1.3}$$

Тут набір символів ($\le$, =, $\ge$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\le$, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу $\ge$.

Система (1.3) називається системою обмежень, або системою умов задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n). \tag{1.4}$$

Залежності (1.2)—(1.4) утворюють економіко-математичну модель економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.
2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.
3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.
4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=«, а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3), (1.4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних x_1, x_2, ..., x_n, що задовольняє умови (1.3) і (1.4), називають допустимим планом, або планом. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною стратегією економічної системи, програмою дій. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів утворює область існування планів.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається оптимальним. Оптимальний план є розв'язком задачі математичного програмування (1.2)—(1.4).

1.5. Класифікація задач дослідження операцій. Засоби кількісного аналізу моделювання економіко-математичних процесів

Важливе рішення, яке має прийняти дослідник, починаючи процес моделювання (побудови конкретної математичної моделі) полягає у визначенні класу, до якого належатиме модель, враховуючи ціль дослідження і використовуючи відповідний інструментарій для побудови.

Класифікація задач дослідження операцій та засобів кількісного аналізу моделювання економіко-математичних процесів відповідає класифікації моделей, якими вони описуються. За цільовим призначенням моделі поділяють на теоретико-аналітичні, які використовуються при дослідженні загальних властивостей і закономірностей економічних процесів (систем), і прикладні моделі, які застосовуються при розв'язанні конкретних прикладних задач.

Із врахуванням фактора часу моделі поділяються на статичні і динамічні. У статичних моделях всі залежності між величинами моделі відносяться до певного фіксованого часу, тобто вони не залежать від нього. У динамічних моделях величини моделі є функціями часу.

Сам час в економіко-математичних моделях може змінюватися неперервно або дискретно. Залежно від цього засобами моделювання є використання відповідного математичного апарату: диференційні та інтегральні рівняння для неперервного часу, різницеві рівняння для дискретного часу.

За типом математичних залежностей між величинами моделі поділяють на лінійні та нелінійні, різниця між якими істотна як з математичного, так і з теоретико-економічного погляду. Відомо, що існує багато залежностей в економіці, які мають нелінійну форму. Прикладами таких залежностей є: ефективність використання ресурсів при збільшенні виробництва, зміна попиту і споживання населення при збільшенні доходів і т.ін.

З метою спрощення моделі нелінійні співвідношення часто заміняють лінійними і, таким чином, одержують лінійні моделі, на основі яких створено теорію «лінійної економіки», яка суттєво відрізняється від «нелінійної економіки».

За співвідношеннями між екзогенними і ендогенними змінними, включених до моделі, вони поділяються на відкриті і закриті. Повністю закриті моделі, тобто ті, які не містять екзогенних змінних, на практиці трапляються рідко. Побудова таких моделей потребує повної абстрагованості від навколишнього середовища, тобто значного спрощення модельованого економічного процесу (системи), що, як правило, має зв'язки із зовнішнім середовищем. На практиці абсолютна більшість економіко-математичних моделей займає проміжне місце між відкритими і закритими.

Залежно від природи змінних, які є в розпорядженні дослідника, моделі класифікують на стохастичні (імовірнісні) та детерміновані. Формальних відмінностей між стохастичними та детермінованими моделями практично не існує. Проте природа змінних, які входять у ці моделі, може бути різною, а тому результати, здобуті під час дослідження цих моделей, дають змогу робити різні прогнози щодо поведінки модельованих об'єктів (систем, процесів).

Наприклад, детерміновані моделі дають змогу за достатнього обсягу інформації про минуле модельованої системи точно прогнозувати її поведінку в майбутньому, тоді як для стохастичних (імовірнісних) моделей за будь-якого обсягу інформації про минуле модельованої системи можна прогнозувати її поведінку в майбутньому лише з певною ймовірністю, тобто інформація, яку має дослідник у даний момент, втрачає свою цінність із плином часу.

Як для детермінованих, так і для стохастичних моделей може бути використаний різний за структурною складністю математичний апарат. У найпростіших випадках модельовані системи (процеси) можна описати системою алгебраїчних рівнянь.

У складніших випадках, коли необхідно досліджувати системи в динаміці, використовується апарат диференціальних рівнянь (звичайних або в частинних похідних). У найскладніших випадках, коли розвиток операцій (подій) залежить від великої кількості взаємозалежних випадкових факторів, аналітичні методи неефективні через їхню громіздкість, а тому в цих випадках використовують статистичне моделювання.

Строго детермінованих у своїй поведінці систем (процесів) насправді практично не існує. Усе залежить від ступеня дії випадкових чинників на поведінку цих систем, тобто на ті зміни, якими визначається їхня поведінка. За певного ступеня впливів випадкових чинників зазначені зміни трансформуються в стохастичні, тобто такі, які ніколи не можна точно виміряти, а отже, характеризуються невизначеністю поведінки.

Зауважимо, що не кожну невизначеність можна вважати випадковою, для вивчення якої необхідно залучати методи теорії ймовірностей, оскільки ця наука вивчає лише такі випадкові величини і події, яким притаманна стохастична стабільність. Це означає, що відносні частоти випадкових подій зі зростанням кількості експериментів, виявляють тенденцію наближатися до відповідних ймовірностей, а середні арифметичні випадкових величин прямують до їхніх математичних сподівань.

Отже, теорія ймовірностей вивчає лише особливий клас невизначеностей, так би мовити, доброякісних стохастичних невизначеностей, а тому й стохастичні (імовірнісні) моделі мають будуватися на базі таких випадкових змінних. Як детерміновані, так і стохастичні моделі повинні мати головну властивість, завдяки якій стає зрозумілим необхідність їх використання, — забезпечувати передбачуваність поведінки модельованих систем (процесів) у майбутньому, а не просто виконувати функцію простого їх опису.

Як показала практика, одну й ту саму абстрактну математичну модель можна використати в майже несумісних сферах людської діяльності, про що докладно йтиметься в цьому посібнику.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що вивчає теорія «Дослідження операцій»? Наведіть кілька прикладів економічних задач, що можуть бути розв'язані методами дослідження операцій.
2. Як розуміти термін «операція».
3. Що таке ефективність «операції»?
4. Що таке модель «операції»?
5. Дайте класифікацію задач дослідження операцій. Наведіть приклади.
6. Сутність і характеристика неструктурованих проблем як класу задач прийняття рішень.
7. Як математичне програмування використовується в теорії дослідження операцій. Наведіть приклади.

РОЗДІЛ 2

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення побудови лінійних моделей математичного програмування, як інструментарію дослідження операцій;
- знати основні методи розв'язання задач лінійного програмування;
- знати особливості та сучасні підходи до розв'язання задач лінійного програмування;
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі лінійного програмування, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

2.1. Приклади задач лінійного програмування

Усі задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

У даному розділі розглядається найбільш простий клас задач, а саме статичні задачі. В їх моделі використовують детерміновані дані та лінійні функції для опису взаємозв'язків між елементами. Наведемо кілька типових задач математичного програмування, сформульованих у термінах лінійного програмування.

***Задача визначення оптимального плану виробництва*:** для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску n видів продукції $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, норми витрат i-го ресурсу на виробництво одиниці j-ої продукції $a_{ij} \left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ та прибуток з одиниці j-ої реалізованої продукції $c_j \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обсяги виробництва відповідно першого, другого і т. д. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати першого ресурсу дорівнюватимуть $a_{12}x_2$ і т. д. На виробництво всіх видів продукції буде використано такий обсяг першого ресурсу: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + + a_{1n}x_n$. Ця величина має не перевищувати наявного обсягу першого ресурсу — b_1. Отже, обмеження щодо використання першого ресурсу матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$. Аналогічно записують обмеження стосовно використання всіх інших виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації виготовленої продукції всіх видів становитиме: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \le b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0 .$$

Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних економічних задач, де виникає проблема вибору найкращого варіанта розподілу обмеженої кількості ресурсів, хоча з першого погляду може здаватися, що постановка задачі не стосується виробничих процесів. Наведемо кілька конкретних прикладів виробничих задач.

Приклад 1. Фірма має 1 млн. грн. обігових коштів. Відомі витрати грошей у кожному місяці, а також обов'язкові залишки обігових коштів на кінець кожного місяця. Також передбачається, що для успішного функціонування фірма витрачатиме значно меншу суму, ніж 1 млн. грн. Отже, решту коштів можна надавати у кредит. Необхідно визначити оптимальний розподіл обігових коштів протягом кварталу для досягнення максимального прибутку за процентними ставками, якщо відомі витрати та потреби в резервах:

1.01 —31.01: витрати — 80 000 грн.; необхідний запас на 31.01 — 300 000 грн.;

1.02 —28.02: витрати — 30 000 грн.; необхідний запас на 28.02 — 200 000 грн.;

1.03 —31.03: витрати — 50 000 грн.; необхідний запас на 31.03 — 190 000 грн.

Кредит терміном на 1 місяць дає 2 % прибутку, терміном на 2 місяці — 5 %, а терміном на 3 місяці — 8 %.

Вважатимемо, що кредити надаються першого числа кожного місяця і погашаються також першого числа відповідного місяця.

Побудова економіко-математичної моделі.

Кредити терміном на один місяць можна надавати кожного місяця протягом кварталу, тому позначимо через x_{11} суму кредиту, що надано на один місяць з 1.01, аналогічно x_{12},x_{13} — суми одномісячних кредитів, що надані відповідно в другому та у третьому місяцях.

Кредити терміном на два місяці протягом першого кварталу можна надавати лише в першому і другому місяцях, тому позначимо через x_{21} суму кредиту, що надано на два місяці в січні, x_{22} — суму кредиту, що надана в лютому на два місяці. Нарешті, кредит на три місяці можна надати лише один раз із 1.01, його позначимо через x_{31}.

Розглянемо ситуацію на початку першого місяця кварталу: початкова сума 1 млн. грн. витрачатиметься на вкладення коштів у всі види кредитів, потреби в обігових коштах для господарської діяльності фірми становитимуть 80 000 грн., а на кінець місяця фірма бажає мати резерв обсягом 300 000 грн. Отже, використання коштів у січні можна описати у моделі так:

$$1\,000\,000 - x_{11} - x_{21} - x_{31} - 80\,000 \ge 300\,000 .$$

Наявні кошти в кінці місяця (окрім резерву) визначаються за формулою:

$$S1 = 1\,000\,000 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 80\,000 - 300\,000 = 620\,000 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}).$$

На початку другого місяця сума $S1$ може надаватися в кредит, але лише двох видів та має забезпечувати витрати діяльності. Одночасно на початку другого місяця повертаються кошти, що є процентами за одномісячний кредит, який було надано в січні. Враховуючи необхідність резерву на кінець другого місяця, маємо таке обмеження щодо використання коштів у лютому:

$$S1 - x_{12} - x_{22} + 1{,}02x_{11} - 30\,000 \ge 200\,000 ,$$

а наприкінці лютого обсяг наявних коштів становитиме:

$$S2 = S1 - (x_{12} + x_{22}) + 1{,}02x_{11} - 230\,000 .$$

Аналогічно запишемо використання коштів у березні:

$$S2 - x_{13} + 1{,}02x_{12} + 1{,}05x_{21} - 50000 \ge 190000 .$$

Загальна сума коштів, отриманих як проценти за надані кредити, дорівнюватиме:

$$P = 0{,}02(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 0{,}05(x_{21} + x_{22}) + 0{,}08x_{31} .$$

Загалом математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\max P = 0{,}02(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 0{,}05(x_{21} + x_{22}) + 0{,}08x_{31}$$

за умов:

$$\begin{cases} 1\,000\,000 - x_{11} - x_{21} - x_{31} - 80\,000 \ge 300\,000; \\ S1 - x_{12} - x_{22} + 1{,}02x_{11} - 30\,000 \ge 200\,000; \\ S2 - x_{13} + 1{,}02x_{12} + 1{,}05x_{21} - 50\,000 \ge 190\,000. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 (i = \overline{1,3}), (j = \overline{1,3}).$$

Приклад 2. На ринок поставляється картопля з трьох фермерських господарств за цінами відповідно 80, 75 та 65 коп. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі в господарствах відповідно витрачається по 1, 6 та 5 хвилин. Замовлено 12 т картоплі, і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалося не більше сорока хвилин. Потрібно визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставляти картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо фермери можуть виділити для продажу відповідно 10, 8 та 6 т картоплі.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо: x_1 — кількість картоплі, що буде закуплена у першому господарстві (т); x_2, x_3 — кількість картоплі, закупленої відповідно у другого та третього фермерів (т).

Поставка потрібної кількості картоплі описується рівністю:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,$$

наступне обмеження описує витрати часу на завантаження продукції:

$$x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40,$$

обмеження щодо можливостей поставок продукції з кожного господарства:

$$x_1 \le 10;$$
$$x_2 \le 8;$$
$$x_3 \le 6.$$

Вартість продукції, що закуповується, визначається як сума добутків ціни на відповідні її обсяги. Ціни 1 т картоплі відповідно дорівнюють 800, 750 та 650 грн. в даних трьох фермерських господарствах. Отже, цільову функцію можна записати так:

$$F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3.$$

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40; \\ x_1 \le 10; \\ x_2 \le 8; \\ x_3 \le 6. \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \ (i = 1, 2, 3).$$

Приклад 3. ***Задача про «дієту»:*** деякий раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного продукту — $c_j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$, кількість необхідних організму поживних речовин m та потреба в кожній i-ій речовині — $b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$. В одиниці j-го продукту міститься $a_{ij} \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\right)$ поживної речовини i. Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Позначимо через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — кількість відповідного j-го виду продукту $\left(j = \overline{1, n}\right)$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче зазначеного рівня $b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$. Економіко-математична модель матиме вигляд:

$$\min F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \geq b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Аналогічно як у виробничій задачі, економіко-математична модель задачі про «дієту» (або про суміш) також може описувати інші економічні процеси. По суті цей тип задач дає змогу знаходити оптимальне поєднання деякого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні умови.

Приклад 4. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим 76, а вміст сірки — не більшим, ніж 0,3 %. Для виготовлення такого бензину на заводі використовуються чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонентів, які змішуються, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені в табл. 2.1:

Таблиця 2.1

ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ КОМПОНЕНТ БЕНЗИНУ

Показник	Компонента бензину			
	№ 1	№ 2	№ 3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Наявний обсяг, т	700	600	500	300
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_j кількість j-го компонента в суміші (т), j = 1,2,3,4.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000.$$

Вміст сірки в суміші має не перевищувати 0,3 %:

$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000,$$

а загальна маса утвореної суміші має дорівнювати 1000 т:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

Використання кожного компонента має не перевищувати його наявного обсягу:

$$x_1 \leq 700;$$
$$x_2 \leq 600;$$
$$x_3 \leq 500;$$
$$x_4 \leq 300.$$

Собівартість суміші визначається за формулою:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4.$$

Загалом, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \ge 76\,000; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \ge 300; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000; \\ x_1 \le 700; \\ x_2 \le 600; \\ x_3 \le 500; \\ x_4 \le 300. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

Приклад 5. Учасник експедиції складає рюкзак, і йому необхідно розв'язати питання про те, які взяти продукти. У розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм^3 об'єму, до того ж необхідно, щоб загальна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса (за масою) було більше, ніж борошна принаймні удвічі, борошна не менше, ніж молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДУКТІВ

Показники	**Продукт**			
	м'ясо	**борошно**	**молоко**	**цукор**
Об'єм (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 масу (в кг) м'яса, борошна, молока і цукру відповідно.

Сумарна маса продуктів має не перевищувати 35 кг:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 35,$$

а об'єм, який вони мають займати, — не більше 45 дм^3:

$$x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 45.$$

Крім того, мають виконуватися співвідношення стосовно пропорцій за масою продуктів:

а) м'яса принаймні удвічі більше, ніж борошна, отже:

$$x_1 \ge 2x_2;$$

б) борошна не менше, ніж молока: $x_2 \ge x_3$;

в) молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру: $x_3 \ge 8x_4$.

Калорійність всього набору продуктів можна визначити так:

$$F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4.$$

Отже, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\max F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 35; \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 45; \\ x_1 \ge 2x_2; \\ x_2 \ge x_3; \\ x_3 \ge 8x_4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

Наведені приклади економіко-математичних моделей економічних процесів та явищ є навчальними. Адекватні економіко-математичні моделі будуть значно складнішими.

2.2. Загальна постановка задачі лінійного програмування

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів і явищ — так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{2.1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{2.3}$$

Потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), і цільова функція (2.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) та умови невід'ємності змінних (2.3), називається ***допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

Допустимий план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***опорним планом*** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (2.2) у вигляді рівностей, а також обмеження (2.3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, називається ***невиродженим***, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він ***вироджений***.

Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, за якого цільова функція (2.1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається ***оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

Задачу (2.1)—(2.3) можна легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) всі b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i-те обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення.

Якщо i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши ***додаткову змінну*** x_{n+1}: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k$ зводять до рівності, віднімаючи від лівої частини ***додаткову*** змінну x_{n+2}, тобто: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n — x_{n+2} = b_k$ ($x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$).

Щоб функція мети не змінилася, додаткові змінні записуються в ній з нульовими коефіцієнтами. В результаті маємо канонічну форму задачі лінійного програмування.

2.3. Форми запису задачі лінійного програмування у канонічній формі

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми Σ. Справді, задачу (2.1)—(2.3) можна подати так:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m); \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Ще компактнішим є запис задачі лінійного програмування у векторно-матричному вигляді:

$$\max(\min)\ Z = CX$$

за умов:

$$AX = A_0; \quad X \geq 0, \tag{2.7}$$

де

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},\ \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матрицею коефіцієнтів при змінних;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто задачу лінійного програмування зручно записувати у векторній формі:

$\max(\min) Z = CX$

за умов:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0; \quad X \geq 0, \tag{2.8}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є векторами коефіцієнтів при змінних.

2.4. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \tag{2.9}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

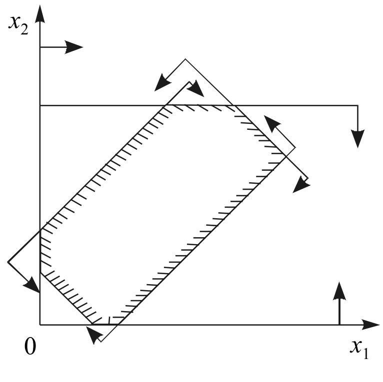


Рис. 2.1

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 2.1).

Сукупність цих точок (розв'язків) називають ***багатокутником розв'язків***, або ***областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування***. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

Якщо в системі обмежень (2.9) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ $(i = 1, 2, ...,m)$, а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), де i — номер обмеження, а j — номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину, що називається ***багатокутником розв'язків***. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (2.9) кількість змінних більша, ніж три: $x_1, x_2,\dots x_n$; тоді кожна нерівність визначає півпростір n-вимірного простору з граничною гіперплощиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, 2, ..., m$). Кожному обмеженню виду (2.9) відповідають гіперплощина та півпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, ..., n$).

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n-вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукання координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2\,x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

в n-вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур маємо у табл. 2.3:

Таблиця 2.3

ПОКАЗНИКИ ВИРОЩУВАННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрових буряків, ввівши такі позначення:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — шукана площа посіву цукрових буряків, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \tag{2.10}$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \le 20; \tag{2.11}$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270; \tag{2.12}$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80; \tag{2.13}$$

$$x_2 \ge 5; \tag{2.14}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.15}$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рис. 2.2.

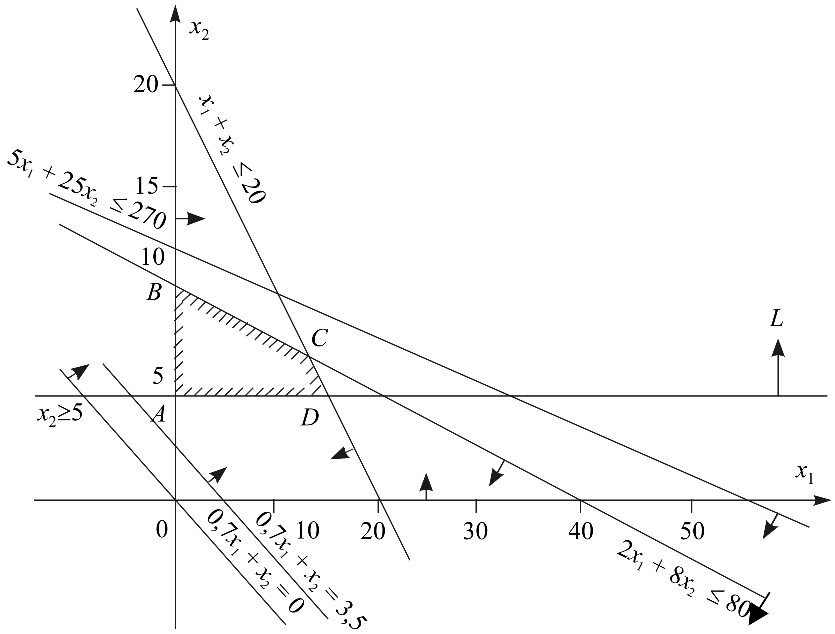


Рис. 2.2. Область допустимих розв'язків задачі

Область допустимих розв'язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад x_1 + x_2 $F' = -5 \cdot 8{,}5 - 2 \cdot 5 - 12 = -64{,}5$ 20, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю x_1 + x_2 $\max Z = 50x_1 + 30x_2$ 20. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2$ $\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160 \\ x_1 - x_2 \le 30 \\ x_2 \le 80 \end{cases}$ 20 підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2$ $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$ 20. Цей факт на рис. 2.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (2.11)—(2.15). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв'язків задачі (на рис. 2.2 — чотирикутник *ABCD*). Цільова функція $Z = 0{,}7x_1 + x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню *Z*. Зокрема, якщо $Z = 0$, то маємо $0{,}7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z = 3{,}5$, то маємо пряму $0{,}7x_1 + x_2 = 3{,}5$.

2.5. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формулюються у вигляді чотирьох теорем без доведення.

Властивість 1. (Теорема 1.) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2. (Теорема 2.) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3. (Теорема 3.) Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \le n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 4. (Теорема 4.) Якщо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + {} + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$, що відповідають додатним x_j, є лінійно незалежними.

З наведених властивостей можна зробити такі висновки:

якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на багатокутнику розв'язків, то:

1) існує така кутова точка багатокутника розв'язків, у якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;

2) кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тому для розв'язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

2.6. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Розглянемо задачу.

Знайти

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{2.17}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m. \end{cases} \tag{2.18}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \tag{2.19}$$

Припустимо, що система (2.18) за умов (2.19) сумісна і багатокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (§ 2.4) кожне i-те обмеження-нерівність у (2.18) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2, …, m). Системою обмежень (2.18) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють усі обмеження задачі — ***багатокутник розв'язків***.

Умова (2.19) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2$ =const.

Скористаємося для графічного розв'язання задачі лінійного програмування властивостями, наведеними в § 2.5:

якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язків. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (2.17) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.18) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв’язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв’язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині *A* багатокутника розв’язків (рис. 2.5).

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка *AB* (рис. 2.6). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори (рис. 2.7) або система обмежень задачі несумісна (рис. 2.8).

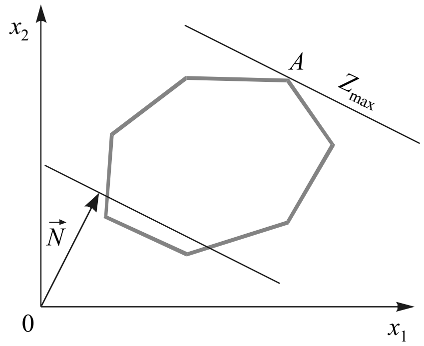


Рис. 2.5

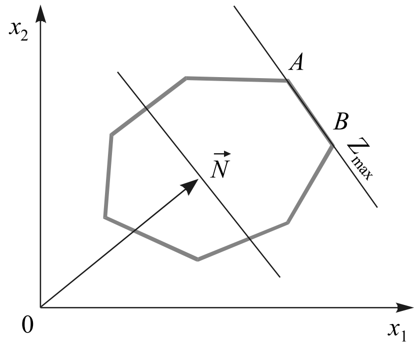


Рис. 2.6

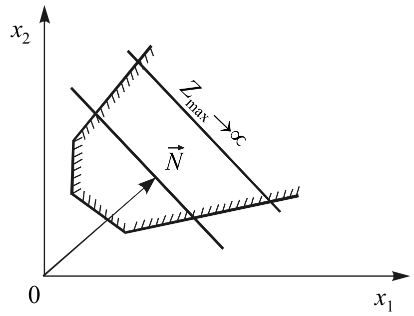


Рис. 2.7

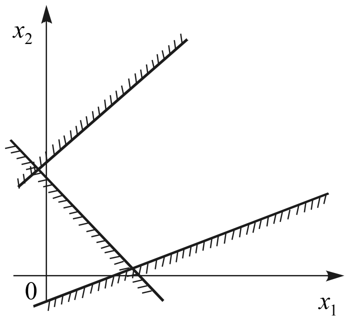


Рис. 2.8

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв’язків (рис. 2.9 і 2.10). На рис. 2.9 у точці *B* маємо максимум, на рис. 2.10 у точці *A* — мінімум, на рис. 2.11 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.

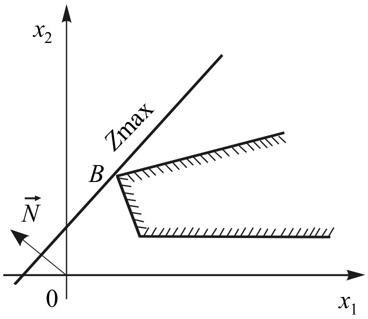


Рис. 2.9

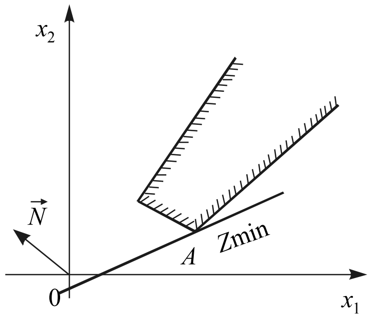


Рис. 2.10

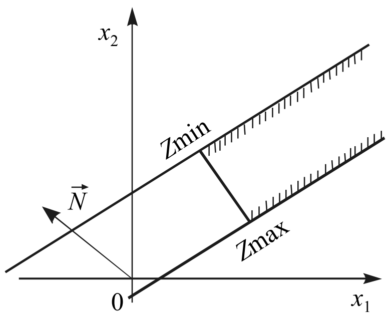


Рис. 2.11

Розв'язувати графічним методом можна також задачі лінійного програмування n-вимірного простору, де $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних кількість змінних n на дві більша, ніж число обмежень m, тобто $n - m = 2$.

Розглянемо застосування графічного методу для розв'язання економічних задач.

Приклад 6. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 і 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в табл. (2.4).

Таблиця 2.4

ТРИВАЛІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ КНИЖКОВИХ ПОЛИЦЬ

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	А	В	
1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, що максимізують прибуток фірми. Для цього слід побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В. Нехай x_1 — кількість полиць моделі А, виготовлених фірмою за тиждень, а x_2 — кількість полиць моделі В. Цільова функція задачі — максимум прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона подається так:

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2 .$$

Обмеження задачі враховують тривалість роботи верстатів 1 і 2 для виготовлення продукції та попит на полиці різних моделей.

Обмеження на тривалість роботи верстатів 1 і 2 мають вид:

для верстата 1:

$$30x_1 + 15x_2 \le 2400 \text{ (хв)};$$

для верстата 2:

$$12x_1 + 26x_2 \le 2160 \text{ (хв)}.$$

Обмеження на попит записуються так:

$$x_1 — x_2 \le 30 \text{ та } x_2 \le 80.$$

Загалом економіко-математичну модель цієї задачі можна записати так:

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2 \qquad (2.20)$$

за умов:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400; & (2.21) \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160; & (2.22) \\ x_1 - x_2 \le 30; & (2.23) \\ x_2 \le 80. & (2.24) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0. \qquad (2.25)$$

Ця економіко-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Розв'язання. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі. Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 2.14). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 2.14 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша півплощина.

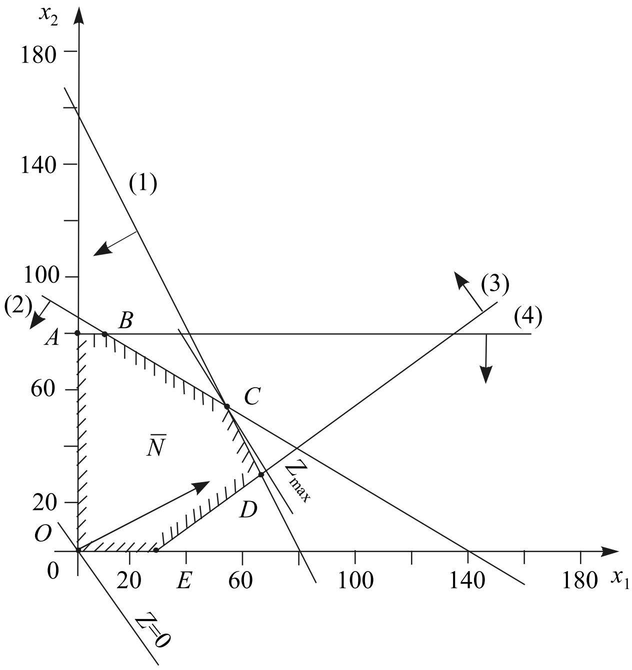


Рис. 2.14

Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі — шестикутник *OABCDE*. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника *OABCDE*, в якій цільова функція *Z* набирає найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). У нашій задачі вектор $\vec{N} = (50; 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції *Z*, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ паралельно самій собі згідно з напрямом вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 2.14 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника *OABCDE* є точка *C*. Координати цієї точки є оптимальним планом задачі, тобто такими обсягами виробництва книжкових полиць видів А та В, що забезпечують максимум прибутку від їх реалізації за даних умов.

Координати точки *C* є розв'язком системи рівнянь (2.17) і (2.18):

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50; 60)$; $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі A та 60 — моделі B, то вона отримає максимальний прибуток — 4300 у. о. Це потребуватиме повного використання тижневих ресурсів робочого часу верстатів 1 і 2.

Приклад 7. Для невеликої птахоферми потрібно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких вирощують з 4-х до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що потижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що за 4 тижні курча споживає не менше 500 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, беручи до уваги лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість маємо у табл. 2.5.

Таблиця 2.5

ПОЖИВНІСТЬ ТА ВАРТІСТЬ КОРМІВ

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, у. о.
	білку	клітковини	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини.

Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимоги до загальної маси кормової суміші та її поживності.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 — маса зерна, а x_2 — соєвих бобів (у кг) у готовій кормовій суміші.

Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити понад 500 кг, тобто

$$x_1 + x_2 \geq 500.$$

Розглянемо обмеження щодо поживності кормової суміші.

Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10x_1 + 50x_2 \geq 20\ (x_1 + x_2),$$

а також не більше як 5 % клітковини:

$$2x_1 + 8x_2 \leq 5\ (x_1 + x_2).$$

Загалом математична модель задачі оптимізації кормового раціону має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}40x_1 + 0{,}90x_2 \tag{2.26}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 500; & (2.27) \\ -10x_1 + 30x_2 \geq 0; & (2.28) \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 0. & (2.29) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \tag{2.30}$$

Розв'язання. Графічну інтерпретацію задачі подано на рис. 2.15. Множина допустимих її розв'язків необмежена. Для вектора $\vec{N} = (0{,}4; 0{,}9)$ можна змінити масштаб, наприклад, $\vec{N} = (200; 450)$. Найменшого значення цільова функція Z досягає в точці A, що лежить на перетині граничних прямих, які відповідають обмеженням (2.27) і (2.28). Визначимо її координати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500; \\ -10x_1 + 30x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 375; \\ x_2 = 125. \end{cases}$$

Отже, $X^* = (375; 125)$; $\min Z = 0{,}4 \cdot 375 + 0{,}9 \cdot 125 = 262{,}5$.

Згідно з відшуканим оптимальним планом задачі для того, щоб отримати 500 кг кормової суміші мінімальної вартості (262,50 у. о.), потрібно взяти 375 кг зерна та 125 кг соєвих бобів.

За такого співвідношення компонентів кормової суміші вимоги до її поживності виконуватимуться:

0,10 · 375 + 0,50 · 125 = 100 кг білка, що становить рівно 20 % загальної маси суміші;

0,02 · 375 + 0,08 · 125 = 17,5 кг клітковини в кормовій суміші, що становить 3,5 % її маси і не перевищує 5 %.

Приклад 8. Фірма виготовляє з одного виду сировини два продукти A та B, що продаються відповідно за 8 і 15 копійок за упаковку. Ринок збуту для кожного з них практично необмежений. Сировина для продукту A обробляється верстатом 1, а для продукту B — верстатом 2. Потім обидва продукти упаковуються на фабриці. Схему виробництва продуктів A та B зображено на рис. 2.16.

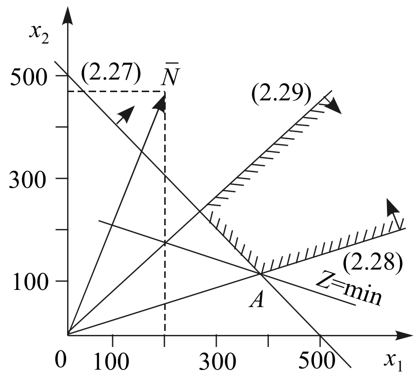


Рис. 2.15

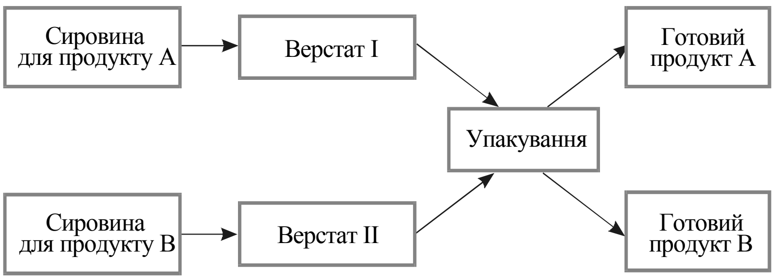


Рис. 2.16. Схема виготовлення продуктів

Ціна 1 кг сировини — 6 копійок. Верстат 1 обробляє за годину 5 т сировини, а верстат 2— 4 т сировини із втратами, що становлять відповідно 10 і 20 %. Верстат 1 може працювати 6 год на день, причому його використання коштує 288 грн/год; верстат 2—5 год на день, що коштує 336 грн/год.

Маса продукту A в одній упаковці дорівнює 1/4 кг, а продукту B — 1/3 кг. Фабрика може працювати 10 год на день, щогодини упаковуючи 12 000 одиниць продукту A або 8000 одиниць продукту B. Вартість її роботи протягом 1 год становить 360 грн.

Необхідно відшукати такі значення x_1 та x_2 обсягів використання сировини для виготовлення продуктів A та B (у тоннах), які забезпечують найбільший щоденний прибуток фірми.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 та x_2 — відповідно обсяги сировини, використовувані для виготовлення продукту A та B за один день, т.

Запишемо обмеження задачі. Згідно з умовою обмеженими ресурсами є тривалість використання верстатів 1 і 2, а також тривалість роботи фабрики з упакування продуктів A та B.

1. Обмеження на використання верстата 1.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактична тривалість використання верстата 1 з обробки сировини для виготовлення продукту A має не перевищувати 6 год., тобто:

$$\frac{\text{Обсяг сировини для виготовлення продукту А, т}}{\text{Продуктивність верстата, т/год}} \le 6 \text{ год}.$$

Математично це запишеться так:

$$x_1 / 5 \le 6, \text{ або } x_1 \le 30.$$

2. Обмеження щодо використання верстата 2 виразимо аналогічно:

$$x_2 / 4 \le 5, \text{ або } x_2 \le 20.$$

3. Обмеження щодо тривалості роботи фабрики з упакування продуктів A та B.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактична кількість часу, витраченого на упакування продуктів A та B, має не перевищувати 10 год на день:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Кількість сировини для виготовлення продукту А –}\\ \text{– Втрати сировини під час обробки, т}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Маса упаковки продукту А, т} \times\\ \times \text{ Продуктивність під час упакування продукту А, шт./год}\end{array}} +$$

$$+ \frac{\begin{array}{c}\text{Кількість сировини для виготовлення продукту В –}\\ \text{– Втрати сировини під час обробки, т}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Маса упаковки продукту В, т} \times\\ \times \text{ Продуктивність під час упакування продукту В, шт./год}\end{array}} \le 10 \text{ год}.$$

Математично це запишеться так:

$$\frac{x_1 - 0{,}1x_1}{1/4000 \cdot 12000} + \frac{x_2 - 0{,}2x_2}{1/3000 \cdot 8000} \le 10,$$

або:

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \le 10,$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 100.$$

Побудуємо цільову функцію задачі. Прибуток фірми дорівнює різниці між доходом від реалізації виготовленої продукції та витратами на її виробництво.

1. Дохід від виробництва продуктів А та В визначається так:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Обсяг продукту,}\\ \text{що надходить на упакування, т}\end{array}}{\text{Маса упаковки продукту, т}} \times \text{Ціна однієї упаковки, ðð},$$

або

$$\frac{x_1 - 0{,}1x_1}{1/4000} \cdot 0{,}08 + \frac{x_2 - 0{,}2x_2}{1/3000} \cdot 0{,}15\,.$$

Загальний дохід дорівнює $288x_1 + 360x_2$.

2. Витрати на сировину визначаємо як загальну кількість сировини в тоннах, використовуваної для виробництва продуктів А та В, помножену на вартість 1 т сировини у грн:

$$60\,(x_1 + x_2) = 60x_1 + 60x_2\,.$$

3. Витрати, пов'язані з використанням верстатів 1 і 2, визначаємо множенням фактичної тривалості роботи верстата з обробки сировини на вартість 1 год роботи відповідного верстата:

$$\frac{x_1}{5} \cdot 288 + \frac{x_2}{4} \cdot 336 = \frac{288}{5} x_1 + 84x_2\,.$$

4. Витрати, пов'язані з упакуванням продуктів А та В, дорівнюють добутку фактичної тривалості роботи фабрики ($0{,}3x_1 + + 0{,}3x_2$) на вартість 1 год її роботи, яка становить 360 грн:

$$360\,(0{,}3x_1 + 0{,}3x_2) = 108x_1 + 108x_2.$$

Беручи до уваги всі складові цільової функції, можна записати математичний вираз прибутку фірми за день:

$$Z = (288x_1 + 360x_2) — (60x_1 + 60x_2) — (288/5x_1 + 84x_2) — (108x_1 + + 108x_2) = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2).$$

Отже, маємо такий остаточний запис економіко-математичної моделі:

$$\max Z = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2) \qquad (2.31)$$

за умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 100; & (2.32) \\ x_1 \le 30; & (2.33) \\ x_2 \le 20; & (2.34) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0. \qquad (2.35)$$

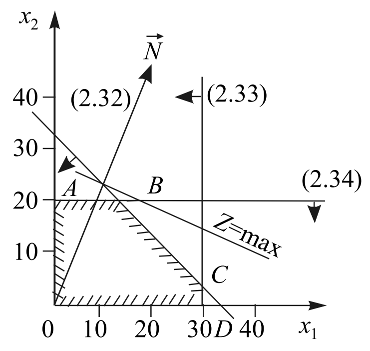


Рис. 2.17

Незважаючи на порівняно складний процес моделювання, математично ця задача дуже проста й легко розв'язується графічно.

Розв'язання. Графічне розв'язання задачі ілюструє рис. 2.17.

Областю допустимих планів, що утворюється системою обмежень задачі, є багатокутник *ABCDO*. Найбільшого значення цільова функція досягає у вершині B. Координати цієї точки визначаються розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 100; \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 40/3; \\ x_2 = 20. \end{cases}$$

Оптимальний план задачі: $X^* = (40/3; 20)$; max Z = 2992 грн.

Отже, для того, щоб отримати найбільший денний прибуток 2992 грн., фірма має обробляти 40/3 тис. кг сировини, виробляючи продукт А, і 20 тис. кг — виробляючи продукт В. За такого оптимального плану випуску продукції верстат 2 працюватиме 20/4 = 5 год на день, тобто з повним навантаженням, а верстат 1 працюватиме лише 40/15 = 2 год 20 хв щодня.

2.7. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод для визначення оптимального плану задач лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інший метод. З властивостей розв'язків задачі лінійного програмування відомо: оптимальний розв'язок задачі має знаходитись в одній з кутових точок багатогранника допустимих розв'язків. Тому найпростіший спосіб відшукання оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (допустимих планів задачі, які ще називають опорними). Порівняння вершин багатогранника можна здійснювати тільки після відшукання якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план. Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з n векторів $A_1, A_2, ..., A_n$. Отже, загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Задачі, що описують реальні економічні процеси, мають велику розмірність, і простий перебір всіх опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних ЕОМ. Тому необхідне використання методу, який уможливлював би скорочення кількості обчислень. 1949 року такий метод був запропонований американським вченим Дж. Данцігом — так званий симплексний метод, або ***симплекс-метод***.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв'язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод — це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,...,n).$$

Не порушуючи загальності, допустимо, що система рівнянь містить перші m одиничних векторів. Отримаємо:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ x_2 \ + a_{2,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ \quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.37}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,...,n). \tag{2.38}$$

Система обмежень (2.37) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + ... + x_nA_n = A_0, \tag{2.39}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2,..., A_m$ — лінійно незалежні одиничні вектори m-вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і становлять базис цього простору. Тому в розкладі (2.39) базисними змінними будуть $x_1, x_2,..., x_m$, а інші змінні — вільні. Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0,..., x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$, а вектори $A_1, A_2,..., A_m$ — одиничні, то отримаємо один із розв'язків системи обмежень (2.37):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2,..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0,..., x_n = 0), \tag{2.40}$$

тобто допустимий план.

Такому плану відповідає розклад

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0, \tag{2.41}$$

де $A_1, A_2,..., A_m$ — лінійно незалежні вектори і за властивістю 3 розв'язків задачі лінійного програмування (§ 2.5) план X_0 є кутовою точкою багатогранника розв'язків, а отже, може бути початковим опорним планом.

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (2.40), перейти до наступного опорного плану, що відповідає цілеспрямованому процесу перебору кутових точок багатогранника розв'язків.

Оскільки $A_1, A_2,..., A_m$ є базисом m-вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (2.39) може бути розкладений за цими векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i, \ j = 1,2,..., n.$$

Розглянемо такий розклад для довільного небазисного вектора, наприклад, для A_{m+1}:

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + \ldots + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \qquad (2.42)$$

Припустимо, що у виразі (2.42) існує хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i,m+1}$.

Введемо деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (2.42) і віднімемо результат з рівності (2.41). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \qquad (2.43)$$

Отже, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1}; \ldots x_m - \theta x_{m,m+1}; \theta; 0, \ldots, 0)$$

є планом задачі у тому разі, якщо його компоненти невід'ємні. За допущенням $\theta > 0$, отже, ті компоненти вектора X_1, в які входять $x_{i,m+1} \le 0$, будуть невід'ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні $x_{i,m+1}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$. Тобто необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, за якого для всіх $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід'ємності плану задачі:

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \ge 0. \qquad (2.44)$$

З (2.44) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \le \dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$. Отже, вектор X_1 буде планом задачі для будь-якого θ, що задовольняє умову:

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

де мінімум знаходимо для тих *i*, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити більше ніж *m* додатних компонент, тому в плані X_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Допустимо, що $\theta = \theta^* = \min_i \dfrac{x_i}{x_{i,m+1}}$ для деякого значення *i*, тоді відповідна компонента плану X_1 перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто:

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (2.43):

$$(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{2,m+1})A_2 + \ldots + (x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{m,m+1})A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}}A_{m+1} = A,$$

якщо позначити $x_i - \dfrac{x_1}{x_{1,m+1}}x_{i,m+1} = x'_i$ $(i = \overline{2,m})$, $\dfrac{x_1}{x_{1,m+1}} = x'_{m+1}$, то рівняння можна подати у вигляді:

$$x'_2A_2 + x'_3A_3 + \ldots + x'_mA_{m+1} + x'_{m+1}A_{m+1} = A_0,$$

якому відповідає такий опорний план:

$$X_2 = (0; x'_2; x'_3; \ldots; x'_m; x'_{m+1}; 0; \ldots; 0).$$

Для визначення наступного опорного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* > 0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Отже, узагальнюючи розглянутий процес, можемо висновувати: визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який слід ввести в базис, і вектора, який необхідно вивести з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана—Гаусса.

Слід зазначити, що для випадку, коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (2.42) всі $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, не існує такого значення $\theta > 0$, яке виключало б один з векторів. У такому разі план X_1 містить m+1 додатних компонент, отже, система векторів $A_1, A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв'язків. Функціонал не може в ній набирати максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків.

Симплексний метод представляє собою направлений перебір опорних планів, тобто перехід від одного плану до іншого, який є хоча б не гіршим від попереднього за значенням функціонала. Отже, окремим питанням стає вибір вектора, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (2.36)—(2.38).

Припустимо, що вона має опорні плани і вони є невиродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (2.40):

$$X_0 = (x_1 = b_1,\, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m,\, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0).$$

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0 \qquad (2.45)$$

та значення функціонала:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_m x_m = F(X_0). \qquad (2.46)$$

Кожен з векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ можна розкласти за векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + ... + x_{mj} A_m = A_j \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2.47)$$

тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення функціонала:

$$F_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + ... + c_m x_{mj} \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2.48)$$

Позначимо через c_j коефіцієнт функціонала, що відповідає вектору A_j, та $\Delta_j = F_j - c_j$ (їх називають оцінками відповідних векторів плану) $(j = \overline{1,n})$. Тоді справедливим є таке твердження (***умова оптимальності плану*** задачі лінійного програмування): якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j $(j = \overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову:

$$\Delta_j = F_j - c_j \ge 0, \qquad (2.49)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (2.36)—(2.38).

Аналогічно формулюється умова оптимальності плану задачі на відшукання мінімального значення функціонала: якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів A_j $(j = \overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \le 0, \qquad (2.50)$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування.

Отже, для того, щоб план задачі лінійного програмування був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки $\Delta_j = F_j - c_j$ були невід'ємними для задачі на максимум і не додатними для задачі на мінімум.

Умови оптимальності планів задач лінійного програмування є наслідками двох теорем. Скориставшись введеними в даному параграфі допущеннями та позначеннями, сформулюємо відповідні теореми, а також наведемо їх доведення.

Теорема 5 . Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна відшукати такий план *X*, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) > F(X_0)$.

Доведення. Помножимо (2.47) і (2.48) на $\theta > 0$ і віднімемо результати відповідно з (2.45) і (2.46). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0; \qquad (2.51)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + ... + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j == F(X_0) - \theta(F_j - c_j) = F(X_0) - \theta F_j + \theta c_j. \quad (2.52)$$

У співвідношенні (2.52) до обох частин додається величина θc_j для $j = \overline{1,n}$. У (2.51) $x_1, x_2, ..., x_m$ додатні, тому завжди можна знайти таке $\theta > 0$, що всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, ..., A_m, A_j$ були б невід'ємними, інакше кажучи, отримати новий план задачі виду:

$X = (x_1 - \theta x_{1j}; x_2 - \theta x_{2j}; ...; x_m - \theta x_{mj}; \theta; 0; ...; 0)$, якому згідно з (2.52) відповідає таке значення функціонала:

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - c_j). \qquad (2.53)$$

Оскільки за умовою теореми $F_j - c_j < 0$ і $\theta > 0$, то $F(X) > F(X_0)$, що й потрібно було довести.

Якщо розглядається задача на відшукання мінімального значення цільової функції, то формулюється така теорема.

Теорема 6. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна побудувати такий план *X*, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) < F(X_0)$.

Доведення аналогічне попередньому.

2.8. Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану задачі лінійного програмування, за допомогою симплексного методу знайти оптимальний план.

Продовжимо розгляд задачі (2.36)—(2.38), опорний план якої $X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0)$. Для дослідження даного плану на оптимальність (за умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування) необхідно вектори $A_j \ (j = \overline{1,n})$ системи обмежень (2.37) розкласти за базисними векторами $A_1, A_2, ..., A_m$ і розрахувати значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Всі подальші обчислення зручно проводити в ***симплексній таблиці*** (табл. 2.6).

У стовпці «Базис» записані змінні, що відповідають базисним векторам, а в стовпці «$С_{баз}$» — коефіцієнти функціонала відповідних базисних векторів. У стовпці «План» — початковий опорний план X_0, у цьому ж стовпці в результаті обчислень отримують оптимальний план. У стовпцях $x_j \ (j = \overline{1,n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного *j*-го вектора за базисом, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі (2.37). У (*m+1*)-му рядку в стовпці «План» записують значення функціонала для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j — значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають ***оцінковим***.

Значення $F(X_0)$ знаходять підстановкою компонент опорного плану в цільову функцію, а значення $F(X_j)$ — при підстановці коефіцієнтів розкладу кожного *j*-го вектора за векторами базису, тобто ці значення в табл. 2.6 отримують як скалярний добуток:

$$F(X_0) = C_{баз} X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i;$$

$$F_j = F(X_j) = C_{баз} X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \ j = 1,2,...,n,$$

де c_i — коефіцієнти функціонала, що відповідають векторам базису.

Таблиця 2.6

ПЕРША СИМПЛЕКСНА ТАБЛИЦЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

	Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b_l	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lj}	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j — c_j \geq 0$		$F(X_0)$	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_k	…	Δ_n	

Після заповнення табл. 2.6 розраховують значення оцінок плану (останній рядок): $\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) - c_j,\quad j = 1,2,...,n$. Потім згідно з умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ (для задачі на максимум), то план є оптимальним. Допустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціонала. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню до базису підлягає вектор, який вибирається як $\min(F_j - c_j)$. Мінімум знаходять для тих індексів *j*, де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів до базису включають той, якому відповідає максимальне значення функціонала.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ всі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, то це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному разі являє собою необмежену область і розв'язком задачі є $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для *k*-го вектора $m \leq k \leq n$. Тоді до базису включається вектор A_k. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для того, щоб вибрати вектор, який необхідно вивести з базису, розраховують останній стовпчик табл. 2.6 — значення θ_i.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}},\ i = 1,2,...,m,\ a_{ik} > 0.$$

З розрахованих значень необхідно вибрати найменше $\theta^* = \min \theta_i,\ i = 1,2,...,m,\ a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають *i*-ий вектор, якому відповідає θ^*.

Допустимо, що $\theta^* = \min \theta_l = \frac{b_l}{a_{lk}}$ відповідає вектору, що знаходиться в *l*-му рядку табл. 2.6. Відповідний рядок симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиці a_{lk}, який називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{lk} і методу Жордана—Гаусса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме такий опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k, який необхідно вводити до базису, в розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k} A_1 + ... + a_{lk} A_l + ... + a_{mk} A_m. \tag{2.54}$$

Вектор A_l виходить з базису, і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (2.54):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}}\left(A_k - a_{1k}A_1 - ... - a_{mk}A_m\right). \qquad (2.55)$$

Розклад вектора A_0 за початковим базисом має вигляд:

$$A_0 = b_1A_1 + ... + b_lA_l + ... + b_mA_m\,. \qquad (2.56)$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (2.55) у рівняння (2.56), маємо:

$$A_0 = b_1A_1 + ... + b_l\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - ... - a_{mk}A_m)\right] + ... + b_mA_m =$$

$$= \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + ... + \frac{b_l}{a_{lk}}A_k + ... + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m\,.$$

Отже, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} b_i' = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i \neq j); \\ b_k' = \dfrac{b_l}{a_{lk}} \qquad (i = j). \end{cases} \qquad (2.57)$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j}A_1 + ... + a_{lj}A_l + ... + a_{mj}A_m\,. \qquad (2.58)$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (2.55) у (2.58):

$$A_j = a_{1j}A_1 + ... + a_{lj}\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - ... - a_{mk}A_m)\right] + ... + a_{mj}A_m =$$

$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + ... + \frac{a_{lj}}{a_{lk}}A_k + ... + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m =$$

$$= a_{1j}'A_1 + ... + a_{kj}'A_k + ... + a_{mj}'A_m\,.$$

Новий план: $X_1 = (x_1 = a_{1j}';...;x_k = a_{kj}';...;x_m = a_{mj}')$, де

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i \neq j); \\ a_{kj}' = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \qquad (i = j). \end{cases} \qquad (2.59)$$

Формули (2.57) та (2.59) є формулами повних виключень Жордана—Гаусса.

Отже, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1,..., A_n$ за векторами нового базису (перехід до наступного опорного плану та створення нової симплексної табл. 2.7), необхідно:

1) розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язувальний елемент;

2) розрахувати всі інші елементи за формулами повних виключень Жордана—Гаусса (правило прямокутника).

Далі слід здійснити перевірку нових значень оцінкового рядка. Якщо всі F_j — $c_j \geq 0$, то план X_1 — оптимальний, інакше переходять до відшукання наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка F_j — $c_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибираючи розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок (одну ітерацію) симплекс-методом. У результаті отримаємо новий опорний план, якому відповідає те саме значення функціонала, що і для попереднього плану, тобто функціонал досягає максимального значення в двох точках багатогранника розв'язків, а отже, за властивістю 2 розв'язків задачі лінійного програмування така задача має нескінченну множину оптимальних планів.

Таблиця 2.7

ДРУГА СИМПЛЕКСНА ТАБЛИЦЯ ДЛЯ ВІДШУКАННЯ ОПОРНОГО (ОПТИМАЛЬНОГО) ПЛАНУ

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	i
1	x_1	c_1	b'_1	1	0	…	0	…	0	$a'_{1,m+1}$	…	a'_{1j}	…	a'_{1k}	…	a'_{1n}	1
2	x_2	c_2	b'_2	0	1	…	0	…	0	$a'_{2,m+1}$	…	a'_{2j}	…	a'_{2k}	…	a'_{2n}	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
l	x_l	c_l	b'_l	0	0	…	1	…	0	$a'_{l,m+1}$	…	a'_{lj}	…	a'_{lk}	…	$a'_{\ln}$	l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
m	x_m	c_m	b'_m	0	0	…	0	…	1	$a'_{m,m+1}$	…	a'_{mj}	…	a'_{mk}	…	a'_{mn}	m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_1)$	0	0	…	0	…	0	Δ'_{m+1}	…	Δ'_j	…	Δ'_k	…	Δ'_n	

Розв'язання задачі лінійного програмування на відшукання мінімального значення функціонала відрізняється лише умовою оптимальності опорного плану. До базису включають вектор, для якого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, де максимум знаходять для тих j, яким відповідають $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Всі інші процедури симплексного методу здійснюються аналогічно, як у задачі лінійного програмування на відшукання максимального значення функціонала.

2.9. Метод штучного базису

У попередніх параграфах розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m. Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2.60}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.61}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n). \tag{2.62}$$

Задача подана в канонічному вигляді і система обмежень (2.61) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$. Такі змінні називають ***штучними***. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати m. Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних.) Допустимо, що система рівнянь (2.61) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} \quad = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{2.63}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,..., n+m).$$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (2.61) область допустимих розв’язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (2.63) називають ***розширеною***, або ***М-задачею***. Розв’язок розширеної задачі збігатиметься з розв’язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (2.63) набуде вигляду (2.61) (не міститиме штучних змінних), а розв’язок розширеної задачі буде розв’язком і задачі (2.60)—(2.62).

Згідно з симплексним методом до базису вводять змінні, які покращують значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати. Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від’ємними коефіцієнтами. Тобто цільова функція набуде вигляду:

$$\max F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - Mx_{n+1} - ... - Mx_{n+m} .$$

(У разі розв’язання задачі на відшукання мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнти, які є досить великими числами. Цільова функція тоді має вигляд: $\min F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + Mx_{n+1} + ... + Mx_{n+m}$).

Припускається, що величина M є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від’ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1, m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв’язку, тобто система обмежень несумісна.

Для розв’язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оцінкові рядки яких поділені на дві частини-рядки. Тоді в ($m+2$)-му рядку записують коефіцієнти з M, а в ($m+1$)-му — ті, які не містять M. Вектор, який підлягає включенню до базису, визначають за ($m+2$)-м рядком. Ітераційний процес по ($m+2$)-му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, потім процес визначення оптимального плану продовжують за ($m+1$)-им рядком.

Взаємозв’язок між розв’язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема 7. Якщо в оптимальному плані $\hat{X}_{opt} = \; = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0, \; (i = 1, 2, ..., m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Доведення. Зазначимо, що коли план $\hat{X}_{opt}$ є оптимальним планом розширеної задачі, то план X_{opt} — план початкової задачі. При цьому

$$F(X_{opt}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n == c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - M \cdot 0 - ... - M \cdot 0 = F^*(\hat{X}_{opt}) .$$

Доведемо, що план X_{opt} — оптимальний план початкової задачі. Допустимо, що X_{opt} не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, для якого $F(X^*) > F(X_{opt})$. Звідси для вектора $\hat{X}_{opt}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$, що є планом розширеної задачі, маємо:

$$F^*(\hat{X}_{opt}^*) = F(X_{opt}^*) > F(X_{opt}) = F^*(\hat{X}_{opt}) ,$$

тобто

$$F^*(\hat{X}_{opt}^*) > F^*(\hat{X}_{opt}) .$$

Отже, план $\hat{X}_{opt}$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми, а тому зроблене допущення щодо не оптимальності плану X_{opt} є неправильним.

Отже, загалом ***алгоритм розв’язування задачі лінійного програмування симплекс-методом*** складається з п’яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки Δ_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

2.10. Геометрична інтерпретація симплексного методу

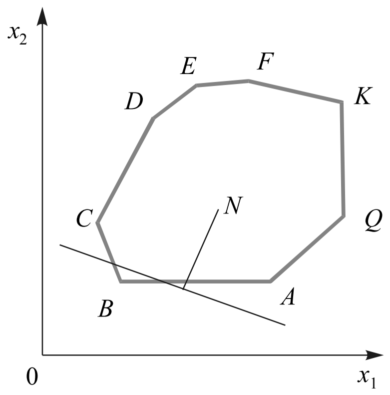


Рис. 2.18

Геометричну інтерпретацію симплексного методу можна подати двома різними способами. В одному разі ілюструється зміна базису, яка здійснюється вибором векторів, які включаються до базису та виключаються з нього. В другому, простішому та наочному випадку, процес симплексного методу інтерпретується як послідовний рух через сусідні кутові точки багатогранника розв'язків, що пов'язано зі збільшенням (зменшенням) значення цільової функції.

Дві кутові точки назвемо сусідніми, якщо вони розташовані на одному ребрі багатогранника.

Допустимо, що розглядається задача на відшукання максимального значення лінійної функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ і маємо певний багатокутник її розв'язків (рис. 2.18).

Допустимо, що початковий опорний план відповідає кутовій точці *A*. Тоді наступний крок симплексного методу приведе до точки *Q*, ($Z(Q) > Z(A)$), а в результаті ще однієї ітерації — до точки *K*, де лінійна функція набуває максимального значення. Проте, якщо початковим опорним планом буде точка *B*, то включення вектора до базису за критерієм $\min \theta_j (Z_j - C_j)$ приводить до того, що пряма $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ проходитиме через точку *C* і алгоритм симплексного методу приведе до точок *C, D, E, F, K*, тобто для отримання оптимального плану необхідно буде виконати ще чотири ітерації.

Отже, очевидно, що застосування симплексного методу не дає змоги одразу перейти від опорного плану (точки В) до оптимального (точки К). Фактично розв'язок отримують, рухаючись вздовж межі (ребер) простору розв'язків, причому не завжди такий шлях буде найкоротшим. Кількість ітерацій за реалізації симплексного алгоритму визначається вибором початкового опорного плану та кількістю кутових точок, що траплятимуться на шляху прямої $C_1x_1 + C_2x_2 = const$.

2.11. Приклади розв'язування задач симплекс-методом

Розглянемо застосування симплекс-методу для розв'язання деяких задач лінійного програмування.

Приклад 9. Продукція чотирьох видів A, B, C і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведено в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ПРОДУКЦІЇ НА ВЕРСТАТАХ, год

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції			
	A	**B**	**C**	**D**
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн — для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 — 380 машино-годин.

Ціна одиниці продукції видів A, B, C і D дорівнює відповідно 73, 70, 55 в 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох виіів, який максимізує загальний прибуток.

Побудова економіко-математичної моделі**.** Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на тривалість використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 $\quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (маш.-год);

для верстата 2 $\quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (маш.-год).

Цільовою функцією задачі є загальний прибуток від реалізації готової продукції, який розраховується як різниця між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$\max Z = (73 - (2\cdot 10 + 3\cdot 15))x_1 + (70 - (3\cdot 10 + 2\cdot 15))x_2 + (55 - (4\cdot 10 + 1\cdot 15))x_3 + (45 - (2\cdot 10 + 2\cdot 15))x_4;$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 .$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,\ 4}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1,\ 6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають недо- використаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 і 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 .$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають *базисними*, а решту — *вільними змінними* задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j \left(j = \overline{1, 6}\right)$ векторна форма запису системи обмежень цієї задачі матиме вигляд:

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 450 \cdot \vec{A}_5 + 380 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0.$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	**План**	**8**	**10**	**0**	**– 5**	**0**	**0**	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	190
Z_j — $c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - c_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8;$$
$$Z_2 - c_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10;$$
$$Z_3 - c_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$
$$Z_4 - c_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5;$$
$$Z_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$
$$Z_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-10|>|-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_2» знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min\theta = \{450/3;\ 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число $a_{12} = 3$ — *розв'язувальний елемент*. Дальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	**План**	**8**	**10**	**0**	**– 5**	**0**	**0**	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	225
x_6	0	80	5/3	0	–5/3	2/3	–2/3	1	48
$Z_j — c_j \geq 0$		1500	–4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими нижче правилами:

1. Кожний елемент розв'язувального (напрямного) рядка необхідно поділити на розв'язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.
2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.
3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.
4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за правилом прямокутника.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент (число 1);

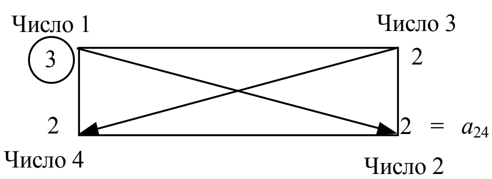
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик «x_4» у другому рядку другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів зображення визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності Z_j — $c_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	**План**	**8**	**10**	**0**	**– 5**	**0**	**0**
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$Z_j - c_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0),$$

або

$$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564.$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції А та 118 одиниць продукції В, є оптимальним. Він уможливлює отримання найбільшого прибутку за заданих умов (1564 грн.). При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Наведені три симплексні таблиці можна об'єднати в одну та послідовно записувати в ній всі ітерації.

Приклад 10. Розв'язати задачу з прикладу 9 із додатковою умовою: продукція С має виготовлятися обсягом не менш як 9 одиниць.

Розв'язання. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380; \\ x_3 \geq 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи для розв'язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Зауважимо, що нерівність типу «≥» перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Система містить лише два одиничні вектори — $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом + 1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \geq \overline{1,8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 + 0 \cdot 0 - M \cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі:

Базис	$C_{баз}$	**План**	**8**	**10**	**0**	**– 5**	**0**	**0**	**0**	**– M**	**θ**
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
x_8	$-M$	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	9
$Z_j - c_j \geq 0$		0	– 8	– 10	0	5	0	0	0	0	
		$-9M$	0	0	$-M$	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо: $Z_0 = -9M$; $Z_1 - c_1 = -8$; $Z_2 - c_2 = -10$, $Z_3 - c_3 = -M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий — числа з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у задачі 2.41, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі. Після першої ітерації з базису виведена штучна змінна x_8. Дальше розв'язування продовжуємо за алгоритмом симплексного методу.

Наступні кроки розв'язування задачі наведено у загальній таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	0	– M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	–4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	– 1	1	—

Z_j — $c_j \geq 0$		1380	–4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	–40/3
		0	0	0	0	0	0	0	0	M
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2
x_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1
Z_j — $c_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	–12
		0	0	0	0	0	0	0	0	*M*

Оптимальним планом задачі є вектор:

$$X^* = (57;\ 100;\ 9;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0),$$

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 грн.

Приклад 11. Фінансові ресурси фірми можуть використовуватися для вкладення у два проекти. За інвестування в проект А гарантується отримання через рік прибутку в розмірі 60 коп. на кожну вкладену гривню, а вкладення в проект В дає змогу отримати дохід у розмірі 2 грн. на кожну інвестовану гривню, але через два роки. За фінансування проекту В період інвестування має бути кратним двом. Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом у сумі 100 000 грн., щоб максимізувати загальний грошовий дохід, який можна отримати через три роки після початку інвестування.

Розв'язання. Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів у i-му році в проект j ($i = \overline{1,3}$; $j = 1, 2$). Побудуємо умовну схему розподілу грошових коштів протягом трьох років.

		Проект А		**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000	
	Альтернативні вкладення	x_{11}	$\longleftrightarrow$	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{11}$		—
2-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 — $(x_{11} + x_{12})$ $+1{,}6x_{11}$	
	Альтернативні вкладення	x_{21}	$\longleftrightarrow$	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{21}$		$3x_{12}$
3-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 — $(x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$ — $(x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$	
	Альтернативні вкладення	x_{31}	$\longleftrightarrow$	—
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{31}$		$3x_{22}$

Згідно з наведеною схемою можна записати математичну модель задачі.

Цільова функція: грошовий дохід фірми після трьох років інвестицій

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}.$$

Обмеження моделі сформулюємо згідно з такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року та доходу за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} \leq 100\,000$;

для 2-го року $x_{21} + x_{22} \leq 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$;

для 3-го року $x_{31} \leq 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\,000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

Отже, економіко-математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\,000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1{,}3}; \; j = 1, 2.$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування і її можна розв'язати симплекс-методом. Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою додаткових змінних x_1, x_2, та x_3, які введемо зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв'язування задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	**План**	**0**	**0**	**0**	**3**	**1,6**	**0**	**0**	**0**
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_1	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
Z_j — $c_j \ge 0$		0	–4,8	–4,8	0,44	0	0	0	3	1,6
x_{11}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
Z_j — $c_j \ge 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Оптимальним є такий план:

$$X_1^* = (x_{11} = 100\,000; \; x_{22} = 160\,000).$$

За такого плану інвестувань $Z_{\max} = 480\,000$ грн.

Але задача має ще один оптимальний план, який можна дістати, вибравши розв'язувальний елемент у стовпчику «x_{12}» останньої симплексної таблиці. Це може бути або число 1, або 1,6. Візьмемо як розв'язувальний елемент 1. Виконавши один крок перетворень симплекс-методом, дістанемо таку другу кінцеву симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_{12}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	300 000	3	0	–1,6	0	1	3	0	1
Z_j — $c_j \ge 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Звідси:

$$X_2^* = (x_{12} = 100\,000; \; x_{31} = 300\,000), Z_{\max} = 480\,000 \text{ грн.}$$

Зобразимо використання грошових коштів фірми за першим оптимальним планом задачі у вигляді схеми:

		Проект А		Проект В
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн	
	Вкладення	$x_{11} = 100\,000$		$x_{12} = 0$
	Дохід на кінець року			160 000 грн
2-й рік	Наявна сума на початок року		160 000 грн	
	Вкладення	$x_{21} = 0$		$x_{22} = 160\,000$
	Дохід на кінець року			0 грн
3-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн	
	Вкладення			
	Дохід на кінець року	x_{31}		**480 000 грн.**

Згідно з розглянутою схемою перший оптимальний план інвестування передбачає на перший рік усі кошти обсягом 100 000 грн вкласти в проект А, що дасть змогу одержати прибуток обсягом 60 000 грн, а загальна сума в кінці року становитиме 160 000 грн. На другий рік усі кошти в розмірі 160 000 гр передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма прибутку не отримає. На третій рік фінансування проектів не передбачається, але в кінці року прибуток фірми від минулорічних інвестицій проекту В становитиме 320 000 грн., а загальний грошовий дохід — 480 000 грн.

Такий же максимальний дохід можна мати, провівши інвестиції за схемою:

		Проект А		Проект В
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн	
	Вкладення	$x_{11} = 0$		$x_{12} = 100\,000$
	Дохід на кінець року		0 грн	
2-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн	
	Вкладення	$x_{21} = 0$		$x_{22} = 0$
	Дохід на кінець року		300 000 грн	
3-й рік	Наявна сума на початок року		300 000 грн	
	Вкладення	$x_{31} = 300\,000$		
	Дохід на кінець року			**480 000 грн**

Згідно з другим оптимальним планом у першому році фірма спрямовує весь капітал у розмірі 100 000 грн. на фінансування проекту В. Це уможливить одержання грошового доходу лише наприкінці другого року обсягом 300 000 грн, які на третій рік повністю інвестуються в проект А. Загальний грошовий дохід фірми за три роки діяльності за цим варіантом також становитиме 480 000 грн.

Якщо як розв'язувальний елемент в останній симплексній таблиці взяти число 1,6, то матимемо третій оптимальний план:

$$x_{11} = 50\,000; x_{12} = 50\,000;$$
$$x_{22} = 80\,000;$$
$$x_{31} = 150\,000.$$
$$Z_{\max} = 480\,000.$$

Приклад 12. Продукція фабрики випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини — 2 м. За спеціальним замовленням споживачів фабрика постачає також рулони інших розмірів, розрізуючи стандартні.

Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведено в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

ЗАМОВЛЕННЯ НА РУЛОНИ ПАПЕРУ

Замовлення	Потрібна ширина рулону, м	Кількість замовлених рулонів
1	0,8	150
2	1,0	200
3	1,2	300

Необхідно визначити оптимальний варіант розкрою стандартних рулонів, за якого спеціальні замовлення, що надходять, задовольняють повністю з мінімальними відходами паперу.

Розв'язання. Аби виконати спеціальні замовлення, які надійшли, розглянемо п'ять можливих варіантів розрізування стандартних рулонів, що можуть використовуватися в різних комбінаціях. Варіанти розкрою наведено в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ РОЗРІЗУВАННЯ СТАНДАРТНИХ РУЛОНІВ ПАПЕРУ

Потрібна ширина рулона, м	Кількість нестандартних рулонів за варіантами				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
0,8	2	1	1	0	0
1,0	0	0	1	2	0
1,2	0	1	0	0	1
Обсяг відходів, м	0,4	0	0,2	0	0,8

Нехай x_j — кількість стандартних рулонів паперу, які буде розрізано j-способом, $j = \overline{1,5}$.

Обмеження задачі пов'язані з обов'язковою вимогою повного забезпечення необхідної кількості нестандартних рулонів за спеціальними замовленнями. Якщо брати до уваги всі подані в таблиці способи розкрою, то дістанемо такі умови (обмеження) даної задачі:

1. Щодо кількості рулонів шириною 0,8 м:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 150.$$

2. Щодо кількості рулонів шириною 1 м:

$$x_3 + 2x_4 = 200.$$

3. Стосовно кількості рулонів шириною 1,2 м:

$$x_2 + x_5 = 300.$$

Цільова функція задачі — це мінімальні загальні втрати паперу під час розрізування стандартних рулонів на рулони нестандартної ширини. Математично вона має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + 0{,}2x_3 + 0x_4 + 0{,}8x_5 .$$

Математична модель задачі загалом записується так:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150; \\ x_3 + 2x_4 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Для розв'язування цієї задачі застосуємо алгоритм симплекс-методу. Оскільки задачу сформульовано в канонічній формі, запишемо її відразу у векторній формі:

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

У системі векторів маємо лише один одиничний вектор $\vec{A}_5$. Тому в перше та друге обмеження введемо штучні змінні x_6 та x_7. Розширена задача матиме вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 150; \\ x_3 + 2x_4 + x_7 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Процес розв'язання задачі симплекс-методом подано у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	**План**	**0,4**	**0**	**0,2**	**0**	**0,8**	***M***	***M***
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	0
x_7	M	200	0	0	1	2	0	0	1
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0
$Z_j - c_j \geq 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	0
		350 M	2 M	M	2 M	2 M	0	0	0
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0	0	
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	
$Z_j - c_j \geq 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	
		150 M	2 M	M	M	0	0	0	
x_1	0,4	75	1	1/2	1/2	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1		
$Z_j - c_j \geq 0$		270	0	1	0	0	0		
x_2	0	150	2	1	1	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	150	–2	0	–1	0	1		
$Z_j - c_j \geq 0$		120	–2	0	–1	0	0		

Згідно з останньою симплексною таблицею запишемо оптимальний план задачі:

$$X^* = (0;\ 150;\ 0;\ 100;\ 150), \ \min Z = 120.$$

Визначений оптимальний план передбачає: щоб у повному обсязі виконати спеціальні замовлення, які надходять на паперову фабрику, необхідно розрізати 150 стандартних рулонів другим способом, 100 рулонів — четвертим і 150 — п'ятим. За такого оптимального варіанта розкрою обсяг відходів паперу буде найменшим і становитиме 120 м.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.
2. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

3. Які є форми запису задач лінійного програмування?
4. Поясніть геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
5. Який розв’язок задачі лінійного програмування називається допустимим?
6. Поясніть, що називається областю допустимих планів.
7. Який план називається опорним?
8. Який опорний план називається невиродженим?
9. Сформулюйте основні аналітичні властивості розв’язків задачі лінійного програмування.
10. Які задачі лінійного програмування можна розв’язувати графічним методом?
11. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв’язок?
12. Суть алгоритму графічного методу розв’язання задач лінійного програмування.
13. Для розв’язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
14. Суть алгоритму симплексного методу.
15. Сформулюйте умови оптимальності розв’язку задачі симплексним методом.
16. Як вибрати спрямовуючий вектор-стовпець?
17. Як вибрати розв’язувальний елемент?
18. Суть методу Жордана—Гаусса.
19. Суть методу штучного базису.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 грн. на місяць. Одна хвилина радіо реклами коштує фірмі 5 грн., а телереклами — 90 грн. Фірма має намір використовувати радіо рекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід свідчить, що обсяг збуту, який забезпечує 1 хв. телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що забезпечує 1 хв. радіо реклами.

Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції фірми був би найбільшим.

2. Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для підвищення їх урожайності мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та їх запаси у господарстві наведені в таблиці:

Таблиця 2.7

НОРМИ ВНЕСЕННЯ МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ ТА ЇХ ЗАПАСИ

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива під культури, кг діючої речовини / га		Запас добрив, кг діючої речовини
	капуста	томати	
Фосфорні	150	400	6000
Калійні	500	300	9000

Для вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 умовних одиниць, а 1 ц томатів — 20. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів— 200 ц/га.

Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізував би прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують їх запасів.

3. Фірма виготовляє продукцію А та В, використовуючи для цього два види сировини, добові запаси якої мають не перевищувати відповідно 210 та 240 кг. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Таблиця 2.8

НОРМИ ВИТРАТ СИРОВИНИ ДЛЯ ВИГОТОВЛЕННЯ ПРОДУКЦІЇ

Сировина	Норма витрат сировини для виготовлення одиниці продукції, кг	
	А	В
1	2	5
2	***3***	4

Працівники відділу збуту фірми рекомендують, щоб виробництво продукції B становило не більш як 65 % загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціни одиниці продукції A та B дорівнюють відповідно 10 та 40 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, за якого максимізується дохід фірми.

4. Фірма виготовляє деталі видів A та B до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, тривалість використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті наведена в таблиці:

Таблиця 2.9

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ

Деталь	**Тривалість обробки деталі за верстатами, хв.**		
A	10	6	8
B	5	***20***	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі видів A та B становить відповідно 20 та 30 грн.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток фірми.

5. Підприємство виготовляє письмові столи типів A та B. Для одного столу типу A необхідно 2 м^2 деревини, а для столу типу B — 3 м^2. Підприємство може отримувати до 1200 м^2 деревини на тиждень. Для виготовлення одного столу типу A потрібно 12 хв. роботи обладнання, а для моделі B — 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 годин на тиждень. Оцінено, що за тиждень можна реалізувати не більше 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу A становить 30 грн., а типу B — 40 грн. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень, щоб прибуток підприємства за вищезазначених умов був максимальним?

РОЗДІЛ 3

ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення побудови двоїстої моделі;
- знати економічну інтерпретацію прямої та двоїстої моделей;
- знати основні теореми двоїстості та їх економічну сутність;
- знати після оптимізаційний аналіз задач лінійного програмування»;
- вміти грамотно застосовувати теорію двоїстості для аналізу лінійних моделей економічних задач, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

3.1. Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування

Поняття двоїстості задач лінійного програмування має велике значення не лише в теоретичному плані, але й широко застосовується для обґрунтування та прийняття практичних рішень. Двоїсті задачі мають чітку геометричну та економічну інтерпретацію. Теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях. Кожна задача лінійного програмування пов'язана з іншою, так званою ***двоїстою*** задачею.

Економічну інтерпретацію кожної з пари таких задач розглянемо на прикладі виробничої задачі.

Пряма задача:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \qquad .(3.3)$$

Необхідно визначити, яку кількість продукції кожного *j*-го виду x_j $(j = \overline{1, n})$ необхідно виготовляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. Причому відомі: наявні обсяги ресурсів — b_i $(i = \overline{1, m})$; норми витрат *i*-го виду ресурсу на виробництво одиниці *j*-го виду продукції — a_{ij} $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$, а також c_j $(j = \overline{1, n})$ — ціни реалізації одиниці *j-ої* продукції.

Розглянемо тепер цю саму задачу з іншого погляду. Допустимо, що за певних умов доцільно продавати деяку частину чи всі наявні ресурси. Необхідно визначити ціни ресурсів. Кожному ресурсу b_i $(i = \overline{1, m})$ поставимо у відповідність його оцінку y_i $(i = \overline{1, m})$. Умовно вважатимемо, що y_i — ціна одиниці *i*-го ресурсу.

На виготовлення одиниці *j*-го виду продукції витрачається згідно з моделлю (3.1)—(3.3) *m* видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$. Оскільки ціна одиниці *i*-го виду ресурсу дорівнює y_i $(i = \overline{1, m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці *j*-го виду продукції, обчислюється у такий спосіб:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m .$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від продажу ресурсів, перевищує суму, яку можна було б отримати від реалізації продукції, виготовленої з тих самих обсягів ресурсів, тобто:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n .$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть здійснити операцію якнайдешевше, отже, необхідно визначити мінімальні ціни одиниць кожного виду ресурсів, за яких їх продаж є доцільнішим, ніж виготовлення продукції. Загальну вартість ресурсів можна виразити формулою:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m .$$

Отже, в результаті маємо ***двоїсту задачу***:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \qquad (3.4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + a_{3n} y_3 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n; \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1,2,...m). \qquad (3.6)$$

Тобто необхідно визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного *i*-го виду ресурсу y_i, $i = \overline{1,m}$, щоб продаж ресурсів був доцільнішим, ніж виробництво продукції.

Зауважимо, що справжній зміст величин y_i, $i = \overline{1,m}$ — умовні ціни, що виражають рівень «цінності» відповідного ресурсу для даного виробництва. Англійський термін «shadow prices» у літературі перекладають як «оцінка» або «тіньова, неявна ціна».

Задача (3.4)—(3.6) є двоїстою або спряженою до задачі (3.1)—(3.3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних поглядів. Дійсно, не важко переконатися, що двоїста задача до (3.4)—(3.6) збігається з початковою. Тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу — двоїстою. Симетричність двох таких задач очевидна. Як у прямій, так і у двоїстій задачі використовують один набір початкових даних: $b_i, i = (\overline{1,m})$, $a_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$; $c_j, (j = \overline{1,n})$. Крім того, вектор обмежень початкової задачі стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі і навпаки, а рядки матриці *A* (матриці коефіцієнтів при змінних з обмежень прямої задачі) стають стовпцями матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає змінна двоїстої і навпаки.

Початкова постановка задачі та математична модель може мати вигляд як (3.1)—(3.3), так і (3.4)—(3.6). Отже, як правило, кажуть про пару ***спряжених*** задач лінійного програмування.

3.2. Правила побудови двоїстих задач

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до стандартного виду. Вважають, що задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності її системи обмежень приведені до виду «$\leq$«, а для задачі на відшукання мінімального значення — до виду «$\geq$«.

Якщо пряма задача лінійного програмування подана в стандартному вигляді, то двоїста задача ***утворюється за такими правилами***:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично:

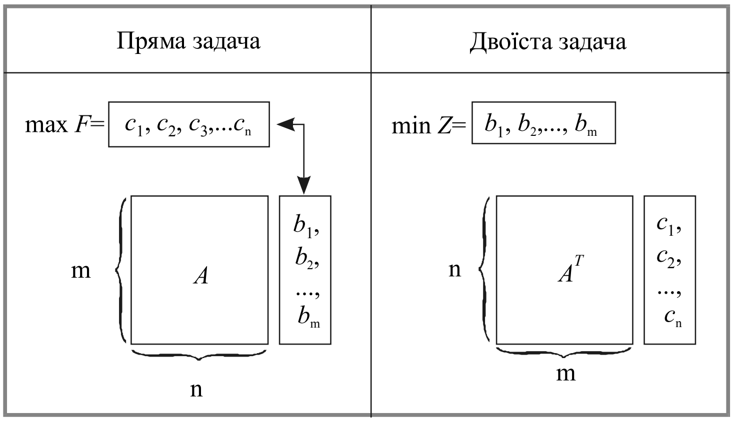


Рис. 3.1. Схема побудови двоїстої задачі до прямої

Пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої — лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком.

Всі можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач у матричній формі наведено нижче.

Пряма задача	**Двоїста задача**
Симетричні задачі	
$\max F = CX$	$\min Z = BY$
$AX \le B$	$A^TY \ge C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$
$\min F = CX$	$\max Z = BY$
$AX \ge B$	$A^TY \le C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

Несеметричні задачі

max F = CX AX = B X ≥ 0	min Z = BY $A^TY \geq C$ Y є]– ∞; ∞[
min F = CX AX = B X ≥ 0	max Z = BY $A^TY \leq C$ Y є]– ∞; ∞[

Приклад 1. До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мусять мати знак «$\leq$«. Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5. \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$\min Z = -y_1 + 5y_2;$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5; \\ -y_1 + 3y_2 \geq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Приклад 2. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$$\min F = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$$
$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \leq 8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \geq -16. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,...,5.$$

Розв'язання. Пряму задачу зведемо до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F мінімізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мають бути виду «$\geq$ «. Тому друге обмеження задачі необхідно помножити на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 \geq -8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \geq -16. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$\max Z = 20y_1 - 8y_2 - 16y_3$$
$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + 8y_3 \leq 1; \\ -4y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 6; \\ 13y_1 - 5y_2 - y_3 \leq -7; \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 1; \\ y_1 - y_2 - 9y_3 \leq 5. \end{cases}$$

$$y_1 \in]-\infty; \infty[, \ \ y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 .$$

Оскільки перше обмеження початкової задачі є рівнянням, то відповідна йому змінна двоїстої задачі y_1 може набувати як додатного, так і від’ємного значення.

3.3. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Зв’язок між оптимальними розв’язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості, які наведемо без доведення. Розглянемо задачі (3.1)—(3.3) та (3.4)—(3.6).

Лема 3.1 (основна нерівність теорії двоїстості). Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ — допустимі розв’язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X) \leq Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \qquad (3.7)$$

Лема 3.2 (достатня умова оптимальності). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ — допустимі розв’язки відповідно прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*), \qquad (3.8)$$

то X^*, Y^* — оптимальні розв’язки відповідних задач.

Теорема (*перша теорема двоїстості*). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв’язок, причому для оптимальних розв’язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто

$$\max F = \min Z .$$

Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то спряжена задача також не має розв’язку[1].

Теорема дає змогу в процесі розв’язування однієї задачі водночас знаходити план другої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток (F_{max}) підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, однак таку саму суму грошей ($Z_{\min} = F_{\max}$) воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}$, $Y \neq Y_{opt}$ на підставі основної нерівності теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

Між розв’язками спряжених задач крім рівності значень цільових функцій існує тісніший взаємозв’язок. Для його дослідження розглянемо дві симетричні задачі лінійного програмування.

Пряма задача:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \leq b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \leq b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \leq b_m. \end{cases} \qquad (3.9)$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1, n} .$$

Двоїста задача:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$
$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n. \end{cases} \qquad (3.10)$$
$$y_i \geq 0, \ \ i = \overline{1, m}.$$

[1] Зауважимо, що коли одна із задач не має допустимого розв’язку, то двоїста до неї задача також може не мати допустимого розв’язку, тобто зворотне твердження щодо другої частини теореми в загальному випадку не виконується.

Для розв'язування задач симплексним методом необхідно звести їх до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач (3.9) і (3.10) необхідно ввести відповідно m та n невід'ємних змінних. Поставимо обмеженням кожної задачі у відповідність змінні її двоїстої задачі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \left| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{matrix} \right.$$

Аналогічно:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2; \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n. \end{cases} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{matrix} \right.$$

Отримали таку відповідність між змінними спряжених задач:

Основні змінні прямої задачі							**Додаткові змінні прямої задачі**						
x_1	x_2		x_k		x_n		x_{n+1}	x_{n+2}		x_{n+l}		x_{n+m}	
$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	
y_{m+1}	y_{m+2}		y_{m+k}		y_{m+n}		y_1	y_2		y_l		y_m	
Додаткові змінні двоїстої задачі							**Основні змінні двоїстої задачі**						

Наступна теорема в літературі має назву теореми про доповнювальну нежорсткість.

Теорема ***(друга теорема двоїстості для симетричних задач)***. Для того, щоб плани X^* та Y^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнювальної нежорсткості:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{3.11}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}\,. \tag{3.12}$$

Більш очевидно взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна i-та компонента оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості. Якщо для виготовлення всієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом X^*, витрати одного i-го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) буде дорівнювати нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним».

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягові b_i, тобто його використано повністю, то він є «цінним» для виробництва, і його оцінка y_i^* буде строго більшою від нуля.

Для оптимального плану Y^* двоїстої задачі: у разі, коли деяке j-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво j-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

Як було з'ясовано в попередньому параграфі, існування двоїстих змінних уможливлює зіставлення витрат на виробництво і цін на продукцію, на підставі чого обґрунтовується висновок про доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції. Крім цього, значення двоїстої оцінки характеризує зміну значення цільової функції, що зумовлена малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Дане твердження формулюється у вигляді такої теореми.

Теорема ***(третя теорема двоїстості)***. Компоненти оптимального плану двоїстої задачі y_i^* $(i=\overline{1,m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ за відповідними аргументами $b_i, (i=\overline{1,m})$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.13}$$

Економічний зміст третьої теореми двоїстості. Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнянні речі. Очевидно, що неможливим є просте зіставлення величин, які мають різні одиниці вимірювання. Якщо взяти як приклад виробничу задачу, то цікавим є питання: як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів (можуть вимірюватися в тоннах, м^2, люд./год, га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують, на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Отже, за умови незначних змін b_i замість задачі (3.1)—(3.3) маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо через X' оптимальний план нової задачі. Для визначення $F(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, а достатньо скористатися формулою $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* — оптимальний план задачі (3.1)—(3.3).

3.4. Приклади застосування теорії двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої задач

Кожну з двох спряжених задач можна розв'язати окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та двоїстої задач уможливлюють знаходження розв'язку двоїстої задачі за наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Приклад 3. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом і визначити оптимальний план другої задачі, використовуючи співвідношення першої теореми двоїстості.

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція *F* максимізується і в системі обмежень є нерівності, то їх слід звести до виду «≤ «. Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$\min F = -y_1 + 5y_2;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5; \\ -y_1 + 3x_2 \geq 2; \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, то будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1. max $Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 4}.$$

2. Векторна форма запису системи обмежень має вигляд:

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній один вектор. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

3. Розширена задача лінійного програмування буде такою:

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - \mathrm{M}x_5;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$.

Перший опорний план задачі:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 5;\ 1),\ Z_0 = -\mathrm{M}.$$

4. Подальше розв'язування прямої задачі подано у вигляді симплексної таблиці:

Базис	**$C_{баз}$**	**План**	**–5**	**2**	**0**	**0**	**– M**	**θ**
			x_1	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**	
$\leftarrow x_5\, x_4$	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	– 1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - c_j \geq 0$		0 $-M$	5 $-M$	–2 $-M$	0 M	0 0	0 0	
$x_2 \leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	– 2/3
$Z_j - c_j \geq 0$		2	7	0	– 2	0	2 M	
$x_2\, x_3$	2 0	5/3 2/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1	
$Z_j - c_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 M	

З останньої симплекс-таблиці запишемо оптимальний план прямої задачі:

$$X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3;\ 0),\ Z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна висновувати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max Z = 10/3.$$

Компоненти вектора Y^* (оптимальний план двоїстої задачі) визначимо за формулою:

$$Y^* = \vec{C}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{C}_{баз} = (2;\ 0)$ та міститься в стовпчику «$c_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матриця D^{-1} також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис.

Отже,

$$Y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосувавши для розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв'язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Приклад 4. До наведеної задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

Розв'язання. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$\max F = y_1 + 4y_2;$$

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 \ge 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1{,}3}.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає першому рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 — лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис. 3.2).

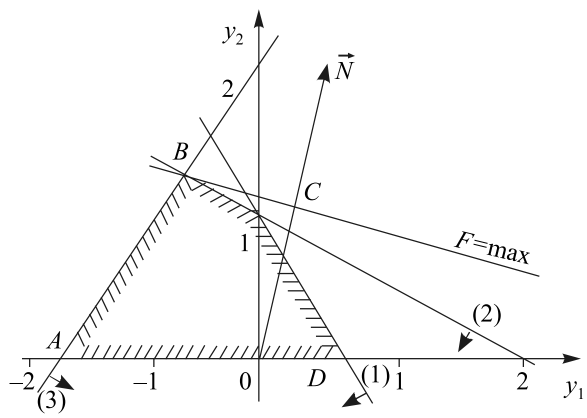


Рис. 3.2

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає в точці B багатокутника $ABCD$. Її координати визначимо розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

Отже, $Y^* = (-2/3;\ 4/3)$; $\max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2/3) + 4/3 = 0; \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2; \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1; \\ 2 = 2; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, то висновуємо, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, то друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $X^* = (0; 5/3; 2/3)$, $\min Z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$.

Умова $\min Z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0; 5/3; 2/3)$; $Y^* = (-2/3; 4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Приклад 5. Визначити, чи є оптимальними такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$\min Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3;$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

а) $X = (8/7; 3/7; 0)$; б) $X = (0; 1/5; 8/5)$; в) $X = (1/3; 0; 1/3)$.

Розв'язання. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та, допускаючи, що відповідний план X є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій будуть однаковими за величиною, то припущення правильне. Протилежне можна висновувати в таких випадках:

1. Якщо запропонований план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2. Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3. Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції F не дорівнює значенню функції Z, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

$$\max F = y_1 + 2y_2;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 12; \\ -3y_1 + 2y_2 \leq -4; \\ y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \in]-\infty; \infty[, \; y_2 \geq 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7; 3/7; 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 8/7 - 3 \cdot 3/7 + 0 = 1; \\ 8/7 + 2 \cdot 3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються, і тому $X = (8/7; 3/7; 0)$ є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді розрахуємо для нього величину цільової функції: $Z = 12 \cdot 8/7 — 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 та y_2:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі:

$$y_1 + y_2 \le 2;$$
$$4 + 4 = 8 > 2.$$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $y = (4; 4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Внаслідок цього наше допущення, що $X = (8/7; 3/7; 0)$ є оптимальним планом прямої задачі, виявилося помилковим.

2. $X = (0; 1/5; 8/5)$. Підставимо цей план у систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий, і для нього $Z = 12 \cdot 0 — 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_2 та x_3 додатні, то друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, чи виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$. Отже, перше обмеження виконується, і тому $y = (8/5; 2/5)$ є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього

$$F = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = Z.$$

З огляду на викладене можна висновувати, що $Y^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ — оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. $X = (1/3; 0; 1/3)$. Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \ne 2. \end{cases}$$

Оскільки $X = (1/3; 0; 1/3)$ є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати: а) ні; б) так, $X^* = (0; 1/5; 8/5)$, $\min Z = 12/5$; в) ні.

3.5. Після оптимізаційний аналіз задач лінійного програмування

Як зазначалося вище, задачі лінійного програмування є найпростішим типом задач математичного програмування. Лінійні економіко-математичні моделі простіші через те, що в них не беруться до уваги впливи випадкових чинників на економічні процеси (об'єкти), що моделюються; динамічні процеси замінюють їх можливими статичними аналогами; використовують лінійні функції замість нелінійних, які точніше описують залежності між економічними показниками, тощо. Очевидно, що за таких допущень більшість параметрів задач лінійного програмування є наближеними величинами. Тому важливим є питання визначення діапазону стійкості оптимальних планів прямої та двоїстої задач. У даному розділі буде розглянуто вплив змін параметрів задачі, в межах яких структура оптимального плану залишається постійною, а також методи визначення ступеня змін значень оптимального плану, якщо його структура порушується.

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{3.15}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n}, \tag{3.16}$$

для якої знайдено оптимальний план. Остання симплексна таблиця має вигляд (табл. 3.2). Не обмежуючи загальності, можна вважати, що базис утворюють перші *m* векторів.

Розглянемо вплив на оптимальний план задачі зміни таких параметрів, як компоненти вектора обмежень b_i $(i = \overline{1, m})$; коефіцієнти цільової функції c_j $(j = \overline{1, n})$; коефіцієнти матриці системи обмежень (3.15) — a_{ij} $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$.

Таблиця 3.2

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	$a_{1, m+1}$	...	$a_{1, n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	$a_{2, m+1}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	1	$a_{m, m+1}$	...	a_{mn}
$m + 1$	$F_j - c_{j \ge 0}$		F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

3.5.1. Аналіз зміни компонент вектора обмежень

Припустимо, що деяке *k*-те обмеження ($k = \overline{1, m}$) має в правій частині початкове значення — b_k. Нехай початкова величина змінилась на величину Δb_k. Отже, *k*-те обмеження в системі (3.15) буде мати вигляд:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k + \Delta b_k. \tag{3.17}$$

Для зведення (3.17) до канонічного виду необхідно ввести додаткову змінну x_{n+k} (якщо обмеження має вигляд рівняння, то як таку змінну можна розглядати невід’ємну штучну змінну).

(A). Розглянемо випадок, коли додаткова змінна в оптимальному плані небазисна і дорівнює нулю.

З першої теореми двоїстості відомо, що оптимальний план прямої задачі (як і кожен поточний опорний план) можна подати у вигляді:

$$X^* = D^{-1}B, \tag{3.18}$$

де *D* — матриця, що складена з компонент векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ останнього базису; $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*, 0, ..., 0)$ — оптимальний план задачі (3.14)—(3.16); *B* — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень в останній симплексній таблиці.

Отже, якщо змінюються компоненти вектора *B*, то змінюються також значення $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$. Однак існує діапазон, у межах якого всі компоненти $x_j^*, (j = \overline{1, m})$ залишаються невід’ємними, тобто структура оптимального плану не змінюється. Визначимо ці межі.

Вектор B' подамо у вигляді:

$$B' = B + \Delta b_k e_k, \tag{3.19}$$

де e_k — одиничний вектор-стовпчик, а в ньому одиниця — k-та компонента. Тоді, використовуючи (3.18), маємо:

$$X'^* = D^{-1}B' = D^{-1}B + \Delta b_k D^{-1}e_k = X^* + \Delta b_k d_k, \qquad (3.20)$$

де d_k — (добуток матриці D^{-1} на одиничний вектор e_k) k-ий стовпчик матриці D^{-1}.

Позначимо елементи k-го стовпчика матриці D^{-1} через $a_{1,n+k}, a_{2,n+k}, ..., a_{m,n+k}$, тоді:

$$X'^* = X^* + \Delta b_k d_k \text{ або } x_i^* + a_{i,n+k}\Delta b_k \quad (i = \overline{1,m}).$$

Остання симплексна таблиця буде мати вигляд:

Таблиця 3.3

i	Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_{n+k}	...	c_{n+m}
				x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_{n+k}	...	x_{n+m}
1	x_1	c_1	$x_1^* + \Delta b_k a_{1,n+k}$	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n+k}$	...	$a_{1,n+m}$
2	x_2	c_2	$x_2^* + \Delta b_k a_{2,n+k}$	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	$a_{2,n+k}$	...	$a_{2,n+m}$
m	x_m	c_m	$x_m^* + \Delta b_k a_{m,n+k}$	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	$a_{m,n+k}$	...	a_{mn+m}
$m+1$	$F_j - c_{j \ge 0}$		F'	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_{n+k}	...	Δ_{n+m}

Оскільки необхідно, щоб план X'^* також був оптимальним, має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент даного вектора, отже,

$$x_i^* + a_{i,n+k}\Delta b_k \ge 0 \; i = \overline{1,m}. \qquad (3.21)$$

Звідси:

$$\max_{a_{i,n+k}>0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\} \le \Delta b_k \le \min_{a_{i,n+k}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}. \qquad (3.22)$$

Тоді нижньою та верхньою границями зміни значення b_k відповідно будуть:

$$\underline{b_k} = b_k + \max_{a_{i,n+k}>0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\};$$

$$\overline{b_k} = b_k + \min_{a_{i,n+k}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}.$$

Якщо не існує жодного $a_{i,n+k} > 0$ для $i = \overline{1,m}$, то $\Delta b_k > -\infty$, а якщо не існує ні одного $a_{i,n+k} < 0$ для $i = \overline{1,m}$, то $\Delta b_k < \infty$.

Для задачі знаходження мінімального значення цільової функції та обмежень системи типу «≥» значення Δb_k змінює знак, оскільки замість нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \ge b_k + \Delta b_k$ можна розглянути рівносильну нерівність $-\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \le -(b_k + \Delta b_k)$.

Отже, для $\underline{b_k} \le b_k \le \overline{b_k}$ за будь-якого значення $k = \overline{1,m}$, що відповідає додатковій небазисній змінній x_{n+k}, структура оптимального плану задачі (3.14)—(3.16) залишиться сталою.

(B). Розглянемо випадок, коли додаткова змінна — базисна.

Якщо додаткова змінна x_{n+k} базисна, то це означає, що у виразі (3.20) d_k — одиничний вектор з k-ою компонентою, рівною одиниці, отже, система нерівностей (3.21) перетвориться в таку:

$$\begin{cases} x_1^* \ge 0; \\ x_2^* \ge 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+k}^* + \Delta b_k \ge 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^* \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, що значення додаткової базисної змінної визначає діапазон змін, в якому відповідна компонента b_k може зменшуватись (збільшуватись для обмежень типу «≥»).

Оптимальний план залишається незмінним у діапазоні $b_k + \Delta b_k$ для тих $k = \overline{1, m}$, яким відповідають додаткові базисні змінні x_{n+k}, де

$$-x_{n+k}^* \le \Delta b_k < \infty \tag{3.23}$$

для обмежень системи (3.15) типу «≥».

Для задачі знаходження мінімального значення цільової функції та обмежень системи (3.15) типу «≥» можливі зміни компонент правої частини системи обмежень визначаються з нерівності:

$$-\infty < \Delta b_k \le x_{n+k}^*, \text{ де, } k = \overline{1, m}. \tag{3.24}$$

(С). Якщо компоненти вектора вільних членів системи обмежень задачі лінійного програмування змінюються водночас для кількох чи всіх значень $k = \overline{1, m}$, то визначення границь можливих змін величин b_k $(k = \overline{1, m})$ стає надто складною проблемою. Однак у такому разі завжди можна перевірити, чи задовольняють конкретні зміни величин b_k $(k = \overline{1, m})$ систему виду:

$$X'^* = D^{-1}B + \Delta b_k D^{-1} E = X^* + \Delta b_k D^{-1} \ge 0,$$

де E — одинична матриця. Якщо позначити елементи матриці D^{-1} через $a_{i,n+k}$ $(i = \overline{1, m}; k = \overline{1, m})$, тоді:

$$X'^* = X^* + \Delta b_k D^{-1} \text{ або } x_i^* + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k} \Delta b_k, (i = \overline{1, m}).$$

Оскільки необхідно, щоб план X'^* також був оптимальним, має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент вектора, отже:

$$x_i^* + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k} \Delta b_k \ge 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

тобто:

$$\begin{cases} x_1^* + a_{1,n+1}\Delta b_1 + a_{2,n+1}\Delta b_2 + \dots + a_{m,n+1}\Delta b_m \ge 0; \\ x_2^* + a_{1,n+2}\Delta b_1 + a_{2,n+2}\Delta b_2 + \dots + a_{m,n+2}\Delta b_m \ge 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^* + a_{1,n+m}\Delta b_1 + a_{2,n+m}\Delta b_2 + \dots + a_{m,n+m}\Delta b_m \ge 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Якщо значення Δb_k $(k = \overline{1, m})$ задовольняють всі нерівності системи (3.25), то структура оптимального плану задачі (3.14)—(3.16) залишається постійною.

Для визначення верхньої та нижньої границь змін Δb_k $(k = \overline{1, m})$, в межах яких структура оптимального плану залишається постійною, необхідно розв'язати систему нерівностей (3.15). Однак у більшості випадків для знаходження оптимального плану нової задачі лінійного програмування X'^* простіше розв'язати задачу симплексним методом, змінюючи вільні члени системи (3.15) на $b_i' = b_i + \Delta b_i$ $(i = \overline{1, m})$.

(D). Для двох значень $\Delta b_r, \Delta b_s$, що задовольняють систему (3.25), причому за оптимальним планом обмеження, що відповідають b_r, b_s, у системі (3.15) виконуються як рівняння, можна визначити норму заміщення, що показує, наскільки необхідно збільшити (зменшити) величину b_s за зменшення (збільшення) b_r, щоб значення цільової функції залишилось незмінним.

З третьої теореми двоїстості відомо, що за малих значень $\Delta b_i \ (i = \overline{1, m})$, тобто за таких значень приросту, які не змінюють значення двоїстих оцінок, а отже, задовольняють систему (3.25), виконується рівняння: $y_i^* = \dfrac{\partial F}{\partial b_i}$, або

$$y_i^* = \frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}.$$

Нехай величина b_r змінилась на Δb_r. Визначимо, як необхідно змінити b_s, щоб значення цільової функції залишилось тим самим. Зміна b_r означає, що $y_r^* = \dfrac{\Delta F_r}{\Delta b_r} \Rightarrow \Delta F_r = y_r^* \Delta b_r$, аналогічно за зміни b_s на Δb_s маємо: $y_s^* = \dfrac{\Delta F_s}{\Delta b_s} \Rightarrow \Delta F_s = y_s^* \Delta b_s$. Аби значення функціонала залишалось незмінним, необхідно, щоб

$$\Delta F_r = \Delta F_s = y_r^* \Delta b_r = y_s^* \Delta b_s.$$

Звідси виразимо шуканий вплив Δb_s на Δb_r:

$$\Delta b_r = \frac{y_s^*}{y_r^*} \Delta b_s. \tag{3.26}$$

При відповідній заміні величин b_r та b_s значення цільової функції задачі (3.14)—(3.16) не зміниться, проте оптимальний план буде іншим. Нехай задача (3.14)—(3.16) описує визначення оптимального плану виробництва за умов обмежених ресурсів.

Економічний зміст нерівностей (3.22)—(3.25) полягає в тому, що вони визначають границі змін загальних обсягів ресурсів, у межах яких визначена оптимальним планом структура виробництва продукції залишається незмінною.

Рівняння (3.26) визначає, якою кількістю одного дефіцитного ресурсу можна замінити інший дефіцитний ресурс, щоб оптимальний план не змінився.

3.5.2. Аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції

Розглянемо задачу лінійного програмування (3.14)—(3.16). Допустимо, що коефіцієнт цільової функції при деякій k-ій змінній $k = \overline{1, n}$ з початковим значенням c_k змінився на величину Δc_k. Отже, цільова функція (3.14) набуде вигляду:

$$F' = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + (c_k + \Delta c_k) x_k + \ldots + c_n x_n = (C + \Delta c_k e_k) X, \tag{3.27}$$

де C, X — відповідно вектор компонент цільової функції та вектор змінних, e_k — одиничний вектор-рядок, де одиниця відповідає k-ій компоненті.

Дослідимо питання визначення границь можливих змін коефіцієнтів цільової функції, в межах яких оптимальний план не зміниться.

(A). Перший випадок — коефіцієнт c_k відповідає базисній змінній оптимального плану. За припущенням базисними змінними оптимального плану є перші m векторів останньої симплексної таблиці, отже, $k = \overline{1, m} k = \overline{1, m}$.

Зміни коефіцієнтів цільової функції в процесі реалізації симплексного методу впливатимуть лише на значення оцінкового ряду ($F_j - c_j$).

Для оптимального плану задачі (3.14)—(3.16), оцінки векторів розраховують так:

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Якщо цільова функція має вигляд (3.27), то оцінки векторів розраховуватимуться за формулою:

$$\Delta'_j = F'_j - c_j = F'(X) - c_j = \left(C + \Delta c_k e_k\right)X - c_j =$$
$$= \left(CX - c_j\right) + \Delta c_k e_k X = \left(F_j - c_j\right) + \Delta c_k e_k X = \Delta_j + a_{kj}\Delta c_k \ \ (j = \overline{1,n}),$$

де a_{kj} — елементи вектора-рядка, який є результатом множення e_k на X.

Остання симплексна таблиця набуває вигляду:

Таблиця 3.4

i	**Базис**	**Сбаз**	**План**	c_1	c_2	...	$c_k + \Delta c_k$	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	...	0	$a_{1,\,m+1}$	...	$a_{1,\,n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	...	0	$a_{2,\,m+1}$	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	x_k	$c_k + \Delta c_k$	x_k^*	0	0	...	1	...	0	$a_{k,\,m+1}$		a_{kn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	0	...	1	$a_{m,\,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j — c_j \geq 0$		F'	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δn

Для того, щоб план задачі з цільовою функцією (3.27) та системою обмежень (3.15), (3.16) також був оптимальним, має виконуватися умова:

$$\Delta_j + a_{kj}\Delta c_k \geq 0 \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.28}$$

Отже, у разі зміни коефіцієнтів цільової функції, що відповідають базисним змінним, діапазон стійкості оптимального плану визначається з (3.28):

$$\max_{a_{kj}>0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\} \leq \Delta c_k \leq \min_{a_{kj}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}. \tag{3.29}$$

Тоді нижньою і верхньою границями змін значення c_k відповідно будуть:

$$\underline{c_k} = c_k + \max_{a_{kj}>0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\};$$

$$\overline{c_k} = c_k + \min_{a_{kj}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}.$$

Якщо не існує жодного $a_{kj} > 0$ для $k = \overline{1,m}$, то $\Delta c_k > -\infty$, а якщо не існує ні одного $a_{kj} < 0$ для $k = \overline{1,m}$, то $\Delta c_k < \infty$.

Отже, за змін c_k, що відповідає базисній змінній, в інтервалі $\underline{c_k} \leq c_k \leq \overline{c_k}$, якщо $k = \overline{1,m}$, структура оптимального плану задачі (3.14)—(3.16) залишиться тією самою.

(В). Другий випадок — змінюється коефіцієнт цільової функції при небазисній змінній.

Зміна коефіцієнта цільової функції небазисної змінної впливає на оцінку лише цієї змінної. Допустимо, що це коефіцієнт c_k і за припущенням у даній задачі $k = \overline{m+1,n}$. Нехай цей коефіцієнт зміниться на величину Δc_k. Тоді для задачі з цільовою функцією (3.28) в останній симплексній таблиці зміниться лише одна оцінка, що відповідає небазисній змінній x_k:

$$\Delta'_k = \Delta_k + \Delta c_k,$$

де Δ_k — оцінка вектора при змінній x_k задачі (3.14)—(3.16). Дана оцінка має бути невід'ємною, отже:

$$\Delta'_k = \Delta_k + \Delta c_k \geq 0 .$$

Для небазисної змінної діапазон стійкості оптимального плану визначається нерівністю:

$$-\infty < \Delta c_k \leq \Delta_k . \tag{3.30}$$

Тобто для коефіцієнтів цільової функції при небазисних змінних існує лише верхня межа зміни діапазону Δc_k.

(С). Якщо коефіцієнти при змінних цільової функції (3.14) задачі лінійного програмування водночас змінюються для кількох чи всіх значень $k = \overline{1, n}$, то визначення границь можливих змін величин c_k $(k = \overline{1, n})$ здійснюється аналогічно випадку (А).

Для того, щоб план задачі з цільовою функцією, в якій одночасно змінюються кілька чи всі значення c_k $(k = \overline{1, n})$, і системою обмежень (3.15) і (3.16) також був оптимальним, має виконуватися умова, аналогічна (3.28):

$$\Delta_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \Delta c_k \geq 0 \; (k = \overline{1, n}). \tag{3.31}$$

З системи (3.31) знаходять діапазон змін Δc_k $(k = \overline{1, n})$, для якого структура оптимального плану початкової задачі буде незмінною.

Економічний зміст нерівностей (3.29)—(3.31) полягає в тому, що вони визначають границі можливих змін цін (собівартості, прибутку) одиниць кожного виду продукції, в межах яких оптимальний план виробництва продукції залишається незмінним.

3.5.3. Аналіз зміни коефіцієнтів матриці обмежень

Як правило, коефіцієнти $a_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ матриці системи обмежень задачі (3.14)—(3.16) є достовірнішими, ніж компоненти вектора цільової функції чи вектора обмежень, оскільки вони здебільшого є технологічними коефіцієнтами (нормами витрат матеріальних ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції) і не залежать від впливу випадкових чинників у такій мірі, як рівень цін чи обсяги ресурсів.

Розглянемо випадок змін лише тих коефіцієнтів, що відповідають небазисним змінним, оскільки зміна значень коефіцієнтів матриці обмежень, що відповідають базисним змінним, приводить до зміни базисної матриці *D*, і здійснити такий аналіз досить складно.

Розглянемо *k*-ту небазисну змінну ($k = \overline{1, n}$) і відповідний їй стовпчик з компонентами $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$. Якщо деяка *l*-та компонента

($l = \overline{1, m}$) (чи кілька компонент) даного вектора зміниться на величину Δa_{lk}, то за алгоритмом симплексного методу це приведе до зміни значення оцінки відповідного вектора — Δ_k.

Для оптимального плану задачі (3.14)—(3.16), оцінки векторів розраховують так:

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j ,\; j = 1,2,...,n , \tag{3.32}$$

або якщо $j = k$, маємо: $\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} - c_k$.

Позначимо через $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ *k*-й вектор-стовпчик матриці системи обмежень, що відповідає *k*-ій небазисній змінній. Нехай для деякого *k* виконується рівність:

$$A_k' = A_k + \Delta a_{lk} e_k\,. \tag{3.33}$$

Розрахуємо значення оцінки вектора A_k', підставляючи в (3.32) нові значення a_{ij}:

$$\Delta_k' = \left(\sum_{i=1}^{m} c_k a_{ik} - c_k\right) + c_k \Delta a_{lk}\,. \tag{3.34}$$

Для того, щоб план нової задачі також був оптимальним, має виконуватися умова:

$$\Delta_k' = \left(\left(\sum_{i=1}^{m} c_k a_{ik} - c_k\right) + c_k \Delta a_{lk}\right) \geq 0\,. \tag{3.35}$$

Отже, розв'язок залишається оптимальним у такому діапазоні змін a_{ek}:

$$\Delta a_{lk} \leq \frac{\Delta_k}{-c_k}, \text{ якщо } c_k < 0\,; \tag{3.36}$$

$$\Delta a_{lk} \geq \frac{-\Delta_k}{c_k}, \text{ якщо } c_k > 0\,. \tag{3.37}$$

Економічний зміст нерівностей (3.36), (3.37) полягає в тому, що вони дають змогу визначати межі можливих змін норм витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції, в яких оптимальна структура виробництва продукції залишається незмінною. Розглянутий випадок стосується зміни коефіцієнтів a_{ij} $(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n})$ для тих видів продукції, виробництво яких за оптимальним планом є недоцільним. З першого погляду здається, що таке дослідження є беззмістовним. Однак виконані розрахунки містять додаткову інформацію, яку можна використати для прийняття управлінських рішень у виробництві, приміром визначити, у який спосіб необхідно змінити норми використання ресурсів на виготовлення одиниці нерентабельної продукції для зміни асортименту виробництва.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. У чому сутність теорії двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Побудуйте просту економіко-математичну модель. Запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.
3. Які взаємоспряжені задачі називаються симетричними, а які — несиметричними? Чим вони відрізняються?
4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?
5. Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
6. Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
7. Сформулюйте третю теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
8. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.
9. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
10. Запишіть усі можливі види прямих і двоїстих задач.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

До наведених нижче задач записати двоїсті задачі лінійного програмування. Розв’язати одну із задач симплекс-методом і визначити оптимальний план другої задачі, застосовуючи співвідношення першої теореми двоїстості.

1. $\max z = -30x_1 + 10x_2$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

2. $\min z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$;

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

3. $\max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50; \\ 3x_1 + x_3 \geq 15, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}$$

РОЗДІЛ 4

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення постановки задачі цілочислового лінійного програмування;
- знати економічну інтерпретацію математичної моделі із цілочисловими змінними;
- знати загальні характеристики методів розв'язання цілочислових задач лінійного програмування;
- знати методи відтинання розв'язання задач цілочислового лінійного програмування;
- знати комбінаторні методи розв'язання задач цілочислового лінійного програмування;
- вміти грамотно застосовувати методи та моделі задачі цілочислового лінійного програмування; розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

4.1. Економічна і математична постановка задачі цілочислового лінійного програмування

Існує доволі широке коло задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах тощо.

Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як вибір послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею ***цілочислового програмування***. У тому разі, коли цілочислових значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається ***частково цілочисловою***.

До цілочислового програмування належать також ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

Умова цілочисельності є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. У даному розділі розглянемо задачі математичного програмування, в яких крім умови цілочисельності всі обмеження та цільова функція є лінійними, що мають назву ***цілочислових задач лінійного програмування***.

Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{4.3}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{4.4}$$

Слід зазначити, що у розглянутих в попередньому розділі класичній транспортній задачі та інших задачах транспортного типу (в задачах про призначення, про найкоротший шлях тощо) з цілочисловими параметрами початкових умов забезпечується цілочисловий розв'язок без застосування спеціальних методів, однак у загальному випадку вимога цілочисельності змінних значно ускладнює розв'язування задач математичного програмування.

4.2. Геометрична інтерпретація розв’язків задач лінійного цілочислового програмування на площині

Для знаходження оптимального розв’язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим з них є знаходження оптимального розв’язку задачі як такої, що має лише неперервні змінні, з дальшим їх округленням. Такий підхід є виправданим тоді, коли змінні в оптимальному плані набувають досить великих значень у зіставленні їх з одиницями вимірювання. Нехай, наприклад, у результаті розв’язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві отримали оптимальне поголів’я корів — 1235,6. Округливши це значення до 1236, не припустимося значної похибки. Проте за деяких умов такі спрощення призводять до істотних неточностей. Скажімо, множина допустимих розв’язків деякої нецілочислової задачі лінійного програмування має вигляд, зображений на рис. 4.1:

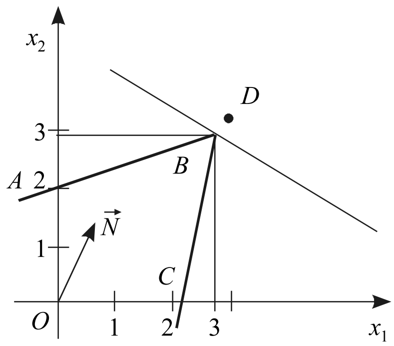


Рис. 4.1

Максимальне значення функціонала для даної задачі знаходиться в точці ***B***. Округлення дасть таке значення оптимального плану $x_1 = 3;\ x_2 = 3$ (точка ***D*** на рис. 6.1). Очевидно, що точка ***D*** не може бути розв’язком задачі, оскільки вона навіть не належить множині допустимих розв’язків (чотирикутник ***OABC***), тобто відповідні значення змінних не задовольнятимуть систему обмежень задачі.

Зауважимо, що геометрично множина допустимих планів будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що знаходяться всередині опуклого багатокутника допустимих розв’язків відповідної нецілочисельності задачі. Отже, для розглянутого на рис. 4.1 випадку множина допустимих планів складається з дев’яти точок (рис. 4.2), які утворені перетинами сім’ї прямих, що паралельні осям Ox_1 та Ox_2 і проходять через точки з цілими координатами 0, 1, 2. Для знаходження цілочислового оптимального розв’язку пряму, що відповідає цільовій функції, пересуваємо у напрямку вектора нормалі $\vec{N}$ до перетину з кутовою точкою утвореної цілочислової сітки. Координати цієї точки і є оптимальним цілочисловим розв’язком задачі. У нашому прикладі оптимальний цілочисловий розв’язок відповідає точці ***M*** ($x_1 = 2;\ x_2 = 2$).

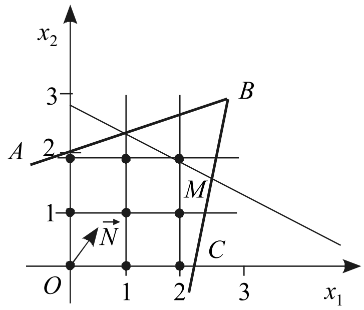


Рис. 4.2

Очевидно, особливість геометричної інтерпретації цілочислової задачі у зіставленні зі звичайною задачею лінійного програмування полягає лише у визначенні множини допустимих розв’язків. Областю допустимих розв’язків загальної задачі лінійного програмування є опуклий багатогранник, а вимога цілочисельності розв’язку приводить до такої множини допустимих розв’язків, яка є дискретною і утворюється тільки з окремих точок. Якщо у разі двох змінних розв’язок задачі можна відшукати графічним методом, тобто, використовуючи цілочислову сітку, можна досить просто знайти оптимальний план, то в іншому разі необхідно застосовувати спеціальні методи.

4.3. Загальна характеристика методів розв’язування задач цілочислового лінійного програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;

2) наближені методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатогранник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв'язків.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв'язок за прийнятний час або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Головними показниками для зіставлення ефективності застосування конкретних наближених алгоритмів на практиці є такі: абсолютна Δ_1 та відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв'язків.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1), \quad \Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F — цільова функція (в даному разі для визначеності допускаємо вимогу відшукання максимального її значення); X_1— наближений розв'язок, знайдений деяким наближеним методом; X^* — оптимальний план задачі.

4.4. Методи відтинання. Метод Гоморі

В основу методів цілочислового програмування покладено ідею Данціга. Допустимо, що необхідно розв'язувати задачу лінійного програмування, всі або частина змінних якої мають бути цілочисловими. Можливо, якщо розв'язувати задачу, не враховуючи умову цілочисельності, випадково одразу буде отримано потрібний розв'язок. Однак така ситуація малоймовірна. Переважно розв'язок не задовольнятиме умову цілочисловості. Тоді накладають додаткове обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок. Таке додаткове обмеження називають ***правильним відтинанням***. Система лінійних обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв'язується отримана задача лінійного програмування. Якщо її розв'язок знову не задовольняє умови цілочисельності, то будується нове лінійне обмеження, що відтинає отриманий розв'язок, не зачіпаючи цілочислових планів. Процес приєднання додаткових обмежень повторюють доти, доки не буде знайдено цілочислового оптимального плану, або доведено, що його не існує.

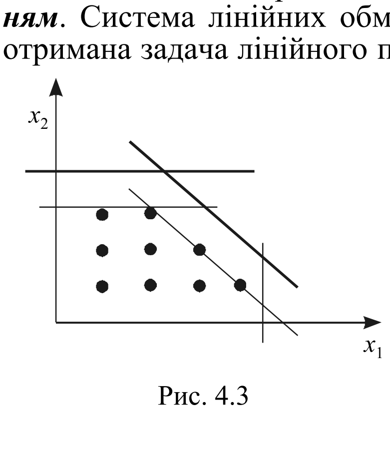


Рис. 4.3

Геометрично введення додаткового лінійного обмеження означає проведення гіперплощини (прямої), що відтинає від багатогранника (багатокутника) допустимих розв'язків задачі ту його частину, яка містить точки з нецілочисловими координатами, однак не торкається жодної цілочислової точки даної множини. Отриманий новий багатогранник розв'язків містить всі цілі точки, які були в початковому, і розв’язок, що буде отримано на ньому, буде цілочисловим (рис. 4.3).

Слід відмітити, що визначення правила для реалізації ідеї Данціга стосовно формування додаткового обмеження виявилось досить складним завданням і першим, кому вдалось успішно реалізувати цю ідею, був Гоморі.

Розглянемо алгоритм, запропонований Гоморі, для розв’язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування, що ґрунтується на використанні симплексного методу і передбачає застосування досить простого способу побудови правильного відтинання.

Нехай маємо задачу цілочислового програмування:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.5}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m}; \tag{4.6}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}; \tag{4.7}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{4.8}$$

Допустимо, що параметри $a_{ij}, b_i, c_j\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ — цілі числа.

Не враховуючи умови цілочисельності, знаходимо розв’язок задачі (4.5)—(4.7) симплексним методом. Нехай розв’язок існує і міститься в такій симплексній таблиці:

Таблиця 4.1

Базис	$C_{баз}$	**План**	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
			x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
x_1	c_1	β_1	1	0	...	0	α_{1m+1}	...	α_{1n}
x_2	c_2	β_2	0	1	...	0	α_{2m+1}	...	α_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	c_m	β_m	0	0	...	1	α_{mm+1}	...	α_{mn}

Змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ — базисні, а $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ — вільні. Оптимальний план задачі: $X^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$. Якщо $\beta_j\ (j = \overline{1,n})$ — цілі числа, то отриманий розв’язок є цілочисловим оптимальним планом задачі (4.5)—(4.8). Інакше існує хоча б одне з чисел, наприклад, β_i — дробове. Отже, необхідно побудувати правильне обмеження, що відтинає нецілу частину значення β_i.

Розглянемо довільний оптимальний план X^* задачі (4.5) —(4.7). Виразимо в цьому плані базисну змінну x_i через вільні змінні:

$$x_i = \beta_i - \alpha_{im+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{in} x_n = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j\ . \tag{4.9}$$

Виразимо коефіцієнти при змінних даного рівняння у вигляді суми їх цілої та дробової частин. Введемо позначення: $[\beta]$ — ціла частина числа β, $\{\beta\}$ — дробова частина числа β[1]. Отримаємо:

---

[1] Цілою частиною числа *a* називається найбільше ціле число $[a]$, що не перевищує *a*. Дробовою частиною є число $\{a\}$, яке дорівнює різниці між самим числом *a* та його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$.

Наприклад, для $a = 2\frac{1}{3}$ $[a] = 2$, $\{a\} = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}$;

для $a = -2\frac{1}{3}$ $[a] = -3$, $\{a\} = -2\frac{1}{3} - (-3) = \frac{2}{3}$.

$$x_i = [\beta_i] + \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}] x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j , \tag{4.10}$$

або

$$x_i - [\,\beta_i\,] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}\,] x_j = \{\,\beta_i\,\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\,\alpha_{ij}\,\} x_j \;. \tag{4.11}$$

Отже, рівняння (4.11) виконується для будь-якого допустимого плану задачі (4.5)—(4.7). Допустимо тепер, що розглянутий план X^* є цілочисловим оптимальним планом задачі. Тоді ліва частина рівняння (4.11) складається лише з цілих чисел і є цілочисловим виразом. Отже, права його частина також є цілим числом і справджується рівність:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\,\alpha_{ij}\,\} x_j = \{\,\beta_i\,\} + N \,, \tag{4.12}$$

де N — деяке ціле число.

Величина N не може бути від’ємною. Якщо б $N \le -1$, то з рівняння (4.12) приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\,\alpha_{ij}\,\} x_j = \{\beta_i\} + N \le \{\,\beta_i\,\} - 1 \,.$$

Звідки $\sum\limits_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j + 1 \le \{\beta_i\}$. Тобто це означало б, що дробова частина $\{\beta_i\}$ перевищує одиницю, що неможливо. У такий спосіб доведено, що число N є невід’ємним.

Якщо від лівої частини рівняння (4.12) відняти деяке невід’ємне число, то приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\,\alpha_{ij}\,\} x_j \ge \{\beta_i\,\} , \tag{4.13}$$

яка виконується за допущенням для будь-якого цілочислового плану задачі (4.5)—(4.7). У такий спосіб виявилося, що нерівність (4.13) є шуканим правильним відтинанням.

Отже, для розв’язування цілочислових задач лінійного програмування (4.1)—(4.4) методом Гоморі застосовують такий алгоритм:

1. Симплексним методом розв’язується задача без вимог цілочисельності змінних — (4.1)—(4.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є розв’язком задачі цілочислового програмування (4.1)—(4.4).

Якщо задача (4.1)—(4.3) не має розв’язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (4.1)—(4.4) також не має розв’язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \ge \{\beta_i\} .$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Отриману розширену задачу розв’язують і перевіряють її розв’язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв’язку або доведено, що задача не має допустимих розв’язків на множині цілих чисел.

Загалом, алгоритм Гоморі в обчислювальному аспекті є мало вивченим. Якщо в лінійному програмуванні спостерігається відносно жорстка залежність між кількістю обмежень задачі та кількістю ітерацій, що необхідна для її розв’язування, то для цілочислових задач такої залежності не існує. Кількість змінних також мало впливає на трудомісткість обчислень. Очевидно, процес розв’язання цілочислової задачі визначається не лише її розмірністю, а також особливостями багатогранника допустимих розв'язків, що являє собою набір ізольованих точок.

Як правило, розв'язування задач цілочислового програмування потребує великого обсягу обчислень. Тому при створенні програм для ЕОМ особливу увагу слід приділяти засобам, що дають змогу зменшити помилки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

Розглянемо приклад розв'язування цілочислової задачі лінійного програмування методом Гоморі.

Приклад 1. Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів: А і В. Техніко-економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл. 4.2:

Таблиця 4.2

Показник	**Устаткування**		**Ресурс**
	А	**В**	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	—

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 —кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Запишемо економіко-математичну модель задачі:

$$\max Z = 350x_1 + 150x_2 ,$$
$$25x_1 + 10x_2 \le 100 ;$$
$$40x_1 + 20x_2 \le 190 ;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 ,$$
$$x_1 \text{ і } x_2 \text{ — цілі числа.}$$

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисельності. Остання симплексна таблиця набуде вигляду:

Таблиця 4.3

$X_{баз}$	$C_{баз}$	**План**	**350**	**150**	**0**	**0**
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - c_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду $\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \ge \{b_j\}$:

$$\{0\}x_1 + \{1\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \ge \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набуває вигляду:

$$\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\ge\frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4-x_5+x_6\ge\frac{1}{2}.$$

Приєднавши отримане обмеження до симплексної таблиці (табл. 4.3) з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

Таблиця 4.4

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	–M	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	–1	1
$Z_j-c_j\ge0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв'язавши наведену задачу, знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1=2;\ x_2=5)$, $Z_{\max}=1450$.

4.5. Комбінаторні методи. Метод гілок та меж

В основі комбінаторних методів є перебір можливих варіантів розв'язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певною послідовністю перебору варіантів та правилами виключення, що дають змогу ще в процесі розв'язування задачі виявити неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки. Відносна ефективність різних методів залежить від того, наскільки кожен з них уможливлює скорочення необхідного процесу перебору варіантів у результаті застосування правила виключення.

Розглянемо один із комбінаторних методів. Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача. Потім вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти x_j — цілочислову змінну, значення якої $x_j=x'_j$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок можна виключити з множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x'_j цілочисловими значеннями. Можна стверджувати, що на інтервалі $[x_j'];[x_j']+1$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо x'_j=2,7 дістаємо інтервал $]2;3[$, де, очевидно, немає x_j, яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі $x_j\le2$, або $x_j\ge3$. Виключення проміжку $]2;3[$ з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей. Тобто допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей виду:

$$x_j\le\lfloor x'_j\rfloor \text{ або } x_j\ge\lfloor x'_j\rfloor+1.$$

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочислового програмування (4.1)—(4.4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

$$\text{перша задача: } \max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.14}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{4.15}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{4.16}$$

$$x_j \text{ — цілі числа, } j = \overline{1, n}\,; \tag{4.17}$$

$$x_j \le \lfloor x_j' \rfloor, \tag{4.18}$$

друга задача

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4.19}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i\,, \ \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{4.20}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{4.21}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{4.22}$$

$$x_j \ge \lfloor x_j' \rfloor + 1\,, \tag{4.23}$$

де x_j' — дробова компонента розв'язку задачі (4.1)—46.4).

Наведені задачі (4.14)—(4.18) і (4.19)—(4.23) спочатку послаблюємо, тобто розв'язуємо з відкиданням обмежень (4.17) і (4.22). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисельності, то ці плани є розв'язками задачі (4.1)—(4.4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для дальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з меншим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий останній план — оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують в процесі розв'язування відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв'язування задач немає сенсу розв'язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде почергово приєднати нові обмеження виду (4.18) і (4.23) до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (в разі необхідності) непотрібні «старі» обмеження.

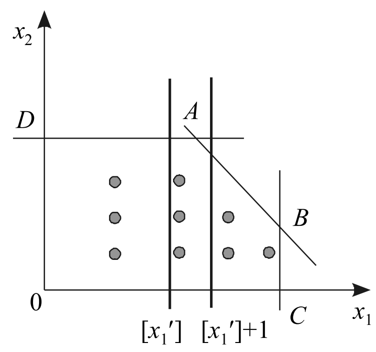


Рис. 4.4

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень виду (4.18) та (4.23) в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлюється включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника (рис. 4.4). Допустимо, що A — точка максимуму, тоді за методом гілок та меж багатокутник допустимих планів задачі $ABCOD$ поділяється на дві частини прямими $x_1 = \lfloor x_1' \rfloor$ та

$x_1 = \lfloor x_1' \rfloor + 1$, що виключає з розгляду точку A, координата якої x_1' є не цілим числом.

Опишемо алгоритм методу гілок та меж:

1. Симплексним методом розв'язують задачу (4.1)—(4.3) (без вимог цілочисловості змінних).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (4.1)—(4.4).

Якщо задача (4.1)—(4.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (4.1)—(4.4) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочисельних змінних x_i і визначають її цілу частину $\lfloor x_i' \rfloor$.

3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки:

$$x_i \le [x_i'],$$
$$x_i \ge [x_i'] + 1.$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

Приклад 2. Розв'яжемо методом гілок і меж задачу з прикладу 1.

Розв'язання. Відкинувши умову цілочисельності, дістанемо розв'язок: $x_1 = 1$, $x_2 = 7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[7\frac{1}{2}\right] = 7$, або $x_2 \ge \left[7\frac{1}{2}\right] + 1 = 8$. Приєднуємо до початкової задачі окремо кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисельності, і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі:

Задача I	Задача II
$\max Z = 350x_1 + 150x_2$,	$\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;	$25x_1 + 10x_2 \le 100$;
$40x_1 + 20x_2 \le 190$;	$40x_1 + 20x_2 \le 190$;
$x_2 \le 7$;	$x_2 \ge 8$;
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$;	$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$;
x_1 і x_2 — цілі.	x_1 і x_2 — цілі.

Для задачі I (з обмеженням $x_2 \le 7$) оптимальним буде розв'язок $X' = (x_1 = 1{,}2;\ x_2 = 7)$, $Z'_{\max} = 1470$, а для задачі II (з обмеженням $x_2 \ge 8$) — розв'язок $X'' = (x_1 = 0{,}75;\ x_2 = 8)$, $Z''_{\max} = 1462{,}5$. Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для дальшого розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціонала. Розв'язуємо задачу I, окремо приєднуючи до неї обмеження: $x_1 \le 1$ і $x_1 \ge 2$. Отримуємо такі дві задачі:

Задача III	Задача IV
$\max Z = 350x_1 + 150x_2$,	$\max Z = 350x_1 + 150x_2$,
$25x_1 + 10x_2 \le 100$;	$25x_1 + 10x_2 \le 100$;

$$40x_1 + 20x_2 \le 190;$$
$$x_2 \le 7;$$
$$x_1 \le 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$
$$x_1 \text{ і } x_2 \text{ — цілі.}$$

$$40x_1 + 20x_2 \le 190;$$
$$x_2 \le 7;$$
$$x_1 \ge 2;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$
$$x_1 \text{ і } x_2 \text{ — цілі.}$$

Розв'язком задачі III є план $X''' = (x_1 = 1;\ x_2 = 7)$, $Z'''_{\max} = 1400$, а задачі IV план $X'''' = (x_1 = 2;\ x_2 = 5)$, $Z''''_{\max} = 1450$. Обидва розв'язки є цілочисловими, проте краще значення цільової функції забезпечує розв'язок задачі IV. Тому оптимальним планом початкової цілочислової задачі буде $X^* = (x_1 = 2;\ x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$, що збігається з розв'язком, отриманим за методом Гоморі.

Схема процесу розв'язування задачі з прикладу 1 (рис. 4.5) досить наочно пояснює назву методу гілок та меж. Початкова задача розділяється (гілкується) на дві простіші, і, якщо серед них не існує задачі з цілочисловим оптимальним розв'язком, то процес гілкування продовжується. Отже, всі розглянуті дії можна зобразити у вигляді «дерева»:

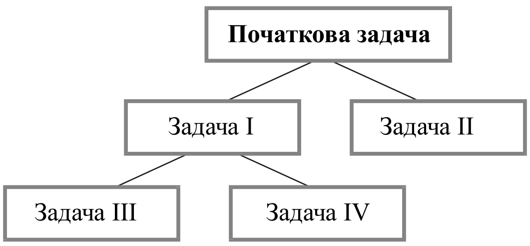


Рис. 4.5

Кожен елемент такого «дерева» — це певна задача, що має відповідний оптимальний план. Після одержання нецілочислового розв'язку послабленої (тобто без умови цілочисельності) початкової задачі ми перетворили її на дві інші з додатковими умовами. З них кращим виявився розв'язок задачі I, однак оскільки він був не цілочисловим, то ми продовжили процес гілкування. Задачу I введенням додаткових обмежень перетворили в задачу III та задачу IV. Оптимальні плани обох цих задач цілочислові, але план задачі IV дає більше значення функціонала, тому цілочисловим оптимальним планом початкової задачі є розв'язок задачі IV.

Коротко розглянемо без наведення прикладів ще один цікавий метод, який можна віднести до типу комбінаторних — метод послідовного аналізу варіантів. Загальна схема цього методу розроблена українським вченим В. С. Михалевичем, який працював у київському Інституті кібернетики. Ідея цього методу полягає в послідовному повторенні таких процедур:

1) розбиття множини варіантів розв'язків задачі на кілька підмножин, кожна з яких має специфічні властивості;

2) використання вищезазначених властивостей для пошуку логічних суперечностей в опису окремих підмножин;

3) виключення із дальшого розгляду тих підмножин варіантів розв'язків, в описах яких є логічні суперечності.

Отже, методика послідовного аналізу варіантів базується на відсіві неперспективних варіантів ще до їх побудови. Оскільки у разі відсіву неперспективних початкових частин варіантів відсівається і вся процедура продовжень їх розрахунків, то досягається значна економія часу через скорочення обчислювальних операцій. Відсів неперспективних елементів відбувається як за обмеженнями, так і за цільовою функцією. Основа методу послідовного аналізу варіантів полягає у визначенні правила, за яким буде здійснюватися відсів безперспективних значень змінних, у результаті чого постійно звужуватиметься множина значень, для якої відшукують оптимум.

Зрозуміло, що для кожного типу задач цілочислового програмування формулюються специфічні правила для відсіву варіантів.

Метод послідовного аналізу варіантів успішно застосовувався для розв'язування різноманітних задач оптимального планування та проектування. Наприклад, для розрахунку транспортних мереж, розміщення на мережі типу дерева, проектування розподільних електричних мереж, вибору оптимальних параметрів магістральних газопроводів тощо.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?
2. Наведіть приклади економічних задач, що належать до цілочислових.
3. Як геометрично можна інтерпретувати розв'язок задачі цілочислового програмування?
4. Охарактеризуйте головні групи методів розв'язування задач цілочислового програмування.
5. Опишіть алгоритм методу Гоморі.
6. Що означає «правильне відтинання»?
7. Опишіть алгоритм методу гілок та меж.
8. Ідея методу послідовного аналізу варіантів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Розв'яжіть задачі цілочислового програмування методом Гоморі.

1.1 $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

1.2 $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть задачу цілочислового програмування методом «гілок та меж»:

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16; \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30; \\ x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 5

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення постановки задачі нелінійного програмування;
- знати економічні постановки, що приводять до задач нелінійного програмування;
- знати основні труднощі розв'язання задач нелінійного програмування;
- знати метод множників Лагранжа та економічну інтерпретацію;
- знати наближені методи розв'язання задач задач нелінійного програмування;
- вміти грамотно застосовувати методи та моделі задачі нелінійного програмування; розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

5.1. Економічна і математична постановка задачі дробово-лінійного програмування

Розв'язуючи економічні задачі, часто як критерії оптимальності беруть рівень рентабельності, продуктивність праці тощо. Ці показники математично виражаються дробово-лінійними функціями. Загальну економіко-математичну модель у цьому разі записують так (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо через c_j прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції, тоді загальний прибуток можна виразити формулою: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$; якщо d_j — витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції, то $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ — загальні витрати на виробництво. У разі максимізації рівня рентабельності виробництва цільова функція має вигляд:

$$\max Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \tag{5.1}$$

за умов виконання обмежень щодо використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \{\le, =, \ge\}\, b_i \, (i = \overline{1, m}) ; \tag{5.2}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{5.3}$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Очевидно, що задача (5.1)—(5.3) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише цільовою функцією, що дає змогу застосовувати для її розв'язування за певного модифікування вже відомі методи розв'язання задач лінійного програмування.

5.2 Задача дробово-лінійного програмування на площині

У разі, коли задача дробово-лінійного програмування містить лише дві змінні, для її розв'язування зручно скористатися графічним методом.

Нехай маємо таку задачу:

$$\max Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{5.4}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{5.5}$$

$$x_j \ge 0, \left(j = 1, 2\right) \tag{5.6}$$

Спочатку, як і для звичайної задачі лінійного програмування будуємо геометричне місце точок системи нерівностей (5.5), що визначає деякий багатокутник допустимих розв’язків.

Допустимо, що $d_1x_1 + d_2x_2 > 0$, і цільова функція набуває деякого значення:

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = Z.$$

Після елементарних перетворень дістанемо:

$$(c_1 - Zd_1)x_1 + (c_2 - Zd_2)x_2 = 0$$

або

$$x_2 = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}x_1. \tag{5.7}$$

Останнє рівняння описує пряму, що обертається навколо початку системи координат залежно від зміни значень x_1 та x_2.

Розглянемо кутовий коефіцієнт нахилу прямої (5.7), що виражає цільову функцію:

$$k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}. \tag{5.8}$$

Отже, кутовий коефіцієнт являє собою функцію від Z. Для визначення умов зростання (спадання) функції (5.8) дослідимо зміну знака її похідної:

$$\begin{gathered} k'(Z) = -\frac{\left(c_1 - Zd_1\right)'\left(c_2 - Zd_2\right) - \left(c_2 - Zd_2\right)'\left(c_1 - Zd_1\right)}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} - = \\ = -\frac{-d_1\left(c_2 - Zd_2\right) + d_2\left(c_1 - Zd_1\right)}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} = -\frac{-d_1c_2 + Zd_1d_2 + d_2c_1 - Zd_1d_2}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2}. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Використовуючи формулу (5.9), можна встановити правила пошуку максимального (мінімального) значення цільової функції:

1) якщо $k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} > 0 \Rightarrow \left(d_1c_2 - d_2c_1\right) > 0$, то функція (5.8) є зростаючою, і за збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (5.7) також збільшується. Тобто у разі, якщо $\left(d_1c_2 - d_2c_1\right) > 0$, для відшукання точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку проти годинникової стрілки;

2) якщо $k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{\left(c_2 - Zd_2\right)^2} < 0 \Rightarrow \left(d_1c_2 - d_2c_1\right) < 0$, то функція (5.8) є спадною і за збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (5.7) буде зменшуватись. Тому у разі, якщо $\left(d_1c_2 - d_2c_1\right) < 0$, для відшукання точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку за годинниковою стрілкою.

При розв’язуванні задачі дробово-лінійного програмування графічним методом можливі такі випадки:

— багатокутник розв’язків задачі обмежений і максимальне та мінімальне значення досягаються у його кутових точках;

— багатокутник розв’язків задачі необмежений, однак існують кутові точки, в яких досягаються максимальне та мінімальне значення цільової функції;

— багатокутник розв’язків задачі необмежений і досягається лише один із екстремумів;

— багатокутник розв’язків задачі необмежений, точки екстремумів визначити неможливо.

Приклад 1. Розв’яжіть графічно задачу дробово-лінійного програмування:

$$\max(\min)Z = \frac{5x_1 - 2x_2}{2x_1 + x_2}$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 - 2x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

Розв’язання. Побудуємо на площині область допустимих розв’язків задачі. Маємо трикутник ABC.

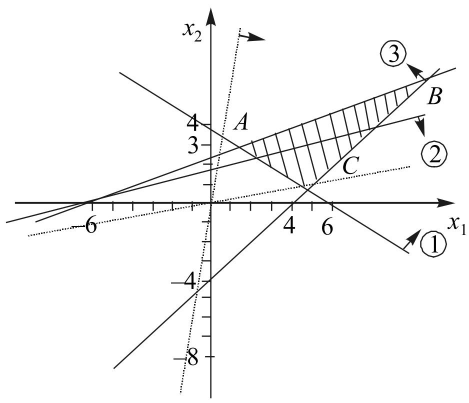


Рис. 5.1

Цільова функція задачі являє собою пряму, що обертається навколо початку системи координат (на рис. 5.1 позначена пунктиром). Отже, залежно від напрямку обертання точками максимуму та мінімуму будуть A і C.

Скористаємося правилами визначення максимального та мінімального значень цільової функції. Перевіримо умову

$$(d_1c_2 - d_2c_1) = (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5) = -9 < 0 ,$$

тобто для будь-якого значення Z функція $k'(Z)$ є спадною, отже, зі зростанням Z кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію, зменшуватиметься, а тому відповідну пряму потрібно обертати навколо початку координат за годинниковою стрілкою.

Виконуючи зазначений порядок дій, маємо: C — точка максимуму, а точка A є точкою мінімуму цієї задачі.

5.3. Розв’язування задачі дробово-лінійної програмування зведенням до задачі лінійного програмування

Нехай потрібно розв’язати задачу (5.1)—(5.3).

Позначимо

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = y_0$$

і введемо заміну змінних $y_j = y_0 x_j \ (j = \overline{1, n})$. Тоді цільова функція (5.1) матиме вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \ .$$

Отримали цільову функцію, що виражена лінійною залежністю.

Оскільки $y_j = y_0 x_j \ \ (j = \overline{1,n})$, то звідси маємо: $x_j = \frac{y_j}{y_0}$. Підставимо виражені через нові змінні значення x_j в систему обмежень (5.2):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \ \ (i = \overline{1,m}).$$

Крім того, з початкової умови

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = y_0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}{1} = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_0 = 1 \Rightarrow \ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1 \ .$$

Умова (5.3) стосовно невід’ємності змінних набуває вигляду:

$$y_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}), \ y_0 \geq 0 \ .$$

Виконані перетворення приводять до такої моделі задачі:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \ \ (i = \overline{1,m}); \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1. \end{cases}$$

$$y_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n}), \ y_0 \geq 0.$$

Отримали звичайну задачу лінійного програмування, яку можна розв’язувати симплексним методом.

Допустимо, що оптимальний розв’язок останньої задачі існує і позначається:

$$Y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \ .$$

Оптимальні значення початкової задачі (5.1)—(5.3) визначають за формулою:

$$x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*} \ \ (j = \overline{1,n}) \ .$$

Приклад 2. Сільськогосподарське акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю, яке розміщене у Лісостепу України, бажає оптимізувати структуру виробництва. Критерієм оптимальності вибрали максимізацію рівня рентабельності як відношення прибутку до собівартості. У табл. 5.1 маємо дані про види діяльності, якими керівництво товариства передбачає займатися.

Таблиця 5.1

ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ ГОЛОВНИХ НАПРЯМІВ ВИРОБНИЦТВА

Показник	Напрям виробництва							
	озима пшениця	цукрові буряки	корови (продуктивність, кг)				кормові культури	ресурс
			5000	4500	4000	3500		
Урожайність, т/га	4	35	—	—	—	—	6	—
Собівартість, грн/т	600	250	600	700	800	900	200	—
Ціна, грн/т	800	300	1000	1000	1000	1000	—	—
Вихід кормів, т кор. од./га	4,8	2,0	—	—	—	—	6	—
Затрати трудових ресурсів, людино-днів/га (гол.)	4	25	6	6	6	6	3	26 000
Затрати механізованої праці, людино-днів/га (гол.)	2	8	3	3	3	3	2	11 000
Частка корів	—	—	0,1	0,2	0,3	0,4	—	—
Потреба у кормах, т кор. од./гол.	—	—	5	4,7	4,4	4,1	—	—

Акціонерне товариство має 2500 га ріллі. Для виготовлення кормів передбачається використовувати 20 % урожаю озимої пшениці та 30 % — цукрових буряків.

Знайти оптимальну структуру виробництва.

Розв'язання. Введемо позначення:

x_1 — площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — площа посіву цукрових буряків, га;

x_3 — площа посіву кормових культур, га;

x_4 — кількість корів продуктивністю 5000 кг/рік;

x_5 — кількість корів продуктивністю 4500 кг/рік;

x_6 — кількість корів продуктивністю 4000 кг/рік;

x_7 — кількість корів продуктивністю 3500 кг/рік.

Запишемо критерій оптимальності:

$$\max Z = \frac{0{,}8 \cdot 800x_1 + 0{,}7 \cdot 1750x_2 + 2000x_4 + 1350x_5 + 800x_6 + 350x_7}{2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7}$$

за умов дотримання таких обмежень:

1. Обмеження щодо використання ресурсів:

а) використання ріллі:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 2500;$$

б) використання живої праці:

$$4x_1 + 25x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 6x_7 \le 26000;$$

в) використання механізованої праці:

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \le 11000.$$

2. Обмеження стосовно дотримання сівозмін:

а) посівна площа кормових культур має бути більшою або дорівнювати площі під озимою пшеницею:

$$x_3 \ge x_1;$$

б) посівна площа озимої пшениці має бути більша або дорівнювати площі під цукровими буряками:

$$x_1 \ge x_2.$$

3. Структура корів за продуктивністю:

а) балансове рівняння щодо поголів'я корів:

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_8,$$

де x_8 — загальне поголів'я корів;

б) частка корів продуктивністю 5000 кг/рік:

$$x_4 \le 0{,}1x_8;$$

в) частка корів продуктивністю 4500 кг/рік:

$$x_5 \le 0{,}2x_8;$$

г) частка корів продуктивністю 4000 кг/рік:

$$x_6 \le 0{,}3x_8;$$

д) частка корів продуктивністю 3500 кг/рік:

$$x_7 \le 0{,}4x_8.$$

4. Забезпеченість корів кормами:

$$4{,}8 \cdot 0{,}2x_1 + 2 \cdot 0{,}3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 4{,}7x_5 - 4{,}4x_6 - 4{,}1x_7 \ge 0.$$

Невід'ємність змінних:

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1{,}8}).$$

Щоб знайти розв'язок за цією моделлю, необхідно зробити відповідну заміну змінних. Нехай:

$$\frac{1}{2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7} = y_0$$

і $y_j = y_0 \, x_j$.

Тоді маємо таку лінійну економіко-математичну модель:

$$\max f = 640y_1 + 1225y_2 + 2000y_4 + 1350y_5 + 800y_6 + 350y_7$$

за умов:

1. $y_1 + y_2 + y_3 - 2500y_0 \le 0$;

$4y_1 + 25y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 6y_5 + 6y_6 + 6y_7 - 26000y_0 \le 0$;

$2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 3y_7 - 11000y_0 \le 0$.

2. $y_3 - y_1 \ge 0;$

$y_1 - y_2 \ge 0.$

3. $y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8 = 0;$

$y_4 - 0{,}1y_8 \le 0;$

$y_5 - 0{,}2y_8 \le 0;$

$y_6 - 0{,}3y_8 \le 0;$

$y_7 - 0{,}4y_8 \le 0.$

4. $4{,}8 \cdot 0{,}2y_1 + 2 \cdot 0{,}3y_2 + 6y_3 - 5y_4 - 4{,}7y_5 - 4{,}4y_6 - 4{,}1y_7 \ge 0$.

5. $2400y_1 + 8750y_2 + 1200y_3 + 3000y_4 + 3150y_5 + 3200y_6 + 3150y_7 = 1$.

6. $y_j \ge 0 \ \left(j = \overline{0{,}8}\right).$

Розв'язавши задачу симплексним методом, отримаємо такий оптимальний план: $Y^* = (y_j^*, \ \ j = \overline{0{,}8})$. Враховуючи, що $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0^*}$, $j = \overline{1{,}8}$ оптимальним планом початкової задачі буде:

$$X^*\left(x_1^* = 1250;\ x_3^* = 1250; x_4^* = 198;\ x_5^* = 395; x_6^* = 593; x_7^* = 791\right),$$

причому значення цільової функції (рівень рентабельності виробництва) становить Z = 0,23, тобто 23 %.

5.4. Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на допущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв'язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик. Як показник ризику часто використовують дисперсію, тому для врахування обмеженості ризику потрібно вводити нелінійну функцію в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається дослідженням математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Загальна задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення змінних x_j $(j = \overline{1, n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.10}$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \quad (i = \overline{1, m}); \tag{5.11}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{5.12}$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = \overline{1, m}$ є лінійними, то це задача лінійного програмування, інакше (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) маємо ***задачу нелінійного програмування***.

5.5. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (5.1) визначає деяку поверхню, а обмеження (5.2)—(5.3) — допустиму підмножину n-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, непуста і обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень і нелінійну цільову функцію. У цьому разі область допустимих розв'язків є опуклою, непустою, замкненою, тобто обмеженою.

Розглянемо приклад геометричного способу розв'язування задачі нелінійного програмування.

Приклад 3. Знайти мінімальне і максимальне значення функції:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

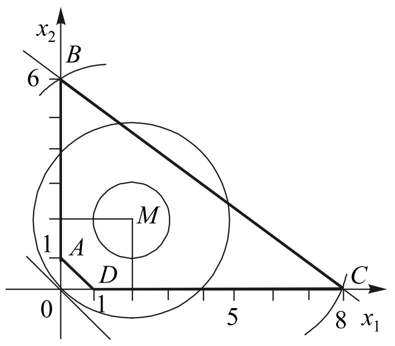


Рис. 5.2

Розв'язання. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник $ABCD$ (рис. 5.2). Геометрично цільова функція являє собою коло з центром у точці M (2; 2), квадрат радіуса якого $R^2 = Z$. Це означає, що її значення буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіуса кола. Проведемо з точки M кола різних радіусів. Обчислимо значення функціонала в граничних точках B (0; 6) і C (8; 0):

$$Z(B) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (0-2)^2 + (6-2)^2 = 4 + 16 = 20,$$
$$Z(C) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (8-2)^2 + (0-2)^2 = 36 + 4 = 40.$$

Оскільки $Z(C) > Z(B)$, то точка C (8; 0) є точкою глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R = 0$, тоді:
$R^2 = 0 = Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 2$. Тобто точка M є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції.

Зазначимо, що в даному разі точка, яка відповідає оптимальному плану задачі (мінімальному значенню функціонала), знаходиться всередині багатокутника допустимих розв'язків, що в задачах лінійного програмування неможливо.

Приклад 4. Знайти мінімальне значення функції:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 12. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

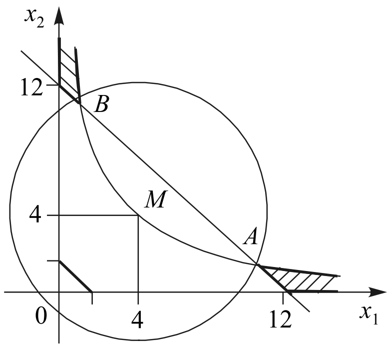


Рис. 5.3.

Розв'язування. У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин, необмежених зверху (рис. 5.3). Цільова функція аналогічно попередньому випадку є колом з центром у точці M (4; 4). Функція Z має два локальних мінімуми: в точці A ($x_1 \approx 11{,}29; x_2 \approx 0{,}71$), і в точці B ($x_1 \approx 0{,}71; x_2 \approx 11{,}29$).

Значення функціонала в цих точках однакове і дорівнює:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64.$$

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

Даний приклад ілюструє ще одну особливість задач нелінійного програмування: на відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною.

Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що зумовлюють необхідність застосування відповідних методів їх розв'язання.

5.6. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило, собівартість продукції y визначають за формулою: $y = a + \frac{b}{x}$, де x — обсяг виробництва. Ввівши заміну: $z = \frac{1}{x}$, маємо: $y = a + bz$, тобто приходимо до лінійної функції. За такої заміни похибок не допускають. Однак, якщо функцією собівартості буде $y = -ax^2 + bx + c$, то використання замість неї деякої лінійної функції $y = d + kx$ невиправдане, що видно з рис. 5.4.

У точках x_1 і x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 у значній мірі, тобто на величину:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b-k)x_2 + (c-d)\,.$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв’язок, близький до розв’язку початкової нелінійної задачі. Однак з вище розглянутого прикладу бачимо, що при побудові наближених лінійних задач можна отримати надто неточний розв’язок, який непридатний для використання.

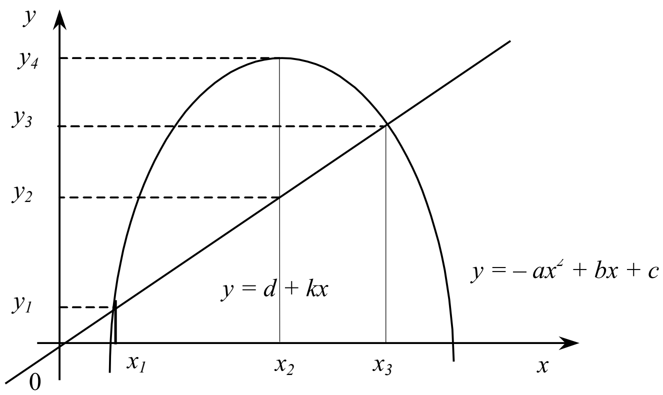


Рис. 5.4

Навіть питання щодо існування розв’язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв’язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв’язок універсальним методом — симплексним. При цьому не існує проблеми стосовно доведення існування такого розв’язку, тобто в результаті застосування алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв’язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв’язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв’язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування ***не існує універсального методу*** розв’язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв’язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв’язку задачі та його єдиність, що також є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв’язування нелінійних задач, але в такому разі існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому здебільшого для розв’язування нелінійних задач виправданим є застосування наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв’язків задачі. Однак у задачах нелінійного програмування існують ***кілька локальних оптимумів***, що потребує пошуку серед них глобального.

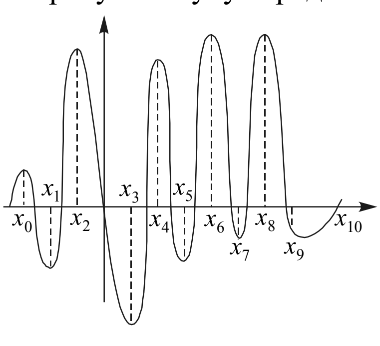


Рис. 5.5.

На рис. 5.5 маємо на відрізку, що зображений, локальні оптимуми у точках $x_0, x_1, x_2,\ x_3, x_4, x_5,\ x_6, x_7, x_8, x_9$, глобальний — у точках x_3 та x_6.

Більшість наближених методів уможливлюють, як правило, знаходження локального оптимуму. Можна, звичайно, користуючись простим способом, визначити всі локальні оптимуми, а потім їх зіставленням знайти глобальний. Однак для практичних розрахунків такий метод є неефективним. Часто глобальний оптимум наближені методи «не уловлюють». Наприклад, у разі, коли глобальний оптимум знаходиться досить близько біля локального. Якщо відрізок $\lfloor x_0, x_{10} \rfloor$ поділити на десять підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $\lfloor x_i, x_{i+1} \rfloor$ (рис. 5.3), а зліва від x_i та справа від x_{i+1} крива $y = f(x)$ буде зростати, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає ***оптимальний план***, може бути як граничною, так і знаходитися ***всередині допустимої області розв'язків*** (планів), що було проілюстровано в прикладі 5.3.

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати ***множину допустимих розв'язків як неопуклу***, або навіть складатися з довільних, не зв'язаних між собою частин (приклад 5.4).

5.7. Метод множників Лагранжа

Як уже згадувалось, для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи розв'язування задач нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найкраще розробленими є методи розв'язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

У теорії дослідження функцій задача на відшукання екстремальних значень не містить ніяких додаткових умов щодо змінних і такі задачі належать до задач відшукання ***безумовного екстремуму*** функції. Локальний та глобальний екстремуми тоді визначаються з необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції.

Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку **умовного екстремуму** функції. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення дальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Для розв'язування задачі необхідно використати необхідної умови існування локального екстремуму функції n змінних — знайти вирази частинних похідних нової цільової функції за кожною змінною і прирівняти їх до нуля. У результаті отримаємо систему рівнянь. Її розв'язок визначає так звані стаціонарні точки, серед яких є і шукані екстремальні значення функції.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min) Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \tag{5.13}$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{5.14}$$

де функції $f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ мають бути диференційованими.

Задача (5.13), (5.14) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень q_i, $(i = \overline{1, m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. Доведено, що постановки та розв'язання таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (5.13) на складнішу. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і має такий вигляд:

$$L(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n; \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_m) = \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{5.15}$$

де λ_i — деякі невідомі величини, що називаються ***множниками Лагранжа.***

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1, n}\right); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right); \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases} \tag{5.16}$$

Друга група рівнянь системи (5.16) забезпечує виконання умов (5.14) початкової задачі нелінійного програмування.

Система (5.16), як правило, нелінійна.

Розв'язками її є $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ — стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (5.13), (5.14) або можуть бути точками перегину (сідловими точками).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n), q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції *n* змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (5.15) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n) \times (m+n)$:

$$H = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P' & Q \end{array}\right),$$

де O — матриця розмірністю $(m \times m)$, що складається з нульових елементів,

P — матриця розмірністю $(m \times n)$, елементи якої визначаються так:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ ...... & ... & ...... \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

P' — транспонована матриця до *P* розмірністю $(n \times m)$,

Q — матриця розмірністю $(n \times n)$ виду:

$$Q = \left\| \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \text{ де } i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи (5.16). Нехай стаціонарна точка має координати $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (*m* + 1), наступні (*n* — *m*) головних мінорів матриці *H* утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), знак наступних (n – m) головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

Розглянемо задачу, розв'язок якої знайдемо методом множників Лагранжа.

Приклад 5. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю виділило 1200 га ріллі під основні сільськогосподарські культури — озиму пшеницю і цукрові буряки.

У табл. 5.1 маємо техніко-економічні показники вирощування цих культур:

Таблиця 5.1

Показник	**Озима пшениця x_1, сотні га**	**Цукрові буряки x_2, сотні га**
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Необхідно знайти оптимальні площі посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай: x_1 — площа ріллі під озимою пшеницею, сотні га;

x_2 — площа ріллі під цукровими буряками, сотні га.

Звернемо увагу на те, що собівартість тонни пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель цієї задачі. Критерієм оптимальності візьмемо максимізацію чистого доходу:

$$\max f = 4(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200)x_1 100 + 35(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650)x_2 100 =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2) + \lambda_1(12 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_1 - 350\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівняння знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, маємо:

$$400(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400) = 3500(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350) \qquad (5.17)$$

або, скоротивши на 100 обидві частини і розкривши дужки, отримаємо:

$$150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = 1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\,. \qquad (5.18)$$

Із останнього рівняння системи маємо: $x_1 = 12 - x_2$.

Підставимо вираз для x_1 у рівність (5.18). Отримаємо:

$$-150(12 - x_2)^2 + 1600(12 - x_2) - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250$$

або

$$-150\left(144 - 24x_2 + x_2^2\right) + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\ ;$$

$$21\,600+3600x_2-150x_2^2+19\,200-1600x_2-1600+1312{,}5x_2^2-10\,500x_2+12\,250=0.$$

Отже, $1162x_2^2-8500x_2+11\,450=0$;

$$D=72\,250\,000-53\,219\,600=19\,030\,400$$

$$\sqrt{D}\approx 4362\,.$$

$$x_2^{(1)}=\frac{8500+4362}{2324}\approx 5{,}53\ \ (553\text{ га});$$

$$x_2^{(2)}=\frac{8500-4362}{2324}\approx 1{,}78\ \ (178\text{ га}).$$

Відповідно дістаємо:

$$x_1^{(1)}\approx 6{,}47(647\text{ га});$$

$$x_1^{(2)}\approx 10{,}22(1022\text{ га}).$$

Тобто отримали два розв’язки :

$$\begin{cases}x_1^{(1)}=6{,}47;\\ x_2^{(1)}=5{,}53.\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x_1^{(2)}=10{,}22;\\ x_2^{(2)}=1{,}78.\end{cases}$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку в точці $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$.

Матриця Гессе має такий вигляд:

$$H=\left(\begin{array}{c|cc}0 & 1 & 1\\ \hline 1 & -34100 & 0\\ 1 & 0 & -401625\end{array}\right).$$

За вищезазначеним правилом визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку ($m+1=1+1=2$):

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -34100\end{vmatrix}=-1\,,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -34100 & 0\\ 1 & 0 & -401625\end{vmatrix}=435725\,.$$

Отже, головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1}=(-1)^2$, тобто $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Обчислимо значення цільової функції в цій точці:

$$f(x_1=6{,}47;\ x_2=5{,}53)=4(800-532{,}26+1294-1200)647+35(300-382{,}26+829{,}5-650)553=4625863.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_1^*(x_1^{(2)}=10{,}22;\ x_2^{(2)}=1{,}78)$ показують, що вона не є точкою екстремуму.

Отже, цільова функція набуде максимального значення, якщо озима пшениця вирощуватиметься на площі 647 га, а цукрові буряки — на площі 553 га.

Метод множників Лагранжа може застосовуватися також у разі наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей.

Розглянемо таку задачу в загальному вигляді:

$$\max(\min)\,F=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,,$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ \ (i = 1,2,...,k); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \ \ (i = k+1,...,l); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i \ \ (i = l+1,2,...,m), \end{cases}$$

причому всі функції, що входять у задачу, мають бути диференційованими хоча б один раз.

Очевидно, що введення в ліві частини нерівностей системи обмежень задачі додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \ge 0 \ (i = k+1,...,m)$ перетворює початкову задачу в таку, що містить лише обмеження-рівності, тобто яка за формою і методом розв'язування збігатиметься із задачею (5.13), (5.14).

5.8. Необхідні умови існування сідлової точки

Для розроблення методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування важливе значення має поняття сідлової точки, а також визначення необхідних і достатніх умов існування сідлових точок функції Лагранжа $L(X, \Lambda)$ у (n + m)-вимірному просторі змінних $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ за довільних умов, які можуть накладатися на їх знаки (необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа за відсутності обмежень на знаки змінних розглянуто в п 5.7).

Розглянемо нелінійну задачу:

$$\max F = f(x_1, x_1, ..., x_n),$$
$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ \ (i = \overline{1,m}).$$

Причому на компоненти векторів X, Λ накладено обмеження на знаки. Позначимо множину точок, що задовольняють такі обмеження, через Ω.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд:

$$L(X, \Lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)). \tag{5.19}$$

Точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ називається ***сідловою точкою*** функції Лагранжа (5.19), якщо для всіх $X \in \Omega, \ \Lambda \in \Omega$ виконується співвідношення:

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda). \tag{5.20}$$

Для диференційованих функцій $f(X)$ та $q_i(X)$ знайдемо необхідні умови існування сідлової точки.

Сідлова точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ функції $L(X, \Lambda)$ виду (5.19) за означенням задовольняє умову:

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*).$$

Нерівність виконується для всіх точок X, тобто також і для тих, у яких лише одна координата відрізняється від X^*. Допустимо, що це x_k, а всі інші збігаються з координатами сідлової точки $x_j = x_j^* \ (j = 1,2,...,k-1,k+1,...,n)$.

Оскільки права частина нерівності є фіксованою, а в лівій частині змінюється лише одна координата x_k, то приходимо до функції однієї змінної $L(X, \Lambda^*) = L(x_k)$, яку можна зобразити графічно на координатній площині.

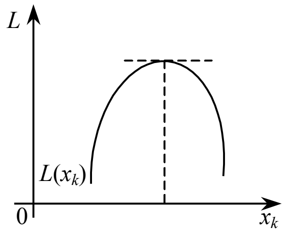


Рис. 5.9

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_k \ge 0$, тобто лише частину координатної площини, для якої $x_k \ge 0$.

Можливі такі випадки:

1) коли всі $x_j^* > 0$, то максимальне значення функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці, для якої $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 5.9).

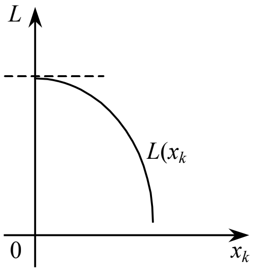


Рис. 5.10

2) коли максимум функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці $x_k = 0$ і розглядувана частинна похідна також дорівнюватиме нулю: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис.5.10).

3) коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься також у точці $x_k = 0$, а частинна похідна $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} \le 0$ (рис. 5.11).

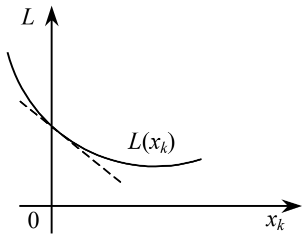


Рис. 5.11

Узагальнюючи всі три ситуації, маємо:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для } x_j \ge 0$$

$$\text{та } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j}(x_j^*) = 0 .$$

Розглядаючи другу частину нерівності:

$$L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda)$$

аналогічними міркуваннями, що проілюстровані рис. 5.12.—5.14, встановлюються необхідні умови для похідних по λ_l функції Лагранжа в сідловій точці.

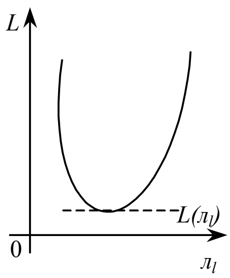
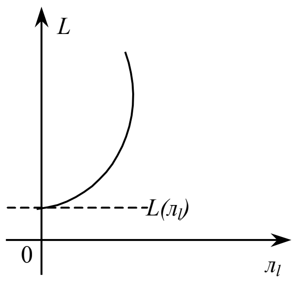


Рис. 5.12



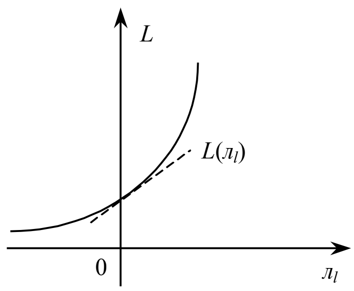


Рис. 5.13 Рис. 5.14

Об'єднуючи всі три випадки для невід'ємних координат, маємо необхідні умови сідлової точки:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для тих індексів } j\text{, де } x_j \ge 0 . \tag{5.21}$$

Зауважимо, що для $x_k \le 0$ маємо ті самі випадки, які зображено на рис. 5.9—5.14, причому графіки будуть симетрично відображені відносно осі Oy, тобто для недодатних координат необхідна умова має вигляд:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \ge 0 \text{ для тих індексів } j\text{, де } x_j \le 0 . \tag{5.22}$$

І нарешті, як відомо з попереднього параграфа, якщо на знак x_j умови не накладаються, то необхідною умовою є:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0 , \ x_j \text{ — довільного знака.} \tag{5.23}$$

Узагальнення всіх випадків приводить до рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0 . \tag{5.24}$$

Розглядаючи другу частину нерівності (5.20), за допомогою аналогічних міркувань встановлюємо необхідні умови для похідних по λ_i функції Лагранжа в сідловій точці:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0 \text{ для тих індексів } i \text{, де } \lambda_i \geq 0, \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \leq 0 \text{ для тих індексів } i \text{, де } \lambda_i \leq 0, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ для тих індексів } i \text{, де } \lambda_i \text{ має довільний знак.} \quad (5.27)$$

Отже, справджується рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0 . \quad (5.28)$$

Сукупність співвідношень (5.21)—(5.28) становить необхідні умови, які має задовольняти сідлова точка (X^*, Λ^*) функції Лагранжа для точок, що належать множині Ω. При цьому $L(X^*, \Lambda^*)$ повинна мати частинні похідні по всіх компонентах векторів X, Λ.

5.9. Теорема Куна—Таккера

Розглянутий метод множників Лагранжа уможливлює знаходження лише локальних сідлових точок функції Лагранжа.

Теорема Куна—Таккера дає змогу встановити типи задач, для яких на множині допустимих розв'язків існує лише один глобальний екстремум зумовленого типу. Вона тісно пов'язана з необхідними та достатніми умовами існування сідлової точки.

Розглянемо задачу нелінійного програмування, яку, не зменшуючи загальності, подамо у вигляді:

$$\max F = f(X), \quad (5.29)$$

$$q_i(X) \leq b_i \ \ (i = \overline{1, m}), \quad (5.30)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}). \quad (5.31)$$

(Очевидно, що знак нерівності можна змінити на протилежний множенням лівої і правої частин обмеження на (– 1)).

Теорема 5.1. (Теорема Куна—Таккера). Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі (5.29)—(5.31) тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор Λ^*, що при $X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0$ для всіх $X \geq 0, \Lambda \geq 0$ точка (X^*, Λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X)),$$

і функція мети $f(X)$ для всіх $X \geq 0$ угнута, а функції $q_i(X)$ $(i = \overline{1, m})$ — опуклі.

Доведення. ***Необхідність***. Нехай X^* — оптимальний план задачі (5.29)—(5.31), тобто є точкою глобального максимуму задачі. Отже, для всіх інших планів задачі *X* з множини допустимих розв'язків виконуватиметься співвідношення:

$f(X^*) \geq f(X)$.

Розглянемо тепер вектор $\Lambda^* \geq 0$, що відповідає точці глобального максимуму X^*, і значення функції Лагранжа в точках (X^*, Λ^*), (X^*, Λ), (X, Λ^*), де $X \geq 0$ — довільний план задачі з множини допустимих розв'язків, $\Lambda \geq 0$ — вектор множників Лагранжа, що відповідає *X*.

З умови (5.31) маємо: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = (b_i - q_i(X)) \cdot \lambda_i^* = 0$, тоді

$$L(X^*, \Lambda^*) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = f(X^*) . \quad (5.32)$$

Для точки з координатами (X^*, Λ) деякі доданки виду $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*))$ можуть бути відмінними від нуля. Оскільки за умовою задачі $b_i - q_i(X^*) \geq 0$, то лише за умови, що $\Lambda \geq 0$, матимемо нерівність:

$$f(X^*) = L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)).$$

Функція $L(X^*, \Lambda)$ — лінійна відносно Λ, тобто остання нерівність виконується для будь-якого $\Lambda \geq 0$. Отже, точка (X^*, Λ^*) — точка глобального мінімуму по Λ функції Лагранжа.

Для встановлення нерівності, що відповідає лівій частині умови (5.20), а саме: $L(X, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda^*)$, скористаємося також рівнянням (5.28), підсумувавши його по *i*: $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0$. За умовою теореми $f(X), q_i(X)$ — угнуті функції і $\Lambda \geq 0$, тому виконується таке рівняння:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \right) \left(\Lambda - \Lambda^* \right) = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \Lambda^* \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} =$$

$$= \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i}.$$

Отже, у точці X^* функція Лагранжа має глобальний максимум по *X*, що повністю доводить необхідність теореми.

Достатність. Для доведення достатності умов теореми потрібно виходити з того, що $X^* \geq 0,\ \Lambda^* \geq 0$, (X^*, Λ^*) — сідлова точка функції $L(X, \Lambda)$ (тобто для (X^*, Λ^*) виконується нерівність (5.20)), і необхідно довести, що тоді X^* є оптимальним планом задачі опуклого програмування.

Підставимо у нерівність (5.20) вираз функції Лагранжа (5.19) для задачі (5.29)—(5.31):

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \quad (5.33)$$

при всіх значеннях $X \geq 0,\ \Lambda \geq 0$.

Розглянемо праву частину подвійної нерівності (5.33).

$$f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X^*) - f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)).$$

Остання нерівність має виконуватися для всіх $\Lambda \geq 0$. Крім того, $\left(b_i - q_i(X)\right) \geq 0$, тобто нерівність справджується лише у разі, коли

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = 0.$$

Тоді з лівої частини нерівності (8.26) маємо:

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow\Rightarrow f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \leq f(X^*).$$

Через те що $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \geq 0$, приходимо до нерівності $f(X) \leq f(X^*)$, яка справджується для всіх значень $X \geq 0$.

Отже, точка X^* задовольняє обмеження і надає максимального значення цільовій функції задачі, тому що для всіх інших $X \geq 0$ функція $f(X)$ набуває менших значень, ніж у точці X^*, тобто вона є оптимальним планом задачі нелінійного програмування. Достатність умов тереми доведено.

Умови теореми Куна — Таккера виконуються лише для задач, що містять опуклі функції.

5.10. Опуклі й угнуті функції

Наведемо основні означення та теореми. Нехай задано *n*-вимірний лінійний простір R^n. Функція $f(X)$, що задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***опуклою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини *X* і будь-яких значень $0 \le \lambda \le 1$ виконується співвідношення:

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right) \le \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right). \tag{5.34}$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго опуклою.

Функція $f(X)$, яка задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***угнутою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини *X* і будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ справджується співвідношення:

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right) \ge \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right). \tag{5.35}$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго угнутою.

Слід зазначити, що опуклість та угнутість функції визначаються лише відносно опуклих множин у R^n, оскільки за наведеними означеннями разом з двома будь-якими точками X_1 та X_2 множині *X* належать також точки їх лінійної комбінації: $\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1$ для всіх значень $0 \le \lambda \le 1$, що можливо лише у разі, коли множина *X* є опуклою.

Теорема 5.2. Нехай $f(X)$ — опукла функція, що задана на замкненій опуклій множині *X*, тоді будь-який локальний мінімум $f(X)$ на цій множині є і глобальним.

Доведення. Допустимо, що в точці X' функція $f(X)$ має локальний мінімум, тоді як глобальний мінімум досягається в точці X^*, отже, виконуватиметься нерівність $f(X') > f(X^*)$. Через те що $f(X)$ — опукла функція, для будь-яких значень $0 \le \lambda \le 1$ справджується співвідношення:

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) \le \lambda f\left(X^*\right) + (1-\lambda) f\left(X'\right). \tag{5.36}$$

Множина *X* опукла, тому точка $\lambda X^* + (1-\lambda)X'$ при $0 < \lambda < 1$ також належить цій множині. Враховуючи, що $f(X') > f(X^*)$, нерівність (5.36) матиме вигляд:

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) \le \lambda f\left(X^*\right) + (1-\lambda) f\left(X'\right) < \lambda f(X') + (1-\lambda) f(X');$$
$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) < f(X').$$

Значення λ можна вибрати так, щоб точка $\lambda X^* + (1-\lambda)X'$ була розташована як завгодно близько до X'. Тоді отримана остання нерівність суперечить тому, що X' — точка локального мінімуму, оскільки існує як завгодно близька до неї точка, в якій функція набуває меншого значення, ніж у точці X'. Тому попереднє допущення неправильне. Теорему доведено.

Теорема 5.3. Нехай $f(X)$ — опукла функція, що визначена на опуклій множині *X*, і крім того, вона неперервна разом з частинними похідними першого порядку в усіх внутрішніх точках *X*. Нехай X^* — точка, в якій $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = 0,\ (i = \overline{1,n})$. Тоді в точці X^* досягається локальний мінімум, що збігається з глобальним.

*Доведення***.** З рівності (5.19) для $0 < \lambda < 1$ знаходимо:

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right) \le \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right) = f(X_1) + \lambda(f(X_2) - f(X_1));$$
$$f\left(\lambda X_2 + X_1 - \lambda X_1\right) = f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) \le f(X_1) + \lambda(f(X_2) - f(X_1));$$
$$\frac{f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) - f(X_1)}{\lambda} \le f(X_2) - f(X_1).$$

Через те що існують частинні похідні першого порядку, функцію $f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1))$ можна розкласти в ряд Тейлора:

$$f(X_1+\lambda(X_2-X_1))=f(X_1)+\nabla f\big(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\big)\lambda(X_2-X_1),$$

де $\nabla f\big(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\big)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градієнт функції *f*, обчислений у точці $X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)$, $0\le\theta\le 1$. Тоді:

$$\frac{f(X_1+\lambda(X_2-X_1))-f(X_1)}{\lambda}=\nabla f\big(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\big)(X_2-X_1)\le f(X_2)-f(X_1).$$

Переходимо до границі при $\lambda\to 0$, отримаємо:

$$\nabla f(X_1)(X_2-X_1)\le f(X_2)-f(X_1). \tag{5.37}$$

Ця умова виконується для будь-яких внутрішніх точок X_1 та X_2 і є необхідною і достатньою умовою опуклості $f(X)$.

Якщо функція $f(X)$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку і угнута на множині X, то аналогічно попередньому результату маємо:

$$\nabla f(X_1)(X_2-X_1)\ge f(X_2)-f(X_1).$$

Припустимо, що X^0 — довільна точка множини X, тоді, поклавши $X_1=X^*$, $X_2=X^0$, а також за умовою теореми $\nabla f(X)=0$, в нерівності (5.37) маємо:

$$\nabla f(X^*)(X^0-X^*)=0\le f(X^0)-f(X^*)\Rightarrow f(X^0)\ge f(X^*).$$

Отже, опукла функція $f(X)$ досягає свого глобального мінімуму на множині X у кожній точці, де $\nabla f(X)=0$. Теорему доведено.

Як наслідок теореми можна показати, що коли X замкнена, обмежена знизу, опукла множина, то глобального максимуму опукла функція $f(X)$ досягає на ній у одній чи кількох точках (при цьому допускається, що в точці X значення функції скінчене). Застосовуючи за розв'язування таких задач процедуру перебору крайніх точок, можна отримати точку локального максимуму, однак не можна встановити, чи є вона точкою глобального максимуму.

Для угнутих функцій отримані результати формулюють так. Нехай $f(X)$ — угнута функція, що задана на замкненій опуклій множині $X\subset R^n$. Тоді будь-який локальний максимум $f(X)$ на множині X є глобальним. Якщо глобальний максимум досягається в двох різних точках множини, то він досягається і на нескінченній множині точок, що лежать на відрізку, який сполучає ці точки. Для строго угнутої функції існує єдина точка, в якій вона досягає глобального максимуму.

Градієнт угнутої функції $f(X)$ у точках максимуму дорівнює нулю, якщо $f(X)$ — диференційовна функція. Глобальний мінімум угнутої функції, якщо він скінченний на замкненій обмеженій зверху множині, має досягатися в одній чи кількох її крайніх точках за умови скінченності функції $f(X)$ у кожній точці цієї множини.

5.11. Опукле програмування

Опукле програмування розглядає методи розв'язування задач нелінійного програмування, математичні моделі яких містять опуклі або угнуті функції.

Загальний вигляд задачі опуклого програмування такий:

$$\max F=f(x_1,x_2,...,x_n), \tag{5.38}$$

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n)\ge 0,\ (i=\overline{1,m}); \tag{5.39}$$

$$x_j\ge 0\ (j=\overline{1,n}), \tag{5.40}$$

де $F=f(x_1,x_2,...,x_n)$, $g_i(x_1,x_2,...,x_n)$ — угнуті функції.

Аналогічний вигляд має задача для опуклих функцій.

Позначимо: $F'(X)=-F(X)$; $g_i'(X)=-g_i(X)$, тоді $\max F(X)\approx\min F'(X)$, і маємо:

$$\min F'=f'(x_1,x_2,...,x_n), \tag{5.41}$$

$$g_i'(x_1,x_2,...,x_n)\le 0\ \ (i=\overline{1,m}); \tag{5.42}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,n}), \tag{5.43}$$

де $F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i'(x_1, x_2, ..., x_n)$ — опуклі функції.

Оскільки ці задачі еквівалентні, то нижче розглянемо задачу (5.38)—(5.40).

Множина допустимих планів задачі, що визначається системою (5.39), є опуклою.

Як наслідок теорем 5.2 та 5.3 справджується таке твердження: точка локального максимуму (мінімуму) задачі опуклого програмування (5.38)—(5.40) є одночасно її глобальним максимумом (мінімумом).

Отже, якщо визначено точку локального екстремуму задачі опуклого програмування, то це означає, що знайдено точку глобального максимуму (мінімуму).

У разі обмежень-нерівностей задачу опуклого програмування розв'язують, застосовуючи метод множників Лагранжа.

Функція Лагранжа для задачі (5.38)—(5.40) має вид:

$$L(X,\Lambda) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{5.44}$$

де $\lambda_i \ (i=\overline{1,m})$ — множники Лагранжа.

Використовуючи теорему Куна—Таккера, маємо необхідні та достатні умови існування оптимального плану задачі опуклого програмування.

Теорема 5.4. Якщо задано задачу нелінійного програмування виду (8.31)—(8.33), де функції $f(X), g_i(X) \ (i=\overline{1,m})$ диференційовані і вгнуті по *X*, то для того, щоб вектор $X^* \geq 0$ був розв'язком цієї задачі, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор $\Lambda^* \geq 0$, що пара (X^*, Λ^*) була б сідловою точкою функції Лагранжа, тобто щоб виконувалися умови:

$$\text{(I)} \ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0, \left(j=\overline{1,n}\right); \tag{5.45}$$

$$\text{(II)} \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0, \ \left(j=\overline{1,n}\right); \tag{5.46}$$

$$\text{(III)} \ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \ \left(i=\overline{1,m}\right); \tag{5.47}$$

$$\text{(IV)} \ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0, \ \left(i=\overline{1,m}\right). \tag{5.48}$$

Для задачі мінімізації (5.41)—(5.43), де всі функції $f(X), g_i(X) \ (i=\overline{1,m})$ диференційовані і опуклі по *X,* маємо умови, аналогічні вищенаведеним, але зі знаком «≥» в нерівностях (5.46) та (5.48).

Сформульована теорема доводиться з допомогою використання уже наведених теорем цього та попередніх параграфів.

5.12. Квадратичне програмування

Окремою частиною задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування. До них належать задачі, які мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + ... + c_{nn}x_n^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + ... + 2c_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i=\overline{1,m});$$

$$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,n}).$$

Квадратична функція *n* змінних називається ***квадратичною формою*** і може бути подана у вигляді:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = X^TCX,$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$,

причому матриця C завжди симетрична, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***від'ємно означеною***, якщо для всіх X, крім $X = 0$, значення $Z(X) < 0$ (якщо $Z(X) \le 0$, то маємо від'ємно напівозначену квадратичну форму), у протилежному разі $Z(X)$ є ***додатно означеною*** (якщо $Z(X) \ge 0$, то маємо додатно напівозначену квадратичну форму).

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***неозначеною***, якщо вона додатна для одних значень X і від'ємна для інших.

Вид квадратичної форми можна визначити, використовуючи

$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ — вектор характеристичних коренів (власних значень) матриці C.

Вектор характеристичних коренів матриці C є вектором, кожна компонента якого задовольняє систему рівнянь виду $(C - E\lambda_i)X = 0$ $(i = \overline{1,n})$. Система має ненульовий розв'язок, якщо $|C - E\lambda| = 0$. Таке рівняння називається характеристичним рівнянням матриці C і має λ_i $(i = \overline{1,n})$ коренів, які утворюють вектор Λ:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ . \; . & . \; . & . & . \; . \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Наведемо без доведення теорему.

Теорема5.5. Для того, щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) означеною, необхідно і достатньо, щоб усі компоненти вектора характеристичних коренів $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ були додатними (від'ємними) значеннями.

Якщо хоча б один із характеристичних коренів дорівнює нулю, то квадратична форма є напівдодатною (напіввід'ємною). Якщо корені мають різні знаки, то квадратична форма є неозначеною.

Приклад 5. Визначити вид квадратичної форми:

$$F = -4x_1x_2 - 4x_1^2 - x_2^2.$$

Матриця C має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$.

Звідси маємо:

$$(-4 - \lambda)(-1 - \lambda) - (-2)(-2) = 0 \to 4 + \lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \to \lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Коренями отриманого квадратного рівняння є: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -5 < 0$, тоді $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Отже, квадратична форма $F = -2x_1x_2 - 4x_1^2 - x_x^2$ за теоремою 8.5 є напіввід'ємною.

Зазначимо, що відомим з теорії аналізу функцій є таке твердження: від'ємно означена квадратична форма є угнутою, а додатно означена — опуклою.

Розглянемо випадок від'ємно означеної квадратичної форми, що входить у цільову функцію задачі квадратичного програмування.

$$\max\ F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j\,, \tag{5.49}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1,m})\,; \tag{5.50}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n})\,. \tag{5.51}$$

Оскільки цільова функція задачі є опуклою, а обмеження — лінійні, тобто визначають опуклу множину допустимих розв'язків, то ця задача належить до задач опуклого програмування, для яких справджується твердження, що будь-який локальний максимум є і глобальним. Отже, використовуючи умови теореми Куна—Таккера для задачі (5.49)—(5.51), отримаємо необхідні та достатні умови оптимальності плану у вигляді такої теореми.

Теорема 5.6. Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування тоді, і тільки тоді, коли існують такі *m*-вимірні вектори $\Lambda^* \geq 0, W \geq 0$ і *n*-вимірний вектор $V \geq 0$, що виконуються умови:

$$\text{(I)}\ \ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0\,,\ \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.52}$$

$$\text{(II)}\ \ v_j \cdot x_j^* = 0\,,\ \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.53}$$

$$\text{(III)}\ \ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0\,,\ \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{5.54}$$

$$\text{(IV)}\ \ w_i \lambda_i^* = 0\,,\ \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{5.55}$$

Доведення. Запишемо функцію Лагранжа для задачі квадратичного програмування (5.49)—(5.51):

$$L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right). \tag{5.56}$$

Нехай (X^*, Λ^*) — сідлова точка функції Лагранжа, тобто яка визначає оптимальний план задачі квадратичного програмування. Застосуємо теорему 5.4 до виразу (5.56). За теоремою для того, щоб точка (X^*, Λ^*) визначала оптимальний план, необхідно і достатньо виконання умов (5.45)—(5.47):

для $x_j^* \geq 0$ має виконуватись умова:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i^* - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* a_{ij} \leq 0\,,\ \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{5.57}$$

$$\text{а також}\ \ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0\,, \tag{5.58}$$

а для $\lambda_j^* \geq 0$ має виконуватись умова:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \geq 0\,,\ \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5.59}$$

$$\text{а також}\ \ \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0\,. \tag{5.60}$$

Візьмемо два вектори $V(v_1, v_2,...v_n) \geq 0$ та $W(w_1, w_2,...w_m) \geq 0$, компоненти яких будуть введені як додаткові змінні в рівняння (5.57) і (5.59). Для цього виберемо $v_j > 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} < 0$ і $v_j = 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0$. Аналогічно виберемо $w_i > 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} > 0$ і $w_i = 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$. Тепер додамо компоненти вектора $V(v_1, v_2,...v_n) \geq 0$ у (5.57) і віднімемо компоненти вектора $W(w_1, w_2,...w_m) \geq 0$ від (5.59). Враховуючи правила вибору компонент векторів, матимемо для (5.57):

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Звідси: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} = -v_j$, тому для (5.58) маємо:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = -v_j x_j^* = v_j x_j^* = 0.$$

Аналогічно для другої групи обмежень:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Звідки $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = w_i$, тому $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = w_i \lambda_i^* = 0$.

Теорему доведено.

Наведену теорему можна використати для побудови ефективного методу розв'язування задач квадратичного програмування на основі алгоритму симплексного методу.

Умови (5.52)—(5.55) утворюють стосовно змінних X^*, Λ^*, V, W систему $(n + m)$ рівнянь з $2(n + m)$ невідомими.

Умови (5.54) та (5.55) означають, що змінні x_j^*, v_j не можуть одночасно мати додатні значення, тобто входити в базис разом. Якщо деякі k компонент вектора X^* додатні, то відповідні їм компоненти вектора V дорівнюють нулю і лише $(n — k)$ компонент відмінні від нуля (додатні). Отже, разом x_j^*, v_j будуть мати не більш ніж n додатних компонент. З аналогічних міркувань щодо рівності (5.55) випливає, що разом з λ_i^*, w_i буде $n + m$ відмінних від нуля компонент, тобто це може бути базисний розв'язок системи, що утворена умовами (5.52) та (5.54). Для знаходження такого розв'язку можна застосувати симплексний метод.

Якщо зазначена система рівнянь має допустимий план (він буде єдиним), то оптимальний план відповідної задачі квадратичного програмування також існує.

Розв'язуємо систему рівнянь (5.52) і (5.54) симплексним методом. Як відомо, спочатку необхідно привести систему обмежень до канонічного виду введенням потрібної кількості додаткових та штучних змінних. Для зведення системи до канонічної форми та визначення початкового опорного плану вводимо штучні змінні $\alpha(\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$ у рівняння виду (5.54), які будуть базисними для першого опорного плану, а змінні $\beta(\beta_1, \beta_2,..., \beta_m)$ — у групу рівнянь (5.48), які також дають базисні змінні для початкового плану. Потім для знаходження базисного розв'язку системи (5.52), (5.54) розв'язуємо симплексним методом таку задачу лінійного програмування:

$$\max\ F' = -M\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i\right) \tag{5.61}$$

за умов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j + \alpha_j = 0, \ \ (j = \overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} - w_i + \beta_i = 0 \ (i = \overline{1,m}); \end{cases} \tag{5.62}$$

$$X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0 . \qquad (5.63)$$

Якщо в процесі розв'язування задачі (5.61)—(5.63) всі штучні змінні будуть виведені з базису $(\alpha = 0, \beta = 0)$ і разом з цим для знайдених значень змінних X^*, Λ^*, V, W виконуються умови (5.53), (5.55), то знайдений розв'язок є оптимальним планом задачі квадратичного програмування (5.49)—(5.51).

Приклад 6. Розв'язати задачу квадратичного програмування:

$$\max F = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

*Розв'язання***.** Оскільки цільова функція виражена сумою лінійної функції $F_1 = 9x_1 + 5x_2$ та квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - \ -2x_1x_2$, а система обмежень є лінійною, то маємо задачу квадратичного програмування.

Визначимо вид квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$, для чого відшукаємо корені характеристичного рівняння, що відповідає матриці, складеній з коефіцієнтів при змінних даної функції:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням для матриці *C* буде:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = -1.$$

Оскільки обидва корені характеристичного рівняння від'ємні, то квадратична форма $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$ є від'ємно означеною, а отже, опуклою.

Запишемо функцію Лагранжа для цієї задачі:

$$L(X, \Lambda) = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + \lambda(6 - 2x_1 - 3x_2) .$$

Скористаємося теоремою 5.4. Необхідні умови існування екстремуму матимуть вигляд:

$\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 9 - 4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \leq 0$, причому $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = 0$;

$\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 5 - 4x_2 - 2x_1 - 3\lambda \leq 0$, причому $\dfrac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = 0$;

$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0$, причому $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = 0$,

де $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ — координати сідлової точки.

Обмеження, що відповідають нерівностям, запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \leq -9; \\ -2x_1 - 4x_2 - 3\lambda \leq -5; \\ -2x_1 - 3x_2 \geq -6. \end{cases}$$

Вводимо додаткові змінні для зведення нерівностей до рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda + v_1 = -9; \\ -2x_1 - 4x_2 - 3\lambda + v_2 = -5; \\ -2x_1 - 3x_2 - w_1 = -6. \end{cases}$$

Для зведення задачі до канонічної форми помножимо кожне рівняння на (–1):

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 = 9; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3\lambda - v_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6. \end{cases}$$

Очевидно, що в даному разі штучні змінні необхідно вводити в перші два рівняння. У третьому рівнянні базисною змінною буде w_1. Маємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max F' = -M\alpha_1 - M\alpha_2,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 + \alpha_1 = 9; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3\lambda - v_2 + \alpha_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0,\ \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0.$$

Розв'язавши її симплексним методом, отримаємо:

$$x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6},\ \lambda^* = 0,\ v_1 = v_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ w_1 = 1\frac{1}{6}.$$

Необхідно перевірити виконання умов:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = x_1^* v_1 = 2\frac{1}{6} \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = x_2^* v_2 = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = \lambda^* w_1 = 0 \cdot 1\frac{1}{6} = 0.$$

Всі умови виконуються, отже, $(X^*, \Lambda^*) = \left(x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6},\ \lambda^* = 0 \right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для задачі квадратичного програмування, а $X^* \left(x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6} \right)$ — оптимальним планом задачі, для якого значення функціонала дорівнює:

$$F = 9 \cdot 2\frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 2\left(\frac{13}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{97}{9}.$$

5.13. Економічна інтерпретація множників Лагранжа

Теорему 5.4 можна розглядати як узагальнення другої теореми двоїстості задач лінійного програмування для задач нелінійного програмування. Умови (5.46)—(5.48) є умовами доповнюючої нежорсткості.

Для з'ясування питання стосовно економічного змісту множників Лагранжа розглянемо застосування методу множників Лагранжа до задачі лінійного програмування як частинного випадку нелінійних задач. Нехай задача має вигляд:

$$\max \quad F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{5.64}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.65}$$

Функція Лагранжа для даної задачі має вигляд:

$$L(X, \Lambda) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + \lambda_1 (b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) +$$
$$+ \lambda_2 (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n) + \ldots + \lambda_m (b_m - a_{m1}x_1 -$$

$$-a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j .$$

Якщо деякий змінний вектор $X'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ є допустимим розв'язком задачі (5.64)—(5.65), то функція Лагранжа ідентична функції мети (5.64). Через те що виконуються умови $a_{i1}x' + a_{i2}x_2' + \ldots + a_{in}x_n' = b_i \ (i = \overline{1,m})$, доданки виду $\lambda_i (b_i - a_{i1}x_1 - \ -a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n)$ у функції Лагранжа перетворюються в нуль і $L(X', \Lambda) = F(X')$.

З необхідних умов існування екстремуму для функції Лагранжа можна помітити, що істотною для розгляду є лише умова рівності нулю частинних похідних $L(X, \Lambda)$ по множниках Лагранжа. Отже, маємо задачу, що еквівалентна (5.64), (5.65):

$$\max \ L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \tag{5.66}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n = 0 \ (i = \overline{1,m}). \tag{5.67}$$

Розглянемо другу групу умов існування екстремальних точок функції Лагранжа, коли частинні похідні по $x_j \ \ (j = \overline{1,n})$ дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j - \lambda_1 a_{1j} - \lambda_2 a_{2j} - \ldots - \lambda_m a_{mj} = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 . \tag{5.68}$$

Допустимо, що деякий вектор $\Lambda'(\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_m')$ задовольняє умови (5.68), тоді для нього функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i' a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \lambda_1' a_{1j} - \lambda_2' a_{2j} - \ldots - \lambda_m' a_{mj}) x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i .$$

Причому для того, щоб задовольнити умову (5.68), необхідно знайти такі значення вектора, що $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i \to \min$, тобто приходимо до такої задачі:

$$\min L(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i , \tag{5.69}$$

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{5.70}$$

Очевидно, що пара задач (5.64), (5.65) і (5.69), (5.70) є парою спряжених задач (початковою та двоїстою), а множники Лагранжа — змінними двоїстої з цієї пари задач $\left(\lambda_i = y_i , (i = \overline{1,m})\right)$.

Отже, $\lambda_i \ \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ — це двоїсті оцінки ресурсів, «тіньові» ціни відповідних ресурсів виробництва.

Якщо поширити ці висновки на загальну задачу нелінійного програмування, додавши до задачі (5.64), (5.65) умову $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n})$, то розв'язування можна здійснювати узагальненням методу Лагранжа.

В результаті отримаємо двоїсту задачу, що має вигляд:

$$\min L(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \ge c_j \quad (j = \overline{1,n}) ,$$

$$\lambda_i \overset{\le}{\underset{>}{}} 0 .$$

Звідси отримуємо економічну інтерпретацію змінних параметрів початкової задачі, а також множників Лагранжа.

Очевидно, що залежно від економічної постановки задачі, функція Лагранжа та умови існування сідлової точки можуть мати різну економічну інтерпретацію. Розглянемо задачу нелінійного програмування стосовно визначення оптимального плану виробництва продукції за умов використання обмежених ресурсів:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$
$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1, n}).$$

Головна мета виробничої системи — максимізація прибутку від реалізованої продукції. Отже, цільова функція $F = f(X)$ — це прибуток від реалізації продукції в обсягах $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, причому $f(X)$ — нелінійна. Крім того, для виробництва продукції необхідне використання m видів сировини, обсяги кожного виду якої відомі і становлять b_i $(i = \overline{1, m})$. Система рівнянь $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$ $(i = \overline{1, m})$ може бути подана у вигляді: $g_i(X) = b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$. Тобто, $q_i(X)$ — обсяг *i*-го виду сировини, що використовується для виробництва продукції в обсязі *X*, тоді $g_i(X)$ — лишок *i*-го ресурсу після виробництва продукції. Якщо $g_i(X) > 0$, то це означає, що на виробництво продукції використано не весь запас ресурсу, а якщо $g_i(X) = 0$ — ресурс вичерпано і якщо $g_i(X) < 0$, то це значить, що наявної (початкової) кількості сировини недостатньо для виробництва продукції на рівні *X*.

Виробнича система здебільшого функціонує в конкурентному середовищі, що характеризується антагоністичними інтересами.

Як було показано вище, λ_i — це змінні двоїстої до поставленої певної задачі. Вони можуть являти собою ціну, за якою на конкурентному ринку продається чи купується одиниця *i*-го виду сировини. Якщо $\lambda_i \ge 0$ і $g_i(X) > 0$, то така виробнича система може продати лишки сировини і отримати додатковий прибуток у розмірі $\lambda_i g_i(X)$. Якщо $g_i(X) < 0$, то підприємство може закупити потрібну кількість сировини, витративши суму грошей, що дорівнює $\lambda_i g_i(X)$. Така закупівля дасть змогу забезпечити виробництво продукції на рівні *X*. Отже, функція Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

являє собою загальний прибуток від виробництва, який включає прибуток від реалізації виготовленої продукції $f(X)$ та прибуток від продажу лишків сировини (чи витрати на придбання потрібної кількості сировини) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$.

За цін λ_i, що встановлюються на ринку, виробнича система прагне максимізувати прибуток шляхом визначення оптимального обсягу виробництва продукції $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Отже, знаходиться значення функції Лагранжа при X^*:

$$L(X^*, \Lambda) = \max_X L(X, \Lambda).$$

Оскільки прибуток формується на конкурентному ринку, слід розраховувати на встановлення цін на ресурси на мінімально можливому рівні, тобто слід відшукати

$$L(X, \Lambda^*) = \min_\Lambda L(X, \Lambda).$$

Якщо для розглянутої задачі нелінійного програмування існує сідлова точка (X^*, Λ^*), то це означає, що існує такий рівень виробництва X^* та цін на ресурси Λ^*, за яких має місце конкурентна рівновага:

$$L(X^*, \Lambda^*) = \max_X L(X, \Lambda) = \min_\Lambda L(X, \Lambda).$$

Оскільки за теоремою Куна—Таккера для сідлової точки за будь-яких значень X, Λ виконується нерівність:

$$L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda),$$

то очевидно, що ніяка зміна рівня виробництва X^* виробничою системою не збільшить прибутку $L(X, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda^*)$ і також ніяка зміна цін на ресурси в ринковому середовищі не зможе зменшити прибутку $L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda)$. Отже, сідлова точка функції Лагранжа є точкою ринкової рівноваги.

Розглянемо інтерпретацію множників Лагранжа. Позначимо через $B(b_1, b_2, ..., b_m)$ вектор з компонентами, що означають обсяг *i*-го ресурсу у виробничій системі. Нехай $X^*(B)$ означає, що оптимальний план задачі є функцією від значень наявних ресурсів *B*. Для спрощення допустимо, що функції $X^*(B)$ та $f(X)$, $q_i(X)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ мають властивості неперервності та диференційованості. І нарешті, допустимо також, що коли для *i*-го ресурсу $g_i(X(B)) > 0$, то за невеликих змін значення вектора *B* (що позначимо через B'), які є досить близькими до *B*, також виконується нерівність $g_i(X(B')) > 0$.

За теоремою Куна — Таккера в задачах нелінійного програмування з обмеженнями — нерівностями для оптимального плану задачі має місце рівність:

$$\frac{\partial f(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}.$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, можна написати таку рівність:

$\dfrac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial b_k}$. Враховуючи, що $\dfrac{\partial f(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}$, маємо:

$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k} \right).$$

Тепер допустимо, що деяке *i*-те обмеження активне в точці *B*, тобто $g_i(X^*(B)) = \widetilde{b}$. Тоді згідно з початковим допущенням це обмеження активне також і в деякому невеликому околі цієї точки. Враховуючи це, матимемо:

$\dfrac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k} = \gamma_{ik}$, де $\gamma_{ik} = \begin{cases} 0, & i \ne k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$

Отже, $\dfrac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \cdot \dfrac{\partial x_j}{\partial b_k} \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k} \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik} = \lambda_i$.

Тому λ_i є маргінальними змінами оптимального значення цільової функції за зміни b_i. Аналогічно, як і в задачах лінійного програмування, можна вважати, що λ_i приблизно відповідає приросту цільової функції за збільшення обсягу відповідного *i*-го ресурсу на одиницю. Виходячи з цього, можна оцінити, як зміниться оптимальне значення цільової функції за змін обсягів ресурсів, не розв'язуючи нову задачу.

5.14. Градієнтний метод розв'язування задач нелінійного програмування.

Градієнтні методи належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, де цільова функція і обмеження є диференційованими хоча б один раз. Зрозуміло, що градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму тільки для задач опуклого програмування, де локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційованої функції — визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Розглянемо метод Франка—Вульфа, процедура якого передбачає визначення оптимального плану задачі шляхом перебору розв'язків, які є допустимими планами задачі.

Нехай необхідно відшукати

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m}) \ ;$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Допустимо, що X_0 — початкова точка, що належить множині допустимих планів даної задачі. В деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють лінійною і потім розв'язують задачу лінійного програмування. Нехай розв'язок лінійної задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 в напрямку F_0 необхідно рухатись доти, поки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у зазначеному напрямку вибирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну, і знову розв'язується задача лінійного програмування.

Розглянемо детальніше перехід від k-ої ітерації методу до $(k + 1)$-ої ітерації.

Припустимо, що відома точка X_k, яка належить області допустимих розв'язків. У даній точці обчислюємо градієнт цільової функції:

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; \ldots, \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right).$$

Значення градієнта функції задає в даній точці напрям найшвидшого її зростання.

Замінюємо цільову функцію задачі лінійною функцією виду:

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n \, .$$

Потім розв'язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями початкової задачі і новою цільовою функцією:

$$\max F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m}) \ ;$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}) \, .$$

Нехай розв'язком такої задачі є точка $\widetilde{X}_k$.

З початкової точки X_k у напрямку $\widetilde{X}_k$ рухаємося з деяким довільним кроком $0 \le \lambda \le 1$, визначаючи координати нової точки X_{k+1} у такий спосіб:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k).$$

Зауважимо, що значення параметра $0 \le \lambda \le 1$ доцільно вибирати таким, що дає найбільше значення цільової функції початкової задачі $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для точки X_{k+1} повторюємо розглянутий процес, для чого знову розраховуємо значення градієнта і т. д.

У такий спосіб знаходимо послідовність точок $X_0, X_1, \ldots$, які поступово наближаються до оптимального плану початкової задачі. Ітераційний процес повторюється до того моменту, поки значення градієнта цільової функції не стане рівним нулю або виконуватиметься умова $\left| f(X_{k+1}) - f(X_k) \right| < \varepsilon$, де ε — досить мале число, яке означає потрібну точність обчислень.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Яка задача математичного програмування називається дробово-лінійною?
2. Як можна дослідити цільову функцію дробово-лінійної задачі, щоб знайти графічно її екстремальні значення?
3. Як можна розв'язувати дробово-лінійну задачу, коли вона має тільки дві змінні?
4. Як розв'язується дробово-лінійна задача, коли вона має три і більше невідомих?
5. Як записується в загальному вигляді задача нелінійного програмування?
6. Вкажіть основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування.
7. Запишіть функцію Лагранжа.
8. Опишіть метод множників Лагранжа.
9. Сформулюйте необхідні та достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.
10. Сформулюйте теорему Куна—Таккера.
11. Сформулюйте задачу квадратичного програмування.
12. Назвіть наближені методи розв'язання задачі нелінійного програмування.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Розв'яжіть графічно задачі дробово-лінійного програмування.

1.1) $$Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max, \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \\ x_j \ge 0,\ j = 1{,}2; \end{cases}$$

1.2) $$Z = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \max, \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 10; \\ x_j \ge 0,\ j = 1{,}2. \end{cases}$$

2. Розв'яжіть задачу дробово-лінійного програмування симплексним методом.

$$Z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1{,}5}. \end{cases}$$

3. Використовуючи метод Лагранжа, знайдіть точку умовного екстремуму.

1) $Z = 2x_1^2 + x_2^2$, $2x_1 + 3x_2 = 5$.

2) $Z = 2x_1x_2 + x_2^2$, $2x_1 + 4x_2 = 8$.

4. На виробництво трьох видів продукції (A; B; C) використовують матеріальні, трудові та фінансові ресурси. Норми витрат цих ресурсів на одиницю продукції, їх запаси, а також формули визначення прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежать від обсягів виробництва, наведено в таблиці.

Вид ресурсу, показник	**Продукція**			**Запас ресурсу**
	A	**B**	**C**	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2+2x_2$	$3x_3^2+6$	—
Обсяг виробництва	x_1	x_2	x_3	—

Передбачаючи, що попит на продукцію видів B і C відомий і становить 12 і 8 од., а ресурси необхідно використати повністю, визначте оптимальний план виробництва продукції кожного виду. Розрахуйте оцінки ресурсів і здійсніть економічний аналіз оптимального плану.

РОЗДІЛ 6

МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВИТКУ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ МАРКОВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати і володіти інструментарієм теорії марковських випадкових процесів.
- знати концептуальні положення моделювання розвитку соціо-економічних систем на основі використання марковських випадкових процесів.
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

6.1. Марковські випадкові процеси. Основні поняття, визначення та їх застосування у моделюванні економічних процесів

Серед випадкових процесів марковські становлять окремий клас з огляду на те, що за певних умов для цих процесів можна використовувати фундаментально розроблений математичний апарат, який дає змогу розв'язувати широке коло прикладних задач із різних галузей людської діяльності, таких як економіка, екологія, суспільні сфери, техніка та медицина.

Марковські випадкові процеси за певних припущень дають змогу достатньо точно описувати функціонування досліджуваних систем, а також прогнозувати їхнє поводження в майбутньому.

Ланцюги Маркова як математичний апарат широко використовуються в різних галузях наукової діяльності, зокрема в економіці, соціології, генетиці, екології. При цьому слід наголосити, що, використовуючи ланцюги Маркова для побудови стохастичних моделей, можна за допомогою цих моделей розв'язувати найрізноманітніші задачі, абсолютно не пов'язані між собою за змістом. Адже завдяки правильній формалізації основної інформації кожної з таких задач і перекладу її мовою математики можемо, використовуючи вже розроблені математичні методи, відшукувати основні прогнозні характеристики модельованих процесів.

Всі нижче розглянуті моделі відносяться до стохастичних моделей и потребують володіння відповідним математичним апаратом дослідження стохастичних процесів. Необхідний математичний інструментарій наведено у додатках цього розділу: Додатку 6.1 — основні поняття випадкових процесів, Додатку 6.2 — стаціонарні випадкові процеси.

Випадковий процес $X(t)$, $t \in (0, \infty)$, називають ***марковським*** для дискретних значень часу $t \in (t_1, t_2 ... t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, ... t_{i,} ...)$, якщо умовна функція розподілу ймовірностей $F(t_k)$ для моменту часу t_k випадкового процесу $X(t_k)$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ залежить лише від функції розподілу для моменту часу t_{k-1} і не залежить від функцій розподілу для попередніх моментів часу $t_1, t_2, ..., t_{k-2}$.

Отже, для марковського процесу справджується така рівність:

$$P(X(t_k) < x_k \,/\, X(t_1) = x_1,\ X(t_2) = x_2,\ ...,\ X(t_{k-1}) = x_{k-1}) = P(X(t_k) < x_k \,/\, X(t_{k-1}) = x_{k-1}). \qquad (6.1)$$

Отже, ураховуючи (6.1) можна стверджувати, що для марковського випадкового процесу його майбутнє в момент часу $t = t_{k+1}$ залежатиме лише від теперішнього моменту часу $t = t_k$, в якому він перебуває, а через нього також і від того, в якому стані цей процес перебував у момент часу $t = t_{k-1}$ у минулому. Це твердження проілюстровано на рис. 6.1.

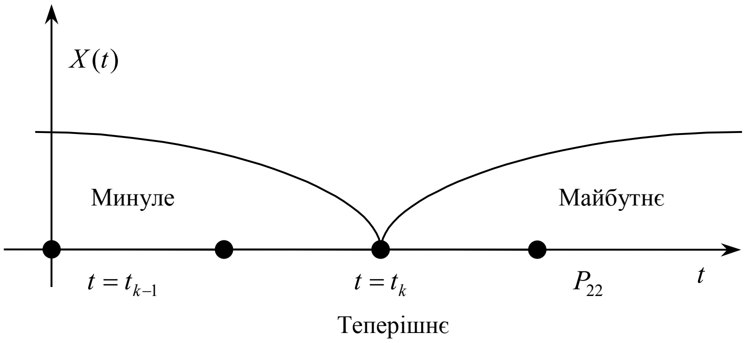


Рис. 6.1

Розглянемо марковський випадковий процес стосовно поводження деякої системи S, яка може здійснювати переходи з одного можливого стану із множини $\Omega = (w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots, w_N)$ в інший із цієї самої множини в моменти часу $t_1, t_2, t_3, ..., t_k$. Ці переходи системи утворюють випадковий процес $X(t)$, який називатиметься марковським, якщо ймовірність того, що система зі стану w_j в момент часу t_i перейде в стан w_{j+1} у момент часу t $(t_i < t < t_{i+1})$ залежатиме лише від того, в якому стані ця система перебувала в момент часу t $(t_{i-1} < t < t_i)$ і не залежатиме від того, в яких станах система перебувала в попередні моменти часу.

Такий випадковий процес $X(t)$, який описує переходи системи з одного можливого стану в будь-який інший за умови, що стани системи є несумісними, утворює ланцюг Маркова із дискретними станами і дискретним часом. Отже, множина несумісних станів системи Ω і відповідні умовні ймовірності переходу її з одного стану w_i в будь-який можливий інший стан w_j у момент часу називається ланцюгом Маркова.

Множину Ω усіх можливих станів системи називають також ***простором станів***, який може бути обмеженим і необмеженим у загальному випадку. Ми будемо мати справу лише з обмеженими просторами станів Ω.

Приклади просторів станів Ω, які описуються ланцюгами Маркова:

1. Погода в місті Києві влітку. Якщо умовно позначимо через w_1 — сонячна безхмарна погода, через w_2 — хмарна погода, але без дощу, w_3 — дощова погода, то розглядаючи Київ як певну систему щодо погоди, матимемо множину станів $\Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$.

2. Київський футбольний клуб «Динамо», готуючись до зустрічі, наприклад, з командою «Реал» на Кубок УЕФА, може очікувати на такі результати матчу: w_1 — одержати нуль очок (програш із будь-яким рахунком), w_2 — одне очко (при нічийному результаті), w_3 — 3 очки у випадку виграшу. Отже, розглядаючи команду «Динамо» як деяку систему, що з певною ймовірністю може потрапити в один із можливих станів — програш, нічия, виграш, маємо для цієї системи простір станів $\Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$.

3. Студент навчається в університеті п'ять років (включно один рік магістратури). У кожному навчальному році він із певною ймовірністю може залишити вуз, перейти на наступний курс або залишитися на цьому самому курсі повторно. Такі переходи він може здійснювати на кожному курсі до п'ятого, випускного. На п'ятому курсі студент може бути відрахованим із певною ймовірністю, залишитися на цьому самому курсі на другий рік або закінчити вуз із дипломом і залишити вуз. Простір станів студента як абстрагованої системи буде містити сім несумісних станів:

w_1 — студент залишає вуз;
w_2 — залишається на першому курсі;
w_3 — переходить на другий курс;
w_4 — переходить на третій;
w_5 — переходить на четвертий;
w_6 — переходить на п'ятий;
w_7 — залишає університет із дипломом.

Простір станів буде таким: $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\}$.

6.2. Класифікація станів ланцюгів Маркова

Ергодичний стан

Нехай задано простір Ω станів марковського процесу, який утворює ланцюг Маркова, і деяку підмножину A станів множини Ω $(A \subset \Omega)$. Тоді $\overline{A} = \Omega / A$ являтиме собою доповнення до A $\left(A \cup \overline{A} = \Omega,\ A \cap \overline{A} \neq 0\right)$. Розглянуте вище розбиття має вигляд, який проілюстровано на рис. 6.2.

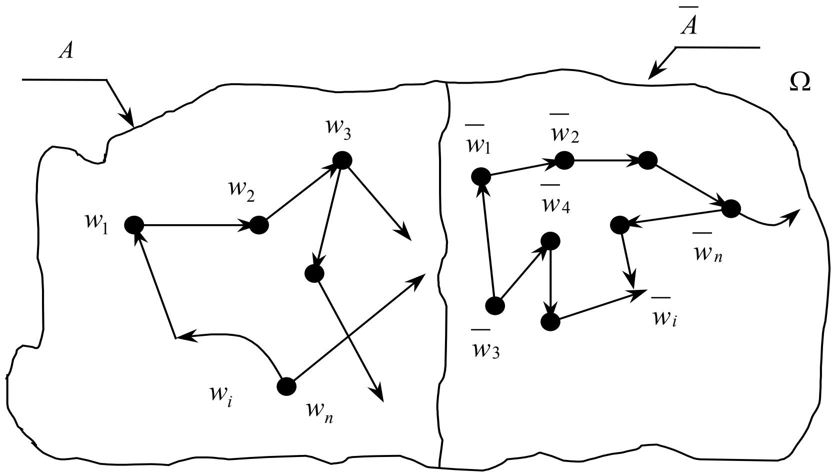


Рис. 6.2

Тут $w_i \in A$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$, $\overline{w_i} \in \overline{A}$ $\left(j=1, 2, \ldots, n\right)$.

Якщо з будь-якого стану $w_i \in A$ з певною ймовірністю система може перейти в деякий стан $w_j \in A$ і при цьому не існує жодного стану підмножини A, з якого система перейшла б у стан $\overline{w_j} \in \overline{A}$, то в цьому разі A називають ***ергодичною множиною***, або ***множиною ергодичних станів системи***. Потрапивши один раз в A, процес ніколи не зможе її залишити, а буде переміщуватися лише між станами $w_i \in A$. Ця властивість повинна виконуватися для всіх станів $w_i \in \overline{A}$.

Таким чином, ергодичний стан — це елемент ергодичної множини.

Стани $\overline{w_j} \in \overline{A}$ також утворюють ергодичну множину.

Нестійкі стани

Нехай задано простір Ω станів випадкового процесу, який утворює ланцюг Маркова, а також $A \subset \Omega$ і $\overline{A} = \Omega / A$. Тоді, якщо будь-який стан $w_i \in A$ може бути досягнутим із будь-якого іншого стану $w_j \in A$ і при цьому існує хоча б один стан $w_k \in A$, з якого процес може перейти у стан $\overline{w_e} \in \overline{A}$, і не існує жодного стану $w_k \in \overline{A}$, з якого системи перейшли в будь-який стан $w_k \in A$, то в цьому разі підмножину станів A називають ***нестійкою***. Нестійкий стан системи є елементом нестійкої підмножини А.

Схематично сказане проілюстровано на рис. 6.3.

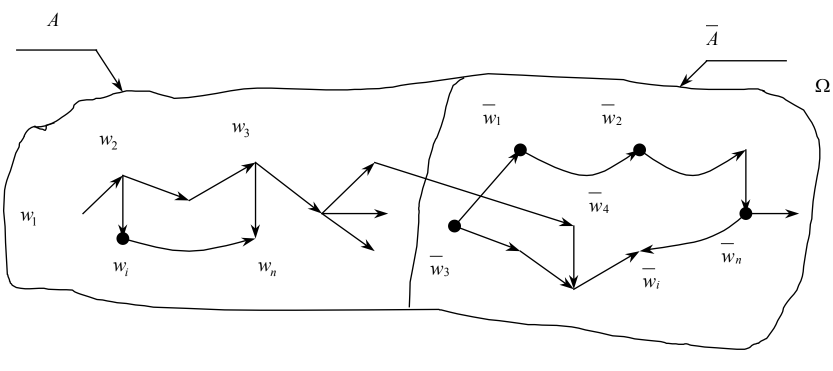


Рис. 6.3

Із рис. 6.3 випливає, що процес зі стану $w_s \in A$ з певною ймовірністю може потрапити у стан $\overline{w_i} \in \overline{A}$. Отже, стан w_s нестійкий.

Поглинальні стани

Якщо ергодична множина містить лише один стан (елемент), то його називають ***поглинальним***. Потрапивши в цей стан із певною ймовірністю один раз, процес у цьому стані й залишається (рис. 6.4).

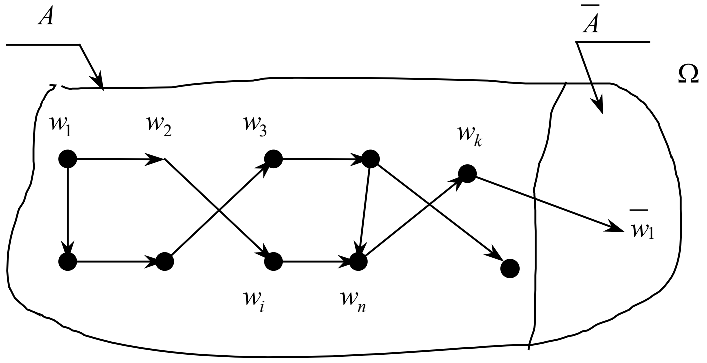


Рис. 6.4

Як випливає з рис. 6.4, потрапивши з певною ймовірністю зі стану w_k у стан $\bar{w}_1$, випадковий процес у цьому стані й залишається. Отже, стан $\bar{w}_1$ буде поглинальним.

У загальному випадку марковські процеси можуть мати не одну, а кілька ергодичних множин.

6.3. Матриця однокрокового переходу. Однорідні ланцюги Маркова

Перехід системи зі стану w_i у стан w_j, який може відбутися з певною ймовірністю в момент часу t, позначається як

$$P_{ij}(t)\ \ (w_i \to w_j). \tag{6.2}$$

При цьому $P_{ij}(t)$ називають ***умовною ймовірністю*** переходу зі стану w_i у стан w_j ланцюга Маркова. Повна ймовірнісна картина всіх можливих переходів системи, яка має N станів, подається у вигляді квадратної матриці:

$$\pi = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) & \dots & P_{1j}(t) & \dots & P_{1N}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) & \dots & P_{2j}(t) & \dots & P_{2N}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) & \dots & P_{3j}(t) & \dots & P_{3N}(t) \\ \vdots & & & & & & \\ P_{i1}(t) & P_{i2}(t) & P_{i3}(t) & \dots & P_{ij}(t) & \dots & P_{iN}(t) \\ \vdots & & & \dots & & & \\ P_{N1}(t) & P_{N2}(t) & P_{N3}(t) & & P_{Nj}(t) & \dots & P_{NN}(t) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Матрицю π називають ***імовірнісною матрицею*** однокрокового переходу системи в момент часу t з огляду на те, що перехід $w_i \to w_j$ $\left(i,\, j = \overline{1,\, N}\right)$ названо ***кроком***. При цьому для кожного рядка матриці р має виконуватись рівність:

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(t) = 1\ \ \left(i = \overline{1,\, N}\right), \tag{6.4}$$

оскільки випадкові події (перехід системи з певного фіксованого стану w_i у будь-який можливий стан w_j $(i,\, j = \overline{1,\, N})$) утворюють повну групу.

Якщо переходи з одного стану в будь-який можливий інший система здійснює у фіксовані моменти часу $(t = 1, 2, 3, \dots, k)$ (де t залежно від природи модельованої системи може тривати одну секунду, хвилину чи годину), то умовні ймовірності переходів за $t = k$ кроків визначають як

$$P_{ij}(k) \quad \left(i = \overline{1,\, N}\right). \tag{6.5}$$

У цьому разі матриця π набирає такого вигляду:

$$\pi = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) & P_{13}(k) & \dots & P_{1j}(k) & \dots & P_{1N}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) & P_{23}(k) & \dots & P_{2j}(k) & \dots & P_{2N}(k) \\ P_{31}(k) & P_{32}(k) & P_{33}(k) & \dots & P_{3j}(k) & \dots & P_{3N}(k) \\ \vdots & & & & & & \\ P_{i1}(k) & P_{i2}(k) & P_{i3}(k) & \dots & P_{ij}(k) & \dots & P_{iN}(k) \\ \vdots & & & \dots & & & \\ P_{N1}(k) & P_{N2}(k) & P_{N3}(k) & & P_{Nj}(k) & \dots & P_{NN}(k) \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Для кожного рядка матриці (6.6) також має виконуватися рівність

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij}(k) = 1 \quad \left(i = \overline{1,\, N}\right). \tag{6.7}$$

Матриці (6.3), (6.6) із властивостями (6.4) та (6.7) називають ***стохастичними***.

Ланцюг Маркова називають ***однорідним***, якщо

$$P_{ij}(t) = P_{ij} = \text{const}, \tag{6.8}$$

тобто умовні ймовірності не залежать від часу t. Тому однокрокова матриця перехідних умовних ймовірностей для однорідних ланцюгів Маркова матиме такий вигляд:

$$\pi = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2N} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3j} & \dots & P_{3N} \\ \vdots & & & & & & \\ P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{iN} \\ \vdots & & & \dots & & & \\ P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & & P_{Nj} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Для кожного рядка матриці (6.9) також виконується рівність

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1, \quad \left(i = \overline{1,\, N}\right). \tag{6.10}$$

Приклад 1. У певному районі міста розташовано три супермаркети A_1, A_2, A_3, що конкурують між собою. Щодо відвідування покупцями цих супермаркетів маємо такі середньостатистичні місячні дані:

магазин A_1 зберіг 70 % своїх покупців, 5 % одержав від магазину A_2 і 15 % — від магазину A_3;

магазин A_2 зберіг 60 % своїх покупців, 20 % одержав від магазину A_1 і 5 % — від магазину A_2;

магазин A_3 зберіг 80 % своїх покупців, 10 % одержав від магазину A_1 і 35 % — від магазину A_2.

Побудувати матрицю однокрокового переходу для середньомісячних змін, припустивши, що загальна кількість покупців у місті є сталою величиною.

Розв'язання. На підставі даних задачі маємо:

для магазину A_1 — $p_{11} = 0{,}7;\; p_{12} = 0{,}2;\; p_{13} = 0{,}1;$

для магазину A_2 — $p_{22} = 0{,}6;\; p_{21} = 0{,}05;\; p_{23} = 0{,}35;$

для магазину A_2 — $p_{33} = 0{,}8;\; p_{31} = 0{,}15;\; p_{33} = 0{,}05.$

Отже, матриця π однокрокового переходу набирає такого вигляду:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}6 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

6.4. Імовірності багатокрокових переходів. Вектор початкових станів системи

Якщо π є матрицею однокрокового переходу для обмеженого однорідного ланцюга Маркова, то $(\pi)^n$ є n-кроковою матрицею ймовірностей переходу. Справді, розглянемо однокрокову матрицю π однорідного ланцюга Маркова:

$$\pi = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2N} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3N} \\ \vdots & & & & \\ P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix}.$$

Вона описує перехід системи з одного можливого стану w_i в будь-який можливий стан w_j. Цей перехід системи може відбутися з імовірністю P_{ij}. Постає питання: з якою ймовірністю перехід $w_i \to w_j$ може здійснитися за два кроки $(k = 2)$. Цей перехід проілюстровано на рис. 6.5.

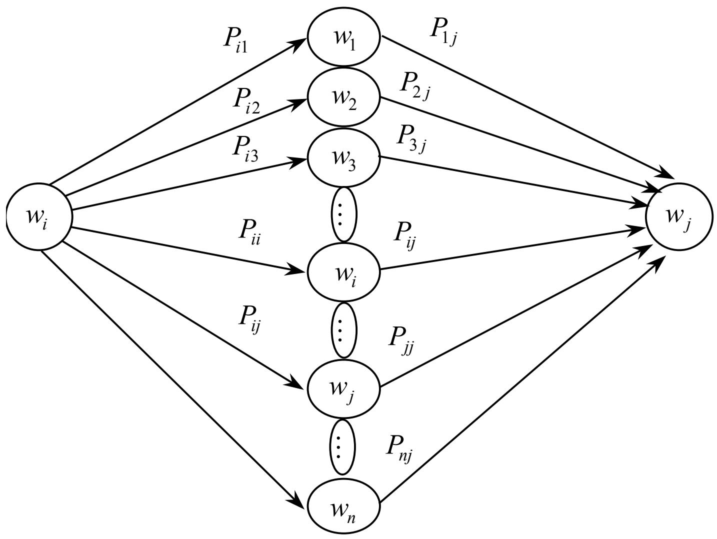


Рис. 6.5

Оскільки стани w_i, w_j $(i,\ j = 1, n)$ несумісні, то шляхи переходу $w_i \to w_j$ та їхні ймовірності обчислюються за правилом:

$$P_{ij}^{(2)} = P_{i1} \cdot P_{1j} + P_{i2} \cdot P_{2j} + P_{i3} \cdot P_{3j} + \ldots + P_{ii} \cdot P_{ij} + \ldots + P_{ij} \cdot P_{jj} + \ldots + P_{iN} \cdot P_{Nj}$$

або

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^{N} P_{im} \cdot P_{mj}. \qquad (6.11)$$

Тут $P_{ij}^{(2)}$ є ймовірність того, що за два кроки система зі стану w_i перейде у стан w_j ($w_i \to w_j$).

Але за означенням множення матриць сума (6.11) є елементом матриці π^2, який міститься на перетині i-го рядка і j-го стовпця.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що

$$P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{m=1}^{n} P_{im} \cdot P_{mj}^{(k)}, \qquad (6.12)$$

де $P_{ij}^{(k+1)}$ — імовірність того, що через $(k+1)$ кроків система перейде зі стану w_i у стан w_j.

Сума $\sum\limits_{m=1}^{n} P_{im} \cdot P_{mj}^{(k)}$ є елементом матриці $\pi^{(k+1)}$, який міститься на перетині i-го рядка і j-го стовпця.

Введемо ***вектор початкових станів системи***:

$$\overrightarrow{a_0'} = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{N0}), \qquad (6.13)$$

для якого

$$\sum_{i=1}^{N} a_{i0} = 1. \qquad (6.14)$$

Кожна компонента a_{i0} вектора $\overrightarrow{a_0'}$ є ймовірність того, що в початковий момент часу, з якого система починає функціонувати, вона матиме стан π^k. У цьому разі постає задача про визначення ймовірності перебування в кожному з можливих станів w_i $\left(i = \overline{1, N}\right)$ за умови, що відомий вектор $\overrightarrow{a_0'}$ початкових станів системи і буде здійснено k кроків у часі. Тобто необхідно визначити вектор

$$\overrightarrow{a_k'} = (a_1(k), a_2(k), \ldots, a_N(k)), \qquad (6.15)$$

для якого

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(k) = 1, \qquad (6.16)$$

де $a_i(k)$ — імовірність того, що після k кроків у часі система перебуватиме у стані w_i.

Вектор (6.15) визначається так:

$$\overrightarrow{a_k'} = \overrightarrow{a_0'} \cdot \pi^k. \qquad (6.17)$$

Приклад 2. Фермер має у своєму розпорядженні трактор, який може перебувати в одному з трьох несумісних станів:

w_1 — трактор є справним;

w_2 — потребує дрібного ремонту, але в робочому стані;

w_3 — перебуває в неробочому стані.

Перехід трактора як системи з одного стану в інший задано матрицею однокрокового переходу:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

У фіксований момент часу трактор перебуває в справному стані w_1. Яка ймовірність того, що в цьому стані він і залишиться після чотирьох робочих днів.

Розв'язання. Вектор початкового стану системи матиме в цьому разі такий вигляд:

$$\overrightarrow{a_0'} = (1,\ 0,\ 0).$$

Використовуючи (6.17) для $k = 4$ кроків, дістаємо:

$$\overrightarrow{a_4'} = \overrightarrow{a_0'} \cdot \pi^4,$$

або

$$\overrightarrow{a_4'} = \left(a_1(4),\ a_2(4),\ a_3(4)\right) = (1\quad 0\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05\\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}^4 = \left(0{,}72\quad 0{,}204\quad 0{,}076\right).$$

Отже, якщо трактор перебуває в справному стані, то ймовірність того, що через чотири робочих дні він залишиться в цьому самому стані, дорівнює 0,72, тобто 72 %, а ймовірність того, що він у цей момент буде в неробочому стані, дорівнює 0,0076, або 7,6 %.

6.5. Імовірнісні графи

Для наочного зображення однорідних ланцюгів Маркова зручно використовувати ймовірнісні графи. Як відомо, структура графа містить вершини, які відповідають у цьому разі станам системи, і напрямлені ребра, що інформують про напрям переходу цієї системи з одного можливого стану в інший.

Наприклад, імовірнісний граф системи, що має три стани, зображено на рис. 6.6.

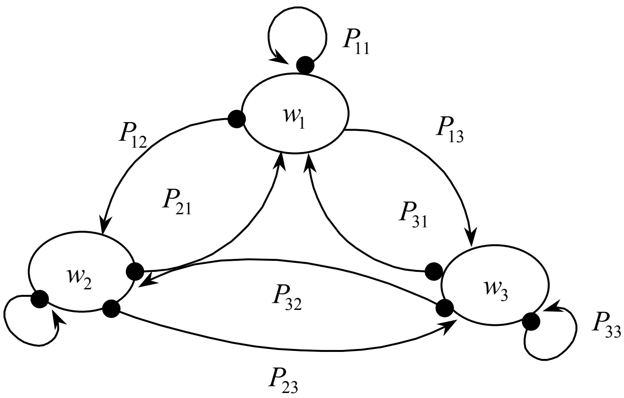


Рис. 6.6

Цьому графові відповідає матриця однокрокового переходу

$$\pi = \begin{pmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{pmatrix}.$$

Як випливає з рис. 6.6, сума ймовірностей вихідних ребер для кожної вершини ймовірнісного графа дорівнює одиниці. Отже, вихідні ребра кожної вершини графа утворюють рядок матриці р. Імовірнісний граф для системи з чотирьох станів наведено на рис. 6.7.

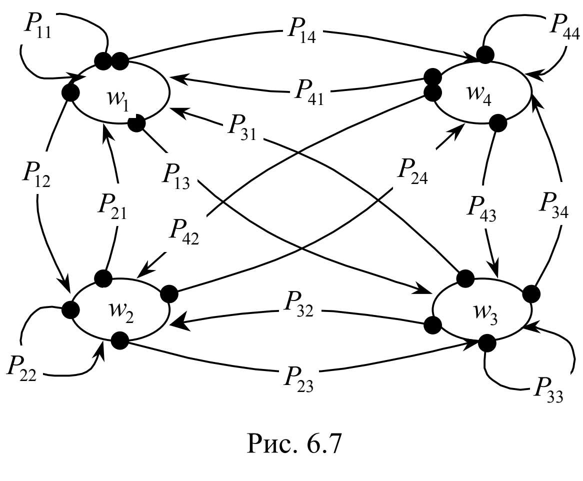


Рис. 6.7

Для цього графа матриця однокрокового переходу системи така:

$$\pi = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}.$$

Якщо кількість станів системи перевищує чотири, то ймовірнісний граф стає громіздким, а тому не має сенсу його використовувати.

Приклад 3. За заданою матрицею однокрокового переходу системи

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

побудувати ймовірнісний граф.

Розв'язання. Імовірнісний граф зображено на рис. 6.8.

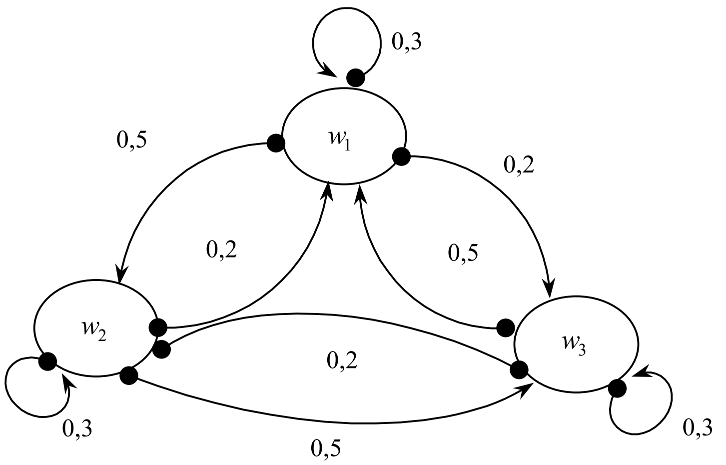


Рис. 6.8

Приклад 4. На підставі ймовірного графу, зображеного на рис. 6.9, записати матрицю однокрокового переходу π.

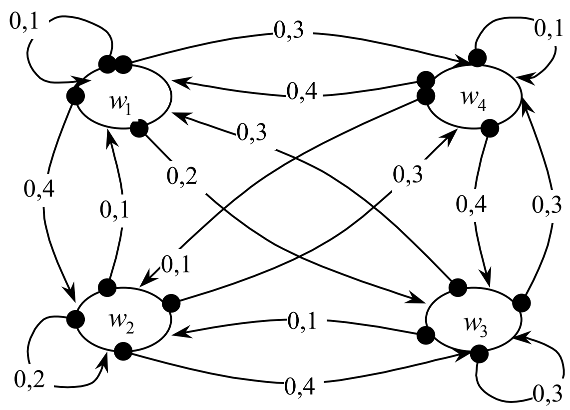


Рис. 6.9

Розв'язання. Оскільки ймовірності вихідних ребер кожної вершини ймовірнісного графа утворюють рядок матриці π, дістаємо:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

6.6 Класифікація ланцюгів Маркова

Для зручності вивчення ланцюгів Маркова корисно їх згрупувати в окремі класи, яким притаманні певні властивості. За аналогією з класифікацією станів, яка розглядалася раніше, ланцюги Маркова поділяють на поглинальні, регулярні та циклічні.

6.6.1. Поглинальні ланцюги Маркова та приклади їх використання при дослідженні соціо-економічних процесів

Ланцюг Маркова називають ***поглинальним***, якщо серед можливих станів системи існує хоча б один, потрапивши в який, система в ньому й залишається.

Матриця однокрокового переходу для цих ланцюгів, скажімо для чотирьох станів, матиме такий вигляд:

$$\pi=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}.$$

Поглинальним буде стан w_2.

Приклад 5. За заданим імовірнісним графом (рис. 6.10)

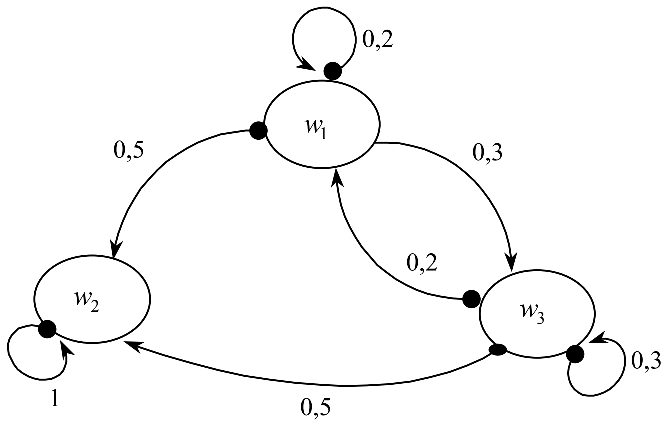


Рис. 6.10

записати матрицю однокрокового переходу π і визначити поглинальний стан.

Розв'язання. З структури ймовірнісного графа випливає, що матриця однокрокового переходу матиме такий вигляд:

$$\pi=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Отже, поглинальним буде стан w_2.

Зауважимо, що для поглинального стану вершина ймовірнісного графа, яка відповідає цьому стану, не має вихідних ребер, що добре ілюструє рис. 6.10.

Канонічна форма матриці π для поглинальних ланцюгів Маркова

У поглинальних ланцюгах Маркова домовилися так нумерувати стани системи, щоб поглинальні діставали перші номери. Тоді матриця π набирає вигляду так званої ***канонічної форми***, яка в загальному вигляді має таку структуру:

$$
\pi = \begin{array}{r l}
 & \begin{array}{cc} \text{Поглинальні стани} & \text{Непоглинальні стани} \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{cccc:cccc}
 w_1 & w_2 & \ldots & w_m & w_{m+1} & w_{m+2} & \ldots & w_n \\
 & & & & & & & \\
 & I & & & & O & & \\
 & & & & & & & \\
 \hdashline
 & & & & & & & \\
 & R & & & & Q & & \\
 & & & & & & &
 \end{array} \right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{Поглинальні стани} \begin{cases} w_1 \\ w_2 \\ \ldots \\ w_m \end{cases} \\
\text{Непоглинальні стани} \begin{cases} w_{m+1} \\ w_{m+2} \\ w_{m+3} \\ \ldots \\ w_n \end{cases}
\end{array}
\tag{6.18}
$$

Отже, матриця π умовно поділена на чотири матриці-блоки:

I — одинична матриця розміром $m \times m$, яка містить m поглинальних станів;

O — матриця розміром $m \times (n-m)$, усі елементи якої дорівнюють нулю;

R — матриця розміром $(n-m) \times m$, елементи якої є ймовірності переходу системи з непоглинальних станів у поглинальні;

Q — матриця розміром $(n-m) \times (n-m)$, елементи якої є ймовірності переходу системи з непоглинальних станів у непоглинальні.

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду матрицю однокрокового переходу

$$
\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0,1 & 0,05 & 0,15 & 0,2 & 0,25 & 0,15 & 0,1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0,05 & 0,15 & 0,1 & 0,15 & 0,1 & 0,25 & 0,2 \\
0,15 & 0,1 & 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,1 \\
0,2 & 0,05 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,15 & 0,2 \\
0,25 & 0,1 & 0,2 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,05 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Розв'язання. Згідно зі структурою матриці доходимо висновку, що модельований марковський процес має два поглинальних стани, а саме w_2 і w_7. Тоді згідно з (6.18) канонічна форма матриці набирає вигляду

$$
\Pi = \begin{array}{c} \\ w_2 \\ w_7 \\ w_1 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} w_2 & w_7 & w_1 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc:ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0,05 & 0,1 & 0,1 & 0,15 & 0,2 & 0,25 & 0,15 \\
0,15 & 0,2 & 0,05 & 0,1 & 0,15 & 0,1 & 0,25 \\
0,1 & 0,1 & 0,15 & 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\
0,05 & 0,2 & 0,2 & 0,05 & 0,25 & 0,1 & 0,15 \\
0,1 & 0,05 & 0,25 & 0,2 & 0,05 & 0,25 & 0,1
\end{array} \right)
\end{array}.
$$

Із канонічної форми матриці дістаємо:

$$R=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}1\\ 0{,}15 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}05 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}05\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}15\\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25\\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}15\\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}1\end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Приклад 7. Звести до канонічного вигляду матрицю однокрокового переходу

$$\pi=\begin{array}{c}\\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}4\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}35\\ 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Розв'язання. Згідно зі структурою матриці π модельована система має один поглинальний стан w_4, а отже, канонічна форма цієї матриці набирає вигляду

$$\pi=\begin{array}{c}\\ w_4\\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & w_5\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}4\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}35\\ 0{,}05 & 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}1\end{array}\right)\end{array}.$$

Із канонічної форми матриці π маємо:

$$I=(1),\ \ O=(0\quad 0\quad 0\quad 0),\ \ R=\begin{pmatrix}0{,}15\\ 0{,}05\\ 0{,}05\\ 0{,}2\end{pmatrix},\ \ Q=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}4\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}35\\ 0{,}45 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}1\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що для поглинальних ланцюгів Маркова зі збільшенням кількості кроків $t=k$ система прямує до поглинальних станів.

Скажімо, для прикладу 6 при $t=k=150$ матриця π набирає такого вигляду:

$$\pi=\begin{array}{c}\\ w_2\\ w_7\\ w_1\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}w_2 & w_7 & w_1 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6\end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|ccccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}5\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}15\\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}1\end{array}\right)^{150}\end{array} =$$

$$
\begin{array}{c}
\\ w_2 \\ w_7 \\ w_1 \\ = w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} w_2 & w_7 & w_1 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0{,}391 & 0{,}609 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}42 & 0{,}58 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}424 & 0{,}576 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}356 & 0{,}644 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}436 & 0{,}564 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Отже, після 150 кроків умовного часу дістаємо:

$$
R = \begin{pmatrix} 0{,}391 & 0{,}609 \\ 0{,}42 & 0{,}58 \\ 0{,}424 & 0{,}576 \\ 0{,}356 & 0{,}644 \\ 0{,}436 & 0{,}564 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Тож система після $k = 150$ кроків в умовному часі опиниться в одному з поглинальних станів w_2 або w_7. Матриця Q у цьому разі стає нульовою.

Для матриці π з одним поглинальним станом w_4 із прикладу 7 після $k = 250$ кроків в умовному часі її канонічна форма набирає такого вигляду:

$$
\begin{array}{c}
\\ w_4 \\ w_1 \\ \pi = w_2 \\ w_3 \\ w_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & w_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}4 \\
0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}35 \\
0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}5 & 0{,}3 \\
0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}1
\end{array}\right)^{250}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ w_4 \\ w_1 \\ = w_2 \\ w_3 \\ w_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} w_4 & w_1 & w_2 & w_3 & w_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

У цьому разі маємо:

$$
R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Отже, при $k = 250$ система з імовірністю, що дорівнює одиниці, із будь-якого можливого стану потрапляє в поглинальний стан.

Основні числові характеристики

При вивченні поглинальних ланцюгів Маркова нас цікавитиме така інформація:

- імовірності переходу в поглинальний стан за умови, що процес почався в непоглинальному стані;
- середній час перебування процесу в непоглинальному стані до його переходу в поглинальний стан за умови, що в початковий момент часу він перебуває в непоглинальному стані, тобто математичне сподівання для цього часу, і дисперсію;
- середня кількість кроків до переходу процесу в поглинальний стан за умови, що в початковому стані він перебуває в непоглинальному стані.

Математичне сподівання. Для поглинальних ланцюгів Маркова з матрицею однокрокового переходу, поданою в канонічній формі (6.18), справджуються такі твердження:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} Q^n = 0;$

2) матриця $(I - Q)$ має обернену матрицю;

3) $(I-Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m$.

Твердження 1 випливає з властивості поглинальних процесів через певну кількість кроків неодмінно потрапити в поглинальний стан, а тому зі збільшенням кількості m кроків матриця Q як матриця непоглинальних станів прямуватиме до нульової матриці.

Щоб довести твердження 2, скористаємось властивістю визначників, а саме: якщо матриці A та B є невиродженими, то

$$\det(AB) = \det A \det B. \tag{6.19}$$

Далі скористаємось такою рівністю:

$$(I-Q)\left(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}\right) = I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1} - Q - Q^2 - \ldots - Q^{m-1} == I - Q^m.$$

Отже, маємо:

$$(I-Q)\left(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}\right) = I - Q^m. \tag{6.20}$$

Якщо значення m великі, то $\det\left(I - Q^m\right) \neq 0$, бо $\det I = 1$.

Далі, урахувавши (6.19), дістанемо:

$$\det(I-Q)\left(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}\right) = \det(I-Q)\det(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}).$$

При цьому

$$\lim_{m\to\infty} (I-Q)^m = I \text{, оскільки } \lim_{m\to\infty} Q^m = 0,$$

а отже, із (6.20) випливає

$$\det(I-Q) \neq 0,$$

чим і підтверджується існування матриці, оберненої до матриці $(I-Q)$.

Нарешті, доведемо твердження 3. Згідно з (6.20) маємо:

$$I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1} = (I-Q)^{-1}\left(I - Q^m\right).$$

Тоді:

$$\lim_{m\to\infty} (I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}) = \lim_{m\to\infty} (I-Q)^{-1}\left(I - Q^m\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} (I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1}) = (I-Q)^{-1} \lim_{m\to\infty}\left(I - Q^m\right) \Rightarrow I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots = (I-Q)^{-1}.$$

Отже,

$$(I-Q)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Q^m. \tag{6.21}$$

Матрицю, обернену до матриці $(I-Q)$, називають ***фундаментальною матрицею для поглинальних ланцюгів Маркова*** і позначають

$$N_1 = (I-Q)^{-1}. \tag{6.22}$$

Для поглинальних ланцюгів Маркова середній час перебування процесу в непоглинальному стані w_j за умови, що в початковий момент часу він перебуває в непоглинальному стані w_i, дорівнює елементу n_{ij} фундаментальної матриці N_1 (тут n_{ij} — елемент матриці, який міститься в i-му рядку та j-му стовпці). Отже, N_1 — матрична форма запису математичних сподівань для кожного стану w_i $\left(i = \overline{1,\ N}\right)$.

Середня кількість кроків, здійснених процесом до того моменту, коли він потрапить у поглинальний стан, перебуваючи при цьому в непоглинальному стані w_i, дорівнює сумі елементів i-го рядка матриці N_1.

Якщо цю кількість позначимо $\overline{N_1}$, то

$$\overrightarrow{N_1} = N_1 = N_1\ \vec{\xi} = (I - Q)^{-1}\vec{\xi}, \tag{6.23}$$

де

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дисперсія. Нехай Ω — множина всіх можливих станів процесу, а $\left(\overrightarrow{a'}\right)^{(k)}$ — підмножина всіх непоглинальних станів. Тоді $A \cup \overline{A} = \Omega$ $\left(A \cap \overline{A}\right) = \varnothing$, де $\overline{A}$ — підмножина всіх поглинальних станів цього процесу.

Розглянемо функцію $u_j^{(t)}$, яка дорівнює 1, якщо процес після t кроків перебуває в непоглинальному стані w_j, і дорівнює 0 у протилежному випадку (тобто коли процес потрапляє в поглинальний стан).

Визначимо дисперсію для станів $w_i, w_j \in A.$

Оскільки

$$D_i\left(n_j\right) = M\left[n_j\right]^2 - M^2\left[n_j\right], \tag{6.23a}$$

де n_j — функція, яка дорівнює загальній кількості моментів часу перебування процесу в стані $w_j \in A$, то другий член у формулі для обчислення дисперсії такий:

$$M^2\left[n_j\right] = \left(N_1\right)_{sq}, \tag{6.24}$$

де $\left(N_1\right)_{sq}$ — матриця N_1, усі елементи якої піднесено до квадрата.

Для визначення $M\left[n_j\right]^2$ розглянемо таку ситуацію, коли процес перебуває в непоглинальному стані w_i $\left(w_i \in A\right)$. Тоді за один крок він з імовірністю P_{ik} перейде, наприклад, у стан w_k. Якщо цей стан виявиться поглинальним $\left(w_k \in \overline{A}\right)$, то процес у ньому й залишиться, у протилежному випадку $\left(w_k \in A\right)$ необхідно до складу, який має початковий стан, додати внесок кожного кроку. Отже, позначивши цей внесок як u_{ij}, дістанемо:

$$u_{ij} = \begin{cases} 1,\ w_i \to w_j \in A, \\ 0,\ w_j \to w_i \in \overline{A}. \end{cases}$$

Ураховуючи при цьому, що

$$u_{ij}^2 = u_{ij},$$

маємо:

$$\begin{aligned}
&\left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = \left[\sum_{w_{j \in A}} P_{ij}\, u_{ij}^2 + \sum_{w_{k \in A}} P_{ij} M_k\left(n_j + u_{ij}\right)^2\right] = \left[\sum_{w_{k \in A}} P_{ik}\left(M_k\left[n_j\right]^2 + 2M_k\ \left[n_j\right]u_{ij}\right) + u_{ij}\right] = \\
&= Q\left\{M_i\left[n_j\right]^2\right\} + 2\left(Q\,N_1\right)_{dq} + I \to \left[M_i\left[n_j\right]^2\right] - Q\left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = \\
&= 2\left(Q\,N_1\right)_{dq} + I \to (I - Q)\left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = 2\left(Q\,N_1\right)_{dq} + I \to \\
&\to \left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = (I - Q)^{-1} \cdot \left(2\left(Q\,N_1\right)_{dq} + I\right) \to \left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = N_1\left(2\left(Q\,N_1\right)_{dq} + I\right).
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Легко довести, що

$$QN_1 = N_1 Q = N_1 - I.$$

Справді, оскільки

$$N_1 = I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots,$$

то

$$QN = N_1Q = Q + Q^2 + Q^3 + Q^4 + \dots,$$

або

$$QN_1 = N_1Q = I + Q + Q^2 + Q^3 + Q^4 + \dots - I \to QN_1 = N_1Q = N_1 - I. \qquad (6.25а)$$

У формулі (6.25) $(QN_1)_{dq}$ — матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, крім діагональних. Підставивши (6.25а) у (6.25), дістанемо:

$$\left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = N_1\left(2(QN_1)_{dq} + I\right) = N_1\left(2(N_1 - I)_{dq} + I\right) = N_1\left(2(N_1)_{dq} - I\right).$$

Таким чином, маємо

$$\left[M_i\left[n_j\right]^2\right] = N_1\left(2(N_1)_{dq} - I\right). \qquad (6.26)$$

Слід наголосити, що поява у формулі (6.25) матриці $(QN_1)_{dq}$ пояснюється тим, що множник u_{ij} перетворює на нуль усі елементи, розміщені поза головною діагоналлю.

Підставимо $\left[M_i\left[n_j\right]^2\right]$ у формулу (6.23а) і, ураховуючи (6.24), дістанемо формулу дисперсії для всіх станів у матричній формі:

$$N_2 = N_1\left(2(N_1)_{dq} - I\right) - (N_1)_{sq}, \qquad (6.27)$$

де елементи матриці N_2 являються собою дисперсію для непоглинальних станів.

Визначення ймовірностей переходу процесу в поглинальні стани

Позначимо через b_{ij} ймовірність того, що процес за певну кількість кроків потрапить у поглинальний стан. Нехай процес перебуває в непоглинальному стані w_i. Тоді з цього стану він, наприклад, за перший крок з імовірністю p_{ij} може перейти до поглинального стану w_j і, отже, у ньому залишитись або з імовірністю u_{ij} перейти до непоглинального стану w_k і далі з імовірністю b_{kj} потрапити до поглинального стану w_k.

Згідно зі сказаним можна записати рівність:

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{w_k \in A} p_{ik} b_{kj}, \qquad (6.28)$$

яку в матричній формі можна подати в такому вигляді:

$$B = R + QB \Rightarrow B - QB = R \Rightarrow (I - Q) \cdot B = R \Rightarrow B = (I - Q)^{-1} \cdot R = N_1R. \qquad (6.29)$$

Приклад 7. Студент навчається в певному навчальному закладі. Термін навчання — три роки. На першому курсі навчання студент з імовірністю 0,8 складає іспит, 0,15 — залишається на повторне навчання на цьому самому курсі та з імовірністю 0,05 залишає коледж; на другому курсі ці ймовірності будуть відповідно такі: 0,7; 0,22; 0,08; для третього такі: 0,55; 0,36; 0,09.

Необхідно:

1) записати матрицю однокрокового переходу π і визначити тип ланцюга Маркова;

2) записати матрицю π в канонічній формі;

3) визначити ймовірність того, що студент залишиться на другому курсі після складання іспиту;

4) визначити матриці N_1, N_2, B.

Розв'язання. 1) Нехай w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 відповідають таким станам:

w_1 — студент навчається у коледжі перший рік;

w_2 — другий рік у коледжі;

w_3 — третій рік;

w_4 — залишає коледж без диплома;

w_5 — залишає коледж дипломованим спеціалістом.

Тоді матриця однокрокового переходу матиме такий вигляд:

$$\left(\vec{a'}\right)^{(k)}$$

Структура матриці π інформує нас про те, що марковський процес буде поглинальним. Поглинальними станами будуть w_4, w_5.

2) Матриця π в канонічній формі має такий вигляд:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_5 \\ w_4 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_5 & w_4 & w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}08 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 & 0{,}22 & 0{,}7 \\ 0{,}55 & 0{,}09 & 0 & 0 & 0{,}36 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\pi = \begin{array}{c|ccccc} & w_5 & w_4 & w_1 & w_2 & w_3 \\ \hline w_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}08 & 0 \\ w_2 & 0 & 0{,}08 & 0 & 0{,}22 & 0{,}7 \\ w_3 & 0{,}55 & 0{,}09 & 0 & 0 & 0{,}36 \end{array},$$

де

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}08 \\ 0{,}35 & 0{,}09 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}22 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0{,}36 \end{pmatrix}.$$

3) Для визначення ймовірності того, що студент залишається на другому курсі після складання іспиту, введемо початковий вектор $\vec{a'_0} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)$, вважаючи, що студент починає своє навчання з першого курсу. Тоді за два роки (після двох років навчання) визначимо вектор

$$\vec{a'_0}(2) = (a_5(2), a_4(2), a_1(2), a_2(2), a_3(2)),$$

звідки дістанемо:

$$\vec{a'}(2) = (a_1(2), a_2(2), a_3(2)) = \vec{a'_0}\,\pi^2 =$$

$$= (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 & 0{,}22 & 0{,}7 \\ 0{,}55 & 0{,}09 & 0 & 0 & 0{,}36 \end{pmatrix}^2 = (0 \quad 0{,}122 \quad 0{,}022 \quad 0{,}296 \quad 0{,}56).$$

Таким чином, маємо $a_1(2) = 0{,}022$, а це означає, що в середньому в 2,2 % випадків студент залишається на другий рік навчання на другому курсі коледжу.

4) Визначимо матриці N_1, N_2, B.

$$N_1 = (I - Q)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}22 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0{,}36 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}176 & 1{,}207 & 1{,}32 \\ 0 & 1{,}293 & 1{,}402 \\ 0 & 0 & 1{,}562 \end{pmatrix}. \; N_2 = N_1\left(2(N_1)_{dq} - I\right) - (N_1)_{sq} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}176 & 1{,}207 & 1{,}32 \\ 0 & 1{,}288 & 1{,}402 \\ 0 & 0 & 1{,}562 \end{pmatrix} \cdot \left(2\begin{pmatrix} 1{,}176 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}288 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}562 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) -$$

$$-\begin{pmatrix}1{,}383 & 1{,}457 & 1{,}742\\ 0 & 1{,}659 & 1{,}966\\ 0 & 0 & 2{,}440\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}996 & 1{,}902 & 2{,}804\\ 0 & 2{,}03 & 2{,}978\\ 0 & 0 & 3{,}313\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1{,}384 & 1{,}457 & 1{,}742\\ 0 & 1{,}659 & 1{,}966\\ 0 & 0 & 2{,}440\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}612 & 0{,}445 & 1{,}062\\ 0 & 0{,}371 & 1{,}012\\ 0 & 0 & 0{,}873\end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо:

$$N_1=\begin{pmatrix}1{,}176 & 1{,}207 & 1{,}32\\ 0 & 1{,}288 & 1{,}402\\ 0 & 0 & 1{,}562\end{pmatrix},\quad N_2=\begin{pmatrix}0{,}612 & 0{,}445 & 1{,}062\\ 0 & 0{,}371 & 1{,}012\\ 0 & 0 & 0{,}873\end{pmatrix}.$$

$$B=N_1R=\begin{pmatrix}1{,}176 & 1{,}207 & 1{,}32\\ 0 & 1{,}288 & 1{,}402\\ 0 & 0 & 1{,}562\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0{,}05\\ 0 & 0{,}08\\ 0{,}55 & 0{,}09\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}726 & 0{,}274\\ 0{,}771 & 0{,}229\\ 0{,}859 & 0{,}141\end{pmatrix}.$$

Отже, у середньому на кожному курсі студент може перебувати відповідно 1,176; 1,228; 1,562 одиниць часу з такими відповідними значеннями дисперсій: 0,612; 0,371; 0,873. Із матриці B випливає, з імовірністю, що дорівнює одиниці, студент залишить коледж — або з дипломом, або без нього.

6.6.2. Регулярні ланцюги Маркова та приклади їх використання при досліджені соціо-економічних процесів

Ланцюг Маркова називається регулярним, якщо існує таке число k для кожного можливого стану, що перехід із будь-якого стану ланцюга в будь-який інший стан здійсниться рівно за k кроків.

У регулярному ланцюзі Маркова всі елементи матриці однокрокового переходу, утворені внаслідок піднесення до степеня k, будуть додатними. Отже, незалежно від початкового стану існує ймовірність перебування в момент часу t в будь-якому можливості стані ланцюга Маркова. Це твердження можна записати так:

$$\left(\vec{a'}^{(k)}\right)=\left(\vec{a'}\right)^{(0)}\cdot\pi^k, \tag{6.30}$$

де

$$\left(\vec{a'}\right)^0=\left(a_1^0,\ a_2^0,\dots,\ a_m^0\right),\quad \left(\vec{a'}\right)^{(k)}=\left(a_1^{(k)},\ a_1^{(k)},\dots,\ a_1^{(k)}\right),$$

$$\pi=\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N}\\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N}\\ \vdots & & & \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{Nn}\end{pmatrix}.$$

Таким чином, усі компоненти вектора $\left(\vec{a'}\right)^k$ будуть додатними внаслідок того, що елементи матриці π $P_{ij}\geq 0$ і при цьому сума елементів вектора

$$\left(\vec{a'}\right)^{(16)}=\left(a_1^{(16)},\ a_2^{(16)},\ a_3^{(16)},\ a_4^{(16)}\right)=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}25\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}15\end{pmatrix}^{16}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}258 & 0{,}15 & 0{,}296 & 0{,}296\end{pmatrix}.$$

(вектора початкових станів) дорівнює 1.

Приклад 8. За заданою матрицею однокрокового переходу

$$\pi=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

і вектором початкових станів $\left(\vec{a}'\right)^{(0)}=\left(0{,}1,\quad 0{,}3,\quad 0{,}6\right)$ визначити $\left(\vec{a}'\right)^{(k)}=\left(a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ a_3^{(k)}\right)$ для $k=6$.

Розв'язання. Використовуючи (2.29), дістаємо:

$$\left(\vec{a}'\right)^{(k)}=\left(a_1^{(k)},a_2^{(k)},a_3^{(k)}\right)=\left(0{,}1,\quad 0{,}3\quad 0{,}6\right)\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}^6=(0{,}323,\quad 0{,}206,\quad 0{,}471).$$

Отже, через 6 кроків у стані w_1 ланцюг Маркова перебуватиме з імовірністю 0,323, у стані w_2 — 0,206 і у стані w_3 — 0,471.

Стаціонарні (фінальні) ймовірності та їх визначення

Нехай задано матрицю однокрокового переходу для регулярного ланцюга Маркова. Тоді виконуються такі умови:

1) для будь-якого вектора початкових станів $\vec{a}'^{\,0}$ вектор $\vec{a}'^{\,0}\cdot\pi^k$ прямує до вектора $\vec{W}'$ зі збільшенням числа k:

$$\lim_{k\to\infty}\vec{a}'^{\,0}\cdot\pi^k=\vec{W}';\tag{6.31}$$

2) вектор $\vec{W}'$ — єдиний для заданої матриці π, який має властивість

$$\vec{W}'\cdot\pi=\vec{W},\tag{6.32}$$

3) для матриці стаціонарних імовірностей W буде виконуватись така рівність

$$\pi\cdot W=W\pi=W.\tag{6.33}$$

Вектор $\vec{W}'$ називають ***вектором стаціонарних (фінальних) імовірностей.*** Компоненти цього вектора задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^{N}W_i=1.\tag{6.34}$$

Приклад 9. За заданою однокроковою матрицею ймовірностей переходу

$$\pi=\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}25\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}15\end{pmatrix},$$

а також вектором початкових станів

$$\left(\vec{a}'\right)^{(0)}=\left(0{,}08,\quad 0{,}12,\quad 0{,}32,\quad 0{,}48\right)$$

з'ясувати, чи є матриця π моделлю, яка описує регулярний ланцюг Маркова?

Розв'язання. Щоб з'ясувати це питання, визначаємо вектор

$$\left(\vec{a}'\right)^{(k)}=\left(\vec{a}'\right)^{(0)}\pi^k,$$

збільшуючи при цьому кількість кроків k.

$$\pi=\begin{pmatrix}0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}45 & 0{,}25\\ 0{,}04 & 0{,}26 & 0{,}55 & 0{,}15\\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}05 & 0{,}4\\ 0{,}43 & 0{,}17 & 0{,}28 & 0{,}12\end{pmatrix}.$$

При $k=8$ маємо:

$$\vec{a'}^{(8)}=\left(a_1^{(8)},\ a_2^{(8)},\ a_3^{(8)},\ a_4^{(8)}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}25\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}15\end{pmatrix}^8=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}258 & 0{,}15 & 0{,}296 & 0{,}296\end{pmatrix}.$$

При $k=16$ маємо:

$$\left(\vec{a'}\right)^{(16)}=\left(a_1^{(16)},\ a_2^{(16)},\ a_3^{(16)},\ a_4^{(16)}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}48\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}4\\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}25\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}15\end{pmatrix}^{16}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}258 & 0{,}15 & 0{,}296 & 0{,}296\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, компоненти вектора $\left(\vec{a'}\right)^{(k)}$ при $k=8$ і при $k=16$ однакові. Звідси доходимо висновку, що при $k=8$ елементи матриці π набувають стаціонарних (фінальних) значень. А звідси випливає відповідь на поставлене запитання: матриця π є моделлю регулярного ланцюга Маркова.

Приклад 10. Для заданої матриці

$$\pi=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}3\\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}05\\ 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}41 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

визначити стаціонарні ймовірності вектора $\vec{W'}$.

Розв'язання. Обчислимо π^k, надавши k значень 2, 4 і 6. Отже, маємо:

$$\pi^2=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}3\\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}05\\ 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}41 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0{,}311 & 0{,}188 & 0{,}329 & 0{,}173\\ 0{,}265 & 0{,}19 & 0{,}344 & 0{,}203\\ 0{,}257 & 0{,}203 & 0{,}363 & 0{,}208\\ 0{,}234 & 0{,}208 & 0{,}35 & 0{,}208\end{pmatrix},$$

$$\pi^4=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}3\\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}05\\ 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}41 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}2\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0{,}271 & 0{,}197 & 0{,}336 & 0{,}196\\ 0{,}268 & 0{,}198 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}267 & 0{,}198 & 0{,}337 & 0{,}198\\ 0{,}266 & 0{,}198 & 0{,}338 & 0{,}198\end{pmatrix},$$

$$\pi^6=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}3\\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}05\\ 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}41 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}2\end{pmatrix}^6=\begin{pmatrix}0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, уже при $k=6$ рядки матриці π^6 стають однаковими.

Знайдемо

$$\pi^8=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}3\\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}05\\ 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}41 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}2\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\\ 0{,}268 & 0{,}197 & 0{,}337 & 0{,}197\end{pmatrix}.$$

Елементи матриці π^8 не змінилися. Отже, можемо стверджувати, що при $k=6$ регулярний ланцюг Маркова виходить на стаціонарний режим.

Отже, вектор стаціонарних імовірностей буде таким:

$$\overrightarrow{W'} = \begin{pmatrix} 0,268 & 0,197 & 0,337 & 0,197 \end{pmatrix}.$$

Приклад 11. Задано однокрокову матрицю ймовірностей переходу, яка описує регулярний процес із чотирма станами:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначити ймовірність того, що в стаціонарному режимі процес перебуватиме в стані w_2, якщо перший крок він зробив:

1) зі стану w_1; 2) зі стану w_3.

Розв'язання. Визначимо граничну матрицю (матрицю стаціонарних станів)

$$W = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \end{pmatrix}.$$

Тепер для визначення ймовірності перебування процесу в стані за умови, що перший крок він зробив зі стану w_1, виконаємо операцію

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \end{pmatrix}.$$

Отже, ця ймовірність дорівнює 0,171.

Для другого випадку маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \\ 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,171 & 0,179 & 0,38 \end{pmatrix}.$$

Шукана ймовірність також дорівнює 0,171. Отже, незалежно від того, з якого стану почався процес, імовірність набути стану w_2 однакова й дорівнює 0,171.

Основні числові характеристики. Фундаментальна матриця для регулярних ланцюгів

Нехай π — однокрокова матриця ймовірностей переходу процесу (системи); W — її гранична матриця. Розглянемо матрицю $Q = (\pi - W)$. Ураховуючи те, що для матриці W виконується рівність

$$W^k = W,$$

дістаємо

$$(\pi - W)^{(k)} = \pi^k - W. \tag{6.35}$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \pi^k = W$, то маємо

$$\lim_{k\to\infty}(\pi - W)^{(k)} = \lim_{k\to\infty} Q^{(k)} = 0$$

(0 — нульова матриця, в якій усі елементи дорівнюють нулю).

Зі сказаного випливає, що матриця $I - Q = I - (\pi - W)$ має обернену, оскільки $\det(I - Q) = \det(I - (\pi - W)) \neq 0.$

Отже, доведено, що коли π є однокроковою матрицею переходу для регулярного ланцюга Маркова, то матриця

$$N_1^* = (I - (\pi - W))^{-1} \tag{6.36}$$

буде ***фундаментальною*** для цього ланцюга, тобто є матричною формулою запису математичних сподівань для всіх станів.

Приклад 12. Для даної матриці однокрокового переходу регулярного ланцюга Маркова

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}45 & 0{,}25 \\ 0{,}04 & 0{,}26 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}05 & 0{,}4 \\ 0{,}43 & 0{,}17 & 0{,}28 & 0{,}12 \end{pmatrix}.$$

Знайти фундаментальну матрицю N_1^*.

Розв'язання. Щоб зняти фундаментальну матрицю, потрібно знайти граничну матрицю.

$$W = \lim_{k\to\infty} \pi^k = \begin{pmatrix} 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \\ 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \\ 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \\ 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначимо матрицю

$$(I - \pi + W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}45 & 0{,}25 \\ 0{,}04 & 0{,}26 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}05 & 0{,}4 \\ 0{,}43 & 0{,}17 & 0{,}28 & 0{,}12 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \\ 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \\ 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \\ 0{,}199 & 0{,}25 & 0{,}31 & 0{,}241 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}079 & 0{,}07 & -0{,}14 & -0{,}009 \\ 0{,}159 & 0{,}99 & -0{,}24 & 0{,}091 \\ -0{,}001 & -0{,}1 & 0{,}26 & -0{,}159 \\ -0{,}231 & 0{,}08 & 0{,}03 & 1{,}0121 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо:

$$N_1^* = (I - (\pi - W))^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}079 & 0{,}07 & -0{,}14 & -0{,}009 \\ 0{,}159 & 0{,}99 & -0{,}24 & 0{,}091 \\ -0{,}001 & -0{,}1 & 0{,}26 & -0{,}159 \\ -0{,}231 & 0{,}08 & 0{,}03 & 1{,}0121 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}941 & -0{,}0592 & 0{,}0927 & 0{,}0255 \\ -0{,}1668 & 1{,}0452 & 0{,}1820 & -0{,}0604 \\ 0{,}0134 & 0{,}0717 & 0{,}8062 & 0{,}1086 \\ 0{,}2055 & -0{,}887 & -0{,}0155 & 0{,}8987 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, елементи матриці N_1^* можуть набувати й від'ємних значень. Фундаментальна матриця N_1^* для регулярних ланцюгів Маркова застосовується з метою обчислення таких числових характеристик, як середня кількість f_j кроків, які необхідно виконати процесу (системі), аби вперше набути стану w_j за умови, що перед цим процес (система) перебував у стані w_i. Шукана кількість кроків визначається елементом m_{ij} матриці

$$M(f_i) = \left(I - N_1^* + E \cdot \left(N_1^*\right)_{dq}\right) \cdot D, \tag{6.37}$$

який розміщується на перетині i-го рядка j-го її стовпця.

Дисперсії для кожного стану w_i $\left(i=\overline{1, N}\right)$ для регулярних ланцюгів Маркова обчислюються за формулою:

$$N_2^* = M\left(2\left(N_1^*\right)_{dq} \cdot D - I\right) + 2\left(N_1^* \cdot M - E\left(N_1^* \cdot M\right)_{dq} - M\left(f_i\right)\right)_{sq}. \tag{6.38}$$

Тут E — матриця вигляду

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$\left(N_1^*\right)_{dq}$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої дорівнюють діагональним елементам матриці N_1^*;

D — діагональна матриця такого вигляду:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{NN} \end{pmatrix},$$

елементи якої $d_{ii} = \dfrac{1}{w_i}$, де w_i — i-й компонент стаціонарного вектора $\vec{W}$ стаціонарних (фінальних) імовірностей для регулярної матриці π.

Приклад 13. Метеослужба погоди влітку для певного міста України здійснила статистичну обробку даних спостережень за кілька десятків років. Наслідки цієї обробки дали такі результати: якщо певний день був теплим і сонячним, то ймовірність того, що така сама погода лишиться й наступного дня, у середньому дорівнює 0,6, а ймовірність того, що вона зміниться на вітряну або дощову, дорівнює відповідно 0,25 і 0,15.

А коли погода була вітряною, то ймовірність того, що вона такою самою залишиться й наступного дня, дорівнює 0,32, а ймовірність того, що вона зміниться на тиху й сонячну або дощову, дорівнює відповідно 0,46 і 0,22; у разі, коли погода була дощовою, то ймовірність того, що вона не зміниться й наступного дня, дорівнює 0,26, а ймовірність того, що вона зміниться на вітряну або сонячну, становить відповідно 0,29 і 0,45.

Необхідно:

побудувати матрицю π;

2) визначити N_1^*, $M\left(f_i\right)$, N_2^*.

Розв'язання. 1) Відповідно до умови задачі матриця π набере такого вигляду:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}46 & 0{,}32 & 0{,}22 \\ 0{,}29 & 0{,}43 & 0{,}26 \end{pmatrix} \end{array},$$

де w_1, w_2, w_3 — відповідно сонячна, вітряна та дощова погода.

2) Для визначення матриць N_1^*, $M\left(f_i\right)$ і N_2^* необхідно знайти матрицю W. Маємо:

$$W = \lim_{k \to \infty} \pi^k = \begin{pmatrix} 0{,}497 & 0{,}31 & 0{,}193 \\ 0{,}497 & 0{,}31 & 0{,}193 \\ 0{,}497 & 0{,}31 & 0{,}193 \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо визначити матрицю

$$N_1^* = \left(I - (\pi - W)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}46 & 0{,}32 & 0{,}22 \\ 0{,}29 & 0{,}45 & 0{,}26 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0{,}497 & 0{,}31 & 0{,}193 \\ 0{,}497 & 0{,}31 & 0{,}193 \\ 0{,}497 & 0{,}31 & 0{,}193 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}897 & 0{,}06 & 0{,}043 \\ 0{,}037 & 0{,}93 & -0{,}027 \\ 0{,}207 & -0{,}14 & 0{,}933 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}131 & -0{,}0762 & -0{,}0543 \\ -0{,}0493 & 1{,}018 & 0{,}0317 \\ -0{,}2582 & 0{,}1696 & 1{,}0886 \end{pmatrix}.$$

Для визначення $M(f_i)$ знаходимо:

$$E\left(N_1^*\right)_{dq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.131 & 0 & 0 \\ 0 & 1.018 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0886 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}131 & 1{,}018 & 1{,}0886 \\ 1{,}131 & 1{,}018 & 1{,}0886 \\ 1{,}131 & 1{,}018 & 1{,}0886 \end{pmatrix};$$

$$I - N_1^* + E \cdot \left(N_1^*\right)_{dq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}131 & -0{,}0762 & -0{,}0543 \\ -0{,}0493 & 1{,}018 & 0{,}0317 \\ -0{,}2582 & 0{,}1696 & 1{,}0886 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1{,}131 & 1{,}018 & 1{,}0886 \\ 1{,}131 & 1{,}018 & 1{,}0886 \\ 1{,}131 & 1{,}018 & 1{,}0886 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}094 & 1{,}14 \\ 1{,}18 & 1 & 1{,}054 \\ 1{,}389 & 0{,}848 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця D визначається як

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w_3} \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектор стаціонарних імовірностей дорівнює $\vec{W} = \left(0{,}497 \quad 0{,}31 \quad 0{,}193\right)$, то $w_1 = 0{,}497,\ \ w_2 = 0{,}31,\ \ w_3 = 0{,}193,$ а отже, матриця

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{0{,}497} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0{,}31} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{0{,}193} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}012 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}226 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}181 \end{pmatrix}.$$

Тепер уже можемо визначити матрицю

$$M(f_i) = \left(I - N_1^* + E \cdot \left(N_1^*\right)_{dq}\right) \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}094 & 1{,}14 \\ 1{,}18 & 1 & 1{,}054 \\ 1{,}329 & 0{,}848 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}012 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}226 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}181 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}012 & 3{,}606 & 5{,}905 \\ 2{,}374 & 3{,}296 & 5{,}46 \\ 2{,}795 & 2{,}793 & 5{,}18 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці $M(f_i)$ інформують про таке: $m_{11} = 2{,}012$ означає, що в разі сонячної погоди в певний день вона такою самою залишиться в середньому ще 2 дні; $m_{12} = 3{,}606$ — до найближчого вітряного дня кількість днів становить 3,6, а до дощової — $m_{13} \approx$ 6 днів (5,905).

У разі дощової погоди (w_3) середня кількість днів до тихої сонячної становить наближено 3 дні ($m_{13} \approx 2{,}795$).

Для визначення дисперсії N_1^* необхідно знайти такі матриці:

$$N_1^* M = \begin{pmatrix} 1{,}131 & -0{,}0762 & -0{,}0543 \\ -0{,}0493 & 1{,}018 & 0{,}0317 \\ -0{,}2582 & 0{,}1696 & 1{,}0886 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2{,}012 & 3{,}606 & 5{,}905 \\ 2{,}374 & 3{,}296 & 5{,}46 \\ 2{,}795 & 2{,}793 & 5{,}18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}943 & 3{,}675 & 5{,}981 \\ 2{,}406 & 3{,}266 & 5{,}431 \\ 2{,}926 & 2{,}671 & 5{,}04 \end{pmatrix}.$$

$$\left(N_1^* M\right)_{dq} = \begin{pmatrix} 1{,}943 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}266 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}04 \end{pmatrix};$$

$$E\left(N_1^* M\right)_{dq} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}943 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}266 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}943 & 3{,}266 & 5{,}04 \\ 1{,}943 & 3{,}266 & 5{,}04 \\ 1{,}943 & 3{,}266 & 5{,}04 \end{pmatrix};$$

$$N_1^* M - E\left(N_1^* M\right)_{dq} = \begin{pmatrix} 1{,}943 & 3{,}675 & 5{,}981 \\ 2{,}406 & 3{,}266 & 5{,}431 \\ 0{,}926 & 2{,}671 & 5{,}04 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}943 & 3{,}266 & 5{,}04 \\ 1{,}943 & 3{,}266 & 5{,}04 \\ 1{,}943 & 3{,}266 & 5{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}409 & 0{,}941 \\ 0{,}463 & 0 & 0{,}391 \\ 0{,}983 & -0{,}596 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2\left(N_1^* M - E\left(N_1^* M\right)_{dq}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}819 & 1{,}882 \\ 0{,}926 & 0 & 0{,}782 \\ 0{,}983 & -0{,}596 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M\left(2(N_1^*)_{dq}\ D - I\right) = \begin{pmatrix} 2{,}012 & 3{,}606 & 5{,}905 \\ 2{,}374 & 3{,}296 & 5{,}46 \\ 2{,}795 & 2{,}793 & 5{,}18 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2{,}262 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}036 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}1772 \end{pmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} 2{,}012 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}226 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}181 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7{,}145 & 20{,}078 & 60{,}692 \\ 8{,}43 & 12{,}352 & 56{,}618 \\ 9{,}925 & 15{,}563 & 53{,}24 \end{pmatrix}.$$

$$M\left(f_i\right)_{sq} = \begin{pmatrix} (2{,}02)^2 & (3{,}606)^2 & (5{,}905)^2 \\ (2{,}374)^2 & (3{,}296)^2 & (5{,}46)^2 \\ (2{,}795)^2 & (2{,}795)^2 & (5{,}18)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}048 & 13 & 34{,}869 \\ 5{,}636 & 10{,}964 & 29{,}812 \\ 7{,}812 & 7{,}812 & 26{,}832 \end{pmatrix}.$$

Остаточно дістанемо:

$$N_2^* = M\left(2\left(N_1^*\right)_{dq} D - I\right) + 2\left(N_1^* M - E\left(N_1^* M\right)_{dq}\right) - M\left(f_i\right)_{sq} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7{,}145 & 20{,}078 & 60{,}692 \\ 8{,}43 & 12{,}352 & 56{,}618 \\ 9{,}925 & 15{,}563 & 53{,}24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0{,}819 & 1{,}882 \\ 0{,}926 & 0 & 0{,}782 \\ 0{,}983 & -0{,}596 & 0 \end{pmatrix} - - \begin{pmatrix} 4{,}048 & 13 & 34{,}869 \\ 5{,}636 & 10{,}964 & 29{,}812 \\ 7{,}812 & 7{,}812 & 26{,}832 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}097 & 7{,}896 & 27{,}705 \\ 3{,}72 & 1{,}488 & 27{,}288 \\ 4{,}079 & 6{,}559 & 26{,}408 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо з матриці N_2^*, найбільші значення дисперсії відповідають стану w_3, а найменші — стану w_1. Це певною мірою пояснюється елементами матриці π. Імовірності для сонячної погоди в місті значно перевищують імовірності для дощової.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

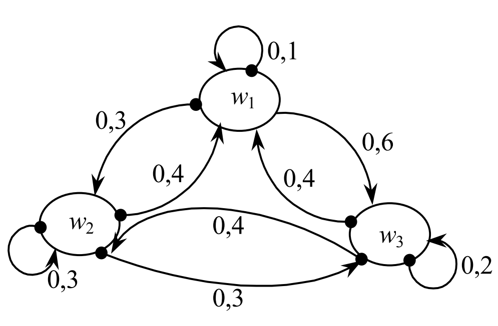
1. Марковські випадкові процеси. Навести приклади застосування в соціології та економіці.
2. Визначення ланцюга Маркова. Навести приклади.
3. Дати класифікацію станів ланцюгів Маркова. Навести приклади.
4. Матриця однокрокового переходу в загальному вигляді.
5. Однорідні ланцюги Маркова. Навести приклади.
6. Суть вектора початкових станів системи та його властивості.
7. Матриця однокрокового переходу для однорідних ланцюгів Маркова. Чому дорівнює $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}$, де N — кількість станів системи?
8. Визначення вектора $\overrightarrow{a_k}$ за заданою матрицею однокровокового переходу π і вектора початкових станів системи. Дати економічну інтерпретацію.
9. Поняття імовірнісних графів.
10. Класифікація однорідних ланцюгів Маркова.
11. Дати визначення поглинального ланцюга Маркова. Навести приклади застосування в економіці.
12. Зведення матриці π для поглинального ланцюга Маркова до канонічного вигляду.
13. Матриці R і Q та інтерпретація елементів цих матриць.
14. Основні числові характеристики для поглинальних ланцюгів Маркова.
15. Фундаментальна матриця N_1 та її аналітичний вираз, інтерпретація її елементів.
16. Дисперсія для поглинальних ланцюгів Маркова.
17. Матриця N_2, її аналітичний вираз, інтерпретація її елементів.
18. Визначення регулярного ланцюга Маркова. Навести економічні приклади.
19. Матриця стаціонарних імовірностей для регулярних ланцюгів Маркова.
20. Вектор стаціонарних імовірностей $\overrightarrow{W}$ і його властивості. Навести економічну інтерпретацію.
21. Числові характеристики для регулярних ланцюгів Маркова.
22. Визначення фундаментальної матриці N_1^* для регулярних ланцюгів Маркова та інтерпретація її елементів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Звести до канонічного вигляду матрицю

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

2. За заданим імовірнісним графом (див. рисунок) побудувати матрицю однокрокового переходу.



Визначити вектор $\overrightarrow{a'}(3)=\overrightarrow{a_0'}\ \pi^4$, якщо $\overrightarrow{a_0'}\ =(0\ \ 1\ \ 0)$.

3. Поглинальний ланцюг Маркова подано матрицею

$$\pi=\begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}45 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Звести матрицю до канонічного вигляду і визначити N_1, N_2, B.

4. У місті конкурують між собою три супермаркети *A*, *B*, *C*. Дослідження щодо їхньої роботи протягом певного часу виявили такі факти:

магазин *A* зберігає в середньому 80 % своїх покупців і залучає 10 % покупців магазину *B* та 2 % покупців магазину *C*;

магазин *B* зберігає 70 % своїх покупців і залучає 14 % покупців магазину *A* та 8 % покупців магазину *C*;

магазин *C* зберігає 90 % своїх покупців і залучає 6 % покупців магазину *A* та 2 % покупців магазину *B*.

Побудувати матрицю переходу для середніх змін покупців у трьох супермаркетах і визначити тип ланцюга Маркова. Накреслити ймовірнісний граф для цього випадкового процесу.

5. У деякому містечку видаються лише три щотижневі газети, які умовно позначимо *X, Y, Z.* Кожний з мешканців купує лише одну з них.

Нехай у середньому мешканці намагаються змінити газету, тобто передплатити іншу, не більш як один раз на рік і ймовірності таких змін є сталими. При цьому вважаємо, що коли в середньому:

1) 80 % читачів газети *X* і на наступний рік вибрали цю газету, то 10 % виберуть газету *Y* і 10 % — газету *Z*;

2) 70 % читачів газети *Y* і на наступний рік вибрали цю газету, то 15 % виберуть газету *X*: і 10 % — газету *Z*;

3) 90 % читачів газети *Z* на наступний рік вибрали цю газету, то 2 % виберуть газету *X* і 4 % — газету *Y*.

Побудувати матрицю переходів читачів від однієї газети до іншої, визначити тип ланцюга Маркова і накреслити для нього ймовірнісний граф.

6. Студент навчається в університеті протягом п’яти років. Наприкінці кожного навчального року він з імовірністю 0,7 переводиться на наступний курс, з імовірністю 0,25 залишається на повторне навчання на цьому самому курсі і з імовірністю 0,05 залишає навчальний заклад через велику заборгованість із дисциплін, які він вивчав. Зазначені переходи студента протягом усього навчального процесу можна описати як марковський випадковий процес.

6.1. Побудувати матрицю можливих переходів, яка моделює описаний процес.

6.2. Визначити тип ланцюга Маркова та накреслити для нього ймовірнісний граф.

7. Фермер має у своєму розпорядженні один комбайн для збирання врожаю зернових, який із певною ймовірністю може перебувати в одному із несумісних станів:

w_1 — у справному стані;

w_2 — у стані, що потребує регулювання, але є роботоздатним;

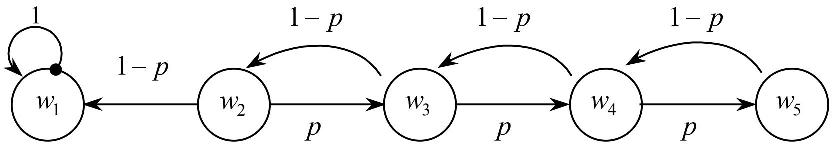
w_3 — у неробртоздатному стані що потребує капітального ремонту.

Було з’ясовано, що комбайн, перебуваючи у стані w_1, із імовірністю 0,7 у цьому стані й залишиться, із імовірністю 0,2 перейде у стан w_2, а з імовірністю 0,1 — у стан w_3. Перебуваючи в стані w_2, комбайн з імовірністю 0,35 в цьому стані й залишиться, а з імовірністю відповідно 0,6 і 0,05 перейде у стан w_1 і w_3. Перебуваючи у стані w_3, комбайн з імовірністю 0,45 перейде у стан w_1, а з імовірністю 0,55 — у стан w_2.

7.1. Побудувати матрицю ймовірних переходів комбайна з одного стану в інший.

7.2. Накреслити ймовірнісний граф цих переходів.

8. Задано ймовірнісний граф, що зображує деякий марковський процес (див. рисунок, де $p = 0{,}85$).



8.1. Побудувати матрицю ймовірних переходів процесу.

8.2. Визначити $\vec{a'}(3) = \vec{a'_0} \cdot \pi^3$, якщо $\vec{a'_0} = (0 \quad 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}7 \quad 0)$.

9. Завдяки дослідженню ринку було з'ясовано характер поводження споживачів щодо трьох сортів кави — *A*, *B*, *C*. Аналіз показав, що 60 % споживачів, які надавали перевагу сорту *A*, у наступному місяці знову виберуть цей самий сорт, 25 % перейдуть до споживання сорту *B* і 15 % — сорту *C*. Для сортів *B* і *C* аналогічні переходи характеризуватимуться так: $B \to A$ — 40 %, $B \to B$ — 40 %, $B \to C$ — 20 %, $C \to A$ — 35 %, $C \to B$ — 29 %, $C \to C$ — 36 %

9.1. Побудувати матрицю ймовірностей переходу споживачів зазначених трьох сортів кави.

9.2. Накреслити ймовірнісний граф цих переходів.

РОЗДІЛ 7

ПРИКЛАДНІ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення побудови наступних економіко-математичних моделей:

1) стохастичної моделі фінансових (грошових) потоків;
2) потокової моделі із вибірковим втручанням уряду в грошову ситуацію міст;
3) потокової стохастична моделі використання добрив;
4) потокової моделі для дослідження забруднення;
5) відкритої моделі Леонтьєва;
6) стохастичної моделі з використанням регулярних ланцюгів Маркова;
7) потокової моделі із втручанням уряду в розподіл грошової маси в містах;
8) потокової моделі зі збереженням грошової маси та вибірковим втручанням уряду в її розподіл;
9) стохастичної моделі прогнозування в соціальній сфері;
10) стохастичної моделі прогнозу ефективності роботи системи з обмеженою кількістю станів;
11) стохастична модель мобільності зміни професій зі зміною поколінь;

- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

7.1. Стохастичні моделі з використанням поглинальних ланцюгів Маркова

Серед стохастичних моделей із використанням поглинальних однорідних ланцюгів Маркова особливий клас становлять так звані потокові моделі. Вони описують фінансові потоки регіону чи країни, потоки виробничих відходів, що забруднюють атмосферу певного регіону, потоки, які описують рух молекул добрив, які вносять у ґрунт сільськогосподарських угідь, і т. ін.

Фінансові (грошові) потоки, які поповнюють кількість оборотних коштів (грошову масу), певної територіальної одиниці- країни, міста, регіону, тощо, називаються **вхідними фінансовими (грошовими) потоками**.. Фінансові (грошові) потоки, які покидають данне місто, регіон, країну тощо, в процесі забезпечення своєї життєдіяльності, називаються **вихідними фінансовими (грошовими) потоками.**

Прикладами вхідних фінансових потоків можуть бути всі кошти, що надходять із інших бюджетів, банків, підприємств, установ або інших структур, які не належать данній територіальній одиниці (місту, країні, регіону, тощо), в бюджет, банки, підприємства, установи, або інші структури данного міста, країни, району, тощо. Прикладами вихідних потоків можуть бути кошти, які використовуються для виплати робіт, послуг, наданних банками, підприємствами, установами або іншим структурами, які не належать данній територіальній одиниці (місту, країні, регіону, тощо).

Можна розглядати інтегровані фінансові (грошові) потоки, які можуть містити наступні види економічної діяльності: адміністрації, державних установ, суб'єктів господарської діяльності і населення, тощо. Вони визначають свої типи і розміри фінансових потоків, які поступають із зовнішнього середовища по відношеню до певної територіальної одиниці (міста, регіона, тощо), а також типи і розміри фінансових потоків, які покидають певну територіальну одиницю (міста, регіона, тощо).

Коли йдеться про фінансові потоки, розв'язують задачі економічного профілю, а в решті випадків — еколого-економічні.

7.1.1. Стохастична модель фінансових (грошових) потоків

Досліджується певний регіон країни, до якого належить N міст. У певний момент часу — назвемо його ***початковим моментом*** — у кожному з цих міст w_i $\left(i=\overline{1, N}\right)$ перебуває певна кількість грошей, які можуть циркулювати в кожному місті, а також між містами регіону, утворюючи грошові потоки. Якщо цими потоками не керувати, то з певною ймовірністю може скластися така ситуація, коли в деяких містах буде надлишок, а в решти — нестача грошової маси.

Тому необхідно, щоб грошовими потоками переймався уряд, тобто здійснював над ними контроль, розподіляючи грошову масу між містами так, щоб по змозі досягти оптимального рівня. При цьому основні припущення при побудові цих моделей такі: гроші ззовні до цього регіону не надходять, але певна їх частина може вилучатися з обігу й осідати, наприклад, у банках чи вдома в мешканців міст.

Для побудови стохастичної моделі введемо три вектори:

$$\vec{m}' = (m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N), \tag{7.1}$$

компоненти якого m_i інформують про кількість грошової маси в певний фіксований момент часу t у місті w_i $\left(i = \overline{1, N}\right)$;

вектор-рядок

$$\vec{f}' = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_N), \tag{7.2}$$

який називають ***управляючим вектором***, за допомогою якого уряд здійснює перерозподіл грошової маси між містами w_i і компоненти якого f_i інформують про кількість грошей, що їх уряд видає місту w_i або забирає в нього. Компоненти цього вектора з огляду на їхнє функціональне призначення можуть бути додатними, від'ємними, а також дорівнювати нулю, коли уряд не втручається у грошову ситуацію міста;

вектор-рядок

$$\vec{q}' = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_N), \tag{7.3}$$

який називають ***цільовим*** і компоненти якого q_i $\left(i = \overline{1, N}\right)$ інформують про те, що саме має на меті уряд: через певний час у місті w_i грошової маси має бути не менше ніж q_i, коли грошові потоки стабілізуються.

Отже, компоненти векторів $\vec{m}'$ і $\vec{q}'$ мають бути додатними, а вектора $\vec{f}'$ можуть бути як додатними, так і від'ємними, а також дорівнювати нулю.

Переходимо до побудови стохастичної моделі. Нехай p_{ij} — частка грошей, належна місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу. Оскільки $0 \le p_{ij} \le 1$, то числове значення p_{ij} можна розглядати як відповідні ймовірності зазначеного переходу.

Отже, ми можемо скористатися теорією однорідних ланцюгів Маркова для опису станів системи (регіону). Кожний стан цієї системи — це грошова ситуація одного з міст регіону. Якщо $p_{ij} > 0$, то між містами w_i та w_j існує грошовий потік, а якщо $p_{ij} = 0$ — такий потік відсутній. Якщо $i = j$, p_{ii} — це частка грошової маси (імовірність), яка залишається в місті w_i. У разі $p_{ii} = 0$ грошова маса міста w_i повністю розподіляється між рештою міст регіону.

Загальна картина грошових потоків між містами описується матрицею перехідних імовірностей для поглинальних однорідних ланцюгів Маркова, де поглинальний стан уособлює, наприклад, банк або грошові заощадження, які перебувають у мешканців на руках, тобто вилучені з обігу.

У загальному вигляді матриця π матиме таку структуру:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_0' \\ w_0'' \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} w_0' & w_0'' & w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_N \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdashline P_{10}' & P_{10}'' & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \ldots & P_{1N} \\ P_{20}' & P_{20}'' & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \ldots & P_{2N} \\ P_{30}' & P_{30}'' & P_{31} & P_{32} & P_{33} & \ldots & P_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_{NO}' & P_{NO}'' & P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \ldots & P_{NN} \end{array}\right) \end{array}. \tag{7.4}$$

Тут w_0' — перший поглинальний стан, який уособлює банк, w_0'' — другий поглинальний стан, який уособлює збереження грошей мешканцями вдома.

Надалі у стохастичній моделі буде використано матрицю Q, а тому в загальному випадку матрицю π необхідно звести до канонічного вигляду, як це було зроблено для матриці π (7.4). Тоді маємо:

$$Q = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2N} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

Якщо початкові суми для кожного міста w_i задаються компонентами вектора $\overrightarrow{m'}$, то через певний проміжок часу в цьому місті сума грошей становитиме

$$\sum_{j=1}^{N} m_i p_{ij} .$$

Тоді вектор $\overrightarrow{m'} Q$ задаватиме розподіл грошових сум через період часу в один крок;

$\overrightarrow{m'} Q^2$ — через два кроки;

$\overrightarrow{m'} Q^3$ — через три кроки;

$\overrightarrow{m'} Q^n$ — через n кроків.

Аналогічно $\overrightarrow{f'} Q$ — це вплив вектора $\overrightarrow{f'}$ на перерозподіл грошової маси між містами регіону шляхом втручання уряду за перший крок;

$\overrightarrow{f'}\left(Q + Q^2\right)$ — за два кроки;

$\overrightarrow{f'}\left(Q + Q^2 + Q^3\right)$ — за три кроки;

$\overrightarrow{f'}\left(Q + Q^2 + Q^3 + ... + Q^n\right)$ — за n кроків,

включно з початковим станом, коли $n = 0$.

Отже, розподіл грошової маси між містами регіону визначатиметься такою формулою:

$$\overrightarrow{u'}(n) = \overrightarrow{m'}\, Q^n + \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f'}\, Q^k . \qquad (7.6)$$

При цьому для цільового вектора $\overrightarrow{q'}$ має виконуватись така нерівність:

$$\overrightarrow{q'} \ge \overrightarrow{u'}(n) = \overrightarrow{m'} Q^n + \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f'}\, Q^k . \qquad (7.7)$$

Оскільки компоненти f_i вектора $\overrightarrow{f'}$ необхідно так вибрати, щоб після певної кількості кроків виконувалася ця нерівність. Тоді вектор $\overrightarrow{q'}$ і буде інформувати про наперед заданий розподіл грошової маси між містами регіону, який досягли шляхом втручання уряду за допомогою вектора $\overrightarrow{f'}$.

Як відомо, для поглинальних ланцюгів Маркова виконується рівність:

$$\lim_{k \to \infty} Q^k = 0. \qquad (7.8)$$

Враховуючи цю рівність у моделі (7.6), другий доданок можемо записати так:

$$\sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f'}\, Q^k = \overrightarrow{f'} \sum_{k=0}^{n} Q^k = \overrightarrow{f'} \left(I + Q + Q^2 + ... + Q^n\right).$$

При $n \to \infty$ маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overrightarrow{f'}\, Q^k = \overrightarrow{f'} \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = \overrightarrow{f'} \left(I + Q + Q^2 + ... + Q^n + \dots\right) = \overrightarrow{f'} \left(I - Q\right)^{-1} = \overrightarrow{f'}\, N_1$$

а перший доданок моделі (7.6) при цьому прямуватиме до нуля:

$$\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{m'}\ Q^k = \overrightarrow{m'} \lim_{k\to\infty} Q^k = \overrightarrow{m'}\ \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Отже, при великих значеннях $k = n$ модель (7.6) і нерівність (7.7) набирають такого вигляду

$$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{f'}\, N = \overrightarrow{f'}(I - Q)^{-1}, \tag{7.9}$$

$$\overrightarrow{q'} \ge \overrightarrow{f'}\, N \to \overrightarrow{q'} \ge \overrightarrow{f'}\,(I - Q)^{-1}. \tag{7.10}$$

Із нерівності (7.10) дістаємо:

$$\overrightarrow{f'} \le \overrightarrow{q'}\ (I - Q). \tag{7.11}$$

У загальному випадку, щоб перевірити прийнятність вектора $\overrightarrow{q'}$, підставимо $\overrightarrow{f'} \le \overrightarrow{q'}\ (I - Q)$ у модель (7.6) і дістанемо:

$$\overrightarrow{u'}(n) \le \overrightarrow{m'}\ Q^n + \overrightarrow{q'}\ (I - Q)\sum_{k=0}^{n} Q^k = \overrightarrow{m'}\ Q^n + \left(\overrightarrow{q'} - \overrightarrow{q'}\,Q\right)\sum_{k=0}^{n} Q^k,$$

де

$$\overrightarrow{m'} \ge 0,\ Q \ge 0,\ Q^k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{n} Q^k \ge 0.$$

Тоді

$$\overrightarrow{q'} - \overrightarrow{q'}\,Q \ge 0 \to \overrightarrow{q'} \ge \overrightarrow{q'}\,Q. \tag{7.12}$$

Отже, якщо виконується нерівність (7.12), то $\overrightarrow{q'} \ge 0$ для всіх компонентів q_i ($i = \overline{1, N}$) незалежно від початкового вектора $\overrightarrow{m'}$.

Таким чином, можна стверджувати: якщо виконується нерівність

$$\overrightarrow{q'} \ge \overrightarrow{q'}\,Q, \tag{7.13}$$

то вектор $\overrightarrow{q'}$ буде прийнятним для будь-яких значень компонентів вектора $\overrightarrow{m'}$.

Отже, нерівність (7.12) є одним із критеріїв для перевірки прийнятності вектора $\overrightarrow{q'}$. Цю нерівність назвемо ***першим критерієм прийнятності*** зазначеного вектора.

У разі, коли перший критерій не виконується, існує другий критерій прийнятності вектора $\overrightarrow{q'}$, який використовують тоді, коли кількість кроків t обмежена.

Із (7.7), ураховуючи (7.11), дістаємо:

$$\overrightarrow{q'} \ge \overrightarrow{u'}(n) = \overrightarrow{m'}\ Q^n + \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f'}\ Q^k = \overrightarrow{m'}\ Q^n + \overrightarrow{f'} \sum_{k=0}^{n} Q^k =$$

$$= \overrightarrow{m'}\ Q^n + \left(\overrightarrow{q'} - \overrightarrow{q'}\,Q\right)\sum_{k=0}^{n} Q^k = \overrightarrow{m'}\ Q^n + \overrightarrow{q'}\ (I - Q)\sum_{k=0}^{n} Q^k = \overrightarrow{m'}\ Q^n + \overrightarrow{q'}\ (I - Q)\left(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^n\right).$$

Отже, маємо:

$$\overrightarrow{u'}(n) = \overrightarrow{m'}\ Q^n + \overrightarrow{q'}\ (I - Q). \tag{7.14}$$

Щоб виконувалась нерівність

$$\overrightarrow{q'}(n) \ge \overrightarrow{u'}(n)$$

для всіх n, необхідне виконання умови

$$\overrightarrow{m'}\ Q^n + \overrightarrow{q'}\ \left(I - Q^{n+1}\right) \ge 0,$$

або

$$\overrightarrow{q'} \ge \left(\overrightarrow{q'}\ Q - \overrightarrow{m'}\right) Q^n. \tag{7.15}$$

Отже, нерівність (7.15) є ***другим критерієм прийнятності вектора*** $\overrightarrow{q'}$. Існує ще й ***третій критерій прийнятності вектора*** $\overrightarrow{q'}$, суть якого така: якщо сума абсолютних величин компонентів вектора $\overrightarrow{q'}\left(I-\overrightarrow{m'}Q\right)Q^n$ не перевищує найменшого компонента вектора $\overrightarrow{q'}$, то він задовольняє умови прийнятності.

У разі, коли всі три критерії не виконуються на прийнятність вектора $\overrightarrow{q'}$, то тоді змінюють компоненти f_i управляючого вектора $\overrightarrow{f'}$ і надалі використовують наведені щойно критерії.

Приклад 1. Нехай маємо три міста — w_1, w_2, w_3 та значення p_{ij}, які утворюють матрицю π, описуючі інтегровані грошові потоки між данними містами, і представляють собою частку відповідних грошей, яка належить місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу.

Матриця π описує інтегровані грошові потоки між трьома містами w_1, w_2, w_3 за умови, що частина цих потоків потрапляє в банк w_0', а частина зберігається в домашніх умовах — w_0'' і має такий вигляд:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_0' \\ w_0'' \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_0' & w_0'' \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,15 & 0,32 & 0,4 & 0,1 & 0,03 \\ 0,12 & 0,39 & 0,31 & 0,12 & 0,06 \\ 0,26 & 0,32 & 0,22 & 0,28 & 0,02 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Якщо відомі вектор $\overrightarrow{m'}=(10,\ 4,\ 16)$, компоненти якого є кількість грошової маси у відповідному місті, і вектор $\overrightarrow{f'}=(-2,\ 8,\ -6)$, який представляє собою управляючий вектор, за допомогою якого уряд здійснює перерозподіл грошової маси між містами, визначити вектор $\vec{q}$ — розподіл грошової маси у містах за період часу $t=3$.

Розв'язання. Матрицю π зведемо до канонічного вигляду:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_0' \\ w_0'' \\ w_1 \\ w_{2w} \\ w_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} w_0' & w_0'' & w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,03 & 0,15 & 0,32 & 0,4 \\ 0,12 & 0,06 & 0,12 & 0,39 & 0,31 \\ 0,18 & 0,02 & 0,26 & 0,32 & 0,22 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Отже, матриця Q має такий вигляд:

$$Q=\begin{pmatrix} 0,15 & 0,32 & 0,4 \\ 0,12 & 0,39 & 0,31 \\ 0,26 & 0,32 & 0,22 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (7.6), дістаємо:

$$\overrightarrow{q'} \geq \overrightarrow{u'}(3)=\overrightarrow{m'}\,Q^3+\sum_{k=0}^{3}\overrightarrow{f'}\,Q^k,$$

або дамо в розгорнутому вигляді:

$$\overrightarrow{q'}=(q_1,\ q_2,\ q_3)\geq(u_1(3),\ u_2(3),\ u_3(3))=(10,\ 4,\ 16)\times\begin{bmatrix} 0,15 & 0,32 & 0,4 \\ 0,12 & 0,39 & 0,31 \\ 0,26 & 0,32 & 0,22 \end{bmatrix}^3+$$

$$+\left(-2,\ 8,\ -6\right)\times\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}15&0{,}32&0{,}4\\0{,}12&0{,}39&0{,}31\\0{,}26&0{,}32&0{,}22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}15&0{,}32&0{,}4\\0{,}12&0{,}39&0{,}31\\0{,}26&0{,}32&0{,}22\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0{,}15&0{,}32&0{,}4\\0{,}12&0{,}39&0{,}31\\0{,}26&0{,}32&0{,}22\end{bmatrix}^3\right)$$

Усі розрахунки для обчислення вище приведеного математичного виразу здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

СУММ- знаходить суму аргументів

Вихідні данні для обчислення математичного виразу містяться в блоках: вектор m — (B2:D2), матриця Q — (B4:D6), вектор f (B8:D8), одинична матриця E — (B10:D12)

Подальші обчислення за формулою наведені в нище приведеній таблиці Microsoft EXCEL

	A	B	C	D
1				
2	m =	10	4	16
3				
4		0.15	0.32	0.4
5	Q =	0.12	0.39	0.31
6		0.26	0.32	0.22
7				
8	f =	-2	8	-6
9				
10		1	0	0
11	E =	0	1	0
12		0	0	1
13				
14				
15		0.1649	0.3008	0.2472
16	Q^2 =	0.1454	0.2897	0.2371
17		0.1346	0.2784	0.2516
18				
19	Q^3 =	0.125103	0.249184	0.213592
20		0.11822	0.235383	0.200129
21		0.119014	0.23216	0.195496
22				
23		1.440003	0.869984	0.860792
24	E+Q+Q^2+Q^3 =	0.38362	1.915083	0.747229
25		0.513614	0.83056	1.667096
26				
27	mxQ^3 =	3.628134	7.147932	6.064372
28				
29	fx(E+Q+Q^2+Q^3)=	-2.89273	8.597336	-5.74633
30				
31				
32	u(3) =	0.735404	15.74527	0.318044

Результат обчислень u(3) знаходиться в блоці (B32:D32) і тому можна записати:

$$u(3)=(u_1(3),u_2(3),\ u_3(3))=(0{,}735,\ 15{,}745,\ 0{,}318).$$

Отже, через три кроки часу в місті w_1 перебуватиме 0,735, у місті w_2 — 15,745, а в місті w_3 — 0,318 умовних одиниць грошової маси.

Оскільки частина грошей вилучається з обігу, осідаючи або в банку (w_0'), або вдома (w_0''), то маємо:

$$\sum_{i=1}^{3} m_i = 30,\quad \sum_{i=1}^{3} q_i = 16{,}799.$$

Отже, кількість грошей, які вилучаються з обігу, дорівнюватиме

$\sum_{i=1}^{3} m_i - \sum_{i=1}^{3} q_i = 13{,}201$ умовним одиницям.

Перевіримо вектор $\vec{q'}$ на прийнятність. Використовуючи перший критерій, дістаємо:

$$\overrightarrow{q'} \geq \overrightarrow{q'}\,Q \Rightarrow (0{,}735,\quad 15{,}745,\quad 0{,}318) \geq (0{,}735,\quad 15{,}745,\quad 0{,}318)\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{bmatrix}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{q'}\,Q = (0{,}735,\quad 15{,}745,\quad 0{,}318)\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{bmatrix} = (2{,}085,\quad 6{,}4777,\quad 5{,}245),$$

тобто не всі компоненти вектора задовольняють умову першого критерію, то цей вектор не є прийнятним.

Використаємо тепер другий критерій

$$\overrightarrow{q'} \geq \left(\overrightarrow{q'}\ Q - \overrightarrow{m'}\right) Q^n \ \text{ для } \ n = 1\,.$$

Обчислення здіймемо в середовищі EXCEL і в результаті дістанемо:

$$\left(\overrightarrow{q'}\,Q - \overrightarrow{m'}\right) Q = \left((0{,}735,\quad 15{,}745,\quad 0{,}318)\begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{bmatrix} - (10, 4, 16) \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{pmatrix} = (-\,3{,}687,\quad -\,5{,}009,\quad -\,4{,}765)$$

Оскільки всі компоненти вектора $\overrightarrow{q'}$ більші за компоненти вектора $\left(\overrightarrow{q'}\ Q - \overrightarrow{m'}\right) Q$, то умова прийнятності вектора $\overrightarrow{q'}$ за другим критерієм виконується.

7.1.2. Потокова модель із вибірковим втручанням уряду в грошову ситуацію міст

У попередній потоковій моделі уряд втручався в грошову ситуацію кожного міста регіону. Але трапляються випадки, коли втручання уряду має вибірковий характер, тобто стосується лише окремих міст. Оскільки нумерація міст є довільною, то будемо вважати, що у грошову ситуацію міст w_1, w_2, ..., w_k уряд втручається, а решти w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_N міст — ні. Тоді управляючий вектор

$$\overrightarrow{f'} = (f_1,\ f_2,\ ...,\ f_k,\ 0\ 0\ ...\ 0) \tag{7.16}$$

і матриця Q набере такого вигляду:

$$Q = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc|cccc} w_1 & w_2 & \cdots & w_k & w_{k+1} & w_{k+2} & \cdots & w_N \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \\ \hline w_{k+1} \\ w_{k+2} \\ \vdots \\ w_N \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1k} & P_{1,k+1} & P_{1,k+2} & \cdots & \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2k} & P_{2,k+1} & P_{2,k+2} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ P_{k1} & P_{k2} & \cdots & P_{kk} & P_{k,k+1} & P_{k,k+2} & \cdots & \\ \hline P_{k+1,1} & P_{k+1,2} & \cdots & P_{k+1,k} & P_{k+1,k+1} & P_{k+1,k+2} & \cdots & \\ P_{k+2,1} & P_{k+2,2} & \cdots & P_{k+2,k} & P_{k+2,k+2} & P_{k+2,k+2} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{N_1} & P_{N2} & \cdots & P_{Nk} & P_{N,k+1} & P_{N,k+2} & \cdots & \end{array}\right) \end{array}. \tag{7.17}$$

Отже, матриця Q поділяється на чотири блоки

$$Q = \begin{array}{c|cccc:ccc|}
 & w_1 & w_2 & \dots & w_k & w_{k+1} & \dots & w_N \\
\hline
w_1 & & & & & & & \\
w_2 & & T & & & & U & \\
\vdots & & & & & & & \\
w_k & & & & & & & \\
\hdashline
w_{k+1} & & & & & & & \\
\vdots & & V & & & & S & \\
w_N & & & & & & &
\end{array}. \qquad (7.18)$$

Тут

$$T = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \dots & w_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1k} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{k1} & P_{k2} & \dots & P_{kk} \end{pmatrix} \end{array}, \quad V = \begin{array}{c} \\ w_{k+1} \\ w_{k+2} \\ \vdots \\ w_N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \dots & w_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{k+1,1} & P_{k+1,2} & \dots & P_{k+1,k} \\ P_{k+2,1} & P_{k+2,2} & \dots & P_{k+2,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{N,1} & P_{N,2} & \dots & P_{N,k} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$U = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_{k+1} & \dots & w_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{1,k+1} & \dots & P_{1,N} \\ P_{2,k+1} & \dots & P_{2,N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ P_{k,k+1} & \dots & P_{kN} \end{pmatrix} \end{array}, \quad S = \begin{array}{c} w_{k+1} \\ w_{k+2} \\ \vdots \\ w_N \end{array}\begin{pmatrix} P_{k+1,k+1} & P_{k+1,k+2} & \dots & P_{k+1,N} \\ P_{k+2,k+1} & P_{k+2,k+2} & \dots & P_{k+2,N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{N,k+1} & P_{N,k+2} & \dots & P_{N,N} \end{pmatrix}. \qquad (7.19)$$

Із урахуванням поділу міст на керовані урядом і позбавлені його втручання, вектори $\overrightarrow{m'}$, $\overrightarrow{u'}(t)$, $\overrightarrow{q'}$ матимуть таку структуру:

$$\overrightarrow{m'} = \left(\left(\overrightarrow{m^*}\right), \left(\overrightarrow{m^{**}}\right)\right), \ \overrightarrow{u'}(t) = \left(\left(\overrightarrow{u^*}(t)\right), \left(\overrightarrow{u^{**}}(t)\right)\right), \ \overrightarrow{q'} = \left(\left(\overrightarrow{q^*}\right), \left(\overrightarrow{q^{**}}\right)\right),$$

де $\left(\overrightarrow{m^*}\right)$, $\left(\overrightarrow{u^*}(t)\right)$, $\left(\overrightarrow{q^*}\right)'$ — вектори, компоненти яких стосуються міст, яким приділяє увагу уряд, а $\left(\overrightarrow{m^{**}}\right)'$, $\left(\overrightarrow{u^{**}}(t)'\right)$, $\left(\overrightarrow{q^{**}}\right)'$ — вектори, компоненти яких стосуються міст, позбавлених уваги уряду.

У цьому разі шукана модель набирає такого вигляду:

$$\left(\left(\overrightarrow{u^*}(t)\right), \left(\overrightarrow{u^{**}}(t)\right)\right) = \left(\left(\overrightarrow{m^*}\right), \left(\overrightarrow{m^{**}}\right)\right)Q^n + \left(\left(\overrightarrow{f^*}\right), \left(\overrightarrow{f^{**}}\right)\right)\sum_{k=0}^{n} Q^k, \qquad (7.20)$$

де $\left(\overrightarrow{f^{**}}\right)' = (0,\ 0,\ ...,\ 0)$.

Приклад 2. Нехай регіон складається із шести міст. Інтегровані грошові потоки між містами w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 з урахуванням того, що частина грошової маси вилучається з обігу й осідає в банку (w_0'), а частина залишає цей регіон (w_0''), задано матрицею:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_0' \\ w_0'' \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} w_0' & w_0'' & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

За відомими вектором $\overrightarrow{m'} = (10,\ 30,\ 10,\ 40,\ 15,\ 15)$, компоненти якого є кількість грошової маси у відповідному місті, і вектором $\overrightarrow{f'} = (5,\ -5,\ 5,\ -5,\ 0,\ 0)$, який представляє собою управляючий вектор, за допомогою якого уряд здійснює перерозподіл грошової маси між містами, оцінити розподіл грошової маси між містами упродовж часу $t = 4$, якщо уряд втручається лише в містах w_1, w_2, w_3, w_4, а міста w_5, w_6 позбавлені цієї уваги.

Розв'язання. Визначимо матрицю:

$$
Q = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}15 & 0{,}1 \\
0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}2 \\
0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\
0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Із матриці визначаємо:

$$
T = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}15 \\
0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}05 \\
0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1
\end{pmatrix}
\end{array},\quad
U = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} w_5 & w_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0{,}15 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}2 \\
0{,}1 & 0{,}3
\end{pmatrix}
\end{array},
$$

$$
V = \begin{array}{c} w_5 \\ w_6 \end{array}
\begin{pmatrix}
0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 \\
0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35
\end{pmatrix},\quad
S = \begin{array}{c} w_5 \\ w_6 \end{array}
\begin{pmatrix}
0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}1 & 0{,}1
\end{pmatrix}.
$$

Використовуючи (7.20), дістаємо:

$$\overrightarrow{u'}(4) = \overrightarrow{m'}\, Q^4 + \overrightarrow{f'} \sum_{k=0}^{4} Q^k,$$

або в розгорнутому вигляді:

$$
\left(u_1^*(4),\ u_2^*(4), u_3^*(4), u_4^*(4), u_5^*(4), u_6^*(4)\right) = (10,\ 30,\ 10,\ 40,\ 15,\ 15)
\begin{pmatrix}
0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}1 \\
0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}2 & 0{,}2 \\
0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\
0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1
\end{pmatrix}^4 +
$$

$$
+ (5,\ -5,\ 5,\ -5,\ 0,\ 0) \sum_{k=0}^{4}
\begin{pmatrix}
0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}1 \\
0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}2 & 0{,}2 \\
0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\
0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\
0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1
\end{pmatrix}^k
$$

Усі розрахунки для обчислення вище приведеного математичного виразу здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

СУММ- знаходить суму аргументів

Вихідні данні для обчислення математичного виразу містяться в блоках: вектор m — (B2:G2), матриця Q — (B6:G11), вектор f — (B4:G4), одинична матриця E — (B13:G18)

Подальші обчислення за формулою наведені в наведеній нище таблиці Microsoft EXCEL

Microsoft Excel - Книга1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2	m=	10	30	10	40	15	15								
3															
4	f=	5	-5	5	-5	0	0								
5															
6		0.05	0.1	0.25	0.15	0.15	0.1			0.093069	0.05365	0.065931	0.106331	0.088356	0.093063
7		0.1	0.05	0.15	0.2	0.2	0.1			0.0938	0.05455	0.067363	0.108463	0.089475	0.0938
8		0.2	0.1	0.05	0.05	0.2	0.2			0.089725	0.055013	0.069563	0.111575	0.08845	0.089725
9	Q=	0.3	0.05	0.05	0.1	0.1	0.3		Q^4=	0.1007	0.06175	0.078113	0.125163	0.099275	0.1007
10		0.1	0.15	0.1	0.25	0.2	0.1			0.104975	0.061363	0.076075	0.122363	0.100475	0.104975
11		0.15	0.1	0.1	0.35	0.1	0.1			0.105831	0.061013	0.075181	0.120956	0.100469	0.105838
12															
13		1	0	0	0	0	0								
14		0	1	0	0	0	0		mxQ^4=	11.83203	7.02875	8.769156	14.08922	11.43747	11.83206
15	E=	0	0	1	0	0	0								
16		0	0	0	1	0	0								
17		0	0	0	0	1	0								
18		0	0	0	0	0	1								
19															
20		0.1375	0.075	0.0725	0.1275	0.1325	0.135		E+Q+Q^2+Q^3+Q^4=	1.381194	0.29315	0.470806	0.516206	0.473731	0.428813
21		0.135	0.0775	0.08	0.1375	0.125	0.135			0.4333	1.24655	0.379613	0.577963	0.518475	0.4333
22	Q^2=	0.095	0.0825	0.11	0.1775	0.125	0.095			0.499725	0.299263	1.302063	0.457575	0.51845	0.499725
23		0.115	0.0875	0.13	0.1975	0.125	0.115			0.6452	0.26825	0.340363	1.555163	0.441275	0.6452
24		0.15	0.08	0.095	0.16	0.14	0.15			0.473975	0.363863	0.362325	0.679113	1.556975	0.473975
25		0.1675	0.0725	0.095	0.1425	0.1275	0.17			0.538956	0.306638	0.364556	0.763456	0.443344	1.491338
26															
27		0.100625	0.0645	0.082375	0.132375	0.102875	0.10075								
28		0.1045	0.0645	0.08225	0.132	0.104	0.1045		fx(E+Q+Q^2+Q^3+Q^4)=	4.012094	-4.61194	5.264469	-5.79672	0.162156	-0.74981
29	Q^3=	0.115	0.06175	0.0725	0.1185	0.105	0.115								
30		0.1295	0.069	0.08225	0.1325	0.117	0.1295		u(4)=	15.84413	2.416813	14.03363	8.2925	11.59963	11.08225
31		0.119	0.0725	0.09125	0.14675	0.1165	0.119								
32		0.115625	0.073125	0.094375	0.15	0.115375	0.1155								
33															
34															
35															

Лист1 / Лист2 / Лист3

Готово

Результат обчислень $u(4)$ знаходиться в блоці (J30:O30) і тому можна записати:

$$\left(u(4)\right) = \left(15{,}844, \quad 2{,}417, \quad 14{,}033, \quad 8{,}292, \quad 11{,}599, \quad 11{,}082\right).$$

Отже, через чотири кроки умовного часу для міст регіону з вибірковим втручанням уряду в грошову ситуацію маємо такий розподіл грошової маси в містах: w_1 — 15,844, w_2 — 2,417, w_3 — 14,033, w_4 — 8,292, w_5 — 11,599, w_6 — 11,082 умовних одиниць грошової маси.

Отже, дістаємо:

$$\vec{q}\,' = \left(\left(\vec{q^{*}}\right), \left(\vec{q^{**}}\right)\right) \geq \left(\left(\vec{u}'(t)\right) = \left(\vec{u^{*}}(t)\right) \cdot \left(\vec{u^{**}}(t)\right)\right) \Rightarrow \left(q_1^{*}, \quad q_2^{*}, \quad q_3^{*}, \quad q_4^{*}, \quad q_5^{**}, \quad q_6^{*}\right) \geq$$

$$\geq \left(15{,}844, \quad 2{,}417, \quad 14{,}033, \quad 8{,}292, \quad 11{,}599, \quad 11{,}082\right).$$

Для перевірки прийнятності вектора $\vec{q}\,'$ використовуємо перший критерій $\vec{q}\,' \geq \vec{q}\,'Q$:

$$\left(15{,}844, \quad 2{,}417, \quad 14{,}033, \quad 8{,}292, \quad 11{,}599, \quad 11{,}082\right) \geq \left(15{,}844, \quad 2{,}417, \quad 14{,}033, \quad 8{,}292, \quad 11{,}599, \quad 11{,}082\right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \left(10{,}735, \quad 6{,}371, \quad 7{,}708, \quad 11{,}169, \quad 9{,}924, \quad 9{,}328\right).$$

Для першого критерію умова прийнятності вектора $\vec{q}$ не виконується.

Застосуємо другий критерій $\vec{q'} \geq \left(\vec{q'}Q - \vec{m'}\right)Q^k$ при $k = 1$:

Обчислення здійснимо в середовищі EXCEL і в результаті дістанемо:

$$\begin{gathered}
(15{,}844, \quad 2{,}417, \quad 14{,}033, \quad 8{,}292, \quad 11{,}599, \quad 11{,}082) \geq \\
\geq ((15{,}844, \quad 2{,}417, \quad 14{,}033, \quad 8{,}292, \quad 11{,}599, \quad 11{,}082) \\
\times \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} - (10, \ 30, \ 10, \ 40, \ 15, \ 15)) \times \\
\times \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}03 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} = \\
= (-12{,}862, \quad -4{,}26, \quad -6{,}382, \quad -11{,}084, \quad -9{,}771, \quad -12{,}624)
\end{gathered}$$

Отже, за другим критерієм вектор $\vec{q}$ прийнятний.

7.1.3. Потокова стохастична модель використання добрив

Відомо, що при внесенні добрив у ґрунт певної ділянки пасовищ молекули будуть переміщуватися в ньому, утворюючи відповідні потоки. А тому, розглядаючи ділянку пасовищ разом із рослинністю, яка є на ній, а також худобою, що там пасеться, як певну екосистему, в якій переміщуються ці потоки, введемо для неї найхарактерніші стани:

w_1 — молекула добрива перебуває в ґрунті;

w_2 — абсорбована рослинністю;

w_3 — залишить екосистему (це буде поглинальним станом);

w_4 — буде спожита худобою, що на ній пасеться.

Усі зазначені стани цієї екосистеми, а також переходи від одного стану до будь-якого можливого іншого, що відбуваються з певною ймовірністю, і подаються такою ймовірнісною матрицею:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_{41} & 0 & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{7.21}$$

Нас цікавитиме відповідь на запитання: протягом якого часу в середньому молекула добрива перебуватиме в кожному зі станів w_1, w_2, w_4, а також протягом якого часу в середньому вона перебуватиме в кожному з них до поглинання. Тобто необхідно визначити N і $N\vec{\xi}$.

Розглянемо цю модель на конкретному прикладі.

Приклад 3. За наведеним на рис. 7.1 імовірнісним графом, який описує переміщення молекул внесеного в ґрунт на ділянці пасовищ добрива із одного стану в інший, визначити N_1 і $N_1\vec{\xi}$, де $\vec{\xi'} = (1, \ 1, \ 1)$.

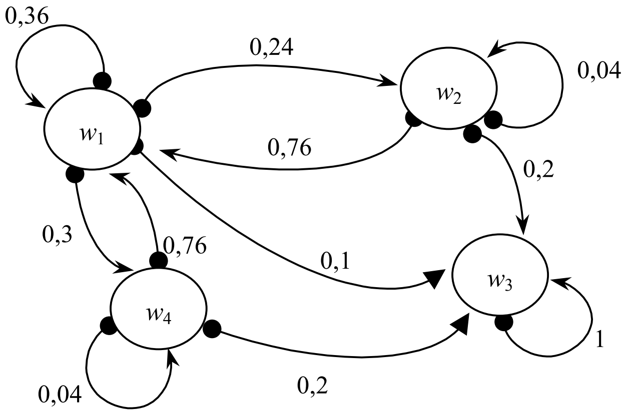


Рис. 7.1

Розв'язання. Запишемо матрицю

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}76 & 0{,}04 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}76 & 0 & 0{,}2 & 0{,}04 \end{pmatrix} \end{array}$$

або в канонічній формі:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc} w_3 & w_1 & w_2 & w_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}76 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}76 & 0 & 0{,}04 \end{array}\right) \end{array}.$$

Із канонічного запису матриці π маємо

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}3 \\ 0{,}76 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}76 & 0 & 0{,}04 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначимо

$$N_1 = (I - Q)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}36 & 0{,}24 & 0{,}3 \\ 0{,}76 & 0{,}04 & 0 \\ 0{,}76 & 0 & 0{,}04 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}64 & -0{,}24 & -0{,}3 \\ -0{,}76 & 0{,}96 & 0 \\ -0{,}76 & 0 & 0{,}96 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4{,}706 & 1{,}176 & 1{,}471 \\ 3{,}725 & 1{,}973 & 1{,}164 \\ 3{,}725 & 0{,}931 & 2{,}206 \end{pmatrix}.$$

Із матриці N_1 дістанемо таку інформацію: молекула добрив у ґрунті (стан w_1) у середньому перебуває 4,706, у рослинному покриві (стан w_2) — 1,973 і в організмі худоби (стан w_3) — 2,206 умовних одиниць часу.

Середній час перебування молекули добрив у кожному зі станів w_1, w_2, w_4 до поглинання обчислюється так:

$$N_1 \vec{\xi} = \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 4{,}706 & 1{,}176 & 1{,}471 \\ 3{,}725 & 1{,}973 & 1{,}164 \\ 3{,}725 & 0{,}931 & 2{,}206 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 7{,}353 \\ 6{,}863 \\ 6{,}863 \end{pmatrix}.$$

Отже, середній час перебування молекули добрива до поглинання буде дорівнювати:
для стану w_1 — 7,383 одиниць часу;
для стану w_2 — 6,863 одиниць часу;
для стану w_4 — 6,863 одиниць часу.

Здобута інформація щодо екосистеми після внесення до неї добрива дає змогу з певною ймовірністю прогнозувати за певний період часу стан ґрунту. Цю інформацію фермер чи агроном може використати для впливу на екосистему в цілому, створюючи найсприятливіші умови для її експлуатації.

7.1.4. Використання потокової моделі для дослідження забруднення атмосфери

Питання екології в наш час набуває глобального статусу. Науково-технічний прогрес поряд із позитивними компонентами, які стосуються комфорту в житті людини, несе також значну кількість негативу, руйнуючи екосистему нашої планети. Тому задачі, пов'язані з екологією, є і будуть надалі дуже важливими. Отже, постає питання про використання математичних моделей для їх розв'язування.

З огляду на специфіку структури екологічних систем детерміновані моделі не в змозі адекватно відбивати найхарактерніші риси тих процесів, які в них відбуваються, оскільки внаслідок дії численних дрібних випадкових чинників на ці процеси їхнє поводження не буде однозначним. Тому в цьому разі використовуємо стохастичні моделі, які хоча й менш точно описують поводження цих процесів, ніж детерміновані, але дають змогу достатньо точно прогнозувати очікувані середні значення параметрів розглядуваних процесів. Ланцюги Маркова і є найефективнішим математичним апаратом для розв'язування задач екологічного змісту.

Розглянемо найпростішу математичну модель — потоків частинок, що забруднюють навколишнє середовище в певному регіоні.

У дискретні моменти часу $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$ у пункті w_i концентрація забруднювальних частинок дорівнює $u_i(t)$. Тоді в момент часу t певна частинка забруднювальних речовин може, наприклад, переміститись із пункту w_i $P_{ij}(t)$ у пункт w_j, а певна частка $P_{ii(t)}$ може залишитися, при цьому $P_{ij}(t)$, $P_{ii}(t)$ — відповідні ймовірності переходу.

Значення величини $p_{ij}(t)$ в загальному випадку залежатиме від погодних умов регіону, часу, доби, пори року та багатьох інших факторів. З урахуванням цих факторів математична модель буде настільки складною, що практично її реалізувати, тобто більш чи менш точно спрогнозувати на певний період екологічну ситуацію в регіоні, вельми проблематично. Тому ймовірність $p_{ij}(t)$ вважатимемо фіксованою і незалежною від часу t: $p_{ij}(t) = p_{ij} = \text{const}$. При цьому має виконуватись умова

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1,\ i = \overline{0, N}, \tag{7.22}$$

де N — кількість джерел забруднення середовища досліджуваного регіону.

Рівність (7.22) інформує про те, що в кожному з N пунктів w_i забруднювач атмосфери може бути розсіяний у навколишньому середовищі (w_0) або його забруднювальні частинки з певною ймовірністю перенесені в інші пункти регіону.

Якщо частинки забруднювальної речовини вийдуть за межі регіону, то назад у цей регіон вони вже не повернуться. Таким чином, ми умовно можемо ввести додатковий пункт w_0, потрапивши до якого забруднювальні частинки в ньому залишаються. Отже, w_0 уособлюватиме поглинальний стан для екосистеми регіону, а w_i — відповідно непоглинальні стани. Згідно з наведеними припущеннями побудуємо математичну модель, що описує екологічний стан регіону, скориставшись однорідними поглинальними ланцюгами Маркова з одним поглинальним станом w_0. Матриця однокрокового переходу, зведена до канонічного вигляду, матиме вигляд:

$$
\pi = \begin{array}{c|c:ccccc}
 & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_N \\
\hline
w_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
w_1 & P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1N} \\
w_2 & P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2N} \\
w_3 & P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
w_N & P_{N1} & P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \dots & P_{NN}
\end{array} \qquad (7.23)
$$

причому має виконуватись умова

$$
\sum_{i=1}^{N} p_{ij} \le 1. \qquad (7.24)
$$

Для цієї матриці дістаємо:

$$
I = (1), \quad O = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \dots\ 0),
$$

$$
R = \begin{pmatrix} P_{10} \\ P_{20} \\ P_{30} \\ \vdots \\ P_{N0} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2N} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix}. \qquad (7.25)
$$

Для прогнозу екологічної ситуації можемо використати потокову модель:

$$
\overrightarrow{u'}(n) = \overrightarrow{m'}\, Q^n + \sum_{k=0}^{n} \overrightarrow{f'}\, Q^k. \qquad (7.26)
$$

Тут $\overrightarrow{m'} = (m_1,\ m_2,\ m_3, \dots, m_N)$ — вектор, що інформує про числове значення забруднення для пункту w_i $\left(i = \overline{1, N}\right)$ на початковій стадії процесу;

$\overrightarrow{f'} = (f_1\ \ f_2\ \ f_3, \dots, f_N)$ — управляючий вектор, добираючи компоненти f_i якого необхідно через певний час досягти вектора

$$
\overrightarrow{u'}(n) = (u_1(n), u_2(n), u_3(n), \dots, u_N(n)),
$$

компоненти якого не перевищують припустимих значень компонентів q_i вектора

$$
\vec{q}\,' = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ \dots,\ q_N), \ u_i(n) \le q_i,\ \overrightarrow{u'}(n) \le \vec{q}\,'. \qquad (7.27)
$$

Ураховуючи, що матриця Q відповідає поглинальному ланцюгу Маркова, маємо

$$
\lim_{t \to \infty} Q^t = 0. \qquad (7.28)
$$

І при цьому

$$
\sum_{t=0}^{n} \overrightarrow{f'}\ Q^t = \overrightarrow{f'} \sum_{k=0}^{n} Q^k = \overrightarrow{f'}\ N_1. \qquad (7.29)
$$

Згідно з (7.26) і (7.29) для великих значень дістаємо:

$$
\overrightarrow{u'}(n) = \overrightarrow{f'}\ N_1. \qquad (7.30)
$$

Ураховуючи (7.27), доходимо висновку, що припустимі значення рівнів забруднення будуть прийнятними за такої умови:

$$
\overrightarrow{f'}\ N_1 \le \overrightarrow{q_1}\ . \qquad (7.31)
$$

Приклад 4. Досліджується певний регіон, до якого належать чотири пункти (міста), у кожному з яких є джерело забруднення навколишнього середовища. У початковий момент часу в першому пункті рівень забруднення середовища дорівнював 3 умовним одиницям, для другого цей рівень досягав 5 умовних одиниць, а для третього і четвертого — відповідно 2 і 6 умовних одиниць. За заданою матрицею однокрокового переходу

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}02 & 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

необхідно визначити розподіл забруднення середовища за $t = 4$ умовних одиниць часу, коли відомо, що $\overrightarrow{f'} = (0{,}5, \;\; 0{,}5, \;\; 0{,}5, \;\; 0{,}5)$ і регіон як екосистема має один поглинальний стан w_0, а вектор припустимих значень забруднень для кожного міста подається вектором

$$\vec{q}' = (6, \; 6, \; 6, \; 6).$$

Розв'язання. Згідно з умовою задачі маємо:

$$\overrightarrow{m'} = (3, \; 5, \; 2, \; 6),$$

$$Q = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Використовуючи (7.14), дістаємо

$$\overrightarrow{u'}(4) = \overrightarrow{m'}Q^4 + \sum_{n=0}^{4} \overrightarrow{f'}Q^n,$$

або в розгорнутому вигляді

$$\overrightarrow{u'}(4) = (u_1(4) \;\; u_2(4) \;\; u_3(4) \;\; u_4(4)) = (3, \; 5, \; 2, \; 6) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}^4 + (0{,}5, \;\; 0{,}5, \;\; 0{,}5, \;\; 0{,}5) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}^3 + \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}28 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}^4 \right)$$

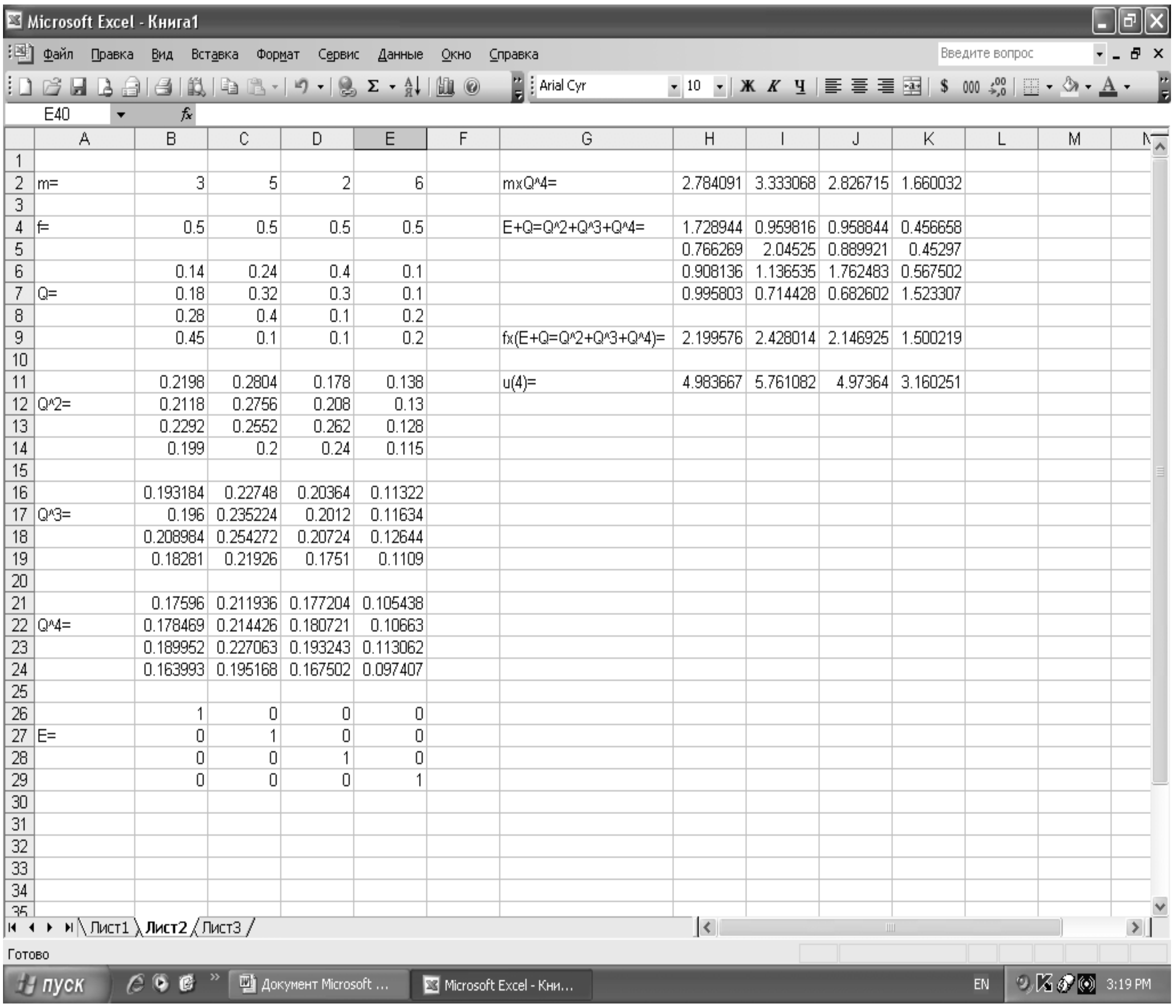
Усі розрахунки для обчислення вище приведеного математичного виразу здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

СУММ- знаходить суму аргументів

Вихідні данні для обчислення математичного виразу містяться в блоках: вектор m — (B2:E2), матриця Q — (B6:E9), вектор f — (B4:E4), одинична матриця E — (B26:E29)

Подальші обчислення за формулою наведені в нище приведеній таблиці Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	m=	3	5	2	6		mxQ^4=	2.784091	3.333068	2.826715	1.660032
3											
4	f=	0.5	0.5	0.5	0.5		E+Q=Q^2+Q^3+Q^4=	1.728944	0.959816	0.958844	0.456658
5								0.766269	2.04525	0.889921	0.45297
6		0.14	0.24	0.4	0.1			0.908136	1.136535	1.762483	0.567502
7	Q=	0.18	0.32	0.3	0.1			0.995803	0.714428	0.682602	1.523307
8		0.28	0.4	0.1	0.2						
9		0.45	0.1	0.1	0.2		fx(E+Q=Q^2+Q^3+Q^4)=	2.199576	2.428014	2.146925	1.500219
10											
11		0.2198	0.2804	0.178	0.138		u(4)=	4.983667	5.761082	4.97364	3.160251
12	Q^2=	0.2118	0.2756	0.208	0.13						
13		0.2292	0.2552	0.262	0.128						
14		0.199	0.2	0.24	0.115						
15											
16		0.193184	0.22748	0.20364	0.11322						
17	Q^3=	0.196	0.235224	0.2012	0.11634						
18		0.208984	0.254272	0.20724	0.12644						
19		0.18281	0.21926	0.1751	0.1109						
20											
21		0.17596	0.211936	0.177204	0.105438						
22	Q^4=	0.178469	0.214426	0.180721	0.10663						
23		0.189952	0.227063	0.193243	0.113062						
24		0.163993	0.195168	0.167502	0.097407						
25											
26		1	0	0	0						
27	E=	0	1	0	0						
28		0	0	1	0						
29		0	0	0	1						

Результат обчислень $u(4)$ знаходиться в блоці (H11:K11) і тому можна записати:

$$\overrightarrow{u'}(4) = (u_1(4) \;\; u_2(4) \;\; u_3(4) \;\; u_4(4)) = (4{,}984, \quad 5{,}761, \quad 4{,}974, \quad 3{,}16).$$

Отже, доходимо висновку, що протягом часу $t = 4$ у пунктах w_1, w_2, w_3, w_4 рівень забруднення буде дорівнювати для w_1 — $u_1(4)$ = 4,984; для w_2 — $u_2(4)$ = 5,761; для w_3 — $u_3(4)$ = 4,974; для w_4 — $u_4(4)$ = 3,16.

Вектор $\overrightarrow{u'}(4)$ задовольняє умову

$$\overrightarrow{u'}(4) \le \overrightarrow{q'}.$$

Таким чином, при заданому векторі $\overrightarrow{f'}$ поставленої мети щодо рівня забруднення навколишнього середовища досягнуто.

Приклад 5. Досліджується екосистема, до якої належать п'ять джерел (пунктів) забруднення навколишнього середовища (атмосфери): w_1, w_2, w_3, w_4, w_5.

За певний проміжок часу в екосистемі відбуваються такі зміни:

у пункті w_1 (джерело забруднення) залишається 0,02 початкового рівня забруднення, 0,23 від початкового рівня переміщується до пункту w_2, 0,17 — до пункту w_3 і 0,25 та 0,15 — відповідно до пунктів w_4 і w_5;

у пункті w_2 за той самий проміжок часу залишається 0,13, а 0,12, 0,18; 0,2; 0,2 переміщується відповідно до пунктів w_1, w_3, w_4, w_5;

у пункті w_3 — 0,07 початкового рівня залишається, а решта 0,21, 0,12, 0,12 і 0,22 переміщується відповідно до пунктів w_1, w_2, w_4, w_5;

у пункті w_4 — 0,05 початкового рівня забруднення залишається, а 0,13, 0,14, 0,16 і 0,24 — переміщується відповідно до пунктів w_1, w_2, w_3, w_5:

у пункті w_5 — 0,02 початкового рівня залишається, а решта — 0,16, 0,24, 0,12, 0,14 переміщується відповідно в пункти w_1, w_2, w_3, w_4.

Необхідно для досить великого значення t знайти компоненти вектора $\vec{f}$, який задовольняв би умову $\vec{f}'N_i \le \vec{q}'$, якщо вектор обмежень забруднення дорівнює $\vec{q}' = (10,\ 10,\ 10,\ 10)$.

Розв'язання. Оскільки для екосистеми існуватиме лише один поглинальний стан w_0, то матриця π у канонічній формі матиме такий вигляд:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}18 & 0{,}02 & 0{,}23 & 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}17 & 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}18 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}26 & 0{,}21 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}22 \\ 0{,}28 & 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}05 & 0{,}24 \\ 0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}24 & 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}02 \end{array}\right) \end{array}$$

Із матриці π визначаємо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}23 & 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}18 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}21 & 0{,}12 & 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}22 \\ 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}05 & 0{,}24 \\ 0{,}16 & 0{,}24 & 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}02 \end{pmatrix}.$$

Тепер обчислимо матрицю

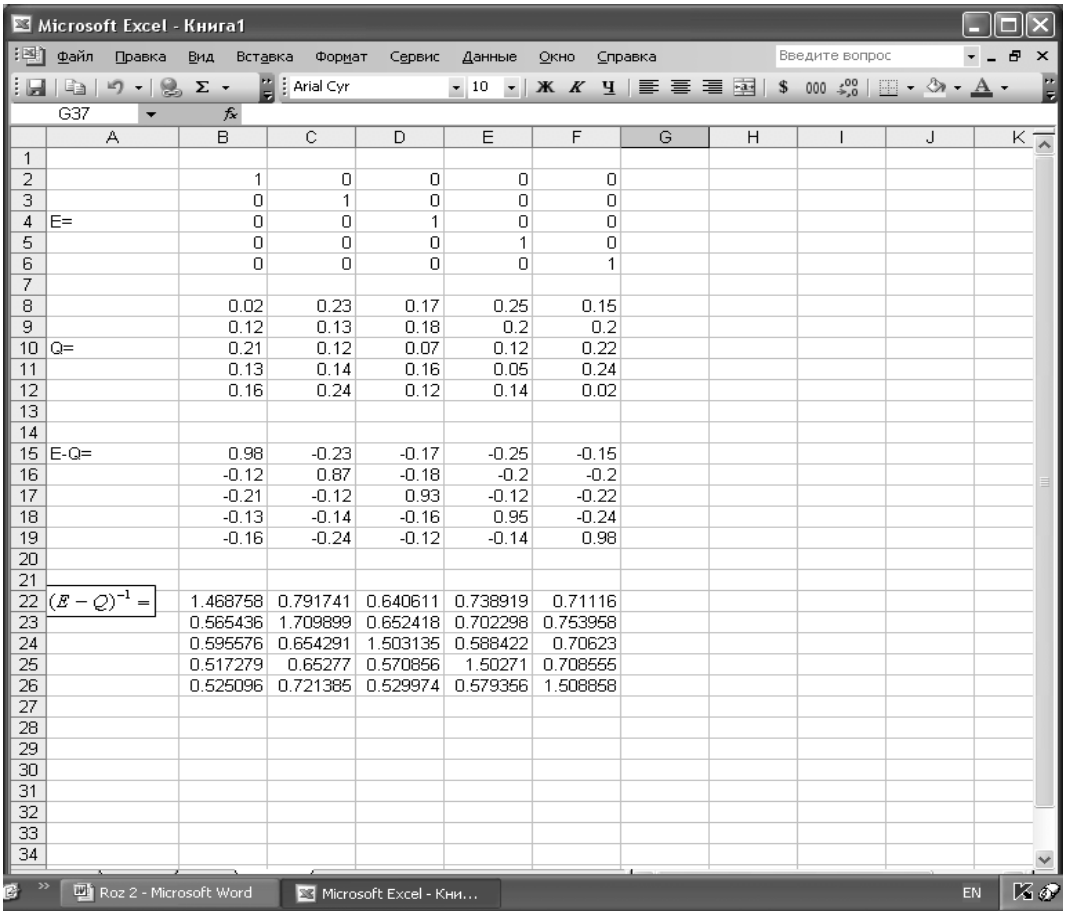
$$N_1 = (I - Q)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}23 & 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}18 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}21 & 0{,}12 & 0{,}07 & 0{,}12 & 0{,}22 \\ 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}16 & 0{,}05 & 0{,}24 \\ 0{,}16 & 0{,}24 & 0{,}12 & 0{,}14 & 0{,}02 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

Усі розрахунки для обчислення вище приведеного математичного виразу здійснимо, використовуючи стандартну офісну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МОБР- повертає обернену матрицю;

Вихідні данні для обчислення математичного виразу містяться в блоках: матриця Q — (B8:F12), одинична матриця E — (B2:F6).

Подальші обчислення за формулою наведені в нище приведеній таблиці Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E	F
1						
2		1	0	0	0	0
3		0	1	0	0	0
4	E=	0	0	1	0	0
5		0	0	0	1	0
6		0	0	0	0	1
7						
8		0.02	0.23	0.17	0.25	0.15
9		0.12	0.13	0.18	0.2	0.2
10	Q=	0.21	0.12	0.07	0.12	0.22
11		0.13	0.14	0.16	0.05	0.24
12		0.16	0.24	0.12	0.14	0.02
13						
14						
15	E-Q=	0.98	-0.23	-0.17	-0.25	-0.15
16		-0.12	0.87	-0.18	-0.2	-0.2
17		-0.21	-0.12	0.93	-0.12	-0.22
18		-0.13	-0.14	-0.16	0.95	-0.24
19		-0.16	-0.24	-0.12	-0.14	0.98
20						
21						
22	$(E-Q)^{-1}=$	1.468758	0.791741	0.640611	0.738919	0.71116
23		0.565436	1.709899	0.652418	0.702298	0.753958
24		0.595576	0.654291	1.503135	0.588422	0.70623
25		0.517279	0.65277	0.570856	1.50271	0.708555
26		0.525096	0.721385	0.529974	0.579356	1.508858

У результаті обчислень будемо мати:

$$N_1 = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,469 & 0,791 & 0,641 & 0,739 & 0,711 \\ 0,565 & 1,71 & 0,652 & 0,702 & 0,754 \\ 0,596 & 0,654 & 1,503 & 0,588 & 0,706 \\ 0,517 & 0,653 & 0,571 & 1,503 & 0,709 \\ 0,525 & 0,721 & 0,530 & 0,579 & 1,509 \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з умовою $\overrightarrow{f'}N_i \le \overrightarrow{q'}$ дістанемо:

$$(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5)\begin{pmatrix} 1,469 & 0,791 & 0,641 & 0,739 & 0,711 \\ 0,565 & 1,71 & 0,652 & 0,702 & 0,754 \\ 0,596 & 0,654 & 1,503 & 0,588 & 0,706 \\ 0,517 & 0,653 & 0,571 & 1,503 & 0,709 \\ 0,525 & 0,721 & 0,530 & 0,579 & 1,509 \end{pmatrix} \le (q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ q_5) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1,469f_1 + 0,565f_2 + 0,596f_3 + 0,517f_4 + 0,525f_5 &\le 10, \\ 0,791f_1 + 1,71f_2 + 0,654f_3 + 0,653f_4 + 0,721f_5 &\le 10, \\ 0,641f_1 + 0,652f_2 + 1,503f_3 + 0,571f_4 + 0,30f_5 &\le 10, \\ 0,739f_1 + 0,702_2 + 0,588f_3 + 1,503f_4 + 0,579f_5 &\le 10, \\ 0,711f_1 + 0,754f_2 + 0,706f_3 + 0,709f_4 + 1,509f_5 &\le 10. \end{aligned}$$

Тут $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 10$ згідно з умовою.

Одним із розв'язків здобутої системи рівняння буде вектор $\overrightarrow{f'}$ = (3,6 1,4 3 2,4 1,7). Отже, при таких числових значеннях компонентів вектора $\overrightarrow{f'}$ виконуватиметься умова:

$$\overrightarrow{f'}N_i \le \overrightarrow{q'}.$$

7.1.5. Відкрита модель Леонтьєва

Ланцюги Маркова, як показують попередні викладки, можна використати для моделювання реальних випадкових процесів, які за своєю природою не мають між собою нічого спільного.

Розглянемо, наприклад, як поглинальні ланцюги Маркова можна застосувати для моделювання роботи N галузей промисловості, що утворюють економічну систему. При цьому кожна з галузей виготовляє певну продукцію, а всі вони пов'язані між собою шляхом обміну цією продукцією, а також із ринком — внутрішнім або зовнішнім, де здійснюється її реалізація. При цьому постає проблема щодо рентабельності роботи цих галузей. З метою розв'язання цієї проблеми й побудовано так звану ***відкриту модель Леонтьєва***.

У моделі Леонтьєва витрати—випуск (input-output) розглядається економічна система, яка складається із N галузей $(w_1,\ w_2, ..., w_N)$. Для спрощення міркувань надалі припускаємо, що кожна галузь виготовляє лише один тип продукції. При цьому такі природні фактори, як земельні, лісові, мінеральні та інші ресурси, не включаються до вартості виготовленої продукції кожною галуззю.

У загальному випадку, галузі, які входять до економічної системи, пов'язані між собою в тому розумінні, що кожна з них, щоб задовольнити свої виробничі потреби, змушена закуповувати певну кількість продукції, що її виготовляє інша галузь. З цією метою вводиться так званий технологічний коефіцієнт q_{ij}, який інформує про те, яку кількість у відносних одиницях продукції, виготовленої галуз-зю w_j, має придбати галузь w_i, щоб, наприклад, виготовити продукції на 1 ум. гр. од. Загальну картину взаємозв'язку між галузями досліджуваної економічної системи можна подати квадратною матрицею:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_i & \ldots & w_N \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \ldots \\ w_i \\ \ldots \\ w_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & \ldots & q_{1i} & \ldots & q_{1N} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} & \ldots & q_{2i} & \ldots & q_{2N} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} & \ldots & q_{3i} & \ldots & q_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ q_{i0} & q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} & \ldots & q_{ii} & \ldots & q_{iN} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ q_{N0} & q_{N1} & q_{N2} & q_{N3} & \ldots & q_{Ni} & \ldots & q_{NN} \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (7.32)$$

У наведеній матриці w_0 є таким станом, з яким може мати зв'язок будь-яка галузь економічної системи, але сам цей стан не має зв'язків із галузями. Стан w_0 мовою ланцюгів Маркова виконує роль поглинального, суть якого буде розкрито далі.

Із матриці (7.32) випливає, що $\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij}$ при фіксованому $i = \overline{1,\ N}$ інформує про всі витрати, які має здійснити галузь, щоб виробити продукцію на 1 ум. гр. од.

Щоб галузь була прибутковою або принаймні незбитковою, необхідно, щоб виконувалась умова:

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} \le 1. \qquad (7.33)$$

При цьому галузь w_i буде прибутковою, якщо

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} < 1, \qquad (7.34)$$

і незбитковою (неприбутковою), якщо

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = 1. \qquad (7.35)$$

Із матриці (7.32) виокремлюємо матрицю:

$$
\begin{array}{c}
 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_i & \dots & w_N \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
q_{11} & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1j} & \dots & q_{1N} \\
q_{21} & q_{22} & q_{23} & \dots & q_{2j} & \dots & q_{2N} \\
q_{31} & q_{23} & q_{32} & \dots & q_{3j} & \dots & q_{3N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} & \dots & q_{ij} & \dots & q_{iN} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
q_{N1} & q_{N2} & q_{N3} & \dots & q_{Nj} & \dots & q_{NN}
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad (7.36)
$$

У досліджувану економічну систему включають лише прибуткові та незбиткові галузі, відкидаючи при цьому збиткові.

Переходимо тепер на мову ланцюгів Маркова. Ураховуючи те, що технологічні коефіцієнти q_{ij} являють собою частку продукції, яку може придбати галузь w_i і яку виготовила галузь w_j, то їхні значення в загальному випадку можуть змінюватися на проміжку $[0;\ 1]$, тобто

$$0 \le q_{ij} \le 1. \qquad (7.37)$$

Отже, можемо вважати, що

$$q_{ij} = p_{ij}. \qquad (7.38)$$

Таким чином, елементи матриць (7.32), (7.36) можемо тлумачити як імовірності переходу економічної системи зі стану w_i у стан w_j у момент часу t. Оскільки q_{ij} не залежить від часу, то $p_{ij} = \mathrm{const}$. А тому матриці (7.32) і (7.36) описують однорідні ланцюги Маркова (поглинальні) з одним поглинальним станом w_0, який уособлює банк, куди надходитимуть кошти від реалізованої кожною прибутковою галуззю продукції.

З огляду на сказане матриці (7.32), (7.36) можемо записати, користуючись мовою ланцюгів Маркова:

$$
\pi =
\begin{array}{c}
 \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1i} & \dots & P_{1N} \\
P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2i} & \dots & P_{2N} \\
P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3i} & \dots & P_{3N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{iN} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
P_{N0} & P_{N1} & P_{N2} & p_{N3} & \dots & P_{Ni} & \dots & P_{NN}
\end{pmatrix}
\end{array}. \qquad (7.39)
$$

$$
Q =
\begin{array}{c}
 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1N} \\
P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2N} \\
P_{31} & P_{23} & P_{32} & \dots & P_{3j} & \dots & P_{3N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{iN} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \dots & P_{Nj} & \dots & P_{NN}
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad (7.40)
$$

Із матриці π маємо:

$$P_{00} = 1;\ P_{0j} = 0;\ P_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} P_{ij}. \qquad (7.41)$$

Умови (7.33), (7.34), (7.35) у новій інтерпретації наберуть такого вигляду:

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} \le 1; \tag{7.42}$$

для прибуткових галузей

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} < 1; \tag{7.43}$$

для неприбуткових (незбиткових) галузей

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1. \tag{7.44}$$

Сформульовані умови можна записати так:
для неприбуткових галузей

$$\begin{aligned} &Q \ge 0; \\ &Q\vec{\xi} = \vec{\xi}, \end{aligned} \tag{7.45}$$

для прибуткових галузей.

$$Q\vec{\xi} < \vec{\xi}. \tag{7.46}$$

Тут $\vec{\xi'} = (1, \ 1, \ 1, ..., \ 1)$.

Нехай x_i — грошова вартість продукції, яку виготовляє галузь w_i. Тоді вектор

$$\vec{x'} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ ... \ x_i \ \ x_N)$$

називають ***вектором вартості продукції***, яку вироблять відповідно галузі $w_1, w_2, w_3, ..., w_i, w_N$. Оскільки галузь, наприклад w_i, потребує продукції, що її виробляє галузь w_j, на загальну суму $x_i P_{ij}$, то вектор $\vec{x'}\, Q$ називають ***вектором необхідних витрат***. Введемо вектор потреб $\vec{\gamma'} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_i, ... \gamma_n)$, де γ_i інформує про попит продукції, яку виробляє галузь w_i, причому

$$\gamma_i \ge 0 \qquad \left(i = \overline{1, n}\right).$$

Тоді для збалансованої економічної системи, коли повністю задовольняються як міжгалузеві потреби, так і потреби ринку, буде виконуватися така рівність:

$$\vec{x'} = \vec{x'}\, Q + \vec{\gamma'}, \tag{7.47}$$

або

$$\vec{x'}(I - Q) = \vec{\gamma'}. \tag{7.48}$$

Із (7.48) дістаємо

$$\vec{x'} = \vec{\gamma'} N_1 \ \left(N_1 = (I - Q)^{-1}\right), \tag{7.49}$$

ураховуючи при цьому, що матриця $(I - Q)$ має обернену, елементи якої є невід'ємними.

Для відкритої моделі Леонтьєва бажано, щоб структура матриці π була такою, щоб із кожної галузі (стану економічної системи) можна було б потрапити до банку, тобто в поглинальний стан w_0. Але потрапити до нього можуть лише ті галузі виробництва, які є прибутковими, тобто для яких $P_{i0} \ne 0$, а неприбуткові (за винятком збиткових) галузі можуть потрапити в банк лише через прибуткові.

Таким чином, можна вважати, що умовою рентабельності роботи галузей, включених в економічну систему, є їхній зв'язок із банком. Якщо економічна система складається з N неприбуткових галузей, то для кожної з них виконується рівність

$$\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1,$$

а матриця Q задовольняє рівність

$$Q\vec{\xi} = \vec{\xi}. \qquad (7.50)$$

Помноживши ліву і праву частини рівняння (2.47) на вектор $\vec{\xi}$, дістанемо:

$$\vec{x'}\vec{\xi} = \vec{x'}\ Q\ \vec{\xi} + \vec{\gamma'}\vec{\xi} = \vec{x'}\vec{\xi} + \vec{\gamma'}\vec{\xi} \to \vec{\gamma'}\vec{\xi} = 0. \qquad (7.51)$$

Це означає, що сумарний зовнішній попит дорівнює нулю, а отже, будь-який зовнішній попит на продукцію, яку виготовляють галузі, що входять у таку економічну систему, задовольнити не можна.

В економічній системі, яка має неприбуткові галузі, що не здатні задовольнити зовнішній попит на виготовлену продукцію (не пов'язані зі станом w_0), у подальших дослідженнях вилучають із системи.

Матрицю (7.40) із вилученими неприбутковими галузями позначають як Q^*. Тоді

$$N_1 = \left(I - Q^*\right)^{-1}. \qquad (7.52)$$

Елементи n_{ij} матриці N_1 інформують про кількість продукції в середньому, яку має виготовити w_j галузь для задоволення потреб виробництва галузі w_i. При дослідженні економічної системи в тому разі, коли галузі, що утворюють її, є прибутковими, постає запитання: якщо споживач зробив w_i-й галузі замовлення на 1 ум. гр. од., то яка його частина потрапить тій чи іншій галузі?

Насамперед необхідно визначити загальний попит на продукцію, виготовлену різними галузями. Тому якщо для вектора $\vec{\gamma'}$ $\gamma_i = 1$, а решта компонентів дорівнює нулю, то добуток $\vec{x'} = \vec{\gamma'}N_1$ буде дорівнювати i-му рядку матриці N_1. Тепер елемент n_{ij} матриці N_1 можна тлумачити як кількість продукції, яку має виробити галузь w_j, щоб галузь w_i виконала замовлення на 1 ум. гр. од..

Оскільки j-та галузь одержить P_{j0} прибутку з продукції вартістю в 1 ум. гр. од., то відповідь на поставлене запитання буде такою: якщо i-та галузь одержить замовлення на 1 ум. гр. од., то j-та галузь одержить прибуток, що дорівнює $n_{ij}\ P_{j0}$, а сума всіх прибутків

$$\sum_{j=1}^{N} n_{ij}\ P_{j0} = 1.$$

Отже, 1 ум. гр. од., витрачений замовником, буде як прибуток осідати в прибуткових галузях.

Оскільки

$$N_1\ \vec{\xi} = \vec{\tau}, \qquad (7.53)$$

де $\tau_i = \sum_{j=1}^{N} n_{ij}$, то для вектора попиту дістаємо:

$$\vec{\gamma'}\ N_1\ \vec{\xi} = \vec{\gamma'}\vec{\tau}. \qquad (7.54)$$

Приклад 6. Нехай маємо вісім галузей, які пов'язані між собою в тому розумінні, що кожна з них, щоб задовольнити свої виробничі потреби, змушена закуповувати певну кількість продукції, що її виготовляє інша галузь.. Нехай задані технологічні коефіцієнти q_{ij}, які утворюють технологічну матрицю і інформують про те, яку кількість у відносних одиницях продукції, виготовленої галуззю w_j, має придбати галузь w_i, щоб виготовити продукції на 1 ум. гр. од.:

$$Q=\begin{array}{c} \\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\\ w_7\\ w_8\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Визначити прибуткові та неприбуткові галузі, побудувати матрицю Q^* — перехідних ймовірностей, визначити N_1, елементи якої представляють собою кількість продукції в середньому, яку має виготовити w_j галузь для задоволення потреб виробництва галузі w_i s вектор $\vec{\tau}$, елементи якої інформують про загальну кількість продукції в середньому, яку мають виготовити всі галузі для задоволення потреб виробництва відповідної галузі.

Розв'язання. Згідно з матрицею Q матриця π матиме такий вигляд:

$$\pi=\begin{array}{c} \\ w_0\\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\\ w_7\\ w_8\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

Перший стовпець матриці π інформує про те, що галузі w_1, w_2 є прибутковими, а галузі w_3, w_6 — неприбуткові, але пов'язані з прибутковими: галузь w_3 пов'язана з прибутковою галуззю w_1, а w_6 — із прибутковими галузями w_1, w_2. Галузі w_4, w_5, w_7, w_8 не пов'язані ні з банком, ні з прибутковими галузями, а тому вони не включаються в модель для дослідження економічної системи. З огляду на це матриця π набере спрощеного вигляду:

$$\pi^*=\begin{array}{c} \\ w_0\\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_6\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_6\end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix}\end{array}.$$

Із матриці π^* визначаємо матрицю Q^*, яка використовується для відшукання матриці N_1:

$$Q^*=\begin{array}{c} \\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_6\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0 & 0\\ 04 & 0{,}4 & 0 & 0\\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 & 0\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}6\end{pmatrix}\end{array}.$$

Оскільки

$$I - Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0, & 0,7 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & 0 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,3 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix},$$

то

$$N_1 = \left(I - Q^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ -0,4 & 0,5 & 0 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0,3 & 0 \\ -0,2 & -0,2 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3,125 & 3,75 & 0 & 0 \\ 2,5 & 5 & 0 & 0 \\ 3,125 & 3,75 & 3,333 & 0 \\ 2,812 & 4,375 & 0 & 2,5 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо

$$\vec{\tau} = N_1\,\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 3,125 & 3,75 & 0 & 0 \\ 2,5 & 5 & 0 & 0 \\ 3,125 & 3,75 & 3,333 & 0 \\ 2,812 & 4,375 & 0 & 2,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,875 \\ 7,5 \\ 10,208 \\ 9,687 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо 1 ум. гр. од. стимулює, наприклад, галузь w_2 виготовляти продукції на 7,5 ум. гр. од., то з них 2,5 ум. гр. од. припадає на галузь w_1 і 5 ум. гр. од. — на галузь w_2. Із цієї 1 ум. гр. од. галузь w_1 отримає 2,5 · 0,4 = 1 ум. гр. од. прибутку, галузь w_2 отримає 5·0,5=2,5 ум. гр. од., а галузі w_3 і w_6 прибутку не матимуть. Якщо, наприклад, задано вектор попиту $\vec{\gamma}' = (2,\ 4,\ 5,\ 1)$, то галузі, які включено в модель, виготовлять продукції:

$$\vec{\gamma}' N_1 = (2,\ 4,\ 5,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3,125 & 3,75 & 0 & 0 \\ 2,5 & 5 & 0 & 0 \\ 3,125 & 3,75 & 3,333 & 0 \\ 2,812 & 4,375 & 0 & 2,5 \end{pmatrix} = (34,687 \quad 50,625 \quad 16,665 \quad 2,5)$$

на загальну суму

$$\vec{\gamma}' N_1 \vec{\xi} = (34,687 \quad 50,625 \quad 16,665 \quad 2,5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 104,477 \text{ (ум. гр. од.).}$$

7.2. Стохастичні моделі з використанням регулярних ланцюгів Маркова

Регулярні, як і поглинальні, ланцюги Маркова мають широке поле застосування для моделювання випадкових процесів, які відбуваються в системах найрізноманітнішого походження.

7.2.1. Потокові моделі із втручанням уряду в розподіл грошової маси в містах

У разі, коли грошові потоки позбавлені можливості залишати певний регіон чи країну, для їх моделювання використовують регулярні однорідні ланцюги Маркова з матрицею однокрокового переходу для N міст регіону:

$$
\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_N \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \end{array} \\
\begin{pmatrix}
P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1N} \\
P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2N} \\
P_{31} & P_{23} & P_{32} & \dots & P_{3j} & \dots & P_{3N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{iN} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
P_{N1} & P_{N2} & P_{N3} & \dots & P_{Nj} & \dots & P_{NN}
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad (7.55)
$$

При цьому для кожного рядка матриці (7.55) має виконуватись рівність

$$
\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1, \ \ i = \overline{1,\ N}\,. \qquad (7.56)
$$

Потокова модель в цьому разі матиме такий вигляд:

$$
\overrightarrow{u'}(t) = \overrightarrow{m'}\pi^n + \sum_{t=0}^{n} \overrightarrow{f'}\pi^t. \qquad (7.57)
$$

Як відомо, для регулярних ланцюгів Маркова

$$
\lim_{t\to\infty} \pi^t = W\,, \qquad (7.58)
$$

де

$$
W = \begin{pmatrix}
w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\
w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\
w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\
w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N
\end{pmatrix}
\qquad (7.59)
$$

є матрицею стаціонарних імовірностей, яку можна подати ще й у такому вигляді:

$$
W = \left(\overrightarrow{W_1'}\ \overrightarrow{W_2'}\ \ \overrightarrow{W_3'}\ \dots\ \overrightarrow{W_j'}\ \ \overrightarrow{W_N'}\right), \qquad (7.60)
$$

де

$$
\overrightarrow{W_i'} = \left(w_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots w_j, \dots,\ w_N\right)\ (\,i = \overline{1,\ N}\,) \qquad (7.61)
$$

є вектор стаціонарних імовірностей, причому

$$
\overrightarrow{W_1'} = \overrightarrow{W_2'} = \overrightarrow{W_3'} = \dots = \overrightarrow{W_j'} = \overrightarrow{W_N'} = \overrightarrow{W}. \qquad (7.62)
$$

Розглянемо поводження членів моделі (7.57) при $t \to \infty$ (для великих значень t).
З урахуванням (7.58) маємо:

$$
\lim_{t\to\infty} \overrightarrow{m'}\ \pi^t = \overrightarrow{m'}\ W. \qquad (7.63)
$$

У розгорнутому вигляді добуток $\overrightarrow{m'}\ W$ подається так:

$$\overrightarrow{m'}\ W=\left(m_1\ \ m_2\ \ m_3\ \dots m_j\ \ m_N\right)\cdot\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \therefore & w_N \end{pmatrix}=$$

$$=(\left(m_1+\ m_2+m_3+\dots+m_j\ +m_N\right)w_1,\ \left(m_1+\ m_2+m_3+\dots+m_j\ +m_N\right)w_2,$$
$$\left(m_1+\ m_2+m_3+\dots+m_j\ +m_N\right)w_3,\dots\left(m_1+\ m_2+m_3+\dots+m_j\ +m_N\right)w_j,$$
$$\dots\left(m_1+\ m_2+m_3+\dots+m_j\ +m_N\right)w_N)=$$
$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\cdot w_1,\ \left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\cdot w_2,\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\cdot w_3,\dots\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\cdot w_j,\dots\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\cdot w_N\right)=\left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\cdot\overrightarrow{W}.$$

Отже, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\overrightarrow{m'}\ \ \pi^t=\overrightarrow{m'}\ \ W=\left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\cdot\overrightarrow{W}. \qquad (7.64)$$

Із (7.64) випливає, що m_i — розмір грошової маси в i-му місті в початковий момент часу — із плином часу (збільшенням значень) t розподіляється між містами пропорційно до вектора стаціонарних імовірностей $\overrightarrow{W}$. Розглянемо поводження при $t\to\infty$ другого члена моделі (7.57), який можна подати рядом

$$\sum_{t=0}^{\infty}\overrightarrow{f'}\pi^t=f'+f'\pi+f'\pi^2+f'\pi^3+\dots+f'\pi^n+\dots, \qquad (7.65)$$

що є збіжним, а тому має виконуватись умова

$$\lim_{t\to\infty}\overrightarrow{f'}\ \ \pi^t=0. \qquad (7.66)$$

Але оскільки

$$\lim_{t\to\infty}\overrightarrow{f'}\ \ \pi^t=\overrightarrow{f'}\cdot W, \qquad (7.67)$$

або

$$\lim_{t\to\infty}\overrightarrow{f'}\ \ \pi^t=\overrightarrow{f'}\cdot\vec{\xi}\cdot\overrightarrow{W}, \qquad (7.68)$$

де $\overrightarrow{W}\neq 0,$ то (7.66) набирає такого вигляду

$$\lim_{t\to\infty}\overrightarrow{f'}\pi^t=\overrightarrow{f'}\cdot\vec{\xi}\cdot\overrightarrow{W}=0. \qquad (7.69)$$

Отже, для виконання рівності (2.69) необхідно, щоб

$$\overrightarrow{f'}\ \vec{\xi}=0. \qquad (7.70)$$

Із рівності (7.70) випливає: коли уряд має намір стабілізувати грошову ситуацію в країні (регіоні) зі збереженням загальної суми, що її утворюють грошові потоки, то він, ураховуючи відсутність у системі поглинальних станів, не повинен ні здійснювати додаткових вкладів у загальну кількість грошової маси, ні вилучати з неї будь-якої кількості.

Управління урядом грошовими потоками полягатиме в тому, що він, вилучаючи певний обсяг грошової маси з одного міста (міст), такий самий обсяг вкладає в інше місто (міста), керуючись при цьому виробленою стратегією управління.

Тому компоненти управляючого вектора f' мають задовольняти умову

$$\sum_{i=1}^{N}f_i=0. \qquad (7.71)$$

Із (7.70), (7.71) випливає рівність

$$\overrightarrow{f'}\ W = 0\,. \qquad (7.72)$$

Ряд (7.65) із урахуванням (7.58) можна подати в такому вигляді:

$$\overrightarrow{f'} + \overrightarrow{f'}\ \pi + \overrightarrow{f'} \cdot \pi^2 + \overrightarrow{f'} \cdot \pi^3 + \cdots + \overrightarrow{f'}\ \pi^n + \ldots = \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{f'}\ \left(\pi + \pi^2 + \pi^3 + \ldots + \pi^n + \ldots\right) =$$
$$= \overrightarrow{f'} + \overrightarrow{f'}\ \sum_{t=1}^{\infty}\ \left(\pi^t - W\right) = \overrightarrow{f'}\ \left(I + \sum_{t=1}^{\infty}\ \left(\pi^t - W\right)\right) = f'\,N_1^*,$$

оскільки

$$I + \sum_{t=1}^{\infty}\ \left(\pi^t - W\right) = \left(I - \left(\pi^t - W\right)\right)^{-1} = N_1^*.$$

Отже, при $t \to \infty$ модель (7.57) набирає такого вигляду:

$$\overrightarrow{u'}(t) = \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\ \overrightarrow{W} + \overrightarrow{f'}\,N_1^*. \qquad (7.73)$$

За умови, що

$$q' \geq \overrightarrow{u'}(t),$$

дістаємо

$$q' \geq \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\ \overrightarrow{W} + \overrightarrow{f'}\,N_1^*,$$

або

$$q' \geq \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\ \overrightarrow{W} + \overrightarrow{f'}\left(I - \pi + W\right)^{-1}. \qquad (7.74)$$

Помноживши (2.74) на $\left(I - \pi + W\right)$, дістанемо:

$$q'\left(I - \pi + W\right) \geq \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\ \overrightarrow{W}\left(I - \pi + W\right) + \overrightarrow{f'}\left(I - \pi + W\right)^{-1}\left(I - \pi + W\right) \Rightarrow q'\left(I - \pi + W\right) \geq \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\overrightarrow{W} + \overrightarrow{f'}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{W}I = \overrightarrow{W},\ \ \overrightarrow{W} \cdot \pi = \overrightarrow{W},\ \ \overrightarrow{W} \cdot W = W,\ \text{то}\ \overrightarrow{W}\left(I - \pi + W\right) = \overrightarrow{W}.$$

Згідно з наведеними міркуваннями доходимо висновку:

$$q'\left(I - \pi + W\right) \geq \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\ \overrightarrow{W}\,\overrightarrow{f'}. \qquad (7.75)$$

Тепер, помноживши ліву і праву частини нерівності (7.75) на одиничний вектор $\vec{\xi}$, дістанемо:

$$\overrightarrow{q'}\left(I - \pi + W\right)\vec{\xi} = \left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\overrightarrow{W}\,\overrightarrow{f'}\,\vec{\xi}. \qquad (7.76)$$

Ураховуючи, що $I\vec{\xi} = \vec{\xi},\ \ \pi\vec{\xi} = \vec{\xi},\ \ W\vec{\xi} = \vec{\xi}$, маємо

$$q'\left(I - \pi + W\right)\ \vec{\xi} = q'\left(I\vec{\xi} - \pi\vec{\xi} + W\vec{\xi}\right) = q'\left(\vec{\xi} - \vec{\xi} + \vec{\xi}\right) = q'\ \vec{\xi}.$$

А оскільки $W\vec{\xi} = 1$ і $\overrightarrow{f'}\,\vec{\xi} = 0$ (це випливає з (7.70)), то права частина нерівності (7.76) набирає такого вигляду:

$$\left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\ \overrightarrow{W}\,\vec{\xi} + \overrightarrow{f'}\,\vec{\xi} = \overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}.$$

Отже, дістали умову

$$\overrightarrow{q'}\ \vec{\xi} = \overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\,, \qquad (7.77)$$

яка є необхідною і достатньою умовою для існування такого вектора $\overrightarrow{f'}$, при якому

$$\overrightarrow{u'}(t)=\overrightarrow{m'}\pi^n+\sum_{t=0}^{n}\overrightarrow{f'}\pi^t \rightarrow \overleftarrow{q'}=\left(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_j,\ldots\ q_N\right),$$

тобто вектор $\overrightarrow{u'}(t)$ прямує до цільового вектора $\overleftarrow{q'}$.

Для визначення вектора $\overrightarrow{f'}$ використаємо (7.75). Оскільки $\overrightarrow{q'}\ \vec{\xi}=\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}$, то маємо

$$\overrightarrow{q'}(I-\pi+W)\geq\left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\overrightarrow{W}+\overrightarrow{f'}\Rightarrow\overrightarrow{q'}(I-\pi+W)\geq\overrightarrow{q'}\ \vec{\xi}\ \overrightarrow{W}+\overrightarrow{f'}\Rightarrow\overrightarrow{q'}(I-\pi+W)\geq\overrightarrow{q'}\ \ W+\overrightarrow{f'}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{q'}\ W=\overrightarrow{q'}\ \overrightarrow{W}\text{, то }\overrightarrow{q'}(I-\pi)+\overrightarrow{q'}\ \overrightarrow{W}\geq\overrightarrow{q'}\ W+\overrightarrow{f'}\Rightarrow\overrightarrow{q'}(I-\pi)\geq\overrightarrow{f'}.$$

Таким чином, вектор $\overrightarrow{f'}$ визначається як

$$\overrightarrow{f'}\leq\overrightarrow{q'}\left(I-\pi\right). \tag{7.78}$$

За аналогією з поглинальними ланцюгами Маркова, за допомогою яких описуються грошові потоки для регулярних ланцюгів, умова (7.15) для всіх $k\geq 0$ набирає такого вигляду:

$$\left(\overleftarrow{q'}\pi-\overrightarrow{m'}\right)\pi^k\leq q'. \tag{7.79}$$

Оскільки

$$\lim_{k\to w}\pi^k=W,$$

то згідно з (7.77)

$$\lim_{k\to\infty}\left(\overleftarrow{q'}\pi-\overrightarrow{m'}\right)\pi^k=\left(\overleftarrow{q'}\pi-\overrightarrow{m'}\right)W=\overrightarrow{q'}\ W-\overrightarrow{m'}\ W=0.$$

Із останнього перетворення маємо:

$$\left(\overleftarrow{q'}\pi-\overrightarrow{m'}\right)W=\overleftarrow{q'}\pi\ W-\overrightarrow{m'}\ W=0\Rightarrow\overleftarrow{q'}\pi\ W=\overrightarrow{m'}\ W. \tag{7.80}$$

Із (7.80) для додатних компонентів вектора $\overleftarrow{q'}$ маємо

$$\overleftarrow{q'}\,\pi\leq\overleftarrow{q'}. \tag{7.81}$$

Якщо виконується (7.81), то вектор $\overleftarrow{q'}$ буде пропорційним до вектора стаціонарних імовірностей $\overrightarrow{W}$:

$$\overrightarrow{q'}=\left(\overrightarrow{q'}\ \vec{\xi}\right)\overrightarrow{W}, \tag{7.82}$$

а також

$$\overrightarrow{q'}=\left(\overrightarrow{m'}\ \vec{\xi}\right)\overrightarrow{W}. \tag{7.83}$$

Приклад 7. Нехай маємо чотири міста $w_1, w_{2,} w_3$ і w_4 та значення p_{ij}, які утворюють матрицю π, описуючі інтегровані грошові потоки між данними містами, і представляють собою частку відповідних грошей, яка належить місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу.

За заданими вектором $\overrightarrow{m'}=\left(6,\quad 4,\quad 8,\quad 2\right)$, елементи якого є розміри грошової маси в i-му місті в початковий момент часу, цільовим вектором $\overrightarrow{q'}=\left(5,\quad 5,\quad 5,\quad 5\right)$ і матрицею однокрокового переходу π, елементи якої представляють собою частку відповідних грошей, яка належить місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу:

$$\pi=\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}18 & 0{,}12 \\ 0{,}18 & 0{,}42 & 0{,}24 & 0{,}16 \\ 0{,}17 & 0{,}23 & 0{,}48 & 0{,}12 \\ 0{,}1 & 0{,}16 & 0{,}22 & 0{,}52 \end{pmatrix}
\end{array},$$

визначити компоненти управляючого вектора $\overrightarrow{f'}=(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$ та грошову ситуацію за чотири кроки (чотири умовні одиниці часу).

Розв'язання. Скориставшись (7.78), визначимо компоненти вектора $\overrightarrow{f'}$:

$$\overrightarrow{f'}\le(f_1\ \ f_2\ \ f_3\ \ f_4)=(5\quad 5\quad 5\quad 5)\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,45&0,25&0,18&0,12\\0,18&0,42&0,24&0,16\\0,17&0,23&0,48&0,12\\0,1&0,16&0,22&0,52\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(5\quad 5\quad 5\quad 5)\begin{pmatrix}0,55&-0,25&-0,18&-0,12\\-0,18&0,58&-0,24&-0,16\\-0,17&-0,23&0,52&-0,12\\-0,1&-0,16&-0,22&0,48\end{pmatrix}=(0,6,\quad -0,14,\quad -0,38,\quad -0,08).$$

Отже, дістали вектор $\overrightarrow{f'}\le(0,6,\quad -0,14,\quad -0,38,\quad -0,08)$, який інформує про те, що уряд додає місту w_1 0,6 одиниці грошей, вилучаючи при цьому з міст $w_2,\ w_3,\ w_4$ відповідно 0,14; 0,38; 0,08 одиниць. При цьому виконується умова

$$\sum_{i=1}^{n} f_i=0.$$

Визначимо грошову ситуацію регіону за чотири кроки умовного часу, скориставшись формулою

$$\overrightarrow{u'}(t)=\overrightarrow{m'}\pi^4+\sum_{t=0}^{4}\overrightarrow{f'}\pi^t.$$

Подамо її в такому вигляді:

$$\overrightarrow{u'}(4)=(u_1(4),\ u_2(4),\ u_3(4),\ \ u_4(4))=(6\ \ 4\ \ 8\ \ 2)\begin{pmatrix}0,45&0,25&0,18&0,12\\0,18&0,42&0,24&0,16\\0,17&0,23&0,48&0,12\\0,1&0,16&0,22&0,52\end{pmatrix}^4+$$

$$+(0,6,\ -0,14,\ -0,38,\ -0,8)\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,45&0,25&0,18&0,12\\0,18&0,42&0,24&0,16\\0,17&0,23&0,48&0,12\\0,1&0,16&0,22&0,52\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}0,45&0,25&0,18&0,12\\0,18&0,42&0,24&0,16\\0,17&0,23&0,48&0,12\\0,1&0,16&0,22&0,52\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}0,45&0,25&0,18&0,12\\0,18&0,42&0,24&0,16\\0,17&0,23&0,48&0,12\\0,1&0,16&0,22&0,52\end{pmatrix}^3+\begin{pmatrix}0,45&0,25&0,18&0,12\\0,18&0,42&0,24&0,16\\0,17&0,23&0,48&0,12\\0,1&0,16&0,22&0,52\end{pmatrix}^4\right)$$

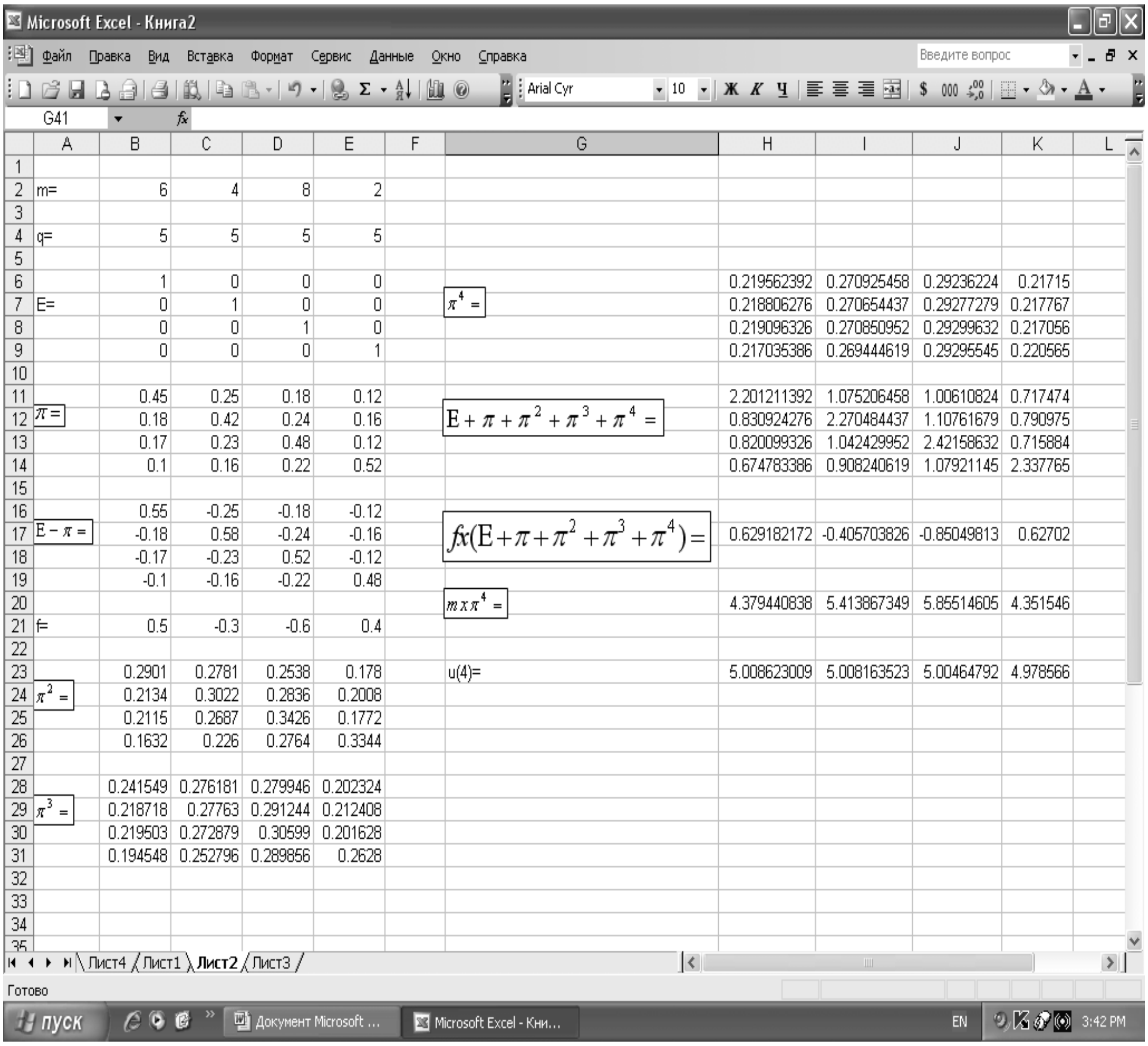
Усі розрахунки для обчислення вище приведеного математичного виразу здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

СУММ- знаходить суму аргументів

Вихідні данні для обчислення математичного виразу містяться в блоках: вектор m — (B2:E2), матриця π — (B11:E14), вектор q — (B4:E4), одинична матриця E — (B6:E9)

Подальші обчислення за формулою наведені в нище приведеній таблиці Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	m=	6	4	8	2						
3											
4	q=	5	5	5	5						
5											
6		1	0	0	0			0.219562392	0.270925458	0.29236224	0.21715
7	E=	0	1	0	0		$\pi^4 =$	0.218806276	0.270654437	0.29277279	0.217767
8		0	0	1	0			0.219096326	0.270850952	0.29299632	0.217056
9		0	0	0	1			0.217035386	0.269444619	0.29295545	0.220565
10											
11		0.45	0.25	0.18	0.12			2.201211392	1.075206458	1.00610824	0.717474
12	$\pi =$	0.18	0.42	0.24	0.16		$E+\pi+\pi^2+\pi^3+\pi^4=$	0.830924276	2.270484437	1.10761679	0.790975
13		0.17	0.23	0.48	0.12			0.820099326	1.042429952	2.42158632	0.715884
14		0.1	0.16	0.22	0.52			0.674783386	0.908240619	1.07921145	2.337765
15											
16		0.55	-0.25	-0.18	-0.12						
17	$E-\pi=$	-0.18	0.58	-0.24	-0.16		$fx(E+\pi+\pi^2+\pi^3+\pi^4)=$	0.629182172	-0.405703826	-0.85049813	0.62702
18		-0.17	-0.23	0.52	-0.12						
19		-0.1	-0.16	-0.22	0.48						
20							$m x \pi^4 =$	4.379440838	5.413867349	5.85514605	4.351546
21	f=	0.5	-0.3	-0.6	0.4						
22											
23		0.2901	0.2781	0.2538	0.178		u(4)=	5.008623009	5.008163523	5.00464792	4.978566
24	$\pi^2 =$	0.2134	0.3022	0.2836	0.2008						
25		0.2115	0.2687	0.3426	0.1772						
26		0.1632	0.226	0.2764	0.3344						
27											
28		0.241549	0.276181	0.279946	0.202324						
29	$\pi^3 =$	0.218718	0.27763	0.291244	0.212408						
30		0.219503	0.272879	0.30599	0.201628						
31		0.194548	0.252796	0.289856	0.2628						

Результат обчислень $u(4)$ знаходиться в блоці (H23:K23) і тому можна записати:

$$u(4)=(u_1(4),u_2(4),u_3(4),u_4(4))=(5{,}008623,\ 5{,}008163,\ 5{,}004648,\ 4{,}978566\ ).$$

Отже, після чотирьох кроків умовного часу в місті w_1 буде 5,008623 умовних одиниць грошової маси, у місті w_2 — 5,008163 і в містах w_3 та w_4 — відповідно 5,004648 і 4,978566 умовних одиниць. При цьому $\sum n_i = 20$ буде такою самою, як і на початку:

$$\sum_{i=1}^{4} n_i = \sum_{i=1}^{4} u_i(4) = 20.$$

7.2.2. Потокова модель зі збереженням грошової маси та вибірковим втручанням уряду в її розподіл

У разі, коли уряд може втручатися у вибрані міста країни (регіону), як і для потокових моделей із поглинальними станами, виконується рівність

$$\overrightarrow{f'} = \overrightarrow{q'}\,(I - \pi), \tag{7.84}$$

причому вектор $\overrightarrow{f'}$ має ненульові компоненти лише для міст, в які уряд має право втручатися для стабілізації грошової ситуації.

Для зручності матрицю π поділяють на чотири блоки (підматриці), відокремлюючи в такий спосіб міста, у грошову ситуацію яких уряд може втручатися, від міст, куди він не втручається:

$$
\pi = \begin{array}{l} \text{Вибрані міста} \left\{ \right. \\ \\ \text{Решта міст} \left\{ \right. \end{array} \left(\begin{array}{c:c} T & U \\ \hdashline V & S \end{array} \right). \tag{7.85}
$$

Аналогічно поділяється і вектор $\vec{q}' = \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)', \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \right)$, де $\left(\vec{q}^{\,*} \right)'$ — вектор, який стосується вибраних міст; $\left(\vec{q}^{\,**} \right)'$ — вектор для решти міст.

Із рівності (7.84) з урахуванням структури матриці π та вектора $\vec{q}'$, дістанемо:

$$
\vec{f}' = \left(\left(\vec{f}^{\,*} \right)', \left(\vec{f}^{\,**} \right)' \right) = \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)', \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \right) (I - \pi) = \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)', \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \right) - \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)', \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \right) \begin{pmatrix} T & U \\ V & S \end{pmatrix} =
$$

$$
= \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)', \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \right) - \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot T + \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \cdot U; \quad \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot U + \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \cdot S \right) =
$$

$$
= \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot T - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \cdot U; \quad \left(\vec{q}^{\,**} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot U - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \cdot S \right) \Rightarrow \vec{f}' = \left(\left(\vec{f}^{\,*} \right)', \left(\vec{f}^{\,**} \right)' \right) =
$$

$$
= \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot T - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \cdot U; \quad \left(\vec{q}^{\,**} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot U - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' \cdot S \right). \tag{7.86}
$$

Із (7.86) маємо

$$
\vec{f}' = \left(\left(\vec{q}^{\,*} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' T - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' U; \quad \left(\vec{f}^{\,**} \right)' = \left(\vec{q}^{\,**} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' U - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' S \right). \tag{7.87}
$$

Оскільки всі компоненти вектора $\left(\vec{f}^{\,**} \right)'$ дорівнюють нулю (уряд не втручається в грошову ситуацію цих міст), дістаємо:

$$
0 = \left(\vec{q}^{\,**} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' U - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' S \to \left(\vec{q}^{\,*} \right)' U = \left(\vec{q}^{\,**} \right)' (I - S) \Rightarrow \left(\vec{q}^{\,**} \right)' = \left(\vec{q}^{\,*} \right)' U \; (I - S)^{-1}. \tag{7.88}
$$

Із врахуванням (7.88) маємо:

$$
\left(f^{*} \right)^{1} = \left(\vec{q}^{\,*} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \cdot T - \left(\vec{q}^{\,**} \right)' U = \left(\vec{q}^{\,*} \right)' - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' T - \left(\vec{q}^{\,*} \right)' U \left(I - S \right) =
$$

$$
= \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \left(I - T - U \left(I - S \right)^{-1} \right) = \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \left(I - \pi^{*} \right),
$$

де

$$
\pi^{*} = T + U \left(I - S \right)^{-1}.
$$

Отже, дістаємо:

$$
\left(\vec{f}^{\,*} \right)' = \left(\vec{q}^{\,*} \right)' \left(I - S \right)^{-1}. \tag{7.89}
$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння (7.89) на одиничний вектор $\vec{\xi}$:

$$\left(\vec{f}^*\right)'\vec{\xi} = \left(\vec{q}^*\right)'\left(I - \pi^*\right)\vec{\xi}.$$

Оскільки

$$\pi^*\,\vec{\xi} = \vec{\xi}, \quad I\cdot\vec{\xi} = \vec{\xi},$$

то

$$\left(I - \pi\right)\vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{\xi} = 0.$$

Отже, доведено

$$\left(\vec{f}^*\right)'\vec{\xi} = 0.$$

При цьому виконується умова

$$\left(\vec{q}^*\right)'\vec{\xi} = \overrightarrow{m'}\,\vec{\xi}, \tag{7.90}$$

оскільки гроші не тільки не залишають систему, а й до неї не надходять ззовні, то буде виконуватися така умова:

$$\left(\overrightarrow{q'}\ \ \pi - \overrightarrow{m'}\right)\pi^k \le \overrightarrow{q'}, \tag{7.91}$$

де $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Приклад 8. Грошову ситуацію регіону, якому належать три міста w_1, w_2, w_3, задано матрицею однокрокового переходу π, елементи якої представляють собою частку відповідних грошей, яка належить місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}27 & 0{,}11 \\ 0{,}22 & 0{,}75 & 0{,}03 \\ 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}61 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Уряд втручається тільки в грошову ситуацію міст w_1 і w_2. Потрібно за даним початковим вектором $\vec{m} = (5,\ 10,\ 5)$, компоненти якого є кількість грошової маси у відповідному місті,, визначити вектор $\vec{q}$ — фінансову ситуацію в кожному місті регіону .

Розв'язання. Поділимо матрицю на чотири підматриці T, U, V, S:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc:c} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc:c} 0{,}62 & 0{,}27 & 0{,}11 \\ 0{,}22 & 0{,}75 & 0{,}03 \\ \hdashline 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}61 \end{array}\right) \end{array}.$$

Тут $T = \begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}27 \\ 0{,}22 & 0{,}75 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0{,}11 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}21 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0{,}61 \end{pmatrix}$.

Обчислимо: $(I - S)^{-1} = (1 - 0{,}61)^{-1} = (0{,}39)^{-1} = (2{,}564)$;

$$U\cdot\left(I - S\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}\cdot\left(2{,}564\right) = \begin{pmatrix} 0{,}28204 \\ 0{,}07692 \end{pmatrix};$$

$$\pi^* = T + U\left(I - S\right)^{-1}\cdot V = \begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}27 \\ 0{,}22 & 0{,}75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}28204 \\ 0{,}07692 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}671 & 0{,}329 \\ 0{,}234 & 0{,}766 \end{pmatrix}.$$

Згідно з умовою (7.90) маємо

$$q_1 + q_2 + q_3 = 20. \qquad (*)$$

Тоді на підставі (7.88) запишемо:

$$\left(\vec{q}^{**}\right)' = \left(\vec{q}^{*}\right)' U\left(I - S\right)^{-1} \Rightarrow q_3 = \left(q_1 \;\; q_2\right)\begin{pmatrix} 0{,}2804 \\ 0{,}07692 \end{pmatrix} = 0{,}280\,4 q_1 + 0{,}07692\, q_2 . \qquad (**)$$

Підставивши q_3 у (*), дістанемо залежність між q_1, q_2 (рис. 7.2):

$$1{,}2804\, q_1 + 1{,}07692\, q_2 = 20.$$

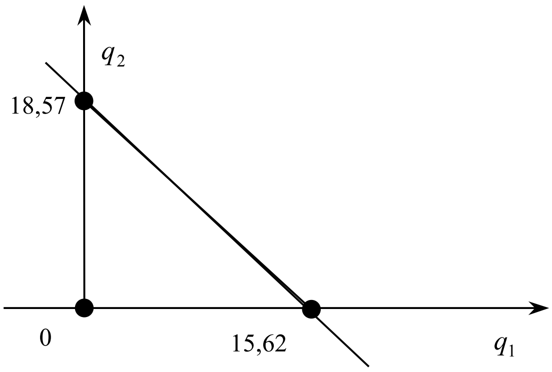


Рис. 7.2

Із графіка залежності між q_2 і q_1 маємо межі, в яких змінюються компоненти q_1, q_2 вектора $\left(\vec{q}^{*}\right)'$:

$$0 \le q_2 \le 18{,}57; \quad 0 \le q_1 \le 15{,}62.$$

Якщо, наприклад, $q_1 = 10$, то в цьому разі $q_2 = 6{,}682$, $q_3 = 3{,}318$.

Для визначення компонентів вектора $\left(\vec{f}^{*}\right)' = \left(f_1^* \quad f_2^*\right)$ скористаємося умовою (7.89):

$$\left(f_1^* \quad f_2^*\right) = \left(q_1^* \quad q_2^*\right) U\left(I - \pi^*\right) \Rightarrow \left(f_1^* \quad f_2^*\right) = \left(10, \quad 6,682\right)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}671 & 0{,}329 \\ 0{,}234 & 0{,}766 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(10, \quad 6{,}682\right)\begin{pmatrix} 0{,}329 & -0{,}329 \\ -0{,}234 & 0{,}234 \end{pmatrix} = \left(1{,}796, \quad -1{,}726\right)$$

Далі перевіримо виконання умови (7.91) для $k = 0$, $k = 1$.

1)

$$\left(10, \quad 6{,}682, \quad 3{,}318\right)\left(\begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}27 & 0{,}01 \\ 0{,}22 & 0{,}75 & 0{,}03 \\ 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}61 \end{pmatrix} - \left(5, \;10, \;5\right)\right) = = \left(3{,}242, \quad -1{,}621, \quad -1{,}76\right).$$

2)

$$\left(10 \quad 6{,}682 \quad 3{,}318\right)\left(\begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}27 & 0{,}01 \\ 0{,}22 & 0{,}75 & 0{,}03 \\ 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}61 \end{pmatrix} - \left(5, \;10, \;5\right)\right) \times \begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}27 & 0{,}01 \\ 0{,}22 & 0{,}75 & 0{,}03 \\ 0{,}18 & 0{,}21 & 0{,}61 \end{pmatrix} = \left(1{,}337, \; -0{,}71, \; -0{,}765\right).$$

Як бачимо, умова (7.91) для $k = 0$, $k = 1$ виконується. Отже, поставленої мети досягнуто.

7.2.3. Стохастична модель мобільності зміни професій зі зміною поколінь

У загальному випадку множину всіх професій Ω поділимо на підмножини $A_i \subset \Omega$ $\left(i = \overline{1,\ N}\right)$ і назвемо ***професійними класами***:

$$\Omega = \left(A_1 \ \ A_2 \ \ A_3 \ldots \ A_i \ \ A_N\right).$$

Ці професійні класи впорядкуємо за певним соціальним критерієм, таким як престиж професій, заробітна плата тощо. Постає запитання: як спрогнозувати вплив професій старшого покоління (батьків) на вибір професії молодшого (дітей)? Відповідь на це запитання в певному наближенні можна дістати, скориставшись регулярними ланцюгами Маркова. На підставі статистичних даних щодо певного регіону, а то й усієї країни будується матриця однокрокового переходу π:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & \ldots & A_i & \ldots & A_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1i} & \ldots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2i} & \ldots & P_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_{i1} & P_{i2} & \ldots & P_{ii} & \ldots & P_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \ldots & P_{Ni} & \ldots & P_{NN} \end{pmatrix} \end{array}. \quad \sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1, \ \left(i = \overline{1,\ N}\right). \tag{7.92}$$

Тут P_{ij} — імовірність того, що в загальному випадку особа молодшого покоління вибере не професію A_i своїх батьків, а більш престижну, на його думку, професію A_j; P_{ii} — імовірність того, що особа молодшого покоління не змінює професійну орієнтацію своїх батьків.

Приклад 9. У певному регіоні країни було здійснено статистичну обробку даних щодо професійної орієнтації молодого покоління за такими напрямками:

A_1 — професія фермера;

A_2 — професія службовця;

A_3 — професія кваліфікованого робітника в промисловості;

A_4 — професія інженера;

A_5 — професія у сфері обслуговування.

Вибір особи молодшого віку своєї майбутньої професійної діяльності можна задати матрицею однокрокового переходу:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}61 & 0{,}21 & 0{,}1 & 0{,}07 \\ 0{,}01 & 0{,}11 & 0{,}69 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}71 & 0{,}08 \\ 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}008 & 0{,}11 & 0{,}88 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначити стаціонарні ймовірності зміни професійної орієнтації молодого покоління.

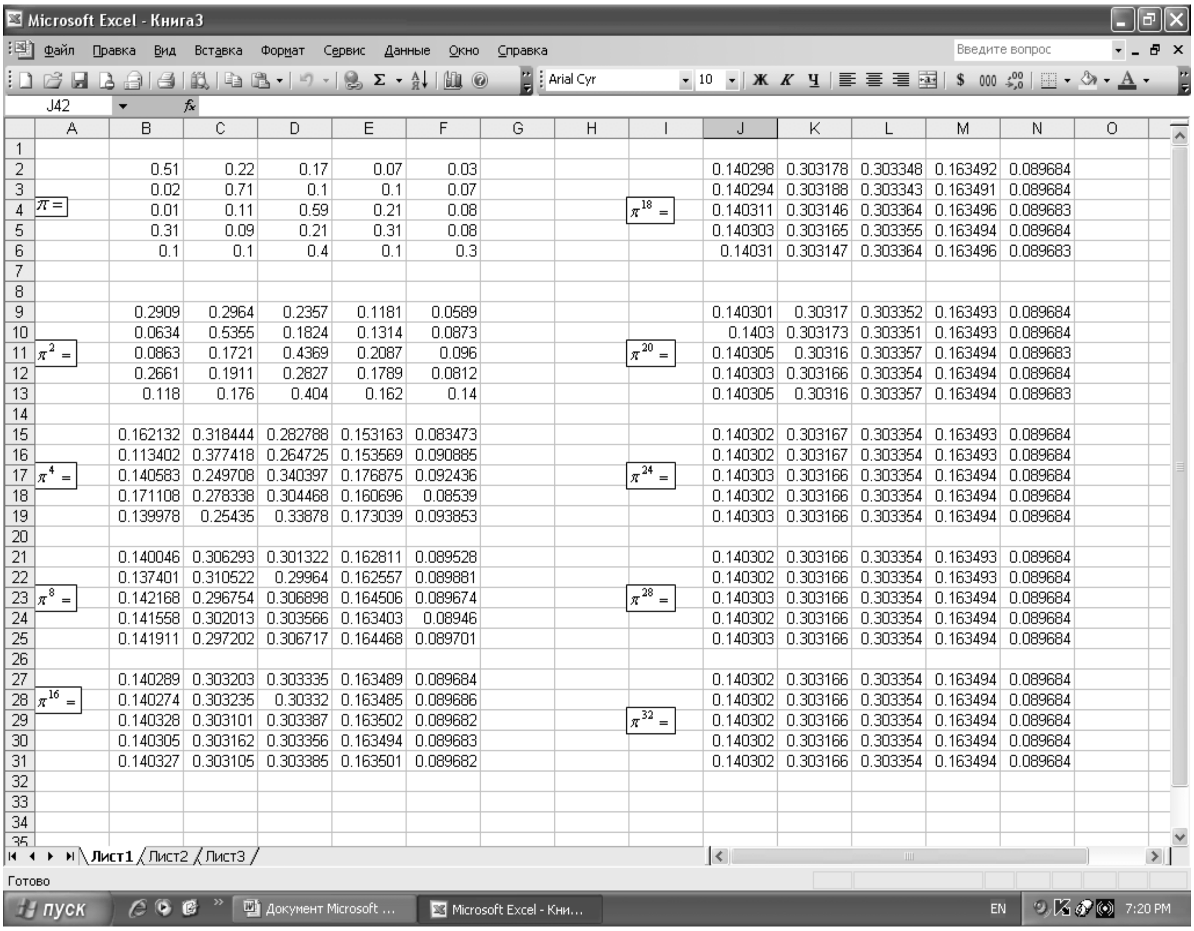
Розв'язання. Потрібно визначити матрицю стаціонарних імовірностей W, використовуючи при цьому формулу (7.58):

$$W = \lim_{t \to \infty} \pi^t = \lim_{t \to \infty} \begin{pmatrix} 0{,}51 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}02 & 0{,}61 & 0{,}21 & 0{,}1 & 0{,}07 \\ 0{,}01 & 0{,}11 & 0{,}69 & 0{,}11 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}09 & 0{,}11 & 0{,}71 & 0{,}08 \\ 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}008 & 0{,}11 & 0{,}88 \end{pmatrix}^{t.}.$$

Необхідні розрахунки здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

Вихідні данні для обчислень — матриця π, містяться в блоці (B2:F6).
Подальші обчислення наведені в нище приведеній таблиці Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E	F	I	J	K	L	M	N
1												
2		0.51	0.22	0.17	0.07	0.03		0.140298	0.303178	0.303348	0.163492	0.089684
3		0.02	0.71	0.1	0.1	0.07		0.140294	0.303188	0.303343	0.163491	0.089684
4	$\pi =$	0.01	0.11	0.59	0.21	0.08	$\pi^{18} =$	0.140311	0.303146	0.303364	0.163496	0.089683
5		0.31	0.09	0.21	0.31	0.08		0.140303	0.303165	0.303355	0.163494	0.089684
6		0.1	0.1	0.4	0.1	0.3		0.14031	0.303147	0.303364	0.163496	0.089683
7												
8												
9		0.2909	0.2964	0.2357	0.1181	0.0589		0.140301	0.30317	0.303352	0.163493	0.089684
10		0.0634	0.5355	0.1824	0.1314	0.0873		0.1403	0.303173	0.303351	0.163493	0.089684
11	$\pi^2 =$	0.0863	0.1721	0.4369	0.2087	0.096	$\pi^{20} =$	0.140305	0.30316	0.303357	0.163494	0.089683
12		0.2661	0.1911	0.2827	0.1789	0.0812		0.140303	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
13		0.118	0.176	0.404	0.162	0.14		0.140305	0.30316	0.303357	0.163494	0.089683
14												
15		0.162132	0.318444	0.282788	0.153163	0.083473		0.140302	0.303167	0.303354	0.163493	0.089684
16		0.113402	0.377418	0.264725	0.153569	0.090885		0.140302	0.303167	0.303354	0.163493	0.089684
17	$\pi^4 =$	0.140583	0.249708	0.340397	0.176875	0.092436	$\pi^{24} =$	0.140303	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
18		0.171108	0.278338	0.304468	0.160696	0.08539		0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
19		0.139978	0.25435	0.33878	0.173039	0.093853		0.140303	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
20												
21		0.140046	0.306293	0.301322	0.162811	0.089528		0.140302	0.303166	0.303354	0.163493	0.089684
22		0.137401	0.310522	0.29964	0.162557	0.089881		0.140302	0.303166	0.303354	0.163493	0.089684
23	$\pi^8 =$	0.142168	0.296754	0.306898	0.164506	0.089674	$\pi^{28} =$	0.140303	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
24		0.141558	0.302013	0.303566	0.163403	0.08946		0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
25		0.141911	0.297202	0.306717	0.164468	0.089701		0.140303	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
26												
27		0.140289	0.303203	0.303335	0.163489	0.089684		0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
28	$\pi^{16} =$	0.140274	0.303235	0.30332	0.163485	0.089686		0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
29		0.140328	0.303101	0.303387	0.163502	0.089682	$\pi^{32} =$	0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
30		0.140305	0.303162	0.303356	0.163494	0.089683		0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684
31		0.140327	0.303105	0.303385	0.163501	0.089682		0.140302	0.303166	0.303354	0.163494	0.089684

Так, при $t = 32$ дістаємо:

$$W = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}014 & 0{,}303 & 0{,}303 & 0{,}163 & 0{,}089 \\ 0{,}014 & 0{,}303 & 0{,}303 & 0{,}163 & 0{,}089 \\ 0{,}014 & 0{,}303 & 0{,}303 & 0{,}163 & 0{,}089 \\ 0{,}014 & 0{,}303 & 0{,}303 & 0{,}163 & 0{,}089 \\ 0{,}014 & 0{,}303 & 0{,}303 & 0{,}163 & 0{,}089 \end{pmatrix} \end{array}$$

Отже, через 32 змін поколінь прогнозний розподіл професій буде визначатися таким стаціонарним вектором:

$$\vec{W} = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}014 \\ 0{,}303 \\ 0{,}303 \\ 0{,}163 \\ 0{,}089 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, найменш престижною професією буде фермерська діяльність, а найпрестижнішою — професія службовця і професія кваліфікованого робітника в промисловості. Здобута інформація може сприйматися з певною ймовірністю, оскільки при побудові матриці π не враховувалось багато факторів, вплив яких може суттєво змінити значення компонентів вектора $\vec{W}$.

7.2.4. Стохастичні моделі прогнозування в соціальній сфері

Регулярні ланцюги Маркова можна також застосовувати для моделювання певних процесів, які відбуваються в людському суспільстві з метою прогнозування їх перебігу, здійснивши відповідну їх формалізацію за результатами обробки статистичних даних про ці процеси. Наприклад, скориставшись регулярними ланцюгами Маркова, можна в середньому спрогнозувати рейтинг тієї чи іншої партії в країні або її лідера, реакцію суспільства на певні реформи, які планує здійснити Кабінет Міністрів, ухвалення чи відхилення парламентом законопроекту, внесеного урядом, і т. ін.

Розглянемо це питання на прикладі ухвалення чи відхилення законопроекту, внесеного урядом до парламенту. Як відомо, у будь-якій демократичній країні парламент складається з фракцій, у кожну з яких входить певна кількість членів (депутатів парламенту).

Нехай Ω — певна множина, елементами якої $w_i \in \Omega$ є депутати парламенту. Позначимо через S_i $(S_i \subset \Omega)$ i-ту фракцію, якій належить k_i депутатів. Позначимо кількість фракцій через m. Серед депутатів парламенту майже завжди буде існувати певна кількість позафракційних, тобто таких, які не належатимуть до жодної фракції. Ці депутати утворюють певну підмножину, яку позначимо через S_{m+1}, а їхню кількість — k_{m+1}. Тоді маємо:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m+1} S_i . \qquad (7.93)$$

На момент часу $t = 0$ кожний із членів, наприклад фракції A_p, матиме певну думку щодо законопроекту, винесеного урядом, яку умовно можна оцінити для члена w_{ip} фракції числом $a_{ip}(0)$. Водночас між членами фракції здійснюється обмін інформацією щодо законопроекту і в такий спосіб створюється певна фракційна думка про нього. Якщо позначимо через p_{ij} ступінь впливу члена w_{ip} деякої фракції на члена w_{jp} цієї самої фракції, ураховуючи при цьому, що і на w_{ip}, і на w_{jp} впливатимуть інші члени, то на початку обговорення математичну модель, яка описує ситуацію перед обговоренням законопроекту, буде подано матрицею π однокрокового переходу:

$$
\pi =
\begin{array}{ll}
S_1 & \begin{matrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ \vdots \\ w_{1,k_1} \end{matrix} \\
S_2 & \begin{matrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ \vdots \\ w_{2,k_2} \end{matrix} \\
 & \vdots \\
S_i & \begin{matrix} w_{i,1} \\ w_{i,2} \\ \vdots \\ w_{i,k_j} \end{matrix} \\
 & \vdots \\
S_m & \begin{matrix} w_{m,1} \\ w_{m,2} \\ \vdots \\ w_{m,k_m} \end{matrix} \\
S_{m=1} & \begin{matrix} w_{m+1,k_m} \\ w_{m+1,2} \\ \vdots \\ w_{m+1,k+1} \end{matrix}
\end{array}
\left(
\begin{array}{cccccc}
\pi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \pi_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & \ddots & & & \dots & 0 \\
0 & & 0 & \pi_i & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
 & & & & \pi_m & 0 \\
 & & R & & & \mathbf{Q}
\end{array}
\right)
$$

Як бачимо, кожній фракції S_i однозначно відповідає підматриця π_i, елементи якої інформують про ступінь впливу кожного члена цієї фракції на решту її членів, причому сума елементів кожного рядка підматриці π_i має дорівнювати одиниці. Позафракційній групі ставляться у відповідність матриці R і Q, елементи яких характеризуються нестійкістю, тобто через певну кількість кроків (обговорень законопроекту) вони потрапляють до якоїсь із фракцій S_i $\left(i = \overline{1,\, m}\right)$. Цю модель побудовано за припущення, що депутати парламенту обговорюють законопроект у дискретні моменти часу t.

У стаціонарному режимі матриця (7.94) набере такого вигляду:

$$
\lim_{t \to \infty} \pi^t = W =
\begin{array}{c}
S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_m \\ S_{m+1}
\end{array}
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
W_1 & 0 & & & & \\
\cline{1-2}
0 & W_k & & & & 0 \\
\cline{1-2}
0 & 0 & & & & \\
\cline{1-4}
\multicolumn{3}{|c|}{0} & W_i & & \\
\cline{1-4}
\multicolumn{5}{|c|}{} & \\
\cline{1-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0} & W_m & \\
\hline
\multicolumn{5}{|c|}{R^*} & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Тут W_i — матриці стаціонарних імовірностей для матриць π_i $\left(i=\overline{1,\, m}\right)$.

Нехай $\vec{a}(t)=\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_k(t) \end{pmatrix}$ — вектор, елементами якого є виражені в числах думки депутатів парламенту щодо законопроекту в момент часу t, де $K=\sum_{i=1}^{m+1} k_i$.

Тоді маємо

$$\vec{a}\,(t+1)=\pi\vec{a}\,(t). \tag{7.96}$$

Із (7.96) випливає, що

$$\vec{a}\,(t+2)=\pi\vec{a}\,(t+1)=\pi^2 a(t)=\pi^3 a(t-1)=\ldots=\pi^t\vec{a}(0).$$

Отже, спільну думку депутатів щодо внесеного урядом до парламенту законопроекту після обговорень (а це відповідає матриці π у стаціонарному режимі) буде подано вектором:

$$\vec{a}(t)=\pi^t\vec{a}(0). \tag{7.97}$$

Наведені міркування проілюструємо на прикладі.

Приклад 10. Парламент складається з трьох стабільних фракцій, кожну з яких утворено за певними ідеологічними мотивами, і групи депутатів, які перебувають поза фракцією. Урядом внесено до парламенту для обговорення та подальшого ухвалення закон про податок.

Матриця перехідних імовірностей, що описує ситуацію під час обговорення цього закону, подається так:

$$\pi=\begin{array}{cc} S_1\left\{\begin{array}{c} w_{11}\\ w_{12}\\ w_{13}\end{array}\right. & \\ S_2\left\{\begin{array}{c} w_{21}\\ w_{22}\\ w_{23}\end{array}\right. & \\ S_3\left\{\begin{array}{c} w_{31}\\ w_{32}\end{array}\right. & \\ S_4\left\{\begin{array}{c} w_{41}\\ w_{42}\end{array}\right. & \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc}
0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 & 0\\ \hline
0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1\\
0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0
\end{array}\right)$$

У момент часу $t=0$ початковий вектор думок депутатів фракцій і позафракційних має такий вигляд:

$$\vec{a}(0)=\begin{array}{c} S_1\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ S_2\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ S_3\left\{\begin{array}{c} \\ \end{array}\right. \\ S_4\left\{\begin{array}{c} \\ \end{array}\right. \end{array}\left(\begin{array}{c} a_{11}(0)\\ a_{12}(0)\\ a_{13}(0)\\ \hline a_{21}(0)\\ a_{22}(0)\\ a_{23}(0)\\ \hline a_{31}(0)\\ a_{32}(0)\\ \hline a_{41}(0)\\ a_{42}(0)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 20\\ 100\\ 100\\ \hline 60\\ 75\\ 20\\ \hline 50\\ 40\\ \hline 60\\ 20\end{array}\right).$$

Тут $a_{ij}(0)$ — числове значення, яким вимірюється думка j-го депутата, який належить до S_i-ї фракції про закон, внесений урядом, до парламенту. При цьому вводиться такий порядок ухвалення чи відхилення закону: якщо в момент часу t при фінальному обговоренні закону $a_{ij}(t) > 50$, то j-й депутат i-ї фракції в принципі згодний з основними положеннями закону, а якщо $a_{ij}(t) < 50$ — не згодний.

Якщо, наприклад, за законопроект проголосувало 80 % членів парламенту, то він ухвалюється парламентом коли кількість голосів «за» становитиме від 50 до 80 % то він вважатиметься ухваленим у першому читанні з подальшим його доопрацюванням; якщо «за» висловились лише 50 % парламентарів, то закон відхиляється.

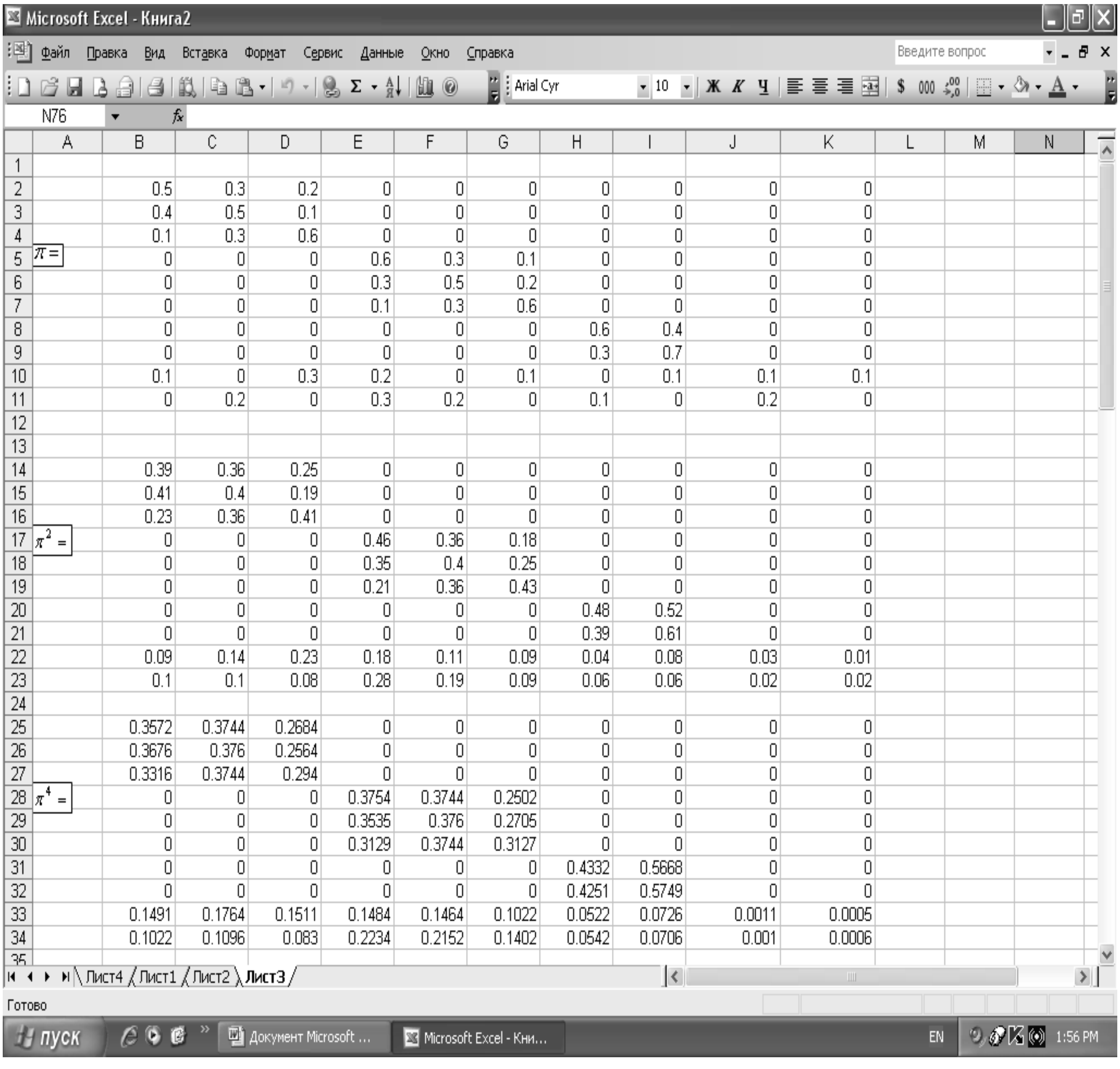
Визначимо матриці W_i стаціонарних імовірностей для матриць π_i, елементи яких несуть інформацію про ставлення депутатів парламенту до закону при багаторазовому його обговоренні.

Необхідні розрахунки здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

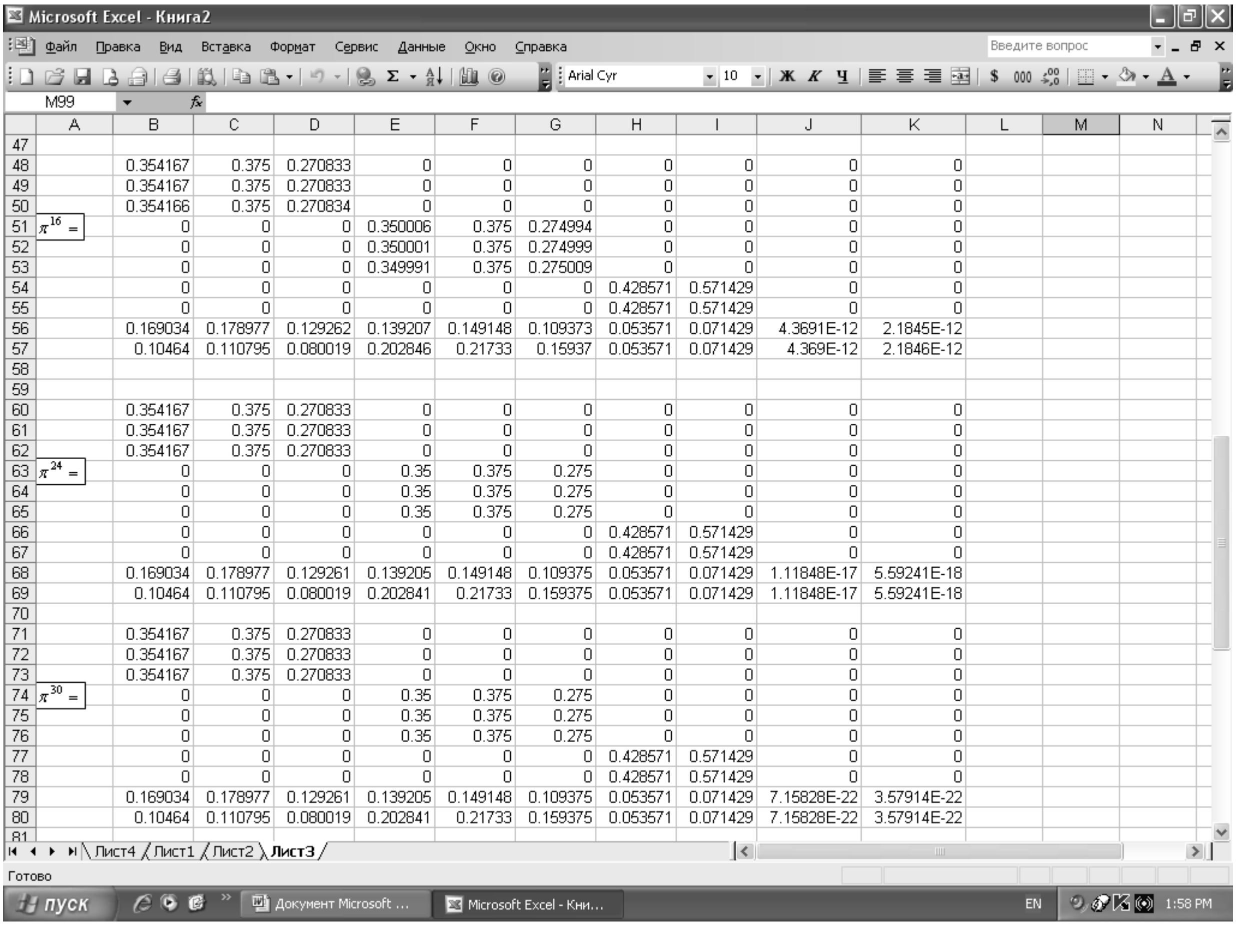
МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

Вихідні данні для обчислень — матриця π, містяться в блоці (B2:K11).

Подальші обчислення наведені в нижче приведених таблицях Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		0.5	0.3	0.2	0	0	0	0	0	0	0
3		0.4	0.5	0.1	0	0	0	0	0	0	0
4		0.1	0.3	0.6	0	0	0	0	0	0	0
5	$\pi =$	0	0	0	0.6	0.3	0.1	0	0	0	0
6		0	0	0	0.3	0.5	0.2	0	0	0	0
7		0	0	0	0.1	0.3	0.6	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0.6	0.4	0	0
9		0	0	0	0	0	0	0.3	0.7	0	0
10		0.1	0	0.3	0.2	0	0.1	0	0.1	0.1	0.1
11		0	0.2	0	0.3	0.2	0	0.1	0	0.2	0
12											
13											
14		0.39	0.36	0.25	0	0	0	0	0	0	0
15		0.41	0.4	0.19	0	0	0	0	0	0	0
16		0.23	0.36	0.41	0	0	0	0	0	0	0
17	$\pi^2 =$	0	0	0	0.46	0.36	0.18	0	0	0	0
18		0	0	0	0.35	0.4	0.25	0	0	0	0
19		0	0	0	0.21	0.36	0.43	0	0	0	0
20		0	0	0	0	0	0	0.48	0.52	0	0
21		0	0	0	0	0	0	0.39	0.61	0	0
22		0.09	0.14	0.23	0.18	0.11	0.09	0.04	0.08	0.03	0.01
23		0.1	0.1	0.08	0.28	0.19	0.09	0.06	0.06	0.02	0.02
24											
25		0.3572	0.3744	0.2684	0	0	0	0	0	0	0
26		0.3676	0.376	0.2564	0	0	0	0	0	0	0
27		0.3316	0.3744	0.294	0	0	0	0	0	0	0
28	$\pi^4 =$	0	0	0	0.3754	0.3744	0.2502	0	0	0	0
29		0	0	0	0.3535	0.376	0.2705	0	0	0	0
30		0	0	0	0.3129	0.3744	0.3127	0	0	0	0
31		0	0	0	0	0	0	0.4332	0.5668	0	0
32		0	0	0	0	0	0	0.4251	0.5749	0	0
33		0.1491	0.1764	0.1511	0.1484	0.1464	0.1022	0.0522	0.0726	0.0011	0.0005
34		0.1022	0.1096	0.083	0.2234	0.2152	0.1402	0.0542	0.0706	0.001	0.0006
35											



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
47														
48		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
49		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
50		0.354166	0.375	0.270834	0	0	0	0	0	0	0			
51	$\pi^{16}=$	0	0	0	0.350006	0.375	0.274994	0	0	0	0			
52		0	0	0	0.350001	0.375	0.274999	0	0	0	0			
53		0	0	0	0.349991	0.375	0.275009	0	0	0	0			
54		0	0	0	0	0	0	0.428571	0.571429	0	0			
55		0	0	0	0	0	0	0.428571	0.571429	0	0			
56		0.169034	0.178977	0.129262	0.139207	0.149148	0.109373	0.053571	0.071429	4.3691E-12	2.1845E-12			
57		0.10464	0.110795	0.080019	0.202846	0.21733	0.15937	0.053571	0.071429	4.369E-12	2.1846E-12			
58														
59														
60		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
61		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
62		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
63	$\pi^{24}=$	0	0	0	0.35	0.375	0.275	0	0	0	0			
64		0	0	0	0.35	0.375	0.275	0	0	0	0			
65		0	0	0	0.35	0.375	0.275	0	0	0	0			
66		0	0	0	0	0	0	0.428571	0.571429	0	0			
67		0	0	0	0	0	0	0.428571	0.571429	0	0			
68		0.169034	0.178977	0.129261	0.139205	0.149148	0.109375	0.053571	0.071429	1.11848E-17	5.59241E-18			
69		0.10464	0.110795	0.080019	0.202841	0.21733	0.159375	0.053571	0.071429	1.11848E-17	5.59241E-18			
70														
71		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
72		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
73		0.354167	0.375	0.270833	0	0	0	0	0	0	0			
74	$\pi^{30}=$	0	0	0	0.35	0.375	0.275	0	0	0	0			
75		0	0	0	0.35	0.375	0.275	0	0	0	0			
76		0	0	0	0.35	0.375	0.275	0	0	0	0			
77		0	0	0	0	0	0	0.428571	0.571429	0	0			
78		0	0	0	0	0	0	0.428571	0.571429	0	0			
79		0.169034	0.178977	0.129261	0.139205	0.149148	0.109375	0.053571	0.071429	7.15828E-22	3.57914E-22			
80		0.10464	0.110795	0.080019	0.202841	0.21733	0.159375	0.053571	0.071429	7.15828E-22	3.57914E-22			
81														

Отже маємо, що при $t=30$ матриця π набуває такого вигляду:

$$\lim_{t\to\infty} \pi^t = \pi^{30} =$$

$$= \begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \\ S_1 \\ \\ \end{array}\right\{ \\ \left.\begin{array}{c} \\ S_2 \\ \\ \end{array}\right\{ \\ \left.\begin{array}{c} \\ S_3 \end{array}\right\{ \\ \left.\begin{array}{c} \\ S_4 \end{array}\right\{ \end{array} \left(\begin{array}{ccc:ccc:cc:cc} 0,354 & 0,375 & 0,271 & & & & & & & \\ 0,354 & 0,375 & 0,271 & & 0 & & & 0 & & 0 \\ 0,354 & 0,375 & 0,271 & & & & & & & \\ \hdashline & & & 0,35 & 0,375 & 0,275 & & & & \\ & 0 & & 0,35 & 0,375 & 0,275 & & 0 & & 0 \\ & & & 0,35 & 0375 & 0,275 & & & & \\ \hdashline & & & & & & 0,429 & 0,571 & & \\ & 0 & & & 0 & & 0,429 & 0,571 & & 0 \\ \hdashline 0,169 & 0,179 & 0,129 & 0,139 & 0,149 & 0,109 & 0,054 & 0,071 & 0 & 0 \\ 0,105 & 0,111 & 0,08 & 0,203 & 0,217 & 0,159 & 0,054 & 0,071 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Використовуючи формулу (7.97), дістаємо:

$$\vec{a}.(t)=\pi^t\cdot\vec{a}.(0)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc}
0{,}354 & 0{,}375 & 0{,}271 & & & & & & & \\
0{,}354 & 0{,}375 & 0{,}271 & & 0 & & & 0 & & 0 \\
0{,}354 & 0{,}375 & 0{,}271 & & & & & & & \\
\hline
 & & & 0{,}35 & 0{,}375 & 0{,}275 & & & & \\
 & 0 & & 0{,}35 & 0{,}375 & 0{,}275 & & 0 & & 0 \\
 & & & 0{,}35 & 0{,}375 & 0{,}275 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0{,}429 & 0{,}571 & & \\
 & 0 & & & 0 & & 0{,}429 & 0{,}571 & & 0 \\
\hline
0{,}169 & 0{,}179 & 0{,}129 & 0{,}139 & 0{,}149 & 0{,}109 & 0{,}054 & 0{,}071 & 0 & 0 \\
0{,}105 & 0{,}111 & 0{,}08 & 0{,}203 & 0{,}217 & 0{,}159 & 0{,}054 & 0{,}071 & 0 & 0
\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c}
20\\100\\100\\ \hline 60\\75\\20\\ \hline 50\\40\\ \hline 60\\20
\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}
71{,}68\\71{,}68\\71{,}68\\ \hline 54{,}625\\54{,}625\\54{,}625\\ \hline 44{,}29\\44{,}29\\ \hline 61{,}45\\61{,}45
\end{array}\right)$$

На підставі значень компонентів вектора $\vec{a}(t)$ доходимо такого висновку: оскільки кількість осіб, які проголосували «за», становить менш ніж 80 %, то законопроект, внесений урядом у парламент, ухвалюється в першому читанні й потребує доопрацювання.

7.2.5. Стохастичні моделі прогнозу ефективності роботи системи з обмеженою кількістю станів

Регулярні ланцюги Маркова можна застосувати для стохастичних моделей, які з певною ймовірністю можуть прогнозувати ефективність роботи системи, яка може перебувати в одному з несумісних станів w_i за умови, що їхня кількість дорівнює N. Розглянемо систему, яка може перебувати в одному з можливих несумісних станів w_i з певною ймовірністю. Позначимо множину всіх цих станів через $\Omega=(w_1,\, w_2,\, w_3,\, \ldots,\, w_N)$. Система може в момент часу t перебувати, наприклад, у стані w_i і в ньому й залишитися з імовірністю p_{ii} або перейти в будь-який можливий стан w_j з імовірністю p_{ij}. Усі можливі переходи системи в момент часу t в загальному випадку можна подати однокроковою матрицею ймовірностей:

$$\pi=\begin{array}{c} \\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ \vdots\\ w_i\\ \vdots\\ w_N\end{array}\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_i & \cdots & w_N\end{array}\\
\begin{pmatrix}
p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1N}\\
p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2N}\\
p_{31} & p_{23} & p_{32} & \cdots & p_{3j} & \cdots & p_{3N}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots\\
p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{iN}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots\\
p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \cdots & p_{Nj} & \cdots & p_{NN}
\end{pmatrix}\end{array} \qquad (7.98)$$

При цьому вважаємо, що елементи p_{ij} матриці π, не залежать від часу, а тому регулярний ланцюг Маркова буде однорідним і для нього існуватиме матриця стаціонарних імовірностей:

$$\lim_{t\to\infty}\pi^t=W\,.$$

Досі ми досліджували системи з метою визначення ймовірностей перебування її в тому чи іншому стані в певні моменти часу, де ймовірності інтерпретувались як грошові потоки, забруднення певного місця регіону або як числовий еквівалент рейтингу того чи іншого закону, лідера тощо. Тепер братимемо до уваги ще й додаткову інформацію, пов'язану з винагородою (оплатою) при перебуванні системи в тому чи іншому можливому стані. Із цією метою вводиться матриця винагород (або вартостей):

$$R=\begin{array}{c} \\ w_1\\ w_2\\ w_3\\ \vdots\\ w_i\\ \vdots\\ w_N\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_j & \dots & w_N\end{array}\\ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1N}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2j} & \dots & r_{2N}\\ r_{31} & r_{23} & r_{32} & \dots & r_{3j} & \dots & r_{3N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots\\ r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{iN}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots\\ r_{N1} & r_{N2} & r_{N3} & \dots & r_{Nj} & \dots & r_{NN}\end{pmatrix}\end{array}. \tag{7.99}$$

Тут r_{ij} — винагорода, яку отримали при переході системи зі стану w_i у стан w_j. Числові значення r_{ij} можуть бути додатними, і тоді перехід системи зі стану w_i у стан w_j буде прибутковим; від'ємними, і тоді перехід буде збитковим, або дорівнювати нулю. Між елементами p_{ij} матриці π та елементами r_{ij} матриці R існує взаємно однозначна відповідність.

Використовуючи елементи матриць π і R, можна спрогнозувати витрати чи прибутки, пов'язані з тим, у якому з можливих станів система перебуватиме через $t=n$ кроків.

Нехай досліджувана система починає функціонувати зі стану w_i, а $\nu_j(n)$ — очікувана сума винагороди, пов'язана з тим, що після $t=n$ кроків (переходів системи) вона опиниться в стані w_j, $j=\overline{1,N}$.

Тоді $\vec{\nu_i'}(n)=(\nu_1(n),\ \nu_2(n),\ \dots,\ \nu_N(n))$ — вектор, елементи якого $\nu_j(n)$ $j=\left(\overline{1,\ N}\right)$ інформують про ту винагороду, яку отримаємо в разі перебування системи після n кроків у кожному зі станів w_j. Тому $\vec{\nu_i'}(n)$ називають вектором винагороди для системи.

Тепер припустимо, що за перший крок, при якому система здійснила перехід із стану w_i у стан w_j, винагорода дорівнює r_{ij}. Якщо система досягла певного стану w_j, то очікувану винагороду після n кроків можна подати так:

$$r_{ij}+\nu_j(n-1), \tag{7.100}$$

де $\nu_j(n-1)$ — винагорода, одержана за попередні $(n-1)$ кроки. Але оскільки перехід із стану w_i у стан w_j система може здійснити лише з імовірністю p_{ij}, то й сумарна очікувана винагорода за n кроків починаючи зі стану w_i буде такою:

$$\nu_i(n)=\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\left(r_{ij}+\nu_j(n-1)\right), \tag{7.101}$$

або

$$\nu_i(n)=\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\,r_{ij}+\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\nu_j(n-1). \tag{7.102}$$

Позначимо

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\,r_{ij}=q_i,$$

тоді (7.102) набере такого вигляду

$$\nu_i(n)=q_i+\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\,\nu_j(n-1),\quad i=\overline{1,\ N}. \tag{7.103}$$

З урахуванням (7.103) для всіх станів $i=\overline{1,\ N}$ можемо записати у векторно-матричній формі:

$$\vec{\nu}(n)=\vec{q}+\pi\cdot\vec{\nu}(n-1), \tag{7.104}$$

де

$$\vec{\nu}(n)=\begin{pmatrix}\nu_1(n)\\ \nu_2(n)\\ \vdots\\ \nu_n(n)\end{pmatrix},\ \pi=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN}\end{pmatrix},\ \vec{\nu}(n-1)=\begin{pmatrix}\nu_1(n-1)\\ \nu_2(n-1)\\ \vdots\\ \nu_N(n-1)\end{pmatrix}.$$

Компоненти q_i вектора $\vec{q}$ дорівнюють діагональним елементам матриці

$$\pi R'=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN}\end{pmatrix},$$

а саме:

$$\vec{q}=\begin{pmatrix}q_1=\sum_{k=1}^{N}p_{1k}\,r_{k1}\\ q_2=\sum_{k=1}^{N}p_{2k}\,r_{k2}\\ \vdots\\ q_N=\sum_{k=1}^{N}p_{Nk}\,r_{kN}\end{pmatrix}. \tag{7.105}$$

Далі, використовуючи вираз (2.104), дістаємо:

$$\begin{aligned}&\vec{\nu}(n-1)=\vec{q}+\pi\cdot\vec{\nu}(n-2),\\ &\vec{\nu}(n-2)=\vec{q}+\pi\cdot\vec{\nu}(n-3),\\ &\vdots\\ &\vec{\nu}(1)=\vec{q}+\pi\cdot\vec{\nu}(0),\end{aligned} \tag{7.106}$$

де в останньому рівнянні $\vec{\nu}(0)$ — вектор очікуваної винагороди, якщо система не здійснила жодного кроку $(n=0)$. Згідно з (7.106) рівність (7.104) набере такого остаточного вигляду:

$$\vec{\nu}(n)=\left(I+\pi+\pi^2+\pi^3+\ldots+\pi^{n-1}\right)\cdot\vec{q}+\pi^n\cdot\vec{\nu}(0). \tag{7.107}$$

Щоб визначити очікувану винагороду, коли система досягне стаціонарного режиму роботи, необхідно визначити вектор стаціонарних імовірностей $\vec{W}$. Тоді очікувана винагорода для стаціонарного режиму роботи системи визначається як

$$L=\vec{W'}\vec{q}. \tag{7.108}$$

Наведені міркування проілюструємо на конкретному прикладі.

Приклад 11. Фермер придбав комбайн. Комбайн у процесі його роботи розглядається як система, що може з певною ймовірністю перебувати в одному з чотирьох несумісних станів:

w_1 — комбайн справно працює;

w_2 — у комбайні під час його роботи в полі виникли дрібні неполадки, які можна усунути в польових умовах;

w_3 — у комбайні виникли неполадки такого рівня, що їх можна усунути лише в майстерні;

w_4 — у комбайні виникли значні поломки, усунення яких потребує значного часу і коштів.

Матриця однокрокового переходу комбайна як системи з одного стану в будь-який можливий інший має такий вигляд:

$$
\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0{,}36 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Матриці π ставиться у відповідність матриця вартостей

$$
R = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 80 & 20 & -8 & -10 \\ 70 & 30 & -10 & -15 \\ 60 & 40 & -15 & -20 \\ 50 & 5 & -20 & -25 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

1. Оцінити роботу комбайна за 4 робочі дні.

2. Визначити ефективність роботи комбайна (у деяких умовних одиницях) у стаціонарному режимі, якщо початковий вектор очікуваної винагороди має такий вигляд:

$$\vec{\nu}'(0) = (0, \quad 0, \quad 0, \quad 0).$$

Розв'язання. 1. Скориставшись (7.107), дістанемо

$$\vec{\nu}(4) = \left(I + \pi + \pi^2 + \pi^3\right) \cdot \vec{q} + \pi^4 \cdot \vec{\nu}(0).$$

Усі розрахунки для обчислення вище приведеного математичного виразу здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

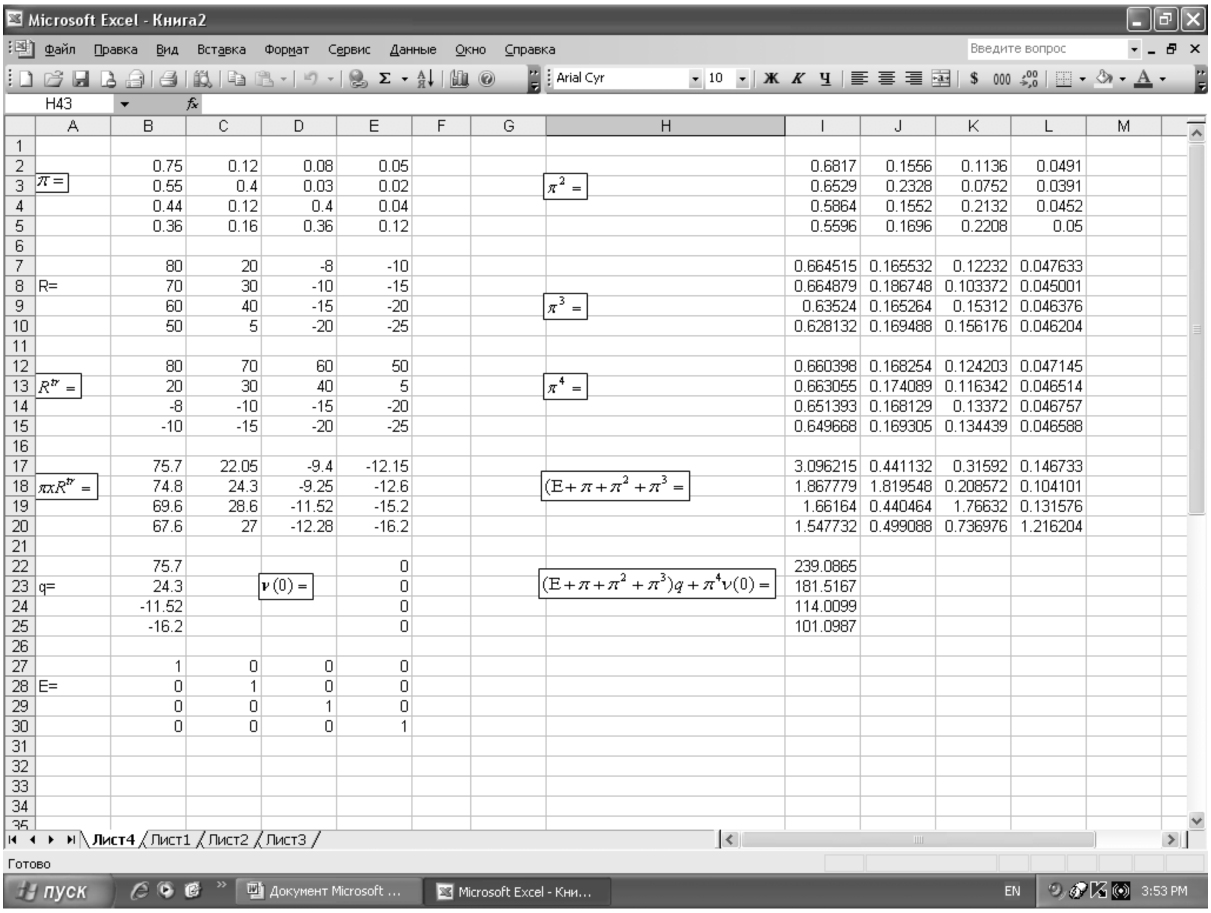
СУММ- знаходить суму аргументів

Посилання та масиви:

ТРАНСП-транспонує матрицю.

Вихідні данні для обчислення математичного виразу містяться в блоках: вектор $\nu(0)$ — (E22:E25), матриця π — (B2:E5), матриця R — (B7:E16), одинична матриця E — (B27:E30)

Подальші обчислення за формулою наведені в нижче приведеній таблиці Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		0.75	0.12	0.08	0.05				0.6817	0.1556	0.1136	0.0491	
3	$\pi =$	0.55	0.4	0.03	0.02			$\pi^2 =$	0.6529	0.2328	0.0752	0.0391	
4		0.44	0.12	0.4	0.04				0.5864	0.1552	0.2132	0.0452	
5		0.36	0.16	0.36	0.12				0.5596	0.1696	0.2208	0.05	
6													
7		80	20	-8	-10				0.664515	0.165532	0.12232	0.047633	
8	R=	70	30	-10	-15				0.664879	0.186748	0.103372	0.045001	
9		60	40	-15	-20			$\pi^3 =$	0.63524	0.165264	0.15312	0.046376	
10		50	5	-20	-25				0.628132	0.169488	0.156176	0.046204	
11													
12		80	70	60	50				0.660398	0.168254	0.124203	0.047145	
13	$R^{tr} =$	20	30	40	5			$\pi^4 =$	0.663055	0.174089	0.116342	0.046514	
14		-8	-10	-15	-20				0.651393	0.168129	0.13372	0.046757	
15		-10	-15	-20	-25				0.649668	0.169305	0.134439	0.046588	
16													
17		75.7	22.05	-9.4	-12.15				3.096215	0.441132	0.31592	0.146733	
18	$\pi x R^{tr} =$	74.8	24.3	-9.25	-12.6			$(E+\pi+\pi^2+\pi^3 =$	1.867779	1.819548	0.208572	0.104101	
19		69.6	28.6	-11.52	-15.2				1.66164	0.440464	1.76632	0.131576	
20		67.6	27	-12.28	-16.2				1.547732	0.499088	0.736976	1.216204	
21													
22		75.7			0				239.0865				
23	q=	24.3		$\nu(0) =$	0			$(E+\pi+\pi^2+\pi^3)q+\pi^4\nu(0) =$	181.5167				
24		-11.52			0				114.0099				
25		-16.2			0				101.0987				
26													
27		1	0	0	0								
28	E=	0	1	0	0								
29		0	0	1	0								
30		0	0	0	1								
31													
32													
33													
34													
35													

У результаті обчислень знаходимо компоненти вектора $\vec{q}$:

$$\pi R' = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0{,}36 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 & 70 & 60 & 50 \\ 20 & 30 & 40 & 5 \\ -8 & -10 & -15 & -20 \\ -10 & -15 & -20 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75{,}7 & 22{,}05 & -9{,}4 & -12{,}15 \\ 74{,}8 & 24{,}3 & -9{,}25 & -12{,}6 \\ 69{,}6 & 28{,}6 & -11{,}52 & -15{,}6 \\ 67{,}6 & 27 & -12{,}28 & -16{,}2 \end{pmatrix}.$$

Компоненти вектора $\vec{q}$ — це діагональні елементи матриці $\pi R'$:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 75{,}7 \\ 24{,}3 \\ -11{,}52 \\ -16{,}2 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна записати компоненти вектора $\vec{\nu}(4)$:

$$\vec{\nu}(4) = \begin{pmatrix} \nu_1(4) \\ \nu_2(4) \\ \nu_3(4) \\ \nu_4(4) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0{,}36 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0{,}36 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0{,}36 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix}^3 \right) \begin{pmatrix} 61{,}26 \\ 49{,}6 \\ 24{,}4 \\ 8{,}6 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}05 \\ 0{,}55 & 0{,}4 & 0{,}03 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}12 & 0{,}4 & 0{,}04 \\ 0{,}36 & 0{,}16 & 0{,}36 & 0{,}12 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 239{,}09 \\ 181{,}52 \\ 114{,}01 \\ 101{,}1 \end{pmatrix}$$

Отже, для станів w_1, w_2, w_3, w_4 маємо відповідно таку кількість одиниць прибутку: $\nu_1(4)$ = 239,09; $\nu_2(4)$ = 181,52; $\nu_3(4)$ = 114101; $\nu_1(4)$ = 101,1.

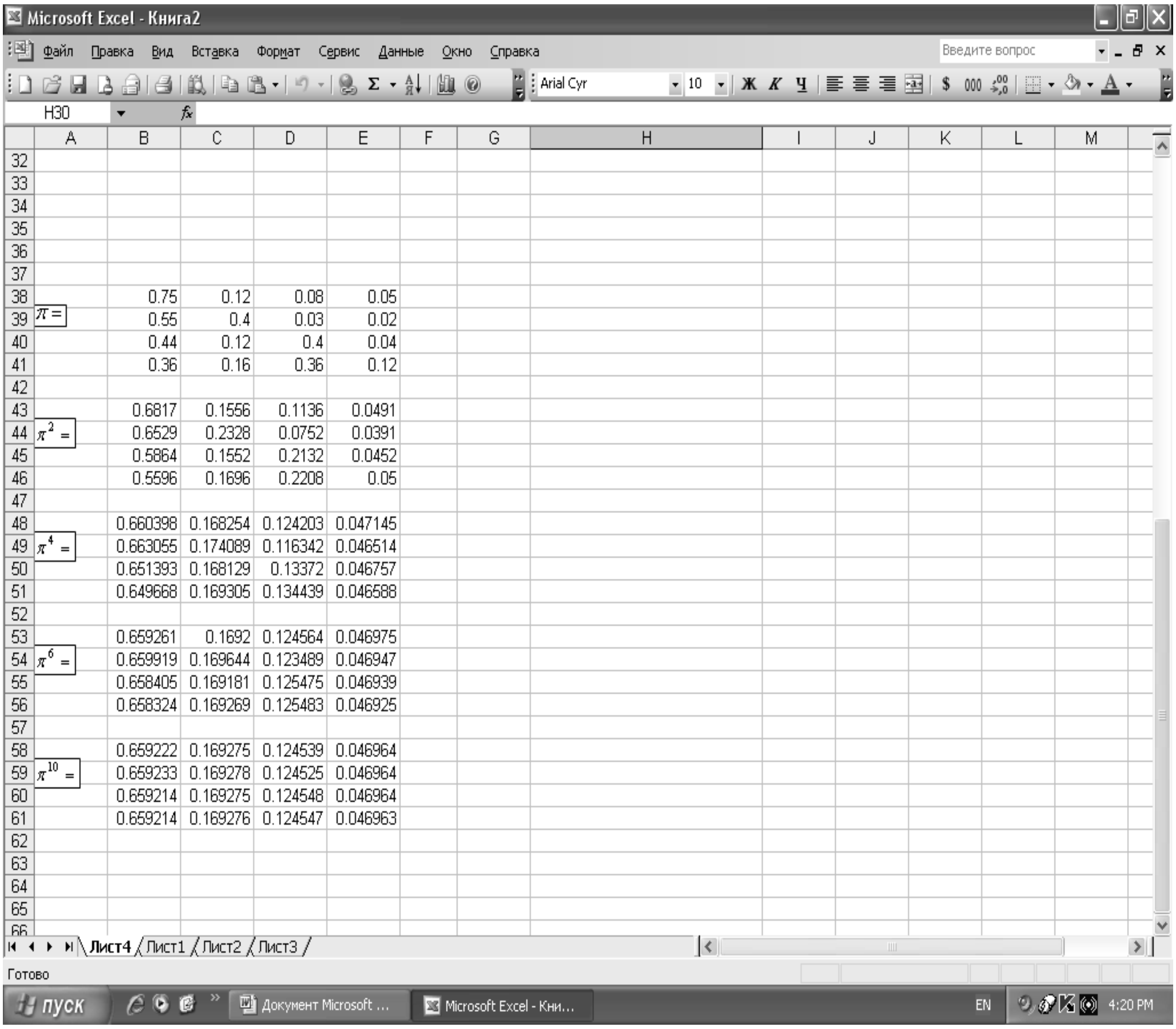
Визначимо стаціонарні ймовірності системи.

Необхідні розрахунки здійснимо, використовуючи стандартну програму EXCEL . Для цього використаємо функції категорії — **Математичні:**

МУМНОЖ- знаходить добуток двох матриць;

Вихідні данні для обчислень — матриця π, містяться в блоці (B38:E41).

Подальші обчислення наведені в нижче приведених таблицях Microsoft EXCEL



	A	B	C	D	E
38		0.75	0.12	0.08	0.05
39	$\pi =$	0.55	0.4	0.03	0.02
40		0.44	0.12	0.4	0.04
41		0.36	0.16	0.36	0.12
42					
43		0.6817	0.1556	0.1136	0.0491
44	$\pi^2 =$	0.6529	0.2328	0.0752	0.0391
45		0.5864	0.1552	0.2132	0.0452
46		0.5596	0.1696	0.2208	0.05
47					
48		0.660398	0.168254	0.124203	0.047145
49	$\pi^4 =$	0.663055	0.174089	0.116342	0.046514
50		0.651393	0.168129	0.13372	0.046757
51		0.649668	0.169305	0.134439	0.046588
52					
53		0.659261	0.1692	0.124564	0.046975
54	$\pi^6 =$	0.659919	0.169644	0.123489	0.046947
55		0.658405	0.169181	0.125475	0.046939
56		0.658324	0.169269	0.125483	0.046925
57					
58		0.659222	0.169275	0.124539	0.046964
59	$\pi^{10} =$	0.659233	0.169278	0.124525	0.046964
60		0.659214	0.169275	0.124548	0.046964
61		0.659214	0.169276	0.124547	0.046963

Отже в результаті обчислень с точністю до трьох знаків після коми стаціонарні ймовірності системи при $t = 10$ кроків подаються матрицею

$$W = \begin{pmatrix} 0{,}659 & 0{,}169 & 0{,}125 & 0{,}047 \\ 0{,}659 & 0{,}169 & 0{,}125 & 0{,}047 \\ 0{,}659 & 0{,}169 & 0{,}125 & 0{,}047 \\ 0{,}659 & 0{,}169 & 0{,}125 & 0{,}047 \end{pmatrix}.$$

2. Ефективність роботи системи в стаціонарному режимі

$$L = \vec{W}\,\vec{q} = \begin{pmatrix} 0{,}659 & 0{,}169 & 0{,}125 & 0{,}047 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 75{,}7 \\ 24{,}3 \\ -11{,}52 \\ -16{,}2 \end{pmatrix} = 51{,}7916 .$$

7.2.6. Стратегія оптимізації ефективності роботи систем

У попередніх викладках ми досліджували ефективність роботи системи, обчислюючи очікуваний за $t = n$ кроків вектор винагороди $\vec{\nu}(n)$ із використанням матриці ймовірних переходів системи π та відповідної їй матриці вартостей R. При цьому будь-якого втручання в роботу системи не відбувалося. Створена стохастична модель просто описувала роботу системи без застосування до неї будь-яких альтернатив.

Тепер припускаємо, що до модельованої системи вводяться певні альтернативні рішення щодо її поводження, які реалізуються зміною елементів матриці π і відповідних їм елементів матриці вартостей R.

Загальний підхід до розв'язування цієї проблеми полягає в тому, що розглядається, наприклад, K різних правил, які визначають відповідні альтернативні рішення (розв'язки) щодо змін елементів як матриці π, так і матриці R. Тоді k-му рішенню відповідають $p_{ij}^{(k)}$, $\pi^{(k)}$, $r_{ij}^{(k)}$, $R^{(k)}$.

З огляду на сказане компоненти $\nu_i(n)$ вектора нагороди $\vec{\nu}(n)$ розумітимемо як максимально можливу очікувану винагороду за $t = n$ кроків часу, одержану за умови, що система, здійснивши n переходів, опинилась у стані w_i і при цьому було прийнято k-те рішення (вибрано k-й розв'язок). Отже, $\nu_i(n)$ можемо записати в такому вигляді:

$$\nu_i(n) = \max_{(k)} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(k)} \left[r_{ij}^{(k)} + \nu_j(n-1) \right], \quad i = \overline{1,\ N}.\ \ \nu_i(n). \tag{7.109}$$

Тут символ k інформує про те, що здійснюється максимізація за множиною рішень (розв'язків) $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ K$.

У векторно-матричній формі (7.109) можна записати так:

$$\vec{\nu}(n) = \max_{(k)} \left\{ \vec{q}^{\,(k)} + \pi^{(k)} \vec{\nu}(n-1) \right\} . \tag{7.110}$$

Множина всіх оптимальних можливих рішень (розв'язків) за $t = n$ кроків часу роботи системи утворює вектор

$$\vec{d'}(n) = \left(d_1(n),\ \ d_2(n), \ldots\ d_i(n),\ \ldots\ d_N(n) \right), \tag{7.111}$$

де $d_i(n)$ — оптимальне рішення (розв'язок) у разі, коли система, перебуваючи при $t = 0$ у стані w_i, після $t = n$ кроків буде перебувати в цьому самому стані.

Нехай, наприклад, для $n = 1$ було вибрано рішення $d_1(1)$. Тоді, скориставшись матрицями $\pi^{(1)}$ і $R^{(1)}$, визначимо $q_1^{(1)}$, узявши до уваги, що $\vec{\nu}(0) = 0$. Далі для рішення $d_2(1)$ обчислимо $\vec{q}^{\,(2)}$, скориставшись матрицями $\pi^{(2)}$ і $R^{(2)}$. У результаті формула (2.110) набере такого вигляду:

$$\vec{\nu'}(n) = \max \left(\vec{q}^{\,(1)},\ \vec{q}^{\,(2)} \right).$$

Якщо $\vec{q}^{\,(1)} > \vec{q}^{\,(2)}$, то $\vec{\nu'}_{\max} = \vec{q}^{\,(1)}$.

При $n = 2$ маємо:

$$\vec{\nu'}(2) = \max \left\{ \left[\vec{q}^{\,(1)} + \pi^{(1)} \nu_{\max}(1) \right], \left[\vec{q}^{\,(2)} + \pi^{(2)} \vec{\nu}_{\max}(1) \right] \right\} = \max \left\{ \vec{a}^{\,(1)},\ \vec{a}^{\,(2)} \right\} ,$$

де $\vec{a}^{\,(1)} = \vec{q}^{\,(1)} + \pi^{(1)} \vec{\nu}_{\max}(1)$, $\vec{a}^{\,(2)} = \vec{q}^{\,(2)} + \pi^{(21)} \vec{\nu}_{\max}(1)$.

Якщо, наприклад, $\vec{a}^{(1)} > \vec{a}^{(2)}$, то

$$\vec{\nu}_{\max}(2) = \overrightarrow{a_1^{(1)}} = \vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\vec{\nu}_{\max}(1).$$

Для $n = 3$ маємо:

$$\vec{\nu}'(3) = \max\left\{\left[\vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\nu_{\max}(2)\right], \left[\vec{q}^{(2)} + \pi^{(2)}\vec{\nu}_{\max}(2)\right]\right\} = \max\left\{\vec{a}^{(1)},\ \vec{a}^{(2)}\right\},$$

де $\vec{a}^{(1)} = \vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\nu_{\max}(2)$, $\vec{a}^{(2)} = \vec{q}^{(2)} + \pi^{(1)}\vec{\nu}_{\max}(2)$.

Тепер за умови, наприклад, $\vec{a}^{(2)} > \vec{a}^{(1)}$ дістаємо:

$$\vec{\nu}_{\max}(3) = \overrightarrow{a_1^{(2)}} = \vec{q}^{(2)} + \pi^{(2)}\vec{\nu}_{\max}(2).$$

І так цей процес триває до $t = n$ кроків.

За розробленим алгоритмом оптимальний розв'язок знаходимо перебором усіх можливих рішень, що утворюють вектор $\vec{d}(n)$, за $t = n$ кроків роботи системи. З огляду на величезний обсяг обчислювальної роботи реалізувати такий пошук можна лише з використанням комп'ютерної техніки. Проілюструємо цей пошук на конкретному прикладі.

Приклад 12. Фермер придбав трактор, який може перебувати в одному з трьох несумісних станів:

w_1 — трактор цілком справний;

w_2 — потребує дрібного ремонту;

w_3 — потребує фундаментального ремонту.

Матриця однокрокового переходу трактора як системи з одного стану в інший має такий вигляд:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}45 & 0{,}2 & 0{,}35 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матриця вартостей:

$$R = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix} \end{array}$$

Виконавши зміну елементів матриці π і відповідних їй елементів матриці R, знайти оптимальне рішення (розв'язок) цієї системи (роботи трактора) через $t = n = 5$ кроків з економічного погляду.

Розв'язання. Оскільки

$$R' = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -5 & -7 & -10 \end{pmatrix},$$

то, скориставшись (7.105), визначимо вектор

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{1k}\, r_{k1} \\ q_2 = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{2k}\, r_{k2} \\ \vdots \\ q_N = \sum\limits_{k=1}^{N} p_{Nk}\, r_{kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 = 0{,}8\cdot 10 + 0{,}15\cdot 3 + 0{,}05\cdot(-5) = 8{,}2 \\ q_2 = 0{,}75\cdot 6 + 0{,}2\cdot 4 + 0{,}05\cdot(-7) = 4{,}95 \\ q_3 = 0{,}45\cdot 2 + 0{,}2\cdot 1 + 0{,}35\cdot(-10) = -2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}.$$

Отже, перше рішення (розв'язок), якому відповідає вектор $\overrightarrow{q^{(1)}} = \begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}$, — нічого не змінювати.

Друге рішення (розв'язок) полягає в тому, щоб у разі поломки трактора його негайно почали лагодити і довели до справного стану w_1. Матриці $\pi^{(1)}$ і $R^{(1)}$ для першого рішення (розв'язку) залишаються незмінними, а для другого рішення (розв'язку) вони набирають такого вигляду:

$$\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -7 \\ 0{,}5 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

Для цього рішення (розв'язку) обчислимо вектор $\vec{q}^{(2)}$, урахувавши, що

$$R^2 = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -5 \\ 6 & 4 & -7 \\ 0{,}5 & 1 & -10 \end{pmatrix}:$$

$$\vec{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} q_1 = 0{,}8 \cdot 10 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot (-5) = 8{,}2 \\ q_2 = 0{,}75 \cdot 3 + 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}05 \cdot (-7) = 4{,}95 \\ q_3 = 1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-10) = 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, при $n = 1$ маємо:

$$\vec{\nu}'(1) = \max\left\{\vec{q}^{(1)}, \ \vec{q}^{(2)}\right\} = \max\left\{\begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ -2{,}4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right\}.$$

Оскільки $\vec{q}^{(2)} > \vec{q}^{(1)}$, то

$$\vec{\nu}'(1) = \vec{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

При $n = 2$ маємо:

$$\vec{\nu}'(2) = \max\left\{\left[\vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\nu_{\max}(1)\right], \left[\vec{q}^{(2)} + \pi^{(2)}\vec{\nu}_{\max}(1)\right]\right\} = \max\left\{\left[\begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ -2{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}45 & 0{,}2 & 0{,}35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right],\right.$$

$$\left.\left[\begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8{,}2 \\ 4{,}95 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right]\right\} = \max\left\{\begin{pmatrix} 15{,}527 \\ 12{,}115 \\ 2{,}455 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 15{,}527 \\ 12{,}113 \\ 8{,}7 \end{pmatrix}\right\}.$$

Тут $\vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 15{,}527 \\ 12{,}115 \\ 2{,}455 \end{pmatrix}$, $\vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 15{,}527 \\ 12{,}113 \\ 8{,}7 \end{pmatrix}$.

Оскільки $\vec{a}^{(2)} > \vec{a}^{(1)}$, то

$$\vec{\nu}_{\max}(2) = \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 15{,}527 \\ 12{,}113 \\ 8{,}7 \end{pmatrix}.$$

При $n = 3$ дістаємо:

$$\vec{\nu}'(3) = \max\left\{\left[\vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\nu_{\max}(2)\right], \left[\vec{q}^{(2)} + \pi^{(2)}\vec{\nu}_{\max}(2)\right]\right\} = \max\left\{\left[\begin{pmatrix} 8,2 \\ 4,95 \\ -2,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 0,45 & 0,2 & 0,35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15,527 \\ 12,113 \\ 8,7 \end{pmatrix}\right],\right.$$

$$\left.\left[\begin{pmatrix} 8,2 \\ 4,95 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15,527 \\ 12,113 \\ 8,7 \end{pmatrix}\right]\right\} = \max\left\{\begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,453 \\ 10,055 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,455 \\ 16,027 \end{pmatrix}\right\}.$$

де

$$\vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,453 \\ 10,055 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,455 \\ 16,027 \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи, що $\vec{a}^{(2)} > \vec{a}^{(1)}$, маємо

$$\vec{\nu}_{\max}(3) = \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,455 \\ 16,027 \end{pmatrix}.$$

При $n = 4$

$$\vec{\nu}'(4) = \max\left\{\left[\vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\nu_{\max}(3)\right], \left[\vec{q}^{(2)} + \pi^{(2)}\vec{\nu}_{\max}(3)\right]\right\} = \max\left\{\left[\begin{pmatrix} 8,2 \\ 4,95 \\ -2,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 0,45 & 0,2 & 0,35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,455 \\ 16,027 \end{pmatrix}\right],\right.$$

$$\left.\left[\begin{pmatrix} 8,2 \\ 4,95 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 0,45 & 0,2 & 0,35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22,874 \\ 19,455 \\ 16,027 \end{pmatrix}\right]\right\} = \max\left\{\begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 17,394 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 23,374 \end{pmatrix}\right\}.$$

У цьому разі

$$\vec{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 17,394 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 23,374 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}^{(2)} > \vec{a}^{(1)}.$$

Отже

$$\vec{\nu}_{\max}(4) = \vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 23,374 \end{pmatrix}.$$

І при $n = 5$

$$\vec{\nu}'(5) = \max\left\{\left[\vec{q}^{(1)} + \pi^{(1)}\nu_{\max}(4)\right], \left[\vec{q}^{(2)} + \pi^{(2)}\vec{\nu}_{\max}(4)\right]\right\} = \max\left\{\left[\begin{pmatrix} 8,2 \\ 4,95 \\ -2,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 0,45 & 0,2 & 0,35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 23,374 \end{pmatrix}\right],\right.$$

$$\left.\left[\begin{pmatrix} 8,2 \\ 4,95 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,15 & 0,05 \\ 0,75 & 0,2 & 0,05 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30,219 \\ 26,798 \\ 23,374 \end{pmatrix}\right]\right\} = \max\left\{\begin{pmatrix} 37,564 \\ 34,,143 \\ 24,739 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 37,564 \\ 34,143 \\ 30,719 \end{pmatrix}\right\}.$$

Таким чином, прийнявши зазначене рішення, через $t = 5$ кроків часу роботи системи (трактора) дістанемо вектор винагороди

$$\vec{\nu'}_{\max}(5)=\begin{pmatrix}37{,}564\\34{,}143\\30{,}719\end{pmatrix},$$

компоненти якого дають таку інформацію: якщо через $n=5$ кроків часу роботи трактора він перебуватиме у стані w_1 (справному), то винагорода становитиме 37,564, для станів w_2 та w_3 — відповідно 34,143 та 30,719 деяких умовних одиниць.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Модель фінансових потоків, її суть.
2. Використання поглинальних ланцюгів Маркова в потокових моделях.
3. Яку економічну інформацію містять компоненти векторів $\vec{m'}$ і $\vec{f'}$?
4. Загальний запис потокової моделі з використанням поглинальних однорідних ланцюгів Маркова.
5. Чому дорівнює добуток $\vec{m}Q^k$ при $k\to\infty$? Дайте економічну інтерпретацію.
6. Потокова модель із вибірковим втручанням уряду у фінансову (грошову) ситуацію регіону.
7. Яка структура управляючого вектора $\vec{f'}$ при вибірковому втручанні уряду у фінансову ситуацію регіону?
8. Використання поглинальних однорідних ланцюгів Маркова в екології.
9. Яку економічну інформацію містять компоненти вектора $N_1\vec{\xi}$?
10. Відкрита модель Леонтьєва.
11. Технологічні коефіцієнти q_{ij}. Яку економічну інформацію містять ці коефіцієнти?
12. Яку економічну інформацію дає нерівність $\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij}\le 1$?
13. Яку економічну інформацію дає нерівність $\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij}<1$?
14. Яку економічну інформацію дає рівність $\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij}=1$?
15. Чому дорівнює добуток $Q\vec{\xi}$ для неприбуткових галузей?
16. Чому дорівнює добуток $Q\vec{\xi}$ для прибуткових галузей?
17. Яку економічну інформацію містять компоненти вектора $\vec{\gamma'}$?
18. Яка економічна сутність рівняння $\vec{x'}=\vec{x'}\,Q+\vec{\gamma'}$?
19. Як визначаються прибуткові і неприбуткові галузі за заданою матрицею Q?
20. Як побудувати матрицю Q^* за заданою матрицею Q?
21. Як визначити матрицю N_1 і вектор $\vec{\tau}$? Дайте економічну інтерпретацію.
22. Потокова модель із використанням регулярних ланцюгів Маркова.
23. Чому дорівнює $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{m'}\;\pi^t$? Дайте економічну інтерпретацію.
24. Чому дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ для потокової моделі, де використовуються регулярні ланцюги Маркова? Дайте економічну інтерпретацію.
25. Потокова модель зі зберіганням грошової маси та вибірковим втручанням уряду в її розподіл.
26. Стохастична модель мобільності зміни професій.
27. Використання регулярних ланцюгів Маркова в соціальній сфері.
28. Стохастична модель прогнозу ефективності роботи системи з обмеженою кількістю станів.
29. Матриця вартостей. Дайте економічну інтерпретацію елементів цієї матриці.
30. Суть оптимізації ефективності роботи системи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Регіон складається з чотирьох міст, між якими циркулюють грошові потоки.

За заданими векторами $\overrightarrow{m'} = (25,\ 15,\ 5,\ 55)$, компоненти якого є кількість грошової маси у відповідному місті, та вектором $\overrightarrow{f'} = (-5,\ 0,\ 15,\ -10)$, який представляє собою управляючий вектор, за допомогою якого уряд здійснює перерозподіл грошової маси між містами, і матрицею однокрокового переходу π, елементи якої представляють собою частку відповідних грошей, яка належить місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}4 & 0 & 0{,}45 \\ 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}55 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

оцінити грошову ситуацію регіону за чотири умовні одиниці часу.

2. Технічний прилад може пербувати у трьох станах. Імовірності переходу із одного стану в інший задані матрицею однокрокового переходу

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

та відповідна матриця вартостей має наступний вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.1. Оцінити ефективність роботи технічного приладу за $n = 4$ кроки.

2.2. Оцінити ефективність роботи технічного приладу для стаціонарного режиму роботу системи. При цьому відомо, що початковий вектор винагород $\vec{v}(0) = (0 \quad 0 \quad 0)$.

3. За заданими вектором $\overrightarrow{m'}$, компоненти якого є кількість грошової маси у відповідному місті, та вектором $\overrightarrow{f'}$, який представляє собою управляючий вектор, за допомогою якого уряд здійснює перерозподіл грошової маси між містами, і матрицею однокрокового переходу π, елементи якої представляють собою частку відповідних грошей, яка належить місту w_i, що перейде до міста w_j протягом одного періоду часу, оцінити фінансову ситуацію в кожному місті регіону за n кроків для таких варіантів:

3.1. Задано $\overrightarrow{m'} = (20 \quad 40 \quad 15 \quad 35)$,

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначити $\vec{u}(5)$, якщо:

а) $\overrightarrow{f'} = (-10,\ \ 5,\ \ 10,\ \ -5)$;

б) $\overrightarrow{f'} = (-10,\ \ 5,\ \ 5,\ \ 0)$.

3.2. Задано $\overrightarrow{m'} = (60,\ \ 25,\ \ 10,\ \ 5)$,

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначити $\vec{u}(5)$, якщо:

а) $\overrightarrow{f'} = (-20, \quad 5, \quad 5, \quad 10);$,

б) $\overrightarrow{f'} = (-20, \quad 10, \quad 10, \quad 0)$.

3.3. Задано $\overrightarrow{m'} = (5, \quad 5, \quad 40, \quad 50)$,

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}28 & 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}34 \\ 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}14 & 0{,}56 & 0{,}19 & 0{,}11 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначити $\vec{u}(5)$, якщо:

а) $\overrightarrow{f'} = (10, \quad 10, \quad -5, \quad -15);$

б) $\overrightarrow{f'} = (10, \quad 10, \quad 0, \quad -20)$.

4. Нехай маємо галузі, які пов'язані між собою в тому розумінні, що кожна з них, щоб задовольнити свої виробничі потреби, змушена закуповувати певну кількість продукції, що її виготовляє інша галузь.. Нехай задані технологічні коефіцієнти q_{ij}, які утворюють технологічну матрицю і інформують про те, яку кількість у відносних одиницях продукції, виготовленої галуззю w_j, має придбати галузь w_i, щоб виготовити продукції на 1 євро.

Для наступних варіантів визначити прибуткові та неприбуткові галузі, побудувати матрицю Q^* - перехідних ймовірностей, визначити N_1, елементи якої представляють собою кількість продукції в середньому, яку має виготовити w_j галузь для задоволення потреб виробництва галузі w_i та вектор $\vec{\tau}$, елементи якої інформують про загальну кількість продукції в середньому, яку мають виготовити всі галузі для задоволення потреб виробництва відповідної галузі.

4.1. $$\pi = \begin{array}{c|cccccccccc} & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 \\ \hline w_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ w_3 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ w_4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_5 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ w_7 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0{,}1 \\ w_8 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ w_9 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{array}.$$

$$\mathbf{4.2.}\ \pi = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0 & 0{,}35 & 0 & 0 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}17 & 0 & 0{,}08 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$\mathbf{4.3.}\ \pi = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 \end{array} \\ \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}08 & 0{,}22 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0{,}1 & 0{,}08 & 0{,}19 & 0{,}13 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}09 & 0{,}06 & 0{,}2 & 0{,}13 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}13 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}17 & 0{,}34 & 0{,}23 & 0{,}21 & 0{,}03 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}37 & 0{,}4 & 0 & 0{,}13 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}07 & 0 & 0{,}21 & 0 & 0{,}02 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}26 & 0{,}31 & 0{,}13 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

5. Завідувач складом має намір виробити стратегію зберігання запасних частин до автомобіля. Щотижня до складу з певною ймовірністю надходять заявки на запчастини для автомобілів. Можливі такі ситуації:

w_0 — на складі перебувало 50 одиниць запчастин і від магазинів не надійшло жодної заявки на них;

w_1 — на складі було 50 одиниць запчастин і від магазинів надійшли заявки на 20 одиниць;

w_2 — від магазинів надійшли заявки на 40 одиниць запчастин.

Розглядаємо склад як систему, стан якої визначається кількістю вимог, які надходять від автомагазинів.

Матриця однокрокового переходу для цієї системи має такий вигляд:

$$\pi = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} w_0 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array},$$

де під кроком розуміємо один робочий тиждень.

Зберігання однієї запчастини на складі протягом тижня коштує власнику 1 ум. гр. од., а продаж однієї запчастини приносить власникові складу прибуток 5 ум. гр. од.. Із урахуванням цього маємо таку матрицю вартостей:

$$R = \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{pmatrix} -50 & 100 & 200 \\ -40 & 100 & 100 \\ -20 & 100 & 200 \end{pmatrix}.$$

5.1. Оцінити прибуток власника складу за $t = 5$ тижнів.

5.2. Визначити винагороду для цієї системи для стаціонарного режиму роботи.

6. Автомобіль, який придбав власник, може перебувати з певною ймовірністю в одному з трьох несумісних станів:

w_0 — справний;

w_1 — потребує дрібного ремонту, який швидко можна здійснити;

w_2 — потребує капітального ремонту, який потребує значного часу і витрат.

Матриця однокрокового переходу для цієї системи має такий вигляд:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_0 & w_1 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриці π однозначно відповідає матриця вартостей:

$$R = \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{pmatrix} 60 & 20 & 5 \\ 30 & 10 & -2 \\ 20 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

де значення r_{ij} задано в у. о.

6.1. Оцінити ефективність роботи цієї системи за $t = 5$ кроків.

6.2. Визначити винагороду для цієї системи для стаціонарного режиму роботи.

7**.** Компанія з прокату автомобілів видає їх своїм клієнтам напрокат у трьох аеропортах *A*, *B*, *C*. Клієнти повертають автомобілі в ці аеропорти згідно з таблицею.

Аеропорт видачі	**Аеропорт повернення**		
	A	***B***	***C***
A	0,8	0,2	0
B	02	0	0,8
C	0	0,2	0,8

Матриця вартостей в у. од. має такий вигляд:

$$R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

7.1. Визначити ефективність роботи компанії за $t = 5$ кроків.

7.2. Визначити $\vec{v}(n)$ — вектор винагород для стаціонарного режиму роботи автомобілів.

РОЗДІЛ 8

МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ З ДИСКРЕТНИМ СТАНОМ І НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ДОСЛІДЖЕННІ ОПЕРАЦІЙ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати і володіти інструментарієм теорії марковських випадкових процесів з дискретним станом і неперервним часом ;
- знати концептуальні положення моделювання розвитку економічних систем на основі застосування марковських випадкових процесів з дискретним станом і неперервним часом;
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

8.1. Марковські процеси з дискретним станом і неперервним часом та приклади їх використання у дослідженні економічних процесів

Марковські процеси з дискретними станами і дискретним часом мають порівняно вузьку сферу використання, оскільки на практиці доволі рідко моменти переходів досліджуваних систем з одного стану в інший відомі заздалегідь і фіксовані. Більш типовими є такі ситуації, коли перехід системи з одного стану в інший відбувається не у фіксовані моменти $t = t_0, t_1, t_2, \ldots$, а у випадкові моменти часу.

Випадковий процес із дискретними станами і неперервним часом називають ***марковським***, коли для будь-якого моменту часу *t* умовні ймовірності всіх станів системи в майбутньому $(t > t_0)$ залежатимуть лише від того, в якому стані система перебуває тепер (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли і в який спосіб вона потрапила в цей стан, тобто в яких станах перебувала в минулому $(t < t_0)$. Отже, для марковського процесу майбутній стан залежить від минулого тільки через теперішній.

До марковських процесів із дискретними станами та неперервним часом належить марковський процес народження та загибелі.

Процес називається ***марковським процесом народження та загибелі з неперервним часом і дискретними станами*** w_i $(i = 1, 2, \ldots)$, якщо в будь-який момент часу *t* перехід з одного стану в будь-який можливий інший відбувається з певною ймовірністю і лише в такий спосіб: якщо, наприклад, до моменту часу t_i процес перебуває в стані w_i, то в момент часу $t = t_{i+1}$ він може перейти або в стан w_{i+1}, або в стан w_{i-1}, або залишитися в попередньому стані, тобто w_i, що унаочнено на рис. 8.1.

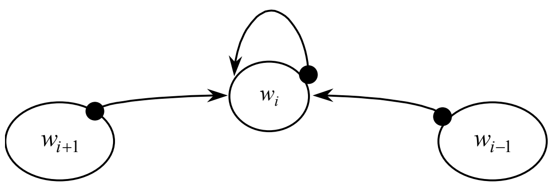


Рис. 8.1

Теорію марковських випадкових процесів із неперервним часом і дискретними станами викладають за припущення, що переходи з одного стану в інший у досліджуваних системах відбувається під впливом пуассонівських потоків подій (не обов'язково стаціонарних). Спинимося докладніше на вивченні таких потоків.

8.2. Пуассонівський потік подій і його використання в теорії Марковських процесів з дискретним станом і неперервним часом

Дамо загальне означення потоку подій.

Події, що відбуваються у випадкові моменти часу, утворюють ***потік*** (рис. 8.2).

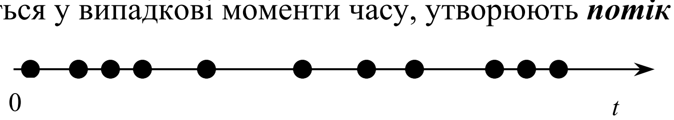


Рис. 8.2

Кожну точку, зображену на рис. 8.2, можна інтерпретувати як деяку подію реального походження: виклик на телефонну станцію чи службу швидкої допомоги, посадка літака на аеродром чи прибуття незапланованого судна в порт і т. ін.

Залежно від припущення щодо проміжків часу між сусідніми подіями потоку, які є випадковими величинами, усі потоки поділяють на такі типи: регулярні, пуассонівські, Ерланга, Пальма. З-поміж зазначених потоків найширшого використання набув пуассонівський потік, який ще називають найпростішим. Перейдемо до вивчення саме цього потоку.

Потік подій називають ***пуассонівським***, якщо йому притаманні такі властивості: ординарність, відсутність післядії; стаціонарність.

Розглянемо кожну з цих властивостей докладніше.

Ординарність. Потік подій називають ***ординарним***, якщо ці події можуть відбуватись у випадкові моменти часу по одній, а не групами. Мовою математики властивість ординарності можна пояснити так: імовірність появи однієї і лише однієї події на достатньо малому проміжку часу Δt є величиною, пропорційною до довжини цього проміжку:

$$P_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + \alpha(\Delta t), \tag{8.1}$$

де λ — коефіцієнт пропорційності, що дорівнює середній кількості подій, які можуть відбуватися за одиницю часу (секунду, хвилину, годину, і т. ін.); $\alpha(\Delta t)$ — нескінченно мала величина порядку вищого, ніж Δt, тобто

$$\lim_{\Delta t \leftarrow 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \tag{8.2}$$

Отже, із властивості ординарності випливає, що на достатньо малому проміжку часу Δt може відбутися одна подія або жодної. Оскільки ці події протилежні, то

$$P_1(\Delta t) + P_0(\Delta t) = 1. \tag{8.3}$$

Імовірність появи на цьому проміжку $k > 1$ подій

$$P_{k>1}(\Delta t) = \alpha \cdot (\Delta t). \tag{8.4}$$

Із рівності (8.1), ураховуючи (8.3), дістаємо:

$$P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) = 1 - \lambda\ \Delta t + \alpha(\Delta t). \tag{8.5}$$

Із (8.1), (8.4) випливає, що

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta t \leftarrow 0} P_{k>1}(\Delta t) = 0, \quad \lim_{\Delta t \leftarrow 0} P_1(\Delta t) = \lim_{\Delta t \leftarrow 0} (\lambda\ \Delta t + \alpha(\Delta t)) = 0, \\ \lim_{\Delta t \leftarrow 0} P_0(\Delta t) = \lim_{\Delta t \leftarrow 0} (1 - \lambda\ \Delta t + \alpha(\Delta t)) = 1.\end{gathered} \tag{8.6}$$

Отже,

$$P_0(\Delta t) = \lim_{\Delta t \leftarrow 0} (1 - \lambda \cdot \Delta t + \alpha(\Delta t)) = 1.$$

Відсутність післядії. Потік подій називають ***потоком без післядії*** (без наслідків), якщо для будь-яких несумісних проміжків часу Δt_1, $\Delta t_2, \ldots, \Delta t_i, \ldots, \Delta t_j, \ldots$, де $\Delta t_i \cap \Delta t_j = \varnothing$ при $i \neq j$, імовірність появи на будь-якому з цих проміжків часу певної кількості подій не залежатиме від того, скільки подій відбулося чи відбудеться на інших проміжках.

Відсутність післядії як одна з властивостей пуассонівського потоку означає, що для будь-якого моменту часу $t = t_i$ в майбутньому $(t > t_i)$ поява подій потоку не залежить від того, скільки і в які моменти часу відбувалися події в минулому $(t < t_i)$. Умовно це можна зобразити так, як показано на рис. 8.3.

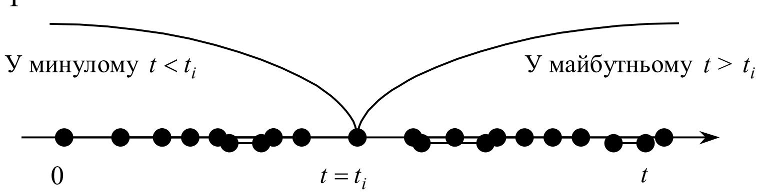


Рис. 8.3

Стаціонарність. Потік подій називають ***стаціонарним***, якщо всі його ймовірнісні характеристики не залежать від часу, тобто для стаціонарного потоку ймовірність появи тієї чи іншої кількості подій на проміжку часу $T = t_i - t$ залежить лише від довжини цього проміжку і не залежить від того, де він міститься на осі $0t$. Звідси випливає, що для стаціонарного потоку подій параметр λ є величиною сталою $(\lambda = \text{const})$, а для нестаціонарного залежить від часу t і позначається як $\lambda(t)$.

Отже, потік подій, якому притаманні властивості ординарності, відсутності післядії та стаціонарності, називають ***пуассонівськими стаціонарними***, або ***найпростішими потоками***.

Основною інформацією про пуассонівський потік є ймовірність появи k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ подій за час t, тобто необхідно мати формулу для обчислення $P_k(t)$. Для її відшукання використовують основні властивості пуассонівського потоку. Оскільки випадкові події потоку є несумісними і утворюють повну групу, то має виконуватися рівність:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1. \qquad (8.7)$$

Ураховуючи те, що події потоку є незалежними, має виконуватися рівність:

$$P_k(t + \Delta t) = P_{k-1}(t) \cdot P_t(\Delta t), \qquad (8.8)$$

де $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k$.

Рівність (8.8) — це ***формула множення ймовірностей для незалежних випадкових подій***. Її можна пояснити так: імовірність появи k подій на проміжку часу $t + \Delta t$ дорівнює добуткові ймовірності появи $k - i$ подій за час t на ймовірність появи i подій на проміжку часу Δt. Наприклад, якщо $k = 0$, $i = 0$, то рівність (8.8) набирає такого вигляду:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) P_0(\Delta t). \qquad (8.9)$$

Звідси з урахуванням (8.5) дістаємо:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - \lambda \Delta t P_0(t) + \alpha(\Delta t) P_0(t). \qquad (8.10)$$

Формулу (8.8), коли i змінюється від 0 до k, унаочнено на рис. 8.4.

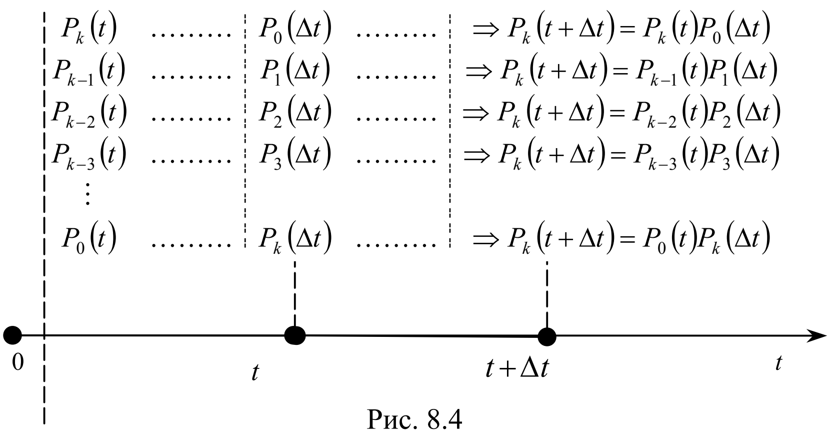


Рис. 8.4

Використовуючи формулу повної імовірності, дістаємо:

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) \cdot P_0(t) + P_{k-1}(t) P_1(\Delta t) + P_{k-2}(t) P_2(\Delta t) + P_{k-3}(t) P_3(\Delta t) + \ldots + P_0(t) P_k(\Delta t),$$

або

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) P_0(t) + P_{k-1}(t) P_1(\Delta t) + \sum_{i=2}^{k} P_{k-i}(t) P_i(\Delta t). \qquad (8.11)$$

Оскільки найпростіший потік є ординарним, то

$$\sum_{i=2}^{k} P_{k-i}(t)P_i(\Delta t)=\alpha(\Delta t), \tag{8.12}$$

тобто є нескінченно малою величиною вищого порядку порівняно з Δt. Отже, використовуючи вирази для $P_1(\Delta t)$ і $P_0(\Delta t)$, подаємо формулу (8.11) у вигляді:

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)(1-\lambda\Delta t+\alpha(\Delta t))+P_{k-1}(t)(\lambda\Delta t+\alpha(\Delta t))+\alpha(\Delta t). \tag{8.13}$$

Отже, (8.10), (8.11) і (8.13) утворюють систему рівнянь:

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-\lambda\Delta t P_0(t)+\alpha\Delta t P_0(t), \\ P_k(t+\Delta t)=P_k(t)-\lambda\Delta t P_k(t)+\alpha(\Delta t)P_k(t)+\lambda\Delta t P_{k-1}(t)+\alpha(\Delta t)P_{k-1}(t)+\alpha(\Delta t), \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t)=P_0(t)-\lambda\Delta t P_0(t)+\alpha\Delta t P_0(t), \\ P_k(t+\Delta t)=P_k(t)-\lambda\Delta t P_k(t)+\lambda(\Delta t)P_{k-1}(t)+(P_k(t)+P_{k-1}(t)+1)\,\alpha(\Delta t). \end{cases} \tag{8.14}$$

Систему (8.14) зведемо до такого вигляду:

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t)-P_0(t)=-\lambda\Delta t P_0(t)+\alpha\Delta t P_0(t), \\ P_k(t+\Delta t)-P_k(t)=-\lambda\Delta t P_k(t)+\lambda(\Delta t)P_{k-1}(t)+(P_k(t)+P_{k-1}(t)+1)\,\alpha(\Delta t). \end{cases} \tag{8.15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}P_0(t), \\ \dfrac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\lambda P_{k-1}(t)+(P_k(t)+P_{k-1}(t)+1)\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}. \end{cases}$$

У системі (8.15) перейдемо до границі, спрямувавши $\Delta t\to 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}P_0(t), \\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t)+ \\ +(P_k(t)+P_{k-1}(t)+1)\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}. \end{cases} \tag{8.16}$$

Ураховуючи, що

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}=0,\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=P_0'(t)=\frac{d\,P_0(t)}{dt},$$
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=P_k'(t)=\frac{d\,P_k(t))}{dt},$$

із (8.16) дістаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t); \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt}=-\lambda P_k(t)+\lambda P_{k-1}(t), \qquad k=1,\,2,\,3,\,\ldots\ . \end{cases} \tag{8.17}$$

Систему (8.17) називають системою диференціально-різницевих рівнянь. Для її розв'язування використаємо метод імовірнісних твірних функцій.

Імовірнісна твірна функція для цієї системи має такий вигляд:

$$A(x,\,t)=\sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m(t)=P_0(t)+xP_1(t)+x^2P_2(t)+x^3P_3(t)+\ldots+x^kP_k(t)+\ldots\ . \tag{8.18}$$

Отже, $A(x,t)$ являє собою степеневий ряд, збіжний при $|x|\le 1$. Знаючи аналітичний вираз для $A(x,t)$, можемо визначити $P_k(t)$ для $k=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots$.

Так, із (8.18) маємо:

$$
\begin{aligned}
&A(0;\,t) = P_0(t);\\
&A'(0;\,t) = P_1(t);\\
&A''(0;\,t) = 2P_2(t) \Rightarrow P_2(t) = \frac{1}{2\,!}A''(0,t);\\
&A'''(0;\,t) = 3\cdot 2\cdot P_3(t) \Rightarrow P_3(t) = \frac{1}{3\,!}A'''(0,t);\\
&A^{IV}(0;\,t) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot P_4(t) \Rightarrow P_4(t) = \frac{1}{4\,!}A^{IV}(0,t);\\
&\vdots\\
&A^{(k)}(0;\,t) = k(k-1)\ldots 1\cdot P_k(t) \Rightarrow P_k(t) = \frac{1}{k\,!}A^{(k)}(0,t).\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Згідно з (8.19) для визначення $P_k(t)$ необхідно знайти аналітичний вираз для $A(x,\,t)$. З цією метою друге рівняння системи (8.17) помножимо на x^k:

$$
\begin{cases}
P_0'(t) = -\lambda P_0(t),\\
x^k P_k'(t) = -\lambda x^k P_k(t) + \lambda x^k P_{k-1}(t), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ .
\end{cases}
\tag{8.20}
$$

Додавши почленно перше і друге рівняння системи (8.20), дістанемо:

$$P_0'(t) + x^k P_k'(t) = -\lambda P_0(t) - \lambda x^k P_k(t) + \lambda x^k P_{k-1}(t). \tag{8.21}$$

Підсумувавши (8.21) за k, дістанемо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k'(t) = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k(t) + \lambda x \sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k(t). \tag{8.22}$$

Оскільки $A(x,\,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k P_k(t)$, то

$$A'(x,\,t) = \frac{d\,A(x,t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k P_k'(t).$$

Тепер рівняння (8.22) набере такого вигляду:

$$\frac{d\,A(x,t)}{dt} = \lambda(x-1)\,A(x,t). \tag{8.23}$$

Розв’язок диференціального рівняння (8.23) буде таким:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\,A(x,t)}{A(x,t)} = \lambda(x-1)dt \Rightarrow \int_0^t \frac{d\,A(x,t)}{A(x,t)} = \int_0^t \lambda(x-1)dt \Rightarrow\\
&\Rightarrow \ln A(x,t)\Big|_0^t = \lambda\,(x-1)t\Big|_0^t \Rightarrow \ln A(x,t) - \ln A(x,0) = \lambda(x-1)\,t.
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

Вочевидь, $\ln A(x,0) = 0$, оскільки $A(x,0) = P_0(0) = 1.$ Тому дістаємо:

$$\ln A(x,t) = \lambda(x-1)\,t,$$

або

$$A(x,t) = e^{\lambda(x-1)t}. \tag{8.25}$$

Оскільки

$$
\begin{aligned}
&A(0,t)=e^{-\lambda t};\\
&A'(0,t)=\lambda t\cdot e^{-\lambda t};\\
&A''(0,t)=(\lambda t)^2 e^{-\lambda t};\\
&A'''(0,t)=(\lambda t)^3 e^{-\lambda t};\\
&A^{IV}(0,t)=(\lambda t)^4 e^{-\lambda t};\\
&\vdots\\
&A^{(k)}(0,t)=(\lambda t)^k e^{-\lambda t};\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

то з урахуванням (8.19) дістанемо:

$$
\begin{aligned}
&P_0(t)=e^{-\lambda t};\\
&P_1(t)=\lambda t\cdot e^{-\lambda t};\\
&P_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2\,!}e^{-\lambda t};\\
&P_3(t)=\frac{(\lambda t)^3}{3\,!}e^{-\lambda t};\\
&P_4(t)=\frac{(\lambda t)^4}{4\,!}e^{-\lambda t};\\
&\vdots\\
&P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k\,!}e^{-\lambda t}.\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{8.27}
$$

Отже, формула для обчислення ймовірності появи k подій для стаціонарного пуассонівського потоку подій за час t має такий вигляд:

$$
P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k\,!}e^{-\lambda t}. \tag{8.28}
$$

Визначимо основні числові характеристики для пуассонівського потоку.

Математичне сподівання. $M(k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} kP_k(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k\,!}e^{-\lambda t} = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = \lambda t,$

оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=e^{\lambda t}$.

Отже,

$$
M(k)=\lambda t. \tag{8.29}
$$

Як бачимо, математичне сподівання для стаціонарного пуассонівського потоку є функцією від часу t.

Дисперсія. Для визначення дисперсії нам необхідно знайти $M(k^2)$.

$$
M(k^2)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(t)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{(\lambda t)^k}{k\,!}e^{-\lambda t}=(\lambda t)e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=(\lambda t)e^{-\lambda\cdot t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1+1)(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=
$$

$$
=(\lambda t)e^{-\lambda\cdot t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\cdot(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right]=(\lambda t)e^{-\lambda\cdot t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right]=
$$

$$
=(\lambda t)e^{-\lambda\cdot t}\left[\lambda t\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right]=
$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{оскільки} \quad \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} = e^{\lambda t} \text{ і} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t}, \text{ дістанемо} \end{array} \right| = (\lambda t) e^{-\lambda t}\left[(\lambda t)e^{\lambda t} + e^{\lambda t}\right] = (\lambda t)^2 + \lambda t.$$

Отже,

$$M\left(k^2\right) = (\lambda t)^2 + \lambda t.$$

А оскільки

$$D(k) = M\left(k^2\right) - M^2(k),$$

то

$$D(k) = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t,$$

тобто

$$D(k) = M(K) = \lambda t. \qquad (8.30)$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(k) = \sqrt{\lambda t}. \qquad (8.31)$$

Для пуассонівського потоку, події якого можна зобразити точками на числовій осі $0t$ (рис. 8.5), проміжок часу між сусідніми подіями t є випадковою величиною.

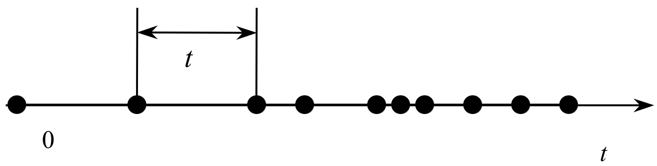


Рис. 8.5

Тому для подальшого використання цього потоку важливо мати інформацію про зазначену випадкову величину, а саме: який закон розподілу ймовірностей має ця величина?

8.3. Експоненціальний закон розподілу ймовірностей і його зв'язок з пуассонівським потоком

Гамма-розподіл

Неперервна випадкова величина T має гамма-розподіл, якщо її щільність імовірностей визначається як

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, & t > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \qquad (8.32)$$

Тут $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz. \qquad (8.33)$$

Функція розподілу ймовірностей для цієї величини

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \qquad (8.34)$$

Отже, гамма-розподіл визначається двома параметрами α і λ. Основні числові характеристики подаються за формулами:

$$M(t)=\frac{\alpha}{\lambda};\ D(t)=\frac{\alpha}{\lambda^2};\ \sigma(t)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\lambda}. \tag{8.35}$$

Експоненціальний закон розподілу

Експоненціальним законом розподілу випадкової величини *T* називається гамма-розподіл, у якому параметр $\alpha=1$.

З урахуванням цього $f(t)$ і $F(t)$ для експоненціального закону наберуть такого вигляду:

$$f(t)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t<0;\end{cases} \tag{8.36}$$

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{8.37}$$

Графіки цих функцій зображено на рис. 8.6. і 8.7.

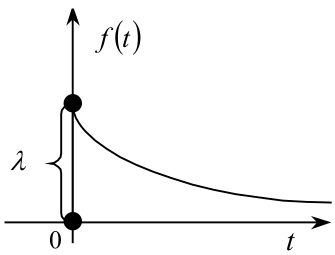


Рис. 8.6

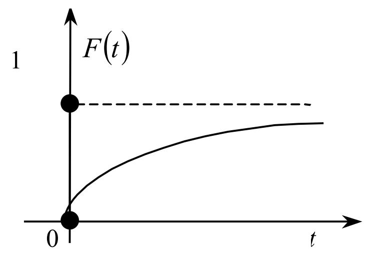


Рис. 8.7

Основні числові характеристики для цього розподілу визначаються за формулами:

$$M(t)=\frac{1}{\lambda};\ D(t)=\frac{1}{\lambda^2};\ \delta(t)=\frac{1}{\lambda}. \tag{8.38}$$

Важливою властивістю експоненціального закону є відсутність післядії. Серед усіх неперервних випадкових величин лише цей закон має таку властивість, яку проілюстровано на рис. 8.8.

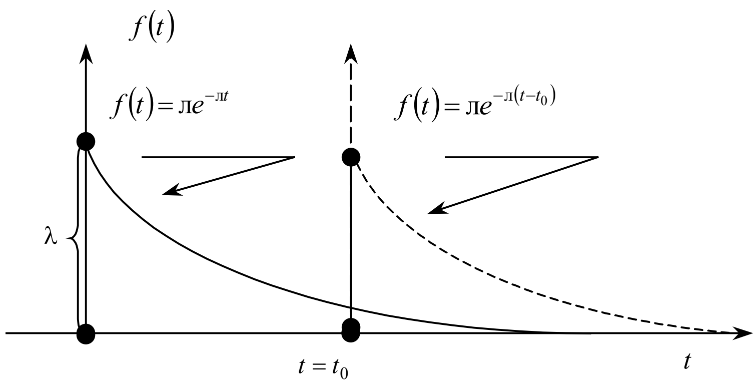


Рис. 8.8

Розглянувши графік для щільності ймовірностей

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{8.39}$$

з'ясуємо, який вигляд матиме $f(t)$ при $T > t_0$.

При $T > t_0$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{8.40}$$

Перевіримо виконання умови нормування для цієї функції:

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt = \int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}dt = e^{\lambda t_0}\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t}d\lambda t = e^{\lambda t_0}\left(-e^{-\lambda t}\Big|_{t_0}^{\infty}\right) = e^{\lambda t_0}\left(0 + e^{-\lambda t_0}\right) = 1.$$

Отже, доведено, що площа, обмежена кривою (8.40) на проміжку $\lfloor t_0, \infty \rfloor$, дорівнює одиниці, тобто ця крива буде точною копією вихідної кривої (8.39).

Зв'язок між пуассонівським потоком подій та експоненціальним законом розподілу виявляється в тому, що час T між сусідніми подіями потоку є випадковою величиною, яка має розподіл (8.39).

Справді, розглянемо випадок, коли в момент часу $T = t_0$ з'явилась одна подія (рис. 8.9).

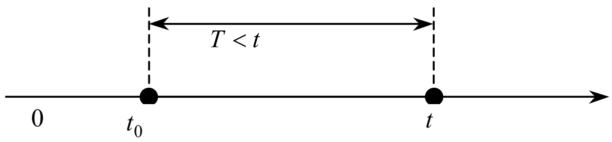


Рис. 8.9

Позначимо через t проміжок часу до появи наступної події потоку. Тоді за час $T < t$ може з'явитись або одна подія з імовірністю $P_1(T < t)$, або жодної з імовірністю $P_0(T < t)$.

Отже, маємо

$$P_1(T < t) + P_0(T < t) = 1 \Rightarrow P_1(T < t) = 1 - P_0(T < t).$$

Але $P_0(T < t) = e^{-\lambda t}$, а $P_1(T < t) = F(t)$.

Таким чином, дістаємо:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{8.41}$$

де $F(t)$ — функція розподілу ймовірностей для експоненціального закону.

Із наведених викладок можна дійти висновку: коли проміжки часу між сусідніми подіями потоку як випадкові величини мають експоненціальний закон розподілу, то це дає підставу стверджувати, що такий потік пуассонівський (найпростіший).

8.4. Рівняння Колмогорова та його використання для дослідження соціо-економічних процесів

Розглянемо систему, яка може перебувати в одному з несумісних станів: $w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots w_n$. Під впливом нестаціонарних потоків подій система з певною ймовірністю може здійснювати переходи з одного стану в інший. Наприклад, якщо в момент часу t система перебувала в стані w_i, то ймовірність її переходу в стан w_j за елементарно малий проміжок часу Δt наближено дорівнює:

$$\lambda_{ij}(t)\Delta t, \tag{8.42}$$

а коли система перебуває в стані w_j, то ймовірність переходу її в стан w_i буде

$$\lambda_{ji}(t)\Delta t. \tag{8.43}$$

Тут $\lambda_{ij}(t)$, $\lambda_{ji}(t)$ — інтенсивності відповідних пуассонівських (нестаціонарних) потоків, під дією яких відбуваються переходи системи:

$$w_i \to w_j, \quad w_j \to w_i.$$

Імовірності (8.42) і (8.43) можна тлумачити як середню кількість подій потоку, що можуть відбуватися за проміжок часу Δt і, отже, сприяють переходу системи з одного стану в інший. Водночас зазначені залежності являють собою вирази виду (8.29) для математичного сподівання, яке з точністю до нескінченно малих вищого порядку дорівнює ймовірності $P_1(\Delta t)$ появи однієї події на проміжку часу Δt $(P_1(\Delta t) \approx \lambda\Delta t)$, оскільки ймовірностями $P_k(\Delta t)$ при $k > 1$ нехтують. Ці висновки ґрунтуються на властивості однорідності пуассонівських потоків.

Нехай тепер для будь-якої пари станів w_i, w_j відома інтенсивність $\lambda_{ij}(t)$ нестаціонарного пуассонівського потоку, під впливом якого здійснюється перехід системи зі стану w_i в будь-який інший стан w_j. Якщо цей перехід неможливий, то $\lambda_{ij}(t) = 0.$

Позначимо через $P_j(t)$ імовірність того, що в момент часу t система перебуває у стані w_j $(j = 1, 2, \ldots, i, \ldots n)$. Надамо t приросту Δt і знайдемо ймовірність $P_j(t + \Delta t)$ того, що в момент часу $t + \Delta t$ система знову перебуватиме у стані w_i. Умовно позначимо цю подію як $A, \left(\overline{w_i \to w_i}\right)$, де A є випадкова подія — перебування системи у стані w_i. Постає запитання: як може відбутися ця подія?

Виявляється, що ця подія може відбутися двома шляхами:

або відбудеться подія B, яка полягає в тому, що в момент часу t система перебувала у стані w_i і за проміжок часу Δt в цьому самому стані залишилася $(w_i \to w_i)$;

або відбудеться подія C, суть якої полягає в тому, що в момент часу t система перебувала у стані w_j і за проміжок часу Δt перейшла у стан w_i $(w_j \to w_i)$ $j \neq i$.

Очевидно, що

$$A = B \cup C, \quad B \cap C = \varnothing. \tag{8.44}$$

Знайдемо ймовірності подій B і C. Ймовірність події B дорівнюватиме ймовірності $P_i(t)$ того, що в момент часу t система перебувала в стані w_i, помноженій на умовну ймовірність того, що за час Δt вона не залишить цей стан.

Як визначити цю умовну ймовірність?

Розглянемо це питання в іншому аспекті, а саме: визначимо ймовірність переходу системи зі стану w_i в будь-який можливий стан w_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Цей перехід для наочності можна зобразити за допомогою графа (рис. 8.10).

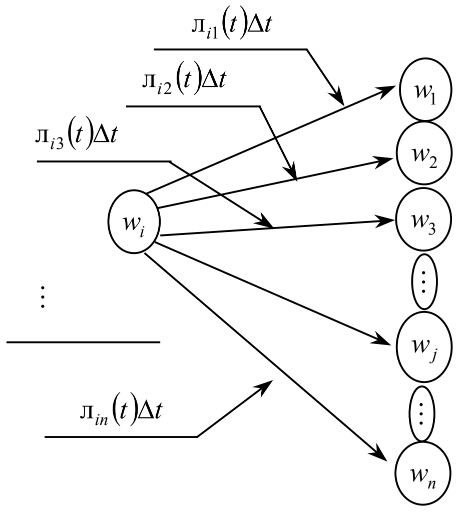


Рис. 8.10

Отже, умовна ймовірність того, що за проміжок часу Δt з'явиться хоча б одна подія, яка буде означати перехід системи зі стану w_i в будь-який можливий інший, дорівнюватиме:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t)\Delta t, \ \ i \neq j. \tag{8.45}$$

Тоді умовна ймовірність протилежної події (система залишиться в стані w_i) буде така:

$$1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t. \tag{8.46}$$

Таким чином, імовірність події B

$$P(B)=P_i(t)\left[1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t\right]. \tag{8.47}$$

Тепер необхідно визначити ймовірність події C $(w_j \to w_i)$. Цей перехід може відбутися з певною ймовірністю під впливом пуассонівських потоків подій з інтенсивністю $\lambda_{ji}(t)$. Тоді C складатиметься з n випадкових подій C_j, кожна з яких інформує про перехід системи зі стану w_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ у стан w_i.

Отже,

$$C=\sum_{j=1}^{n}C_j \ (j\neq i). \tag{8.48}$$

Оскільки події C_j несумісні, то

$$P(C)=\sum_{j=1}^{n}P(C_j). \tag{8.49}$$

Імовірність $P(C_j)$ можна зобразити також графами (рис. 8.11).

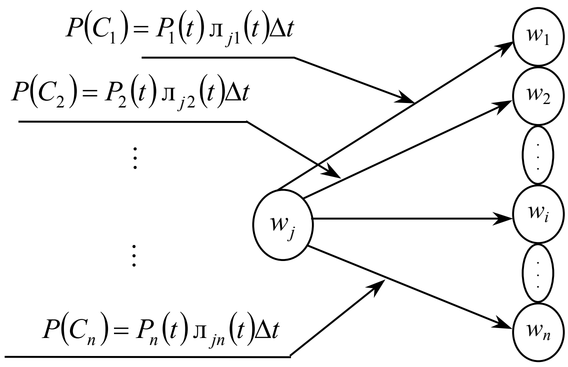


Рис. 8.11

Отже, дістаємо:

$$P(C)=\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\lambda_{ji}(t)\Delta t. \tag{8.50}$$

З урахуванням (8.44), (8.47) і (8.50) маємо:

$$P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C),$$

або

$$P_i(t+\Delta t)=P_i(t)\left[1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\Delta t\right]+\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\,\lambda_{ji}(t)\Delta t. \tag{8.51}$$

Рівняння (8.51) подамо в такому вигляді:

$$P_i(t+\Delta t)=P_i(t)-P_i(t)\Delta t\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\,\lambda_{ji}(t)\Delta t, \quad i=\overline{1,n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_i(t+\Delta t)-P_i(t)=-P_i(t)\Delta t\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)+\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\,\lambda_{ji}(t)\Delta t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_i(t+\Delta t)-P_i(t)}{\Delta t} = -P_i(t)\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,\lambda_{ji}(t)\,t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_i(t+\Delta t)-P_i(t)}{\Delta t} = -P_i(t)\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,\lambda_{ji}(t)\,t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_i'(t) = -P_i(t)\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} P_j(t)\,\lambda_{ji}(t)\,t, \qquad i=\overline{1,\,n}. \tag{8.52}$$

Отже, дістали систему звичайних диференціальних рівнянь зі змінними (у загальному випадку) коефіцієнтами. Систему рівнянь (8.52) називають ***рівняннями Колмогорова***.

Систему диференціальних рівнянь (8.52) розв’язують при початкових умовах, беручи значення ймовірностей при $t=0$:

$$P_1(0),\ P_2(0), \ldots, P_n(0).$$

При цьому для будь-якого моменту часу має виконуватись умова нормування

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1. \tag{8.53}$$

Приклад 1. Комп’ютер може перебувати в одному з двох несумісних станів:

w_1 — комп’ютер перебуває в робочому стані;

w_2 — комп’ютер вийшов із ладу (неработоздатний стан).

У процесі роботи комп’ютера (стан w_1) на нього діє пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda(t)$, який переводить його з певною ймовірністю у стан w_2 (стан виходу з ладу). Коли комп’ютер перебуває у стані w_2, на нього діє пуассонівський потік з інтенсивністю $\mu(t)$, який переводить його у стан w_1 (робочий). Обидва пуассонівські потоки незалежні між собою. Необхідно:

1) записати рівняння Колмогорова для ймовірностей станів комп’ютера;

2) розв’язати ці рівняння, вважаючи, що при $t=0$ комп’ютер перебуває в справному стані (початкова умова).

Розв’язання. Стани комп’ютера як системи та відповідні переходи зобразимо за допомогою графа станів (рис. 8.12), де $\lambda_{12}=\lambda(t)$, $\lambda_{21}=\mu(t)$.

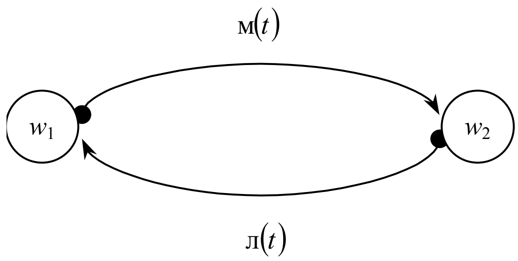


Рис. 8.12

Система рівнянь Колмогорова (8.52) для двох станів набере такого вигляду:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda(t)\,P_1(t) + \mu(t)\,P_2(t);$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\mu(t)\,P_2(t) + \lambda(t)\,P_1(t).$$

Із умови нормування

$$P_1(t) + P_2(t) = 1$$

знаходимо

$$P_2(t) = 1 - P_1(t).$$

Підставивши $P_2(t)$ у перше рівняння системи, дістанемо диференціальне рівняння відносно однієї функції $P_1(t)$:

$$\frac{d\,P_1(t)}{dt} = -\lambda(t)\,P_1(t) + \mu(t) - \mu(t)\,P_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\,P_1(t)}{dt} = -[\lambda(t) + \mu(t)]\,P_1(t) + \mu(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\,P_1(t)}{dt} + [\lambda(t) + \mu(t)]\,P_1(t) = \mu(t).$$

Для розв’язування диференціального рівняння відносно функції $P_1(t)$ скористаємось методом варіації довільної сталої:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + [\lambda(t) + \mu(t)]P_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{d\,P_1(t)}{dt} = -[\lambda(t) + \mu(t)]P_1(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\,P_1(t)}{P_1(t)} = -[\lambda(t) + \mu(t)]dt \to \int\limits_0^t \frac{dP_1(t)}{P_1(t)} = -\int\limits_0^t [\lambda(t) + \mu(t)]dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln P_1(t)\Big|_0^t = -\int\limits_0^t [\lambda(t) + \mu(t)]\,dt + \ln C(t) \to \ln P_1(t) - \ln P_1(0) = -\int\limits_0^t [\lambda(t) + \mu(t)]dt + \ln C(t).$$

Оскільки $P_1(0) = 1$, то

$$\ln\frac{P_1(t)}{C(t)} = -\int\limits_0^t [\lambda(t) + \mu(t)]dt \Rightarrow P_1(t) = C(t)\,e \Rightarrow -\int\limits_0^t [\lambda(t) + \mu(t)]\,dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_1'(t) = C'(t)\,e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} - [\lambda(t) + \mu(t)]e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}\,C(t).$$

Підставивши $P_1'(t)$, $P_1(t)$ у вихідне диференціальне рівняння, дістанемо:

$$C'(t)\,e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} - [\lambda(t) + \mu(t)]C(t)\,e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} + [\lambda(t) + \mu(t)]C(t)\,e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} = \mu(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C'(t)\,e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} = \mu(t) \to C'(t) = \mu(t)\,e^{\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} \Rightarrow \frac{dC(t)}{dt} = \mu(t)\,e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} \to C(t) = \int\limits_0^t \mu(t) e^{\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt} + C.$$

Отже, маємо загальний вираз для функції $P_1(t)$:

$$P_1(t) = e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}[\int\limits_0^t \mu(t)\,e^{\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}dx + C].$$

Оскільки $P_1(0) = 1$, то

$$P_1(t) = e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}[\int\limits_0^t \mu(t)\,e^{\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}dx + 1];$$
$$P_2(t) = 1 - e^{-\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}[\int\limits_0^t \mu(t)\,e^{\int_0^t [\lambda(t)+\mu(t)]dt}dx + 1].$$

У разі, коли $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, $\mu(t) = \mu = \text{const}$, функції $P_1(t)$, $P_2(t)$ визначаються так:

$$e^{-\int_0^t (\lambda+\mu)dt} = e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Тоді

$$\int\limits_0^t \mu\, e^{\int_0^t (\lambda+\mu)dx} dx + 1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,e^{(\lambda+\mu)t} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} + 1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Отже, маємо:

$$P_1(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \text{ а } P_2(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t}).$$

При $t\to\infty$ система виходить на стаціонарний режим роботи, при якому

$$\lim_{t\to\infty}P_1(t)=P_1=\text{const};$$
$$\lim_{t\to\infty}P_2(t)=P_2=\text{const},$$

тобто ймовірності станів системи не залежать від часу t.

Для нашого прикладу маємо:

$$P_1=\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\right]=\frac{\mu}{\lambda+\mu};$$
$$P_2=\lim_{t\to\infty}P_2(t)=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})\right]=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Графіки функцій $P_1(t)$, $P_2(t)$ зображено на рис. 8.13.

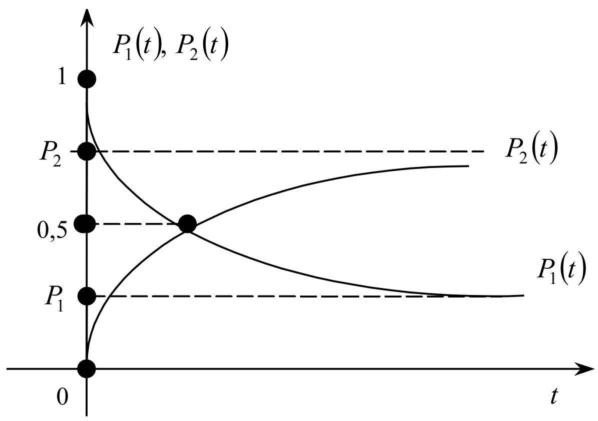


Рис. 8.13

У стаціонарному режимі комп’ютер змінюватиме свої стани: $w_1\to w_2$, $w_2\to w_1$, але ймовірності цих станів не залежатимуть від часу.

8.5. Використання рівняння Колмогорова для моделювання роботи системи в стаціонарному режимі

При побудові рівнянь Колмогорова за заданим імовірнісним графом станів системи для зручності вводиться поняття «потік імовірностей».

Називатимемо ***потоком імовірностей*** добуток імовірності $P_i(t)$ стану системи w_i на інтенсивність $\lambda_{ij}(t)$ потоку подій, який переводить цю систему в стан w_j (рис. 8.14) $i=\overline{1,n}$, $i\neq j$ або добуток імовірності $P_j(t)$ стану системи w_j на інтенсивність $\lambda_{ji}(t)$ потоку подій, який переводить цю систему в стан w_i (рис. 8.15).

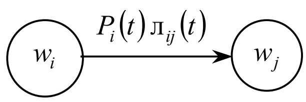


Рис. 8.14

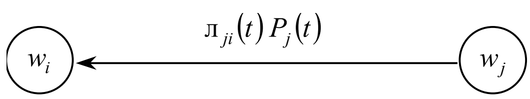


Рис. 8.15

Отже, рівняння Колмогорова будується за суворого додержання такого правила: похідна від імовірності $P_i'(t)$ дорівнює сумі потоків імовірностей $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}(t)P_j(t)$, які переводять систему зі стану w_j у стан w_i, мінус сума потоків імовірностей $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}(t)P_j(t)$, що переводять систему зі стану w_i у стан w_j, тобто:

$$P_i'(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}(t)P_j(t)-P_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}(t),\ i=\overline{1,n}, \tag{8.54}$$

при $i=j$ $\lambda_{ii}(t)=0$.

Якщо всі інтенсивності потоків не залежать від часу t, тобто $\lambda_{ij}(t)=\lambda_{ij}=\text{const}$, $\lambda_{ji}(t)=\lambda_{ji}=\text{const}$, то марковський процес називають ***однорідним***.

У цьому разі рівняння (8.54) набирає такого вигляду:

$$P_i'(t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}P_j(t)-P_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij},\ i=\overline{1,n}. \tag{8.55}$$

А якщо хоча б одна з інтенсивностей системи залежить від t, то марковський процес називають ***неоднорідним***.

Для стаціонарного режиму $(P_i(t)=P_i=\text{const})$ роботи модельованої системи в разі однорідного марковського процесу рівняння Колмогорова подається так:

$$0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}P_j-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{8.56}$$

Рівняння (8.56) можна записати у вигляді:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}P_j,\quad i=\overline{1,n}. \tag{8.57}$$

Надалі для зручності побудови рівняння Колмогорова всі інтенсивності $\lambda_{ij}(t),\lambda_{ji}(t)$ для модельованої системи S записуватимемо у вигляді квадратної матриці:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12}(t) & \lambda_{13}(t) & \dots & \lambda_{1n}(t)\\ \lambda_{21}(t) & 0 & \lambda_{23}(t) & \dots & \lambda_{2n}(t)\\ \lambda_{31}(t) & \lambda_{32}(t) & 0 & \dots & \lambda_{3n}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_{n1}(t) & \lambda_{n2}(t) & \lambda_{n3}(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.58}$$

Якщо $\lambda_{ij}(t)=\lambda_{ij}=\text{const}$, $\lambda_{ji}(t)=\lambda_{ji}=\text{const}$, то матриця (8.58) набирає вигляду:

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \dots & \lambda_{1n}\\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} & \dots & \lambda_{2n}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & 0 & \dots & \lambda_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.59}$$

Коли стохастичну модель системи побудовано з використанням рівнянь Колмогорова, здебільшого постає питання про визначення для стаціонарного режиму ймовірності $P_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ для всіх можливих станів. З цією метою необхідно розв'язати систему:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}(t)P_j(t)-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t)\right)P_i=0,\quad i=\overline{1,n},\\ \sum_{i=1}^{n}P_i=1,\end{cases} \tag{8.60}$$

де в системі однорідних рівнянь (8.60) будь-яке з них замінено умовою нормування

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

Проілюструємо це на конкретному прикладі.

Приклад 2. Обчислювальний центр має три комп’ютери, кожний з яких може виходити з ладу незалежно один від одного у випадкові моменти часу. Потоки відказів у роботі комп’ютерів є пуассонівськими зі станами інтенсивності λ_{ij}. Поновлення роботи комп’ютерів, що вийшли з ладу, також утворюють пуассонівські потоки зі сталими інтенсивностями λ_{ji}.

Розглядаються такі стани системи (обчислювального центру):

w_1 — усі три комп’ютери є справними;

w_2 — перший комп’ютер вийшов із ладу, а другий і третій є справними;

w_3 — другий комп’ютер вийшов із ладу, а перший і третій — справні;

w_4 — третій комп’ютер вийшов із ладу, а перший і другий — справні;

w_5 — перший і другий комп’ютери вийшли з ладу, а третій є справним;

w_6 — перший і третій комп’ютери вийшли з ладу, а другий є справним;

w_7 — другий і третій комп’ютери вийшли з ладу, а перший є справним;

w_8 — усі три комп’ютери вийшли з ладу.

Імовірнісний граф станів системи наведено на рис. 8.16.

1. Записати стохастичну модель для цієї системи в динаміці та для стаціонарного режиму.

2. Визначити ймовірності станів $P_i \left(i = \overline{1, 8}\right)$ системи для стаціонарного режиму при числових значеннях $\lambda_{ij}(t)$, $\lambda_{ji}(t)$, наведених на ймовірнісному графі.

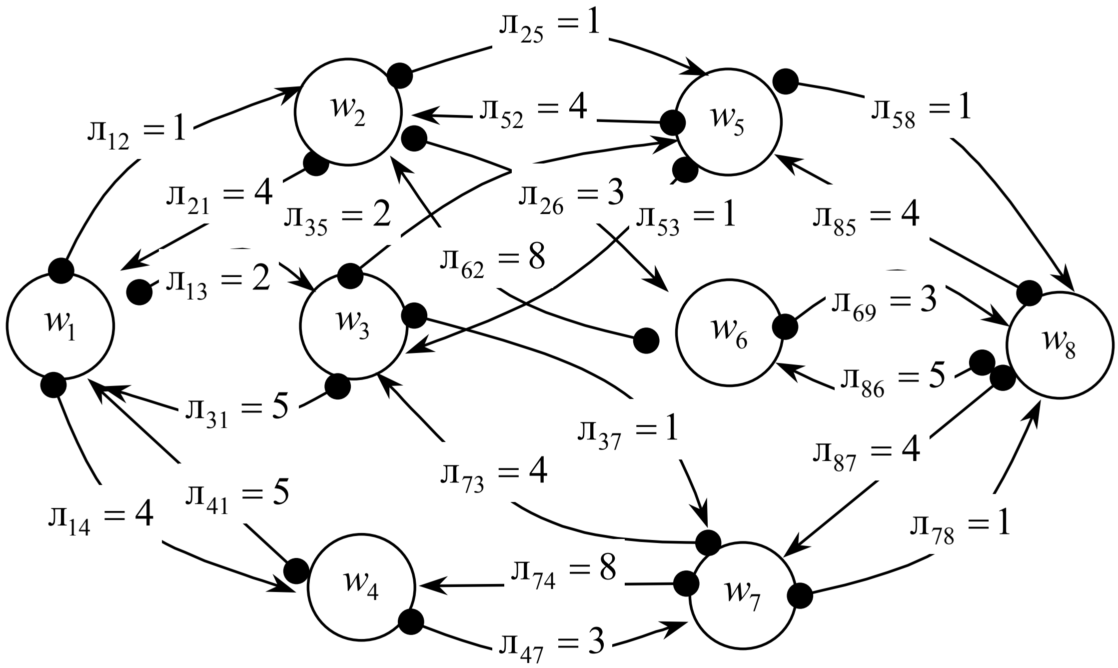


Рис. 8.16.

Розв’язання.

1. Запишемо стохастичну модель системи.

У динаміці ця модель набирає вигляду:

$$
\begin{aligned}
&P_1'(t) = -(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14})P_1(t) + \lambda_{21} P_2(t) + \lambda_{31} P_3(t) + \lambda_{41} P_4(t),\\
&P_2'(t) = -(\lambda_{25} + \lambda_{26} + \lambda_{21})P_2(t) + \lambda_{12} P_1(t) + \lambda_{52} P_5(t) + \lambda_{62} P_6(t),\\
&P_3'(t) = -(\lambda_{31} + \lambda_{35} + \lambda_{37})P_3(t) + \lambda_{13} P_1(t) + \lambda_{53} P_5(t) + \lambda_{73} P_7(t),\\
&P_4'(t) = -(\lambda_{41} + \lambda_{47})P_4(t) + \lambda_{14} P_1(t) + \lambda_{74} P_7(t),\\
&P_5'(t) = -(\lambda_{52} + \lambda_{53} + \lambda_{58})P_5(t) + \lambda_{25} P_2(t) + \lambda_{35} P_3(t) + \lambda_{85} P_8(t),\\
&P_6'(t) = -(\lambda_{62} + \lambda_{68})P_6(t) + \lambda_{26} P_2(t) + \lambda_{86} P_8(t),\\
&P_7'(t) = -(\lambda_{73} + \lambda_{74} + \lambda_{78})P_7(t) + \lambda_{47} P_4(t) + \lambda_{37} P_3(t) + \lambda_{87} P_8(t),\\
&P_8'(t) = -(\lambda_{85} + \lambda_{86} + \lambda_{87})P_8(t) + \lambda_{58} P_5(t) + \lambda_{68} P_6(t) + \lambda_{78} P_7(t).
\end{aligned}
\tag{8.61}
$$

При цьому для будь-якого моменту часу t має виконуватись умова нормування

$$\sum_{i=1}^{8} P_i(t) = 1.$$

Підставляючи числові значення ѕмовірностей $\lambda_{ij}(t)$, $\lambda_{ji}(t)$ у систему диференціальних рівнянь (8.61), дістаємо:

$$
\begin{aligned}
&P_1'(t) = -7P_1(t) + 4P_2(t) + 5P_3(t) + 5P_4(t),\\
&P_2'(t) = -8P_2(t) + P_1(t) + 4P_5(t) + 8P_6(t),\\
&P_3'(t) = -8P_3(t) + 2P_1(t) + P_5(t) + 4P_7(t),\\
&P_4'(t) = -8P_4(t) + 4P_1(t) + 8P_7(t),\\
&P_5'(t) = -6P_5(t) + P_2(t) + 2P_3(t) + 4P_8(t),\\
&P_6'(t) = -11P_6(t) + 3P_2(t) + 5P_8(t),\\
&P_7'(t) = -13P_7(t) + 3P_4(t) + P_3(t) + 4P_8(t),\\
&P_8'(t) = -13P_8(t) + P_5(t) + 3P_6(t) + P_7(t).
\end{aligned}
\tag{8.62}
$$

$$\sum_{i=1}^{8} P_i(t) = 1.$$

Систему (8.62) можна записати у векторно-матричній формі:

$$\overrightarrow{P'}(t) = H\,\overrightarrow{P'}(t),$$

де

$$
\overrightarrow{P'}(t) = \begin{pmatrix} P_1'(t)\\ P_2'(t)\\ P_3'(t)\\ P_4'(t)\\ P_5'(t)\\ P_6'(t)\\ P_7'(t)\\ P_8'(t) \end{pmatrix}, \quad
H = \begin{pmatrix}
-7 & 4 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -8 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0\\
2 & 0 & -8 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0\\
4 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 8 & 0\\
0 & 1 & 2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 4\\
0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 & 5\\
0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -13 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -13
\end{pmatrix}, \overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t)\\ P_4(t)\\ P_5(t)\\ P_6(t)\\ P_7(t)\\ P_8(t) \end{pmatrix}.
$$

Зауважимо, що визначник матриці H:

$$\det H = 0.$$

Це є ознакою того, що модель (8.62) побудовано правильно.

Стохастичну модель для стаціонарного режиму будуємо, беручи до уваги, що система (8.62) набирає такого вигляду:

$$
\begin{aligned}
&0 = -7P_1 + 4P_2 + 5P_3 + 5P_4, \\
&0 = -8P_2 + P_1 + 4P_5 + 8P_6, \\
&0 = -8P_3 + 2P_1 + P_5 + 4P_7, \\
&0 = -7P_4 + 4P_1 + 8P_7, \\
&0 = -6P_{51} + P_7 + 2P_3 + 4P_8, \\
&0 = -11P_6 + 8P_3 + 5P_2, \\
&0 = -13P_7 + 8P_4 + P_3 + 4P_8, \\
&0 = -13P_8 + P_5 + 3P_6 + P_7.
\end{aligned}
\tag{8.63}
$$

Оскільки для цієї $\det H = 0$, то система невизначена. Щоб уникнути цієї ситуації, змінимо будь-яке з її рівнянь умовою нормування. Наприклад, восьме рівняння цієї системи замінимо рівнянням

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 = 1.$$

Тоді дістанемо неоднорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно $P_i \left(i = \overline{1, 8}\right)$:

$$
\begin{aligned}
&-7P_1 + 4P_2 + 5P_3 + 5P_4 = 0, \\
&-8P_2 + P_1 + 4P_5 + 8P_6 = 0, \\
&-8P_3 + 2P_1 + P_5 + 4P_7 = 0, \\
&-7P_4 + 4P_1 + 8P_7 = 0, \\
&-6P_5 + P_2 + 2P_3 + 4P_8 = 0, \\
&-11P_6 + 8P_3 + 5P_8 = 0, \\
&-13P_7 + 8P_4 + P_3 + 4P_8 = 0, \\
&P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 = 1.
\end{aligned}
\tag{8.64}
$$

Цю систему можна подати у векторно-матричній формі:

$$H^* \vec{P} = \vec{b}, \tag{8.65}$$

де

$$H^* = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -8 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -13 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.66}$$

Із рівності (8.66) знаходимо вектор

$$\vec{P} = \left(H^*\right)' \vec{b} \Rightarrow \vec{P} = \left(H^k\right)^{-1} \vec{b}. \tag{8.67}$$

Для нашого прикладу маємо:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0,328 \\ 0,133 \\ 0,124 \\ 0,23 \\ 0,07 \\ 0,041 \\ 0,065 \\ 0,009532 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо:

$$P_1 = 0{,}328;\ \ P_2 = 0{,}133;\ \ P_3 = 0{,}124;\ \ P_4 = 0{,}23;\ \ P_5 = 0{,}07;$$
$$P_6 = 0{,}041;\ P_7 = 0{,}065;\ P_8 = 0{,}009532.$$

Висновок. Здобуті результати інформують нас, що протягом робочого дня частка часу, коли всі три комп'ютери будуть справними, становить 32,8 %; два будуть справними — 38,7 %, а якщо лише один із трьох — 11,6 %. Частка часу, коли всі три комп'ютери перебуватимуть у стані ремонту, становить 0,95 %, тобто менш як 1 %.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати визначення марковського процесу з дискретним станом і неперервним часом. Навести приклади застосування.
2. Дати означення марковського процесу народження-загибелі. Навести приклади застосування в економіці.
3. Що називається потоком подій? Навести приклади.
4. Дати означення пуассонівського (найпростішого) потоку подій. Навести приклади.
5. У чому полягає суть стаціонарності потоку?
6. Формула Пуассона для обчислення ймовірності появи k подій за час *t*.
7. У чому полягає суть такої ознаки, як відсутність післядії для пуассонівського потоку?
8. Експоненціальний закон розподілу ймовірностей та його зв'язок із пуассонівським потоком.
9. У чому полягає суть ординарності пуассонівського потоку?
10. Рівняння Колмогорова. Приклади застосування при дослідженні соціо-економічних процесів.
11. У чому полягає суть добутків $\lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t$ і $\lambda_{iji}(t)\Delta t$?
12. У чому полягає суть суми добутків $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t)\Delta t$?
13. У чому полягає суть виразу $1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t)\Delta t$?
14. Рівняння Колмогорова за умови, що $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij} = \text{const}$ і $\lambda_{ji}(t) = \lambda_{ji} = \text{const}.$ Навести приклади застосування.
15. Матриця *H*, її основні властивості та інтерпретація її елементів.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. До комп'ютерного центру, який працює в реальному масштабі часу, надходить у середньому 30 одиниць інформації за 1 хв.

1.1.Обчислити ймовірності того, що за 2 хв до комп'ютерного центру надійде:

а) три одиниці інформації;

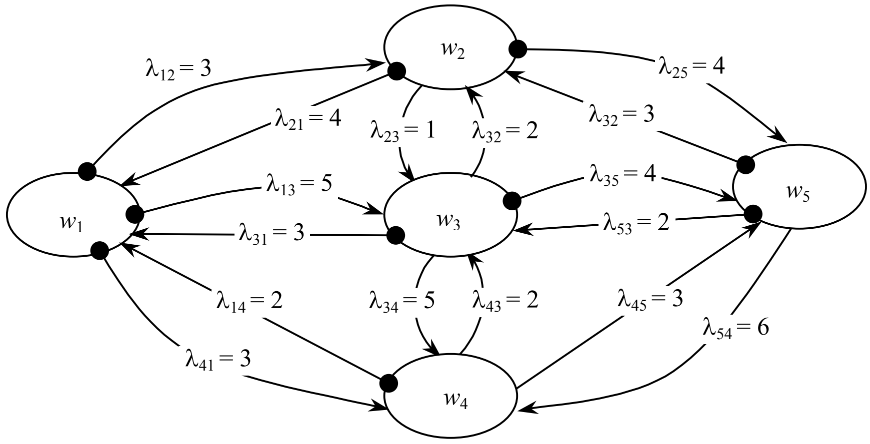
б) не більш як три одиниці інформації;

в) не менш як три одиниці інформації;

г) хоча б одна одиниця інформації.

1.2. Визначити M, D, σ для цілочислової випадкової величини k — кількості одиниць інформації, які надійдуть до комп'ютерного центру.

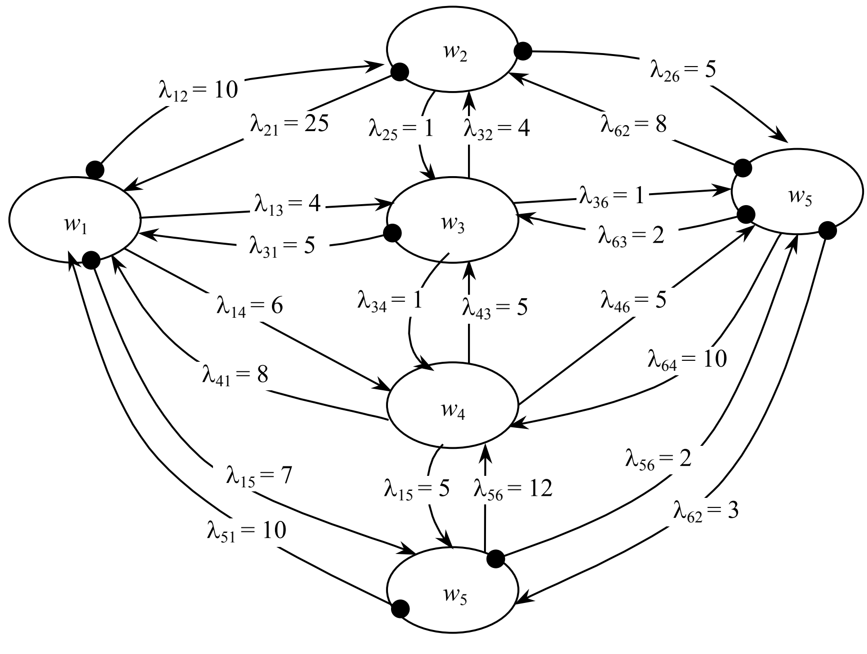
2. Задано ймовірнісний графік, який зображає марковський процес із дискретними станами і неперервним часом t (див. рисунок).



2.1. Побудувати стохастичну модель марковського процесу для стаціонарного режиму роботи системи.

2.2. Визначити P_k $\left(k = \overline{1,5}\right)$ для стаціонарного режиму.

3. Задано ймовірнісний граф, який зображає марковський процес із дискретними станами і неперервним часом t, що відбувається в певній системі S (див. рисунок).



3.1. Записати стохастичну модель для системи, яка перебуває в динамічному стані, і для стаціонарного режиму.

3.2. Визначити P_i $\left(i = \overline{1,6}\right)$ станів системи.

3.3. Оцінити економічну ефективність роботи системи для стаціонарного режиму, коли відомо, що:

а) перебуваючи у стані w_1, система матиме прибуток 5500 грн год;

б) у станах w_2, w_3 прибуток зменшиться на 2999 грн;

в) у станах w_4, w_5 система зазнає збитків у сумі 1500 грн;

г) у стані w_6 збитки зростають на 1000 грн.

4. Три верстати-автомати № 1, №2 і №3 виготовляють однотипні деталі. Кожний із верстатів незалежно один від решти у випадкові моменти часу t виходить із ладу, причому його роботоздатний стан миттєво відновлюється. Моменти виходу з ладу верстатів і відновлення їхньої роботоздатності утворюють пуассонівські потоки зі сталими інтенсивностями.

Розглядаються такі стани системи:

w_1 — усі верстати справні;
w_2 — верстати № 1, № 2 справні, а № 3 — у стані ремонту;
w_3 — верстати № 1, № 3 справні, а № 2 — у стані ремонту;
w_4 — верстати № 2, № 3 справні, а № 1 — у стані ремонту;
w_5 — верстат № 1 справний, а № 2, № 3 — у стані ремонту;
w_6 — верстат № 2 справний, а № 1, № 3 — у стані ремонту;
w_7 — верстати № 3 справний, а № 1, № 2 — у стані ремонту;
w_8 — усі три верстати перебувають у стані ремонту.

Інтенсивності переходів системи з одного стану в інший такі:

$$\lambda_{12}=4;\quad \lambda_{21}=5;\ \lambda_{25}=6;\quad \lambda_{52}=8;\ \lambda_{37}=2;\ \lambda_{73}=5;\ \lambda_{58}=1;\quad \lambda_{85}=5;$$
$$\lambda_{13}=5;\quad \lambda_{31}=8;\ \lambda_{26}=1;\quad \lambda_{62}=4;\ \lambda_{47}=6;\ \lambda_{76}=10;\ \lambda_{68}=8;\quad \lambda_{86}=10;$$
$$\lambda_{14}=2;\quad \lambda_{41}=5;\ \lambda_{35}=4;\quad \lambda_{53}=5;\ \lambda_{46}=4;\ \lambda_{64}=10;\ \lambda_{78}=1;\quad \lambda_{81}=2.$$

4.1. Побудувати ймовірнісний граф переходів системи.
4.2. Описати стохастичну модель для стаціонарного режиму роботи системи.
4.3. Визначити стаціонарні ймовірності $P_i\left(i=1,\ 2\right)$ станів системи.
4.4. Оцінити економічну ефективність роботи системи за 8 годин робочого дня, якщо прибуток від верстата, що працює, становить $q_1=200$ грн/год., а його ремонт коштує 120 грн.

5. Задано матрицю

$$H=\begin{array}{c}\\ \lambda_{1j}\\ \lambda_{2j}\\ \lambda_{3j}\\ \lambda_{4j}\\ \lambda_{5j}\\ \lambda_{6j}\\ \lambda_{7j}\\ \lambda_{8j}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}\lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \lambda_{i3} & \lambda_{i4} & \lambda_{i5} & \lambda_{i6} & \lambda_{i7} & \lambda_{i8}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 10 & 8 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 10 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 10 & 6 & 8\\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 9 & 0\end{pmatrix}\end{array},$$

елементами якої є інтенсивності λ_{ij} переходів системи S з одного стану в інший, які відбуваються у випадкові моменти часу t.

5.1. Побудувати ймовірнісний граф марковського процесу з дискретними станами і неперервним часом t, який відбувається в системі S.
5.2. Записати стохастичну модель роботи системи S у стаціонарному режимі і визначити ймовірності P_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ станів.
5.3. Оцінити економічну ефективність роботи системи в стаціонарному режимі, коли відомо, що:
а) у стані w_1 прибуток становитиме 12 000 грн/год;
б) у станах w_2, w_3, w_4 дохід системи зменшиться на 6000 грн;
в) у станах w_5, w_6, w_7 система зазнає збитків на суму 4000 грн;
г) у стані w_8 збитки збільшуються на 2500 грн.

6. Задано матрицю

$$H=\begin{array}{c}\\ \lambda_{1j}\\ \lambda_{2j}\\ \lambda_{3j}\\ \lambda_{4j}\\ \lambda_{5j}\\ \lambda_{6j}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \lambda_{i3} & \lambda_{i4} & \lambda_{i5} & \lambda_{i6}\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3\\ 10 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 25 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 8 & 10 & 0 & 4\\ 8 & 0 & 0 & 8 & 10 & 0\end{pmatrix}\end{array},$$

елементами якої є інтенсивності λ_{ij} переходів системи S із одного стану в інший, що відбуваються у випадкові моменти часу t.

6.1. Побудувати ймовірнісний граф марковського процесу з дискретними станами і неперервним часом t, який відбувається в системі S.

6.2. Записати стохастичну модель роботи системи S у стаціонарному режимі і визначити ймовірності P_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ станів.

6.3. Оцінити економічну ефективність роботи системи в стаціонарному режимі, коли відомо, що:

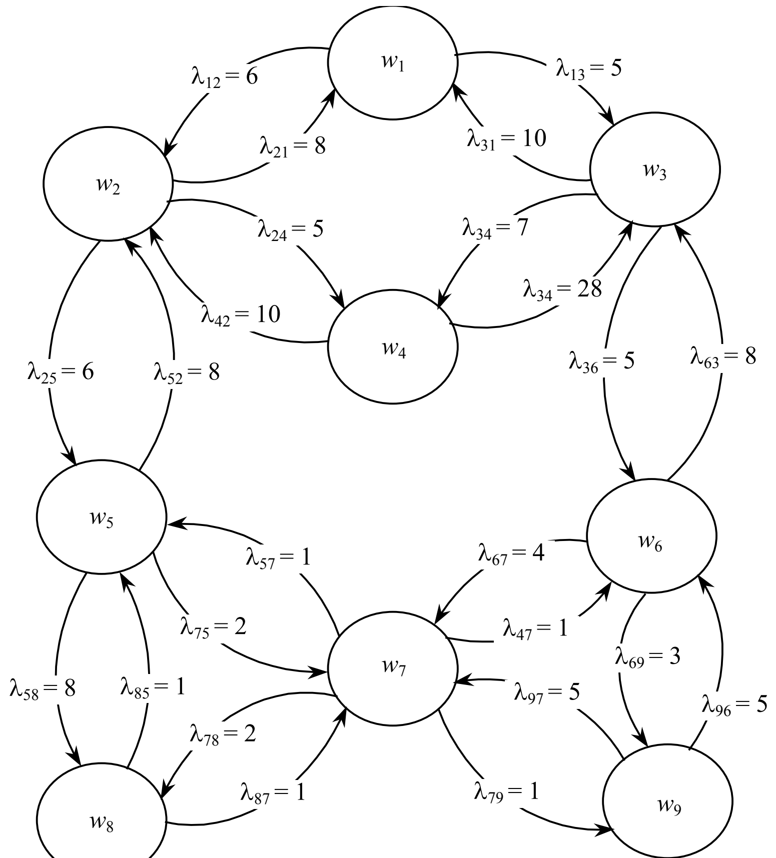
а) у разі перебування системи у стані w_1 прибуток становить 10 500 грн/год;

б) у станах w_2, w_3 дохід системи зменшується на 5000 грн;

в) у станах w_4, w_5 система зазнає збитків на суму 4000 грн;

г) в стані w_6 збитки збільшуються на 2500 грн.

7. Задано ймовірнісний граф, який зображує марковський процес із дискретними станами і неперервним часом, що відбувається в системі S (див. рисунок).



7.1. Побудувати стохастичні моделі для динамічного та стаціонарного режимів роботи системи.

7.2. Визначити ймовірності P_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ станів системи для стаціонарного режиму роботи системи.

7.3. Оцінити ефективність роботи системи за годину роботи, коли відомо, що:

а) перебуваючи у стані w_1, система має дохід в 1000 грн;

б) перебуваючи у станах w_2, w_3, w_4, система має дохід 500 грн;

в) перебуваючи у станах w_5, w_6, w_7, система зазнає збитків у сумі 600 грн;

г) перебуваючи у станах w_8, w_9, система зазнає збитків у сумі 800 грн.

РОЗДІЛ 9

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати про системи масового обслуговування (СМО) та пріоритетність в обслуговуванні;
- знати основні операційні характеристики СМО та критерії оцінювання ефективності їх роботи;
- знати концептуальні положення побудови наступних економіко-математичних моделей:

1) стохастичної моделі процесу народження-загибелі;
2) моделі Ерланга;
3) стохастичної моделі СМО $M/M/1/k_1$;
4) стохастичної моделі СМО $M/M/m/\infty$;
5) стохастичної моделі СМО $M/M/m/k_1$;
6) стохастичної моделі обслуговування автопарку;
7) стохастичної моделі $M/M/1/\infty$ із надійним каналом обслуговуванням;
8) стохастичної моделі $M/M/1/\infty$ із ненадійним каналом обслуговування ;

- вміти використовувати метод імовірнісних твірних функцій при розв'язуванні задач СМО;
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

9.1. Системи масового обслуговування (СМО), загальні характеристики

У повсякденному житті часто доводиться стикатися з роботою своєрідних систем, які дістали назву ***систем масового обслуговування*** (СМО). Прикладами СМО можуть бути телефонні станції, лікарні, ремонтні майстерні, білетні каси, річкові та морські порти, магазини, перукарні тощо.

Такі системи досліджуються в ***теорії масового обслуговування*** (ТМО) — галузь прикладної математики, полем діяльності якої є побудова стохастичних моделей для СМО.

В основі стохастичних моделей для СМО лежать Марковські процеси народження-загибелі із неперервним часом. Марковські процеси народження-загибелі в разі виконання певних умов випливають із марковських процесів, описуваних рівнянням Колмогорова. Головною умовою для цього процесу є його можливі переходи з певного фіксованого стану, наприклад w_k, лише в сусідній стан w_{k+1} або w_{k-1}, які відбуваються з певною ймовірністю.

Спочатку об'єктами моделювання таких процесів були ті зміни, що відбувалися в часі в певному обсязі популяції, тобто зміни кількості певного виду організмів.

При цьому припускається, що процес народження k-ї одиниці організму моделюється пуассонівським потоком з інтенсивністю λ_k, а процес її загибелі — експоненціальним законом розподілу з параметром μ_k.

Такі припущення цілком задовільно узгоджуються з реальними процесами народження-загибелі, що відбуваються в певному обмеженому просторі (обсязі) популяції, а математичний апарат, за допомогою якого описується стохастична модель цього процесу, можна використати для розв'язування широкого кола задач інженерного та економічного характеру.

9.2. Стохастична модель процесу народження-загибелі

Перейдемо до самої процедури побудови стохастичної моделі процесу народження-загибелі. Нехай обсяг популяції дорівнює k одиниць однотипних певних організмів, а отже, процес перебуває у стані w_k.

За малий проміжок часу Δt процес може перейти до стану w_{k+1}, який відповідає випадковій події — народження однієї одиниці організму з певною ймовірністю, або до стану w_{k-1}, що відповідає випадковій події — загибелі однієї одиниці організму з певною ймовірністю, або з певною ймовірністю залишитися в стані w_k, тобто кількість цих організмів не зміниться.

Позначимо через $p_k(t)$ імовірність того, що в момент часу t обсяг популяції дорівнював k одиницям — процес перебував у стані w_k. Надамо часу t приросту Δt і знайдемо ймовірність $P_k(t+\Delta t)$ того, що в момент часу $t+\Delta t$ кількість одиниць знову дорівнюватиме k. Існують лише три способи досягти такого стану за проміжок часу Δt:

1) у момент часу t обсяг популяції дорівнював $k+1$ одиниць і протягом проміжку Δt одна з них загинула з імовірністю

$$P_{k+1}(\Delta t) = \mu_{k+1}\Delta t + \alpha(\Delta t), \tag{9.1}$$

а отже, процес зі стану w_{k+1} перейшов у стан w_k з імовірністю (9.1);

2) у момент часу t обсяг популяції дорівнював $k-1$ одиницям і протягом часу Δt одна одиниця організму народилася з імовірністю

$$P_{k-1}(\Delta t) = \lambda_{k-1}\Delta t + \alpha(\Delta t), \tag{9.2}$$

а отже, процес зі стану w_{k-1} перейде у стан w_k з імовірністю (9.2);

3) у момент часу t обсяг популяції дорівнював k одиницям і за проміжок часу Δt цей обсяг не змінився, тобто жодна одиниця не загинула і не народилася.

Імовірність такої події

$$P_k(t+\Delta t) = 1 - \mu_k\Delta t - \lambda_k\Delta t + \alpha(\Delta t). \tag{9.3}$$

Отже, у разі настання цієї події з імовірністю (9.3) процес у момент часу t перебуває у стані w_k і протягом проміжку часу Δt в цьому самому стані й залишається.

Вважаючи, що в момент часу t процес з імовірністю $P_k(t)$ перебував у стані w_k, з імовірністю $P_{k+1}(t)$ — у стані w_{k+1} і з імовірністю $P_{k-1}(t)$ — у стані w_{k-1}, зображуємо переходи процесу народження-загибелі $(w_{k+1} \to w_k,\ w_{k-1} \to w_k,\ w_k \to w_k)$ та відповідні їм імовірності ймовірнісним графом (рис. 9.1).

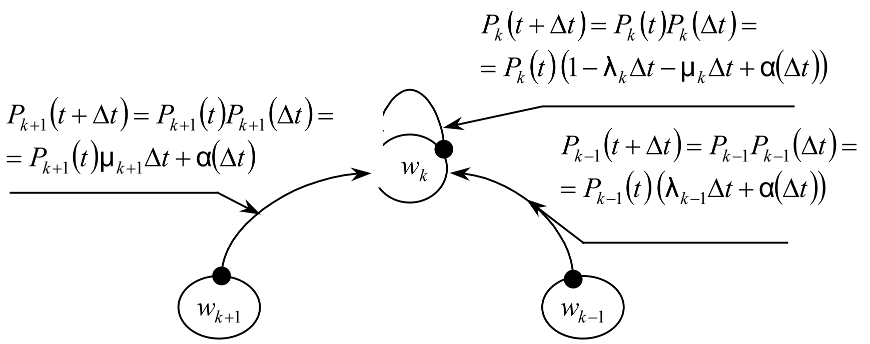


Рис. 9.1

Зокрема, для $k = 0$ імовірнісний граф зображено на рис. 9.2.

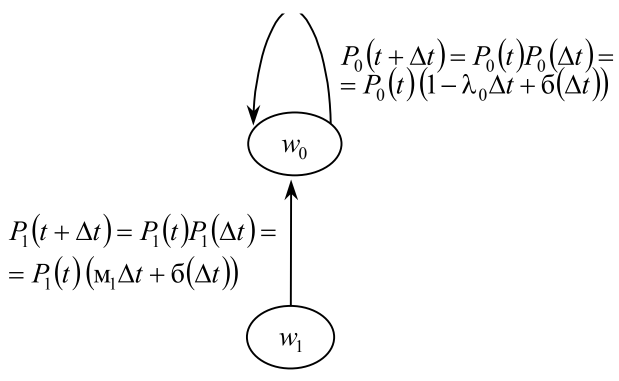


Рис. 9.2

Згідно з наведеними міркуваннями дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} P_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) + P_1(t)P_1(\Delta t), \\ P_k(t+\Delta t) = P_k(t)P_k(\Delta t) + P_{k+1}(t)P_{k+1}(\Delta t) + P_{k-1}(t)P_{k-1}(\Delta t). \end{cases} \tag{9.4}$$

Використовуючи (9.1), (9.2) і (9.3), зводимо систему (9.4) до такого вигляду:

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\left(1-\lambda_0\Delta t+\alpha(\Delta t)\right)+P_1(t)\left(\mu_1\Delta t+\alpha(\Delta t)\right), \\
P_k(t+\Delta t) = P_k(t)\left(1-\lambda_k\cdot\Delta t-\mu_k\Delta t+\alpha(\Delta t)\right)+ \qquad\qquad \Rightarrow \\
\qquad\qquad + P_{k+1}(t)\left(\mu_k\cdot\Delta t+\alpha(\Delta t)\right)+P_{k-1}(t)\left(\lambda_{k-1}t+\alpha(\Delta t)\right).
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
P_0(t+\Delta t) = P_0(t)-\lambda_0\Delta t\,P_0(t)+\mu_1\Delta t\,P_1(t)+\left(P_0(t)+P_1(t)\right)\alpha(\Delta t), \\
P_k(t+\Delta t) = P_k(t)-\lambda_k\Delta t\,P_k(t)-\mu_k\Delta t\,P_k(t)+ \\
\qquad + \mu_{k+1}\Delta t\,P_{k+1}(t)+\lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t)+ \\
\qquad + \left(P_k(t)+P_{k+1}(t)+P_{k+1}(t)\right)\Delta t,
\end{cases} \tag{9.5}
$$

де $\alpha(\Delta t)$ — нескінченно мала величина вищого порядку порівняно з Δt. Систему (9.5) перепишемо в такому вигляді:

$$
\begin{cases}
P_0(t+\Delta t)-P_0(t) = -\lambda_0\Delta t\,P_0(t)+\mu_1\Delta t\,P_1(t)+\left(P_0(t)+P_1(t)\right)\,\alpha(\Delta t), \\
P_k(t+\Delta t)-P_k(t) = -(\lambda_k+\mu_k)\Delta t\,P_k(t)+\mu_{k+1}\Delta t\,P_{k+1}(t)+ \\
\qquad + \lambda_{k-1}\Delta t\,P_{k-1}(t)+\left(P_k(t)+P_{k+1}(t)+P_{k-1}(t)\right)\,\alpha\Delta t.
\end{cases} \tag{9.6}
$$

Поділивши кожне рівняння системи (9.6) на Δt і спрямувавши Δt до нуля ($\Delta t\to 0$), дістанемо:

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t)+P_0(t)P_1(t)\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}, \\
\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t)+\left(P_k(t)+P_{k+1}(t)+P_{k-1}(t)\right)\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}.
\end{cases}
$$

Беручи до уваги, що $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t}=0$, дістаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\,P_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t)+\mu_1 P_1(t), \\
\dfrac{d\,P_k(t)}{dt} = -(\lambda_k+\mu_k)P_k(t)+\mu_{k+1}P_{k+1}(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t), \quad k=1,\,2.\,3,\,\ldots.
\end{cases} \tag{9.7}
$$

Система диференціальних рівнянь (9.7) є стохастичною (імовірнісною) моделлю марковського процесу народження-загибелі.

Узявши в системі (9.7) усі параметри $\mu_k=0$ ($k=1,\,2.\,3,\,\ldots$), дістанемо стохастичну модель процесу чистого народження:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t), \\
\dfrac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda_k P_k(t)+\lambda_{k-1}P_{k-1}(t), \quad k=1,\,2.\,3,\,\ldots.
\end{cases} \tag{9.8}
$$

9.3. Модель Ерланга та основні її числові характеристики

Модель Ерланга

Нехай у моделі (9.8) усі параметри $м_k = м = \mathrm{const},\ л_k = л = \mathrm{const}.$ Тоді дістаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\,P_0(t)}{dt} = -\lambda\,P_0(t)+\mu\,P_1(t), \\
\dfrac{d\,P_k(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_k(t)+\lambda\,P_{k-1}(t)+\mu\,P_{k+1}(t), \quad k=1,\,2.\,3,\,\ldots,
\end{cases} \tag{9.9}
$$

для якої, як і для системи (9.7), має виконуватись умова нормування

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \tag{9.10}$$

для будь-якого фіксованого моменту часу t.

Систему (9.9) називають ***моделлю Ерланга*** на честь датського інженера, який на початку XX сторіччя вперше використав марковські процеси народження-загибелі для розв'язування практичних задач у галузі телефонного зв'язку. І це стало поштовхом до використання цих процесів у інших галузях науки і техніки.

При $t \to \infty$ дістаємо:

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0 = \text{const}, \quad \lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k = \text{const},$$

тобто ймовірності станів не залежать від часу t, звідки випливає

$$\frac{d\,P_0(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d\,P_k(t)}{dt} = 0.$$

А отже, система диференціальних рівнянь перетворюється на однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda P_0 + \mu P_1, \\ 0 = -(\lambda + \mu) P_k + \mu \; P_{k+1} + \lambda \; P_{k-1}, \end{cases} \tag{9.11}$$

або

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\lambda + \mu) P_k = \mu \; P_{k+1} + \lambda \; P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases} . \tag{9.12}$$

Система моделює марковський процес у стаціонарному режимі, коли ймовірності не залежать від часу *t*. Тому ймовірності P_0, P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ називають ***стаціонарними***, або ***фінальними***.

На практиці при використанні моделі Ерланга передусім цікавляться стаціонарними ймовірностями та числовими характеристиками, які з ними пов'язані.

Основні числові характеристики моделі Ерланга

Щоб визначити основні числові характеристики для моделі Ерланга, введемо безрозмірну величину

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{9.13}$$

Тоді з урахуванням (9.13) систему (9.12) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{cases} \rho P_0 = P_1, \\ (1 + \rho) P_k = P_{k+1} + \rho P_{k-1}, \; k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} . \tag{9.14}$$

Послідовно розв'язуючи систему (9.14) відносно стаціонарних імовірностей P_k $(k \geq 1)$ із точністю до P_0, дістаємо:

$$\begin{aligned} &P_1 = \rho P_0, \\ &P_2 = \rho^2 P_0, \\ &P_3 = \rho^3 P_0, \\ &\vdots \\ &P_k = \rho^k P_0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{9.15}$$

Вважаючи, що число k прямує до нескінченності, використовуємо умову нормування:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_k + \ldots = 1. \qquad (9.16)$$

з урахуванням (9.15) рівність (9.16) запишемо у вигляді

$$P_0 + \rho P_0 + \rho^2 P_0 + \rho^3 P_0 + \ldots + \rho^k P_0 + \ldots = 1. \qquad (9.17)$$

Марковський процес народження-загибелі при $t \to \infty$ досягне стаціонарного стану лише за умови, що $\rho < 1$.

Беручи до уваги цю умову, із (9.17) визначаємо

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^k + \ldots} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k}.$$

А оскільки $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^k + \ldots$ — нескінченна сума спадної геометричної прогресії, то

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}. \qquad (9.18)$$

Таким чином, дістаємо

$$P_0(t) = 1 - \rho. \qquad (9.19)$$

З урахуванням (9.15) визначаємо:

$$\begin{aligned} &P_1 = \rho\,(1-\rho),\\ &P_2 = \rho^2\,(1-\rho),\\ &P_3 = \rho^3\,(1-\rho),\\ &\vdots\\ &P_k = \rho^k\,(1-\rho).\\ &\vdots \end{aligned} \qquad (9.20)$$

Математичне сподівання для цієї моделі подається у вигляді

$$M(k) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k (1-\rho) = (1-\rho)\,\rho \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k-1}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{d}{d\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{1}{(1-\rho)^2},$$

то

$$M(k) = (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Отже, математичне сподівання для моделі Ерланга визначається за формулою

$$M(k) = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (9.21)$$

Для визначення дисперсії знаходимо

$$M(k^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \rho^k (1-\rho) = (1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \rho^k.$$

Подамо суму $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \rho^k$ у такому вигляді:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2\rho^k = \rho^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho^{k-2} + \rho\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}.$$

Тепер

$$M(k^2) = (1-\rho)\,\rho^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho^{k-2} + (1-\rho)\rho\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k-1} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{1}{(1-\rho)^2};$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\rho^{k-2} = \frac{d^2}{d\rho^2}\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k} = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{(1-\rho)^2}\right) = \frac{2}{(1-\rho)^3},$$

то

$$M(k^2) = (1-\rho)\rho^2 \frac{2}{(1-\rho)^3} + (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{2\rho^2+\rho-\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^2}.$$

Тоді дисперсія набирає вигляду:

$$D(k) = M(k^2) - M^2(k) = \frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

Таким чином, маємо

$$D(k) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}; \qquad (9.22)$$

$$\sigma(k) = \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \qquad (9.23)$$

9.4. Системи масового обслуговування та пріоритетність в обслуговуванні

Кожна СМО складається із певної кількості обслуговуючих приладів, які називають ***каналами обслуговування***, узагальнюючи в такий спосіб поняття обслуговуючого об’єкта. Як канал обслуговування можна розглядати лінію зв’язку, комп’ютерний центр з обробки інформації, продавця магазину, касира, ліфтера і т. ін.

Будь-яку СМО призначено для обслуговування потоку вимог, які надходять у випадкові моменти часу. ***Вимоги*** — це узагальнена назва реальних об’єктів, які потребують обслуговування, а саме, скажімо, літаки, що чекають на звільнення злітної смуги аеродрому; судна в черзі на розвантаженні в морському або річковому порту; клієнти, що чекають на обслуговування в перукарні, лікарні, магазині, і т. ін.

Час, який витрачається на обслуговування вимоги каналом, у загальному випадку є випадковою величиною. Після закінчення обслуговування вимоги, яка залишає систему, канал готовий до обслуговування наступної вимоги. Оскільки вимоги надходять до системи у випадкові моменти часу, то канал (за умови одноканальної СМО) не в змозі одночасно їх обслужити, тому на вході до нього вимоги утворюють чергу.

Стан СМО змінюється стрибками в моменти часу, коли до неї надходять нові вимоги або коли обслужені каналом вимоги залишають систему. Значно спрощується математичний аналіз СМО, якщо процес її роботи є марковським.

Розглянемо основні складові СМО.

Вхідний потік вимог. Вважається, що вимоги, які надходять у систему на обслуговування у випадкові моменти часу, утворюють пуассонівський потік з інтенсивністю λ. До системи може надходити не один, а кілька пуассонівських потоків вимог. У цьому випадку для i-го потоку інтенсивність позначають λ_i.

Механізм обслуговування. Час обслуговування вимоги каналом системи є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей із параметром μ.

Це твердження можна обґрунтувати так. Нехай $\mu\Delta t$ — імовірність того, що за час Δt канал обслуговування вимоги закінчиться. Тоді ймовірність протилежної події, яка полягає в тому, що обслуговування за цей проміжок часу не закінчиться, становитиме $(1-\mu\Delta t)$.

Нехай тепер $P(t)$ — імовірність того, що обслуговування вимоги не закінчиться за час t. Тоді $P(t+\Delta t)$ — імовірність того, що обслуговування не закінчиться за час $t+\Delta t$, становитиме:

$$P(t+\Delta t)=P(t)(1-\mu\Delta t),$$

або

$$P(t+\Delta t)=P(t)-\mu\Delta t P(t)\Rightarrow P(t+\Delta t)-P(t)=-\mu\Delta t P(t)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=-\mu P(t)\rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=-\mu P(t)\Rightarrow \frac{d\,P(t)}{dt}=-\mu P(t)\Rightarrow \frac{d\,P(t)}{P(t)}=-\mu dt.$$

Розв'язком цього диференціального рівняння буде $P(t)=Ce^{-\mu t}$, де C знаходимо з умови нормування, оскільки обслуговування однієї вимоги неодмінно колись закінчиться.

Отже, маємо:

$$\int_0^\infty Ce^{-\mu t}dt=1\Rightarrow C=\frac{1}{\int_0^\infty Ce^{-\mu t}dt}=\mu.$$

Таким чином:

$$P(t)=\mu e^{-\mu t},$$

а це є щільність імовірностей для експоненціального закону розподілу ймовірностей.

Якщо до системи надходить i потоків вимог, то в загальному випадку параметри λ, μ для кожного потоку будуть різними. Тому вводиться позначення λ_i μ_i, де i — номер потоку. Слід при цьому наголосити: для того щоб системи досягли стаціонарного режиму (коли всі ймовірності станів не залежатимуть від часу), необхідним є виконання умови

$$\rho_i=\frac{\lambda_i}{\mu_i}<1, \tag{9.24}$$

де параметр ρ називають ***коефіцієнтом завантаження системи***.

Дисципліна обслуговування. Дисципліна обслуговування вимог вводиться залежно від специфіки системи. Якщо до системи надходить один пуассонівський потік, то цілком логічною буде така дисципліна: вимога, яка надійшла до системи першою, першою і обслуговуватиметься, а за наявності черги — чекатиме свого часу. А коли до системи надходять кілька потоків вимог, то для їх обслуговування вводиться ***пріоритетність***. Наприклад, три потоки вимог групуються у три черги: прості, з відносним та абсолютним пріоритетом в обслуговуванні. Вимоги з відносним пріоритетом мають перевагу в обслуговуванні перед простими, а вимоги з абсолютним пріоритетом — над простими та вимогами з відносними пріоритетами.

Згідно зі сказаним доходимо такого висновку: за певного рівня формалізації між процесами, які відбуваються в СМО, і процесами, які описують зміни в певному обсязі популяції, за умов $\lambda_k=\lambda=\text{const}$, $\mu_к=\mu=\text{const}$ існує аналогія. Отже, імовірнісна модель, побудована для процесу народження-загибелі, який відбувається в деякому обсязі популяції, буде в певному наближенні аналогічним до процесів, які відбуваються в СМО з одним каналом обслуговування, одним пуассонівським потоком вимог та експоненціальним законом розподілу часу, що витрачається на їх обслуговування. Ця модель є тим фундаментом, на якому створюються стохастичні моделі і для складніших систем обслуговування, які розглядатимуться далі.

9.5. Основні операційні характеристики СМО та критерії оцінювання ефективності їх роботи

У реальних задачах практичний інтерес становить здебільшого робота СМО в стаціонарному (стабільному) режимі, коли поводження цих систем не залежить від часу t.

У цьому режимі нас цікавлять розглянуті далі характеристики системи, які називають ***операційними***.

- P_0 — імовірність того, що в системі відсутні вимоги, а отже, канал обслуговування не працює;
- P_k — імовірність того, що в системі перебуває k вимог ;
- P_{k_1} — імовірність того, що в системі перебуває k_1 вимог і при цьому нові їх надходження система не приймає, — так звана ймовірність втрат вимог СМО;
- математичне сподівання кількості вимог, які перебувають у системі, тобто їхня середня кількість

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n; \tag{9.25}$$

- довжина черги (середня кількість вимог, які перебувають у черзі):

$$L = M - \rho; \tag{9.26}$$

- дисперсія кількості вимог у системі, яка на практиці використовується дуже рідко:

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n - M^2; \tag{9.27}$$

- середня тривалість перебування вимог у системі:

$$W_1 = \frac{M}{\lambda}; \tag{9.28}$$

- середня тривалість перебування вимоги в черзі:

$$W_2 = W_1 - \frac{1}{\mu}; \tag{9.29}$$

- середня кількість каналів, зайнятих обслуговуванням вимог (коли в СМО є m каналів):

$$N_1 = \sum_{k=1}^{m} k P_k; \tag{9.30}$$

- середня кількість каналів, вільних від обслуговування:

$$N_2 = \sum_{k=0}^{m} (m-k) P_k, \tag{9.31}$$

де P_k — імовірність того, що в системі задіяні k-каналів обслуговування.

З-поміж наведених операційних характеристик немає економічного фактора, який у реальних задачах відіграє визначальну роль, коли йдеться про вибір оптимальних параметрів системи λ, μ. Тому вводяться критерії, які враховують цей фактор.

1. Функція вартостей втрат для системи, пов'язана з очікуванням вимог на обслуговування, простого каналу обслуговування, збитки через втрату вимог:

$$G_{\text{втр}} = \left(q_{\text{п.к}} N_1 + q_{\text{з}} P_{k_1} \lambda + q_{\text{к}} N_2 + q_{\text{о.ч}} L\right) \cdot T, \tag{9.32}$$

де $q_{\text{п.к}}$ — вартість одиниці часу простого каналу;

$q_{\text{з}}$ — вартість збитків через втрату вимог унаслідок обмеженості черги;

$q_{\text{к}}$ — вартість обслуговування вимоги;

$q_{\text{о.ч}}$ — вартість втрат, пов'язаних з очікуванням вимоги в черзі;

T — інтервал часу, для якого визначається $G_{\text{втр}}$.

2. Критерій економічної ефективності СМО

$$E = \lambda \cdot P_{k_1} \cdot C \cdot T - G_{\text{втр}}, \tag{9.33}$$

де C — економічний ефект, одержаний при обслуговуванні однієї вимоги,

$$P_{\text{к}} = 1 - P_{\text{о}}.$$

9.6. Скорочена символіка позначень Кендалла в теорії масового обслуговування

У 1953 році Кендалл запропонував зручну форму запису систем масового обслуговування, яка враховує їх класифікацію. В її основу покладено такий символьний запис:

$$A / B / m / k_1. \tag{9.34}$$

Тут символ A інформує про тип потоку подій. Він може бути пуассонівським, Ерланга, регулярним і т. ін.; B — символ закону розподілу ймовірностей часу, який витрачається на обслуговування вимог (цей закон може бути експоненціальним, рівномірним і т. ін.); m — кількість каналів обслуговування ($m = 1, 2, 3, \ldots$); символ k_1 інформує про те, що черга вимог не перевищує числа k_1.

Так, у разі пуассонівського потоку вимог та експоненціального закону розподілу $A = M$, $B = M$. Тоді запис (9.34) набирає такого вигляду:

$$M / M / m / k_1. \tag{9.35}$$

Далі розглянемо найпростіші СМО та їхні стохастичні моделі. До цих систем можна віднести приватні фірми з обслуговування населення у сфері побуту, магазини, кафе, лікарні тощо. Як бачимо, перелічені об’єкти дослідження різні за своєю структурою та призначенням, але їх об’єднує в один клас задач істотна ознака — обслуговування, яке й досліджує прикладна математична наука ТМО.

9.7. Стохастична модель $M / M / 1 / k_1$

Загальна інформація про досліджувану систему

Досліджується СМО, до якої надходить пуассонівський потік вимог із параметром λ. Час обслуговування кожної вимоги є неперервною випадковою величиною, що має експоненціальний закон розподілу ймовірностей із параметром μ. Система має у своєму розпорядженні один канал, і при цьому обслуговуються вимоги по черзі, а їхня кількість у черзі не повинна перевищувати числа k_1. Отже, коли в системі перебуває k_1 вимог, то додаткові вимоги, які надходитимуть до системи, не прийматимуться. Джерело постачання вимог у СМО вважається необмеженим.

Стохастична модель у динаміці та стаціонарному режимі

Залежно від часу t стани такої системи описуються системою диференціальних рівнянь першого порядку вигляду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\,P_0(t)}{d\,t} = -\lambda P_0(t) + \mu\,P_1(t), \\
\dfrac{d\,P_1(t)}{d\,t} = -(\lambda+\mu)\,P_1(t) + \lambda P_0(t) + \mu\,P_2(t), \\
\vdots \\
\dfrac{d\,P_n(t)}{d\,t} = -(\lambda+\mu)\,P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu\,P_{n+1}(t), \qquad n < k_1 \\
\dfrac{d\,P_{n+1}(t)}{d\,t} = -(\lambda+\mu)\,P_{n+1}(t) + \lambda P_n(t) + \mu\,P_{n+2}(t), \\
\vdots \\
\dfrac{d\,P_{k_1-1}(t)}{d\,t} = -(\lambda+\mu)\,P_{k_1-1}(t) + \lambda P_{k_1-2}(t) + \mu\,P_{k_1}(t), \\
\dfrac{d\,P_{k_1}(t)}{d\,t} = -\mu\,P_{k_1}(t) + \lambda P_{k_1-1}(t).
\end{cases}
\tag{9.36}
$$

Тут $P_0(t)$ — імовірність того, що в системі вимоги відсутні;

$P_n(t)$ — імовірність того, що в системі перебуває n вимог.

На практиці, як правило, цікавляться ймовірностями станів системи та пов’язаними з ними операційними характеристиками в стаціонарному режимі роботи системи. У цьому разі

$$
\frac{d\,P_n(t)}{d\,t} = 0, \quad P_n(t) = P_n = \text{const} \;\; (n = 0, 1, 2, \ldots, k_1),
$$

а система (6.36) набирає такого вигляду:

$$
\begin{cases}
0 = -\lambda\,P_0 + \mu\,P_1, \\
0 = -(\lambda+\mu)\,P_1 + \lambda\,P_0 + \mu\,P_2, \\
\vdots \\
0 = -(\lambda+\mu)\,P_n + \lambda\,P_{n-1} + \mu\,P_{n+1}, \quad n < k_1, \\
0 = -(\lambda+\mu)\,P_{n+1} + \lambda\,P_n + \mu\,P_{n+2}, \\
\vdots \\
0 = -(\lambda+\mu)\,P_{k_1-1} + \lambda\,P_{k_1-2} + \mu\,P_{k_1,} \\
0 = -\mu P_{k_1,} + \lambda\,P_{k_1-1}.
\end{cases}
\tag{9.37}
$$

Отже, дістали однорідну систему алгебраїчних рівнянь, яку, увівши параметр $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1,$ можемо записати так:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \rho\,P_0, \\
&P_2 = \rho^2\,P_0, \\
&\vdots \\
&P_n = \rho^n\,P_0, \\
&P_{n+1} = \rho^{n+1}\,P_0, \\
&\vdots \\
&P_{k_1-1} = \rho^{k_1-1}\,P_0, \\
&P_{k_1} = \rho^{k_1}\,P_0.
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

Отже, усі ймовірності станів системи визначаються з точністю до P_0. Скориставшись умовою нормування

$$\sum_{k=0}^{k_1} P_k = P_0 + P_1 + \ldots + P_n + P_{n+1} + \ldots + P_{k_1-1} + P_{k_1} = 1 \qquad (9.39)$$

і підставивши вирази для $P_n = \rho^n P_0 \;\; (n = 1, 2, \ldots, k)$, дістанемо:

$$P_0 + \rho P_0 + \ldots + \rho^n P_0 + \rho^{n+1} P_0 + \ldots + \rho^{k_1-1} P_0 + \rho^{k_1} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 \left(1 + \rho + \ldots + \rho^n + \rho^{n+1} + \ldots + \rho^{k_1-1} + \rho^{k_1}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \ldots + \rho^n + \rho^{n+1} + \ldots + \rho^{k_1-1} + \rho^{k_1}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{k_1} \rho^k}. \qquad (9.39а)$$

У знаменнику формули (9.39а) маємо суму спадної геометричної прогресії, а тому

$$\sum_{k=0}^{k_1} \rho^k = 1 + \rho + \ldots + \rho_n + \rho^{n+1} + \ldots + \rho^{k_1-1} + \rho^{k_1} = \frac{1 - \rho^{k_1+1}}{1 - \rho}. \qquad (9.40)$$

З урахуванням (9.40) дістанемо:

$$\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}},\\
&P_1 = \rho\frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}},\\
&\vdots\\
&P_n = \rho^n \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}},\\
&P_{n+1} = \rho^{n+1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}},\\
&\vdots\\
&P_{k_1-1} = \rho^{k_1-1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}},\\
&P_{k_1} = \rho^{k_1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}}.
\end{aligned} \qquad (9.41)$$

Якщо $\lambda = \mu$, то $\rho = 1$. Як вигляд будуть мати ймовірності у цьому випадку?
Оскільки

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}},$$

то

$$\lim_{\rho \to 1} P_0 = \lim_{\rho \to 1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\rho \to 1} \frac{(1-\rho)'}{\left(1-\rho^{k_1+1}\right)'} = \frac{1}{k_1+1}.$$

Тут для розкриття невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ використали правило Лопіталя.

Таким чином, маємо

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}}, & \rho < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{k_1+1}, & \rho = 1. \end{cases} \qquad (9.42)$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}}, & \rho < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{k_1+1}, & \rho = 1. \end{cases} \qquad (9.43)$$

Операційні характеристики системи

Визначимо основні операційні характеристики системи.

1. Математичне сподівання. Математичне сподівання визначимо для двох випадків: $\rho < 1$ і $\rho = 1$.

а) ***Математичне сподівання при*** $\rho < 1$:

$$M = \sum_{n=0}^{k_1} nP_n = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots + nP_n + \ldots + k_1 P_{k_1} =$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}}\left(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots + n\rho^n + \ldots + k_1\rho^{k_1}\right) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}}\rho\left(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots + n\rho^{n-1} + \ldots + k_1\rho^{k_1-1}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Ураховуючи, що} \\ 1 + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots + n\rho^{n-1} + \ldots + k_1\rho^{k_1-1} = \\ = \dfrac{d}{dp}\left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^n + \ldots + \rho^{k_1}\right) = \dfrac{d}{dp}\dfrac{\rho - \rho^{k_1+1}}{1-\rho} = \\ = \dfrac{[1-(k_1+1)\rho^{k_1}](1-\rho) + \left(\rho - \rho^{k_1+1}\right)}{(1-\rho)^2} = \dfrac{1-(k_1+1)\rho^{k_1} + k_1\rho^{k_1+1}}{1-\rho}, \\ (\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^n + \ldots + \rho^{k_1} = \dfrac{\rho - \rho^{k_1+1}}{1-\rho} \\ \text{як сума спадної геометричної прогресії), дістаємо} \end{array} \right| = \frac{\rho}{1-\rho^{k_1+1}}\frac{1-(k_1+1)\rho^{k_1} + \rho^{k_1+1}k_1}{1-\rho}.$$

Отже,

$$M = \frac{\rho}{\left(1-\rho^{k_1+1}\right)}\frac{1-(k_1+1)\rho^{k_1} + \rho^{k_1+1}k_1}{1-\rho}.$$

б) ***Математичне сподівання при*** $\rho = 1$.

Оскільки $P_{K_1} = \dfrac{1}{k_1+1}$, $n - 0,1,\ldots,k_1$ то

$$M = \sum_{k=0}^{k_1} k\,P_{K_1} = \frac{1}{k_1+1}[1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + \ldots + (k_1-1) + k_1] = \frac{1}{k_1+1}\frac{k_1+1}{2}k_1 = \frac{k_1}{2}.$$

Тут $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + \ldots + (k_1-1) + k_1 = \dfrac{k_1+1}{2}, k_1$ — сума арифметичної прогресії. Таким чином, маємо

$$M = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\left(1-\rho^{k_1+1}\right)(1-\rho)}[1-(k_1+1)\rho^{k_1} + k_1\rho^{k_1+1}], & \rho < 1. \\ \dfrac{k_1}{2}, & \rho = 1. \end{cases} \tag{9.44}$$

2. Імовірності втрат системою вимог:

$$P_{k_1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}}\rho^{k_1}. \tag{9.45}$$

3. Середня кількість втрат вимог системи:

$$\overrightarrow{N} = k_1 \cdot P_{k_1}. \tag{9.46}$$

4. Імовірність того, що вимогу, яка надійшла до системи, не буде втрачено:

$$P_{n<k_1} = 1 - P_{k_1}. \tag{9.47}$$

Решта операційних характеристик визначається за наведеними раніше формулами.

Приклад 1. Комп'ютерний центр, який працює в реальному часі, обробляє інформацію, що надходить туди у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda = 0{,}4\left(\frac{1}{м/с}\right)$. Час обслуговування кожної одиниці інформації є випадковою величиною, яка має експоненціальний закон розподілу з параметром $\mu = 0{,}5\left(\frac{1}{м/с}\right)$. Інформація, яка надходить до центру для обробки комп'ютером, зберігається у блоці пам'яті обсягом у 10 одиниць інформації. Необхідно визначити:

1) імовірність того, що в комп'ютерному центрі немає вимог (інформації);
2) імовірність втрат вимог;
3) середню кількість втрачених вимог;
4) середню кількість вимог, які перебувають у системі;
5) середню кількість вимог, які перебувають у черзі (довжину черги);
6) середній час перебування вимоги в системі;
7) середній час перебування вимоги в черзі;
8) імовірність того, що вимога, яка надійшла до системи, не буде втраченою.

Розв'язання. Комп'ютерний центр розглянемо як одноканальну систему масового обслуговування з параметрами $\lambda = 0{,}4$; $\mu = 0{,}5$ і коефіцієнтом завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$. При цьому $k_1 = 10$.

Скористаємось наведеними раніше формулами для обчислення операційних характеристик системи.

1. Імовірність того, що в системі немає вимог:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}} \Rightarrow P_0 = \frac{1-0{,}8}{1-(0{,}8)^{11}} = \frac{0{,}2}{1-0{,}085899345} = \frac{0{,}2}{0{,}914100656} = 0{,}182820131.$$

Отже, маємо $P_0 \approx 0{,}1828.$

$$2.\ P_{k_1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{k_1+1}} \Rightarrow P_{10} = \frac{1-0{,}8}{1-(0{,}8)^{11}} == 0{,}182820131 \cdot 0{,}107374182 = 0{,}019630162.$$

Імовірність втрат вимог системою $P_{10} \approx 0{,}01963.$

3. Середня кількість втрачених вимог

$$\overrightarrow{N} = k_1 P_{k_1} \Rightarrow 10 \cdot P_{10} = 10 \cdot 0{,}01963 = 0{,}1963.$$

4. Середня кількість, яка перебуває в системі

$$M = \frac{\rho}{\left(1-\rho^{k_1+1}\right)(1-\rho)}[1-(k_1+1)\rho^{k_1} + k_1\rho^{k_1+1}] \Rightarrow M = \frac{0{,}8}{\left(1-(0{,}8)^{11}\right)(1-0{,}8)}[1-11\cdot(0{,}8)^{10} + 10\cdot(0{,}8)^{11}] =$$
$$= \frac{0{,}8}{0{,}914100656\ \cdot 0{,}2}\left(1-11\cdot 0{,}107374182 + 10\cdot 0{,}085899345\right) = 4{,}3758857 \cdot 0{,}677877448 = 2{,}966314231.$$

Отже, $M \approx 2{,}966.$

5. Середня кількість вимог, які перебувають у черзі:

$$L = M - \rho = 2{,}966 - 0{,}8 = 2{,}166.$$

6. Середній час перебування вимоги в системі

$$W_1 = \frac{M}{\lambda} = \frac{2{,}966}{0{,}4} = 7{,}415 \text{ м/с.}$$

7. Середній час перебування вимоги в черзі

$$W_2 = W_1 - \frac{1}{\mu} = 7{,}415 - \frac{1}{0{,}5} = 5{,}415 \text{ м/с.}$$

8. Імовірність того, що вимогу, яка надійшла до системи, не буде втрачено:

$$P_{n<k_1} = 1 - P_{k_1} \Rightarrow P_{n<10} = 1 - P_{10} = 1 - 0{,}019630162 = 0{,}980369839.$$

Наближено ця ймовірність: $P_{n<10} = 0{,}98037$.

Висновки. Знайдені значення операційних характеристик досліджуваної системи (комп'ютерного центру) дають підстави стверджувати, що система працює в режимі, близькому до оптимального. Про це свідчить:

1) мала ймовірність втрат вимог ($P_{10} \approx 0{,}01963$), яка становить 1,9 %;

2) порівняно невелика ймовірність того, що система не працює ($P_0 \approx 0{,}1828$). Отже, 18,3 % часу в системі відсутні вимоги для обслуговування.

9.8. Стохастична модель $M/M/m/\infty$

Загальна інформація про досліджувану систему

Досліджується система масового обслуговування, до якої надходить пуассонівський потік вимог з інтенсивністю λ. Система має m каналів обслуговування, які працюють паралельно. Час обслуговування — випадкова величина з експоненціальним законом розподілу ймовірностей із параметром μ.Оскільки m каналів обслуговують вимоги паралельно, то її швидкість збільшується в n раз і дорівнюватиме $n\mu$, якщо кількість вимог у системі $n < m$, а при $n \geq m$ буде $m\mu$.

Отже, така СМО належить до класу $M/M\,m/\infty$, тобто черга є необмеженою. Із сказаного раніше інтенсивність обслуговування можна подати так:

$$\mu^* = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n < m, \\ m\mu, & n \geq m. \end{cases} \qquad (9.48)$$

Стохастична модель системи в динаміці

Усі можливі стани такої системи описуються системою диференціальних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_1(t) + \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t), \\ \dfrac{dP_3(t)}{dt} = -(\lambda+2\mu)P_2(t) + \lambda P_1(t) + 3\mu P_3(t), \\ \vdots \\ \dfrac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda+k\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \quad \vdots \\ \dfrac{dP_{m-1}(t)}{dt} = -(\lambda+(m-1)\mu)P_{m-1}(t) + \lambda P_{m-2}(t) + m\mu P_m(t), \end{array}\right\} \mu^* = n\mu, \theta \leq n < m \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{dP_m(t)}{dt} = -(\lambda+m\mu)P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t) + m\mu P_{m+1}(t), \\ \dfrac{dP_{m+1}(t)}{dt} = -(\lambda+m\mu)P_{m+1}(t) + \lambda P_m(t) + m\mu P_{m+2}(t), \\ \vdots \\ \dfrac{dP_{n(t)}}{dt} = -(\lambda+\mu m)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu\, m P_{n+1}(t) \\ \vdots \end{array}\right\} \mu^* = m\mu, n = m. \end{cases} \qquad (9.49)$$

У стаціонарному режимі роботи СМО система (9.49) перетворюється на однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\lambda+\mu) P_1 = \lambda P_0 + 2\mu P_2, \\ (\lambda+2\mu) P_2 = \lambda P_1 + 3\mu P_3, \\ \vdots \\ (\lambda+k\mu) P_k = \lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1}, \\ \vdots \\ (\lambda+(m-1)\mu) P_{m-1} = \lambda P_{m-2} + m\mu P_m,\end{array}\right\} \mu^* = n\mu. \\ \left.\begin{array}{l}(\lambda+m\mu) P_m = \lambda P_{m-1} + m\mu P_{m+1}, \\ (\lambda+m\mu) P_{m+1} = \lambda P_m + m\mu P_{m+2}, \\ \vdots \\ (\lambda+\mu m) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu\, m P_{n+1}, \\ \vdots\end{array}\right\} \mu^* = m\mu.\end{array}\right. \tag{9.50}$$

Введемо коефіцієнт завантаження системи $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. У цьому разі система (9.50) набирає вигляду:

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\rho P_0 = P_1, \\ (\rho+1) P_1 = \rho P_0 + 2P_2, \\ (\rho+2) P_2 = \rho P_1 + 3P_3, \\ \vdots \\ (\rho+k) P_k = \rho P_{k-1} + (k+1) P_{k+1}, \\ \vdots \\ (\rho+(m-1)) P_{m-1} = \rho P_{m-2} + m P_m,\end{array}\right\} \mu^* = n\mu. \\ \left.\begin{array}{l}(\rho+m) P_m = \rho P_{m-1} + m P_{m+1}, \\ (\rho+m) P_{m+1} = \rho P_m + m P_{m+2}, \\ \vdots \\ (\rho+m) P_n = \rho P_{n-1} + m P_{n+1}, \\ \vdots\end{array}\right\} \mu^* = m\mu.\end{array}\right. \tag{9.51}$$

Операційні характеристики системи

1. Імовірності станів системи. Розв'язуючи однорідну систему алгебраїчних рівнянь (9.51) відносно P_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, визначаємо ймовірності з точністю до P_0.

Із першого рівняння системи маємо: $P_1 = \rho P_0$;

із другого рівняння: $(1+\rho)P_1 = \rho P_0 + 2P_2 \Rightarrow P_2 = \dfrac{1}{2}\rho^2 P_0$;

із третього рівняння: $(2+\rho)P_2 = \rho P_1 + 3P_3 \Rightarrow P_3 = \dfrac{1}{3\cdot 2}\rho^3 P_0$ і т. д.

При $k < m$ дістаємо

$$P_k = \frac{1}{k!}\rho^k P_0. \tag{9.52}$$

При $k = m$ маємо

$$P_m = \frac{1}{m!}\rho^m P_0. \tag{9.53}$$

За умови $n > m$ (коли кількість вимог у системі більша за кількість обслуговуючих каналів) дістаємо:

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\left(\underbrace{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \ldots m\mu}_{m \text{ множників}}\right)\left(\underbrace{m\mu \cdot m\mu \cdot m\mu \ldots m\mu}_{(n-m) \text{ множників}}\right)} P_0 = \frac{\lambda^n \cdot P_0}{\mu^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m) m^{n-m}} = \frac{P^n}{m!\, m^{n-m}} P_0 .$$

Отже, при $n > m$ маємо

$$P_n = \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} P_0. \tag{9.54}$$

Для визначення P_0 використаємо умову нормування:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{m-1} + P_m + P_{m+1} + \ldots + P_n + \ldots = 1 \Rightarrow P_0 + \rho P_0 + \frac{\rho^2}{2!} P_0 + \ldots + \frac{\rho^{m-1}}{(m-1)!} P_0 + \frac{\rho^m}{m!} P_0 +$$

$$+ \frac{\rho^{m+1}}{m!\cdot m} P_0 + \ldots + \frac{\rho^n}{m! \cdot m^{n-m}} P_0 + \ldots = 1 \Rightarrow \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!} + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^n}{m! m} + \ldots + \frac{\rho^n}{m! m^{n-m}} + \ldots\right] P_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!}\left(1 + \frac{\rho}{m} + \frac{\rho^2}{m^2} + \ldots + \frac{\rho^{n-m}}{m^{n-m}} + \ldots\right)\right] P_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{m}}\right] P_0 = 1 \Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \frac{m}{m - \rho}\right] P_0 = 1 \Rightarrow \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}\right] P_0 = 1.$$

Таким чином, дістанемо

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{(m-1)!(m-\rho)}\right]^{-1}; \tag{9.55}$$

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, & 0 \le k \le m, \\[2ex] \dfrac{\rho^n}{m!\, m^{n-m}} P_0, & n > m. \end{cases} \tag{9.56}$$

2. Довжина черги.

$$L = \sum_{k=m}^{\infty} (k-m) P_k = P_{m+1} + 2P_{m+2} + 3P_{m+3} + 4P_{m+4} + \ldots + P_n + \ldots =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Використовуючи формулу для обчислення} \\ \text{ймовірностей за умови } n > m \text{, дістаємо} \end{array} \right| =$$

$$= \left[\frac{\rho^{m+1}}{m! m} + 2\frac{\rho^{m+2}}{m! m^2} + 3\frac{\rho^{m+3}}{m! m^3} + 4\frac{\rho^{m+4}}{m! m^4} + \ldots + n\frac{\rho^{m+n}}{m! m^n} + \ldots\right] P_0 =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m!} \cdot \left[\frac{1}{m} + \frac{2\rho}{m^2} + \frac{3\rho^2}{m^3} + \frac{4\rho^3}{m^4} + \ldots + \frac{n\rho^{n-1}}{m^n} + \ldots\right] P_0 =$$

$$= \frac{\rho^{m+1}}{m!} \cdot \frac{d}{d\rho} \cdot \left[\frac{\rho}{m} + \frac{\rho^2}{m^2} + \frac{\rho^3}{m^3} + \frac{\rho^4}{m^4} + \ldots + \frac{\rho^n}{m^n} + \ldots\right] P_0 =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Оскільки } \dfrac{\rho}{m} + \dfrac{\rho^2}{m^2} + \dfrac{\rho^3}{m^3} + \dfrac{\rho^4}{m^4} + \ldots + \dfrac{\rho^n}{m^n} + \ldots, \text{ як сума} \\ \text{спадної геометричної прогресії, то далі маємо} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{\rho^{m+1}}{m!}P_0\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{m-\rho}\right)=\frac{\rho^{m+1}}{m!}P_0\frac{m-\rho+\rho}{(m-\rho)^2}=\frac{\rho^{m+1}m}{m!(m-\rho)^2}P_0=$$

$$=\frac{m\rho}{(m-\rho)^2}\frac{\rho^m}{m!}P_0=\frac{m\rho}{(m-\rho)^2}P_0,\quad \text{оскільки}\ P_n=\frac{\rho^m}{m!}P_0.$$

Таким чином, дістаємо:

$$L=\frac{m\rho}{(m-\rho)^2}P_o. \tag{9.57}$$

3. Математичне сподівання. Із загальної формули довжини черги $L=M-\rho$ знаходимо $M=L+\rho$, або, з урахуванням (9.57), маємо

$$M=\frac{m\rho}{(m-\rho)^2}P_o+\rho.. \tag{9.58}$$

Решта числових характеристик визначаються за наведеними раніше формулами.

Приклад 2. У деякому районі міста працює чотири ремонтні майстерні з ремонту радіо- та телеапаратури. Кількість одиниць апаратури, яка надходить до кожної з майстерень у середньому дорівнює 6 за 8-годинний робочий день. Апаратура надходить у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік. Час, який витрачається на ремонт однієї одиниці апаратури, є випадковою величиною, що має експоненціальний закон розподілу ймовірностей, і в середньому дорівнює 6 год.

У кожній майстерні працює по п’ять майстрів. Кількість заявок на ремонт є необмеженою. Необхідно з’ясувати, чи є сенс об’єднати чотири майстерні в одну, залишивши при цьому на робочих місцях 12 майстрів, вибравши за критерій оцінювання таких систем довжину черги і час очікування одиниці апаратури для свого обслуговування (ремонту).

Розв’язання. Необхідно розглянути дві стохастичні моделі.

1. Модель $M/M/5/\infty$ моделює роботу однієї окремо взятої майстерні, для якої

$$\lambda=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\ \ \mu=5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\Rightarrow\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0{,}9.$$

2. Модель $M/M/12/\infty$ моделює чотири майстерні, об’єднані в одну, при цьому із кожної майстерні задіють трьох майстрів. Для цієї моделі маємо такі параметри:

$$5\ \ \mu=12\cdot\frac{5}{6}=10\Rightarrow\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0{,}3.$$

Обчислимо P_0, L, M для моделі $M/M/5/\infty$.

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{4}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^5}{(m-1)!(m-\rho)}\right]^{-1}=\left[1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}+\frac{\rho^4}{4!}+\frac{\rho^5}{4!(5-\rho)}\right]^{-1}=$$

$$\left[1+0{,}9+\frac{(0{,}9)^2}{2}+\frac{(0{,}9)^3}{6}+\frac{(0{,}9)^4}{24}+\frac{(0{,}9)^5}{24\cdot4{,}1}\right]^{-1}=\left[2{,}4538375+\frac{0{,}59049}{24\cdot4{,}1}\right]^{-1}=$$

$$=[2{,}4538375+0{,}006009]^{-1}=[2{,}4598465]^{-1}=0{,}406529431.$$

Можна вважати, що $P_0\approx0{,}407$.

$$L=\frac{\rho^{m+1}\cdot P_0}{(m-1)!(m-\rho)}=\frac{0{,}9^6\cdot 0{,}407}{4!(4{,}1)^2}=\frac{0{,}59049\cdot 0{,}407}{24\cdot 16{,}81}=0{,}0005957.$$

Довжина черги $L=0{,}0006.$

Для визначення W_1 необхідно мати значення математичного сподівання

$$M=L+\rho=0{,}0006+0{,}9=0{,}9006.$$

Тепер дістаємо $W_1=\frac{M}{\lambda}=\frac{0{,}9006}{\frac{3}{4}}=\frac{0{,}9006}{0{,}75}=1{,}2$.

Обчислимо P_0 , L , W для моделі $M/M/12/\infty$.

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{11}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{12}}{(m-1)!\,(m-\rho)}\right]^{-1}=\left[1+0{,}3+\frac{(0{,}3)^2}{2!}+\frac{(0{,}3)^3}{3!}+\frac{(0{,}3)^4}{4!}+\frac{(0{,}3)^5}{5!}+\frac{(0{,}3)^6}{6!}+\frac{(0{,}3)^7}{7!}+\frac{(0{,}3)^8}{8!}+\right.$$

$$\left.+\frac{(0{,}3)^9}{9!}+\frac{(0{,}3)^{10}}{10!}+\frac{(0{,}3)^{11}}{11!}+\frac{(0{,}3)^{12}}{(12-1)!\,(12-0{,}3)}\right]^{-1}\approx[1{,}45]^{-1}\approx 0{,}69.$$

Отже, $P_0\approx 0{,}7408$.

$$L_1=L=\frac{\rho^{m-1}P_0}{(m-1)!(m-\rho)^2}=\frac{(0{,}3)^{13}\cdot 0{,}69}{11!(11{,}7)^2}=\frac{0{,}000000531\cdot 0{,}69}{39916800\cdot 136{,}89}\approx 0$$

Тобто для другої моделі черги практично немає.

Тоді $M=L+\rho=0{,}3$ і $W_1=\frac{0{,}3}{0{,}3}=1$.

Висновок. За значеннями операційних характеристик P_0 , L , W друга модель $M/M/12/\infty$ є більш прийнятною, оскільки їхні значення менші від значень, знайдених для моделі $M/M/5/\infty$.

9.9. Стохастична модель системи $M/M/m/k_1$

Загальна інформація про досліджувану систему

Модель $M/M/m/k_1$ відрізняється від моделі $M/M/m/\infty$ тим, що кількість заявок, які можуть перебувати в системі, не перевищує значення k_1. Тому для цієї моделі робиться таке припущення:

1) для параметра пуассонівського потоку вимог

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda, 0 \le n \le k_1, \\ 0, \; n > k_1; \end{cases}$$

2) для параметра, який пов'язаний із обслуговуванням вимог,

$$\mu^* = \begin{cases} n\,\mu, 0 < n \le m, \\ m\,\mu, \; m < n \le k_1. \end{cases}$$

Стохастична модель у динаміці та стаціонарному режимі

$$\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{d(t)} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\
&\frac{dP_1(t)}{d(t)} = -(\lambda+\mu)P_1(t) + 2\mu P_2(t) + \lambda P_0(t), \\
&\frac{dP_2(t)}{d(t)} = -(\lambda+2\mu)P_2(t) + 3\mu P_3(t) + \lambda P_1(t), \\
&\frac{dP_3(t)}{d(t)} = -(\lambda+3\mu)P_3(t) + 4\mu P_4(t) + \lambda P_2(t), \\
&\vdots \\
&\frac{dP_n(t)}{d(t)} = -(\lambda+n\mu)P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), \\
&\vdots \\
&\frac{dP_{m-1}(t)}{d(t)} = -(\lambda+(m-1)\mu)P_{m-1}(t) + m\,\mu\,P_m(t) + \lambda P_{m-2}(t),
\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\mu^* = n\,\mu, \\ &0 \le n \le m\end{aligned} \\
\left.\begin{aligned}
&\frac{dP_m(t)}{d(t)} = -(\lambda+m\mu)P_m(t) + m\,\mu\,P_{m+1}(t) + \lambda P_{m-1}(t), \\
&\vdots \\
&\frac{dP_{k_1-1}(t)}{d(t)} = -(\lambda+m\,\mu)P_{k_1-1}(t) + m\mu P_{k_1}(t) + \lambda P_{k_1-2}(t) \\
&\frac{dP_{k_1}(t)}{d(t)} = -m\lambda P_{k_1}(t) + \lambda P_{k_1-1}(t).
\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\mu^* = m\,\mu, \\ &m \le n \le k_1\end{aligned}
\end{cases} \tag{9.59}$$

Введемо параметр ρ, тоді в стаціонарному режимі система (9.59) набере такого вигляду:

$$
\left.\begin{cases}
\rho P_0 = P_1, \\
(1+\rho)P_1 = \rho P_0 + 2 \cdot P_2, \\
(2+\rho)P_2 = \rho P_1 + 3 \cdot P_3, \\
(3+\rho)P_3 = \rho P_2 + 4 \cdot P_4, \vdots \\
(n+\rho)P_n = \rho P_{n-1} + (n+1) \cdot P_{n-1}, \\
\\
((m-1)+p)P_{n-1} = \rho P_{n-2} + mP_m,
\end{cases}\right\} \mu^* = m\mu
$$

$$
\left.\begin{cases}
(m+\rho)P_m = \rho P_{m-1} + mP_{m+1}, \\
\\
(m+\rho)P_{k_1-1} = \rho P_{k_1-2} + mP_{k_1}, \\
mP_{k_1} = \rho P_{k_1-1}
\end{cases}\right\} \mu^* = m\mu \tag{9.60}
$$

Визначення операційних характеристик системи.

Імовірності можливих станів

Із однорідної системи алгебраїчних рівнянь (9.60) визначаємо:

$$
P_1 = \rho P_0, \quad P_2 = \frac{1}{2!}\rho^2 P_0, \quad P_3 = \frac{1}{3!}\rho^3 P_0, \quad P_4 = \frac{1}{4!}\rho^4 P_0, \ldots .
$$

При $n \le m$ маємо

$$
P_n = \frac{1}{n!}\rho^n P_0, \tag{9.61}
$$

При $m \le n \le k_1$

$$
P_n = \frac{\rho^n}{m!m^{n-m}} P_0 \tag{9.62}
$$

При цьому P_0 визначається з умови нормування:

$$
\sum_{n=0}^{k_1} P_n = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_k + \ldots + P_{k_1} = 1 \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow P_0 + \rho P_0 + \frac{\rho^2}{2!}P_0 + \frac{\rho^3}{3!}P_0 + \ldots + \frac{\rho^k}{k!}P_0 + \ldots + \frac{\rho^{k_1}}{m!m^{k_1-m}}P_0 = 1 \Rightarrow
$$

за аналогією викладок, здійснених для моделі $M/M/5/\infty$, маємо для моделі $M/M/m/\infty$ наступне

$$
\Rightarrow P_0\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!m} + \frac{\rho^{m+2}}{m!m^2} + \frac{\rho^{m+3}}{m!m^3} + \ldots + \frac{\rho^{k_1}}{m!m^{k_1-m}}\right] = 1 \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow P_0\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}}{1-\frac{\rho}{m}}\right]^{-1} = 1 \Rightarrow P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}}{1-\frac{\rho}{m}}\right]^{-1}. \tag{9.63}
$$

При $\rho \to m$ $\left(\frac{\rho}{m} \to 1\right)$ вираз $\dfrac{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}}{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)}$ являє собою невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$.

У цьому разі маємо:

$$\lim_{\rho\to m}\frac{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}}{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)}=\lim_{\rho\to m}\frac{\left(1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}\right)'}{\left(1-\left(\frac{\rho}{m}\right)\right)'}=k_1+m-1.$$

Із урахуванням цього ймовірності P_0, P_k можна записати в такій формі:

$$P_0=\begin{cases}\left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^m}{m!}\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}}{1-\left(\frac{\rho}{m}\right)}\right]^{-1}, & \frac{\rho}{m}\neq 1,\\ \left[\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^m}{m!}\cdot(k_1+m-1)\right]^{-1}, & \frac{\rho}{m}=1;\end{cases} \tag{9.64}$$

$$P_k=\begin{cases}\frac{\rho^k}{k!}P_0, & 0\le k\le m,\\ \frac{\rho^k}{n!m^{k-m}}P_0, & m<k\le k_1.\end{cases} \tag{9.65}$$

Довжина черги

$$L=\sum_{k=m}^{k_1}(k-m)P_k=P_{m+1}+2P_{m+2}+3P_3+4P_4+\ldots+(k_1-m)P_{k_1}=$$

$$=\left[\frac{\rho^{m+1}}{m!m}+2\frac{\rho^{m+2}}{m!m^2}+3\frac{\rho^{m+3}}{m!m^3}+4\frac{\rho^{m+4}}{m!m^4}+\ldots+(k_1-m)\frac{\rho^{k_1}}{m!m^{k_1-m}}\right]P_0=$$

$$=\frac{\rho^{m+1}}{m!}\left[\frac{1}{m}+\frac{2\rho}{m^2}+\frac{3\rho^2}{m^3}+\frac{4\rho^3}{m^4}+\ldots+\frac{(k_1-m)\rho^{k_1-m-1}}{m^{k_1-m}}\right]P_0=\frac{\rho^{m+1}}{m!}P_0\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\rho}{m}+\frac{\rho^2}{m^2}+\frac{\rho^3}{m^3}+\frac{\rho^4}{m^4}+\ldots+\frac{\rho^{k_1-m+1}}{m^{k_1-m}}\right]=$$

$$=\frac{\rho^{m+1}}{m!}P_0\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\frac{\rho}{m}-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m+1}}{1-\frac{\rho}{m}}\right)=\frac{\rho^{m+1}}{m!}P_0\frac{\left(\frac{1}{m}-(k_1+1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m}\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{\rho}{m}\right)+\left(\frac{\rho}{m}-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1+1-m}\right)\frac{1}{m}}{\left(1-\frac{\rho}{m}\right)^2}=$$

$$=\frac{\rho^{m+1}m}{m!}P_0\frac{\left(1-(k_1+1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m}\right)\left(1-\frac{\rho}{m}\right)+\left(\frac{\rho}{m}-\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1+1-m}\right)}{(m-\rho)^2}=$$

$$=\frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2}\left[1-(k_1+1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m}+(k_1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1+1-m}\right]P_0.$$

Таким чином, довжина черги вимог у системі обчислюється за формулою:

$$L=\frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!\cdot(m-\rho)^2}\left[\begin{array}{l}1-(k_1+1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m}+\\ +(k_1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1+1-m}\end{array}\right]P_0. \tag{9.66}$$

Решта операційних характеристик системи визначається за загальними формулами.

Приклад 3. Престижну жіночу перукарню відвідують клієнтки у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік. У середньому за 1 годину перукарню відвідує 40 осіб. Час обслуговування кожної клієнтки перукарні є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей, причому в середньому на одну особу витрачається 50 хв. У перукарні працює троє перукарів високої кваліфікації. Необхідно оцінити ефективність роботи перукарні протягом 24 робочих днів (один робочий день дорівнює 8 год), якщо відомі такі дані: вартість обслуговування відвідувачів кожним перукарем за 1 год — 20 грн ($q_{к} = 20$ грн); сума збитків через втрату клієнтів перукарні за 1 год — 60 грн ($q_3 = 60$ грн); вартість однієї робочої години, під час якої перукар не працює через відсутність відвідувачів, — 20 грн ($q_{п.к} = 20$ грн); вартість втрат, пов'язаних з очікуванням клієнта в черзі, за одну робочу годину становить 10 грн ($q_{о.ч.} = 10$ грн); економічний ефект однієї робочої години перукарні дорівнює 2300 грн. Довжина черги не перевищує 4-х відвідувачів.

Розв'язання. Для оцінювання економічної ефективності роботи перукарні протягом робочих годин використовуємо формулу

де $C_{втр} = (q_{п.к} N_1 + q_y P_{k_1} \lambda + q_{к} N_2 + q_{о.г} L)\, T$.

$$E = \lambda P_{k_1} CT - G_{втр},$$

Із умови задачі відомі такі значення: $q_{к} = 20$ грн, $q_{з} = 60$ грн, $q_{п.к} = 20$ грн, $q_{о.ч} = 10$ грн; $T =$ 200 год. А тому необхідно обчислити $P_{k_1}, L,\ N_1,\ N_2$.

Для визначення цих операційних характеристик потрібно обчислити ймовірності P_0, P_1, P_2, P_3.

Із умови задачі визначимо параметри системи $\lambda m\ \ \mu, \rho$:

$$\lambda = \frac{40}{60} = \frac{2}{3},\ \mu = \frac{50}{60} = \frac{5}{6},\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}8.$$

Імовірність обчислюємо за формулою

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^m}{m!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1+1-m}}{1 - \frac{\rho}{m}} \right]^{-1}.$$

Із умови задачі маємо: $m = 3$, $k_1 = 4$.

У цьому разі маємо таку формулу для P_0 :

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^3}{3!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{3}\right)^{4+1-3}}{1 - \frac{\rho}{3}} \right]^{-1} = \left[1 + \rho + \frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^3}{6} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{3}\right)^2}{1 - \frac{\rho}{3}} \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 0{,}8 + +0{,}32 + 0{,}512 \frac{1 - (0{,}27)^2}{1 - 0{,}27} \right]^{-1} = \left(2{,}12 + 0{,}085 \frac{1 - 0{,}0729}{0{,}73} \right)^{-1} = [2{,}2279]^{-1} \approx 0{,}449.$$

Отже, $P_0 = 0{,}449$.

Обчислюємо ймовірності P_1, P_2, P_3 :

$$P_1 = \rho \cdot P_0 = 0{,}8 \cdot 0{,}449 = 0{,}3592.$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2} \cdot P_0 = 0{,}32 \cdot 0{,}449 = 0{,}1437.$$

$P_3 = \dfrac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = 0{,}0853 \cdot 0{,}449 = 0{,}0383 = P_{k_1}$ — імовірність втрат клієнтів, де $k_1 = 3$.

Обчислюємо $N_{1,} N_2$:

$$N_1=\sum_{k=1}^{m}kP_k=P_1+2P_2+...+mP_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1=\sum_{k=1}^{3}kP_k=P_1+2P_2+3P_3=0,3592+2\cdot 0,1437+3\cdot 0,0383=0,3592+0,2874+0,1449=0,7915.$$

Отже, $N_1=0,7915.$

$$N_2=\sum_{k=0}^{m-1}(m-k)P_k=mP_0+(m-1)P_1+...+P_{m-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2=\sum_{k=0}^{2}(3-k)P_k=3P_0+2P_1+P_2=3\cdot 0,449+2\cdot 0,3592+0,1437=1,347+0,7184+0,1437=2,2091.$$

Отже, $N_2=2,2091$.

Обчислимо довжину черги L:

$$L=\frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2}\left[1-(k_1+1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1-m}+(k_1-m)\left(\frac{\rho}{m}\right)^{k_1+1-m}\right]P_0.$$

Якщо $m=3$, то $\frac{\rho}{m}=\frac{0,8}{3}=0,277$; при $k_1=4$ дістаємо:

$$L=\frac{0,8^4}{2!(3-0,8)^2}\cdot\left[1-2\cdot(0,277)+0,277^2\right]\cdot 0,5242=$$

$$=\frac{0,4096}{2\cdot(2,2)^2}\left[1-0,554+0,0767\right]\cdot 0,5242=0,0423\cdot 0,5227\cdot 0,5242=0,0116.$$

$$L=0,0116.$$

Обчислюємо функцію втрат системи:

$$G_{\text{втр}}=\left(q_{\text{п.к}}N_1+q_{\text{з}}P_{k_1}\lambda+q_{\text{к}}N_2+q_{\text{о.ч}}L\right)T=$$

$$=\left(20\cdot 0,8899+60\cdot 0,0447\cdot\frac{2}{3}+20\cdot 2,5791+10\cdot 0,0116\right)+200=$$

$$=(17,778+1,788+51,582+0,116)\cdot 200=71,264\cdot 200=14\,252,2.$$

$$G_{\text{втр}}=14\,252,2.$$

Обчислюємо критерії ефективності:

$$E=\lambda P_{\text{к}}CT=\frac{2}{3}\cdot 0,551\cdot 2300\cdot 200;$$

(оскільки $P_k=1-P_0=1-0,449=0,551$)

$$E=\lambda P_{\text{к}}CT-G_{\text{втр}}=\frac{2}{3}\cdot 0,551\cdot 2300\cdot 200-14\,252,2=168\,973,3-14\,252,2=154\,721,1\ \ (\text{грн});$$

$$E=154\,721,1\ \ \text{грн}.$$

Висновок. За одержаними результатами (значенням E) робимо наступні висновки, що ефективність роботи перукарні не є цілком задовільною. Прибуток у 375,8 грн за 25 робочих днів навряд чи задовольнить власника перукарні. Але цю суму можна збільшити варіюванням параметра $\lambda\pm\Delta\lambda$, тобто переглянувши значення (вартість) коефіцієнтів $q_{\text{к}}$, $q_{\text{п.к}}$, $q_{\text{о.ч}}$, $q_{\text{з}}$, а також C.

9.10. Стохастична модель обслуговування автопарку

Досліджується робота автопарку, який має у своєму розпорядженні k_1 автомобілів. Автомобілі обслуговує бригада робітників (механіків), кількість яких дорівнює R. Під час експлуатації автомобілі можуть виходити з ладу у випадкові моменти часу t, причому ці випадкові події (поломки) утворюють пуассонівський потік із параметром λ.

Поломки кожного автомобіля усуває бригада механіків, витрачаючи на його ремонт час, що є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей, параметр якого μ.

Розглядаючи автопарк як СМО, в якій поломки автомобілів та їх ремонт відбуваються у випадкові моменти часу, для дослідження та прогнозу поводження цієї системи вибираємо модель $M/M/R/k_1$, беручи до уваги, що оскільки автомобіль під час ремонту не може виходити з ладу, вважатимемо, що обсяг джерел вимог (надходження автомобілів для ремонту) обмежується числом k_1. Водночас припускається виконання ще таких умов:

$$\lambda^* = \begin{cases} (k_1 - n)\lambda, \text{ якщо } 0 \le n \le k_1 \\ 0, \text{ якщо } n > k_1 \end{cases}$$

$$\mu^* = \begin{cases} n\,\mu, & \text{якщо} \quad 0 < n \le R, \\ k_1\,\mu, & \text{якщо} \quad R < n \le k_1, \\ 0, & \text{якщо} \quad n > k_1. \end{cases}$$

Стохастична модель системи в динаміці та стаціонарному режимі

Стохастична модель для цієї системи являє собою лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{dP_0(t)}{d(t)} = -\lambda k_1 P_0(t) + \mu P_1(t), \\ &\frac{dP_1(t)}{d(t)} = -(\lambda(k_1-1)+\mu)P_1(t) + \lambda k_1 P_0(t) + 2\mu P_2(t), \\ &\frac{dP_2(t)}{d(t)} = -(\lambda(k_1-2)+2\mu)P_2(t) + \lambda(k_1-1)P_1(t) + 3\mu P_3(t), \\ &\frac{dP_3(t)}{d(t)} = -(\lambda(k_1-3)+3\mu)P_3(t) + \lambda(k_1-2)P_2(t) + 4\mu P_4(t), \\ &\vdots \\ &\frac{dP_n(t)}{d(t)} = -(\lambda(k_1-n)+n\mu)P_n(t) + \lambda(k_1-n+1)P_{n-1}(t) + (n+1)\,\mu P_{n+1}(t), \end{aligned}\right\} \mu^* = n\mu \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n < k_1, n < R, \\ \vdots \\ \left.\begin{aligned} &\frac{dP_R(t)}{d(t)} = -(\lambda(k_1-(n+1))+R\mu)\,P_R(t) + \lambda(k_1-R+1)P_{R-1}(t) + R\,\mu\,P_{R+1}(t), \\ &\frac{dP_{R+1}(t)}{d(t)} = -(\lambda(k_1-(n+2))+R\mu)P_{R+1}(t) + \lambda(k_1-R)P_R(t) + R\,\mu\,P_{R+2}(t), \\ &\vdots \\ &\frac{dP_{k_1-1}(t)}{d(t)} = -(\lambda+R\mu)P_{k_1-1}(t) + 2\lambda \mathrm{P}_{k_1-2}(t) + R_\mu P_{k_1}(t) \\ &\frac{dP_{k_1}(t)}{d(t)} = -R\mu P_{k_1}(t) + \lambda \mathrm{P}_{k_1-1}(t). \end{aligned}\right\} \mu^* = k_1\mu \end{cases} \tag{9.67}$$

У стаціонарному режимі роботи система (9.67) перетворюється на однорідну систему алгебраїчних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\lambda k_1 P_0 = \mu P_1 \\
\left(\lambda\left(k_1 - 1\right) + \mu\right) P_1 = 2\mu P_2 + \lambda k_1 P_0, \\
\left(\lambda\left(k_1 - 2\right) + 2\mu\right) P_2 = 3\mu P_3 + \lambda\left(k_1 - 1\right) P_1, \\
\left(\lambda\left(k_1 - 3\right) + 3\mu\right) P_3 = 3\mu P_3 + \lambda\left(k_1 - 2\right) P_2, \\
\qquad\qquad \vdots \\
\left(\lambda\left(k_1 - n\right) + n\mu\right) P_n = \left(n + 1\right)\mu P_{n+1} + \lambda\left(k_1 - n + 1\right) P_{n-1}, \\
\qquad\qquad \vdots \\
\left(\lambda\left(k_1 - \left(n + 1\right)\right) + R\mu\right) P_R = R\mu P_{R+1} + \lambda\left(k_1 - R + 1\right) P_{R-1}, \\
\left(\lambda\left(k_1 - \left(n + 2\right)\right) + R\mu\right) P_{R+1} = R\mu P_{R+2} + \lambda\left(k_1 - R\right) P_R, \\
\qquad\qquad \vdots \\
\left(\lambda + R\mu\right) P_{k_1 - 1} = R\mu P_{k_1} + 2\lambda P_{k_1 - 2}, \\
R\mu P_{k_1} = \lambda P_{k_1 - 1}.
\end{cases}
\tag{9.68}
$$

Операційні характеристики системи

Визначимо ймовірності станів системи (9.68) для випадку, коли $k_1 = 10,\ R = 4$. Тоді система набирає такого вигляду:

$$
\begin{cases}
10\lambda P_0 = \mu P_1 \\
\left[\lambda\left(10 - 1\right) + \mu\right] P_1 = 2\mu P_2 + 10\lambda P_0, \\
\left[\lambda\left(10 - 2\right) + 2\mu\right] P_2 = 3\mu P_3 + 9\lambda P_1, \\
\left[\lambda\left(10 - 3\right) + 3\mu\right] P_3 = 4\mu P_4 + 8\lambda P_2, \\
\left[\lambda\left(10 - 4\right) + 4\mu\right] P_4 = 4\mu P_5 + 7\lambda P_3, \\
\left[\lambda\left(10 - 5\right) + 4\mu\right] P_5 = 4\mu P_6 + 6\lambda P_4, \\
\left[\lambda\left(10 - 6\right) + 4\mu\right] P_6 = 4\mu P_7 + 5\lambda P_5, \\
\left[\lambda\left(10 - 7\right) + 4\mu\right] P_7 = 4\mu P_8 + 4\lambda P_4, \\
\left[\lambda\left(10 - 8\right) + 4\mu\right] P_8 = 4\mu P_9 + 3\lambda P_3, \\
\left[\lambda\left(10 - 9\right) + 4\mu\right] P_9 = 4\mu P_{10} + 2\lambda P_2, \\
4\mu P_{10} = \lambda P_9,
\end{cases}
$$

або

$$
\begin{cases}
10\lambda P_0 = \mu P_1 \\
\left(9\lambda + \mu\right) P_1 = 2\mu P_2 + 10\lambda P_0, \\
\left(8\lambda + 2\mu\right) P_2 = 3\mu P_3 + 9\lambda P_1, \\
\left(7\lambda + 3\mu\right) P_3 = 4\mu P_4 + 8\lambda P_2, \\
\left(6\lambda + 4\mu\right) P_4 = 4\mu P_5 + 7\lambda P_3, \\
\left(5\lambda + 4\mu\right) P_5 = 4\mu P_6 + 6\lambda P_4, \\
\left(4\lambda + 4\mu\right) P_6 = 4\mu P_7 + 5\lambda P_5, \\
\left(3\lambda + 4\mu\right) P_7 = 4\mu P_8 + 4\lambda P_6, \\
\left(2\lambda + 4\mu\right) P_8 = 4\mu P_9 + 3\lambda P_7, \\
\left(\lambda + 4\mu\right) P_9 = 4\mu P_{10} + 2\lambda P_8, \\
4\mu P_{10} = \lambda P_9.
\end{cases}
\tag{9.69}
$$

Розв’яжемо систему (9.69) із точністю до P_0.

1. Із першого рівняння дістанемо:

$$
P_1 = 10\rho P_0 = C_{10}^{1} \rho P_0.
$$

2. Із другого рівняння:

$$(9\rho+1)P_1 = 2P_2 + 10\rho P_0 \Rightarrow 9\rho P_1 + P_1 = 2P_2 + 10\rho P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90\rho P_0 + 10\rho P_0 = 2P_2 + 10\rho P_0 \Rightarrow P_2 = \frac{90}{2}\rho^2 P_0 = \frac{10\cdot 9}{2}\rho^2 P_0 = C_{10}^2\rho^2 P_0.$$

Отже, $P_2 = C_{10}^2\rho^2 P_0$.

3. Із третього рівняння:

$$(8\rho+2)P_2 = 3P_3 + 9\rho P_1 \Rightarrow 8\rho P_2 + 2P_2 = 3P_3 + 9\rho P_1 \Rightarrow 8\rho C_{10}^2 \rho^2 P_0 + 2C_{10}^2 \rho^2 P_0 = 3P_3 + 9\rho C_{10}^1 \rho P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}\rho C_{10}^2 \rho^2 P_0 + \frac{2}{3}C_{10}^2 \rho^2 P_0 = P_3 + 3\rho C_{10}^1 \rho P_0 \Rightarrow \frac{8}{3}\cdot\frac{10\,!}{8!\;2!}\rho^3 P_0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{10\,!}{8!\;2!}\rho^2 P_0 = P_3 + 30\rho^2 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{7!3!}\rho^3 P_0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\;2!}\rho^2 P_0 = P_3 + 30\rho^2 P_0 \Rightarrow \frac{10!}{7!3!}\rho^3 P_0 + \frac{10\cdot 9}{3}\rho^2 P_0 = P_3 + 30\rho^2 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{10}^3 \rho^3 P_0 + 30\rho^2 P_0 = P_3 + 30\rho^2 P_0 \Rightarrow P_3 = C_{10}^3 \rho^3 P_0.$$

4. Із четвертого рівняння:

$$(7\rho+3)P_3 = 4P_4 + 8\rho P_2 \Rightarrow 7\rho P_3 + 3P_3 = 4P_4 + 8\rho P_2 \Rightarrow 7\rho C_{10}^3\rho^3 P_0 + 3C_{10}^3\rho^3 P_0 = 4P_4 + 8\rho C_{10}^2\rho^2 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}\rho C_{10}^3\rho^3 P_0 + \frac{3}{4}C_{10}^3\rho^3 P_0 = P_4 + 2\rho C_{10}^2\rho^2 P_0 \Rightarrow \frac{7}{4}\cdot\frac{10\,!}{3!\;7!}\rho^4 P_0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{10\,!}{3!\;7!}\rho^3 P_0 = P_4 + 2\cdot\frac{10!}{2!8!}\rho^3 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{4!6!}\rho^4 P_0 + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{4\cdot 2\cdot 7!}\rho^3 P_0 = P_4 + \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!}\rho^3 P_0 \Rightarrow C_{10}^4\rho^4 P_0 + 90\rho^3 P_0 = P_4 + 90\rho^3 P_0 \Rightarrow P_4 = C_{10}^4\rho^4 P_0.$$

5. Із п'ятого рівняння:

$$(6\rho+4)P_4 = 4P_5 + 7\rho P_3 \rightarrow 6\rho P_4 + 4P_4 = 4P_5 + 7\rho P_3 \Rightarrow 6\rho C_{10}^4 \rho^4 P_0 + 4C_{10}^4 \rho^4 P_0 = 4P_5 + 7\rho C_{10}^3 \rho^3 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4}\rho C_{10}^4 \rho^4 P_0 + C_{10}^4 \rho^4 P_0 = P_5 + \frac{7}{4}\rho C_{10}^3 \rho^3 P_0 \Rightarrow \frac{6\cdot 10\,!}{4\cdot 4!\cdot 6!}\rho^5 P_0 + \frac{10\,!}{4!\;6!}\rho^4 P_0 = P_5 + \frac{7\cdot 10!}{4\cdot 7!\cdot 3}\rho^4 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{4\cdot 4!\cdot 5!}\rho^5 P_0 + \frac{10\,!}{4!6!}\rho^4 P_0 = P_5 + \frac{10!}{4!7!}\rho^4 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_5 = \frac{10!}{4\cdot 4!\cdot 5!}\rho^5 P_0 = \frac{10\,!}{4\cdot 5!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{5!}\rho^5 P_0 = \frac{10\,!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{4\cdot 4!}\rho^5 P_0 = C_{10}^5\frac{5!}{4\cdot 4!}\rho^5 P_0 \Rightarrow P_5 = C_{10}^5\frac{5!}{4\cdot 4!}\rho^5 P_0.$$

6. Із шостого рівняння:

$$(5\rho+4)P_5 = 4P_6 + 6\rho P_4 \Rightarrow 5\rho P_5 + 4P_5 = 4P_6 + 6\rho P_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}P_5 + P_5 = P_6 + \frac{6}{4}\rho P_4 \rightarrow \frac{5}{4}C_{10}^5\frac{5!}{4\cdot 4!}\rho^5 P_0 = P_6 + \frac{6}{4}C_{10}^4\rho^5 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}\cdot\frac{10\,!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{4\cdot 4!}\rho^6 P_0 + C_{10}^5\frac{5!}{4\cdot 4!}\rho^5 P_0 = P_6 + \frac{6}{4}\cdot\frac{10\,!}{6!4!}\rho^5 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10\,!}{5!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{4\cdot 4^2}\cdot\frac{6}{6}\rho^6 P_0 + C_{10}^5\frac{5\,!}{4!4}\rho^5 P_0 = P_6 + \frac{10!}{5!4!4}\cdot\frac{5!}{5!}\rho^5 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6\,!}{4!4^2}\rho^6 P_0 + C_{10}^5\frac{5!}{4!4!}\rho^5 P_0 = P_0 + \frac{1!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{4!4}\rho^5 P_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{10}^4\frac{6!}{4!4^2}\rho^6 P_0 + C_{10}^5\frac{5!}{4!4}\rho^5 P_0 + = P_0 + C_{10}^5\frac{5!}{4!4}\rho^5 P_0 \Rightarrow P_6 = C_{10}^6\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^6 P_0.$$

7. Із сьомого рівняння:

$$(4\rho+4)P_6 = 4P_7 + 5\rho P_5 \Rightarrow 4\rho P_6 + 4P_6 = 4P_7 + 5\rho P_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho P_6 + P_6 = P_7 + \frac{5}{4}\rho P_5 \Rightarrow \rho C_{10}^6\frac{6!}{4!4^2}\rho^6 P_0 + C_{10}^6\frac{6!\rho^6}{4!4^2}P_0 =$$

$$=P_7+\frac{5}{4}C_{10}^6\ \rho^6\ \frac{5!}{4!4}\Rightarrow\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^7P_0+\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^6P_0=$$

$$=P_7+\frac{5}{4}\cdot\frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{4!4}\rho^6P_0\Rightarrow\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{7}{7}\rho^7P_0+\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^6P_0=$$

$$=P_7+\frac{10!}{4!5!}\cdot\frac{5!}{4!4^2}\cdot\frac{6}{6}\rho^6P_0\Rightarrow\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0+\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^6P_0=$$

$$=P_7+\frac{10!}{4!6!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^6P_0\Rightarrow P_7=C_{10}^3\ \frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0=C_{10}^7\ \frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0\Rightarrow P_7=C_{10}^7\ \frac{7!}{4!\cdot4^3}\rho^7P_0.$$

8. Із восьмого рівняння:

$$(3\rho+4)P_7=4P_8+4\rho P_6\Rightarrow3\rho P_7+4P_7=4P_8+4\rho P_6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}\rho P_7+P_7=P_8+\rho P_0\Rightarrow\frac{3}{4}\rho C_{10}^7\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0+C_{10}^7\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0=$$

$$=P_8+\rho\,C_{10}^6\frac{6!}{4!4^2}\rho^6P_0\Rightarrow\frac{3}{4}\cdot\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{10!}{4!4^3}\rho^8P_0+\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0=$$

$$=P_8+\frac{10!}{6!4!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\rho^7P_0\Rightarrow\frac{10!}{7!2!}\cdot\frac{7!}{4!4^4}\cdot\frac{8}{8}\rho^8P_0+\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0=$$

$$=P_8+\frac{10!}{6!3!}\cdot\frac{6!}{4!4^2}\frac{7}{7}\rho^7P_0\Rightarrow\frac{10!}{8!2!}\cdot\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0+\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0=$$

$$=P_8+\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0\Rightarrow P_8=\frac{10!}{8!2!}\cdot\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0=C_{10}^2\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_8=C_{10}^2\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0=C_{10}^8\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0.$$

9. Із дев’ятого рівняння:

$$(2\rho+4)P_8=4P_9+3\rho P_7\Rightarrow2\rho P_8+4P_8=4P_9+3\rho P_7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{4}\rho\,P_8+P_8=P_9+\frac{3}{4}\ \rho\,P_7\Rightarrow\frac{2}{4}\rho\ \ C_{10}^8\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0+C_{10}^8\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0=$$

$$=P_9+\frac{3}{4}\rho\,C_{10}^7\frac{7!}{4!4^3}\rho^7P_0\Rightarrow\frac{2}{4}\cdot\frac{10!}{8!2!}\cdot\frac{8!}{4!4^4}\rho^9P_0+\frac{10!}{8!2!}\cdot\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0=$$

$$=P_9+\frac{3}{4}\cdot\frac{10!}{7!3!}\cdot\frac{7!}{4!4^3}\rho^8P_0\Rightarrow\frac{10!}{8!1!}\cdot\frac{8!}{4!4^5}\cdot\frac{9}{9}\rho^9P_0+\frac{10!}{8!2!}\cdot\frac{8!}{4!4^5}\rho^8P_0=$$

$$=P_9+\frac{10!}{8!2!}\cdot\frac{8!}{4!4^4}\rho^8P_0\Rightarrow P_9=\frac{10!}{9!1!}\cdot\frac{9!}{4!4^5}\rho^9P_0=C_{10}^1\frac{9!}{4!4^5}\rho^9P_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_9=C_{10}^1\frac{9!}{4!4^5}\rho^9P_0.$$

10. Із десятого рівняння:

$$4P_0=\rho P_9\to P_{10}=\frac{1}{4}\rho\,P_9\Rightarrow P_{10}=\frac{1}{4}\rho\,C_{10}^1\ \frac{9!}{4!4^5}\rho^9P_0\Rightarrow P_{10}=\frac{1}{4}\rho\frac{10!}{9!1!}\cdot\frac{9!}{4!4^5}\rho^9P_0=\frac{1}{4}\cdot\frac{10!}{9!1!}\cdot\frac{9!}{4!4^5}\cdot\frac{10}{10}\rho^9P_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{10}=\frac{10!}{10!}\cdot\frac{10!}{4!4^6}\rho^{10}P_0\Rightarrow P_{10}=C_{10}^{10}\ \frac{10!}{4!4^6}\rho^{10}P_0\Rightarrow P_{10}=C_{10}^{10}\ \frac{10!}{4!4^6}\rho^{10}P_0.$$

Згрупувавши знайдені ймовірності залежно від n, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned}P_1&=C_{10}^1\rho P_0,\\P_2&=C_{10}^2\rho^2P_0,\\P_3&=C_{10}^3\rho^3P_0,\\P_4&=C_{10}^4\rho^4P_0,\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}1\le n\le R,\\ \text{де } R=4\end{array}\qquad(9.70)$$

$$\left.\begin{aligned}
P_5 &= C_{10}^{5}\,\frac{5!}{4!4}\rho^5 P_0,\\
P_6 &= C_{10}^{6}\,\frac{6!}{4!4^2}\rho^6 P_0,\\
P_7 &= C_{10}^{7}\,\frac{7!}{4!4^3}\rho^7 P_0,\\
P_8 &= C_{10}^{8}\,\frac{8!}{4!4^4}\rho^8 P_0,\\
P_9 &= C_{10}^{9}\,\frac{9!}{4!4^5}\rho^9 P_0,\\
P_{10} &= C_{10}^{10}\,\frac{10!}{4!4^6}\rho^{10} P_0.
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}&R < n \le K_1,\\ &\text{де } K_1 = 10.\end{aligned}
\qquad (9.71)$$

Узагальнюючи формули для P_n (саме з цією метою і було виконано докладні викладки), дістаємо:

$$P_n = \begin{cases} C_n^m \rho^m P_0, \; 1 \le m \le R, \\ C_n^m \dfrac{m!}{R!R^{m-R}}, \;\; R < m \le k_1; \end{cases} \qquad (9.72)$$

$$P_0 = \left[\sum_{m=0}^{R} C_n^m \rho^m + \sum_{m=R+1}^{K_1} C_n^m \frac{m!\rho^m}{R!R^{n-m}}\rho^m\right]^{-1}. \qquad (9.73)$$

Приклад 4. Автопарк має у своєму розпорядженні шість транспортних автомобілів для перевезення пасажирів. Ці автомобілі обслуговуються трьома механіками, основною роботою яких є усунення поломок цих авто, що виникають під час роботи. Поломки, як правило, є неістотними, а тому вони можуть бути усунені бригадою механіків протягом невеликого відрізку часу.

Поломки авто виникають у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік з інтенсивністю 15 поломок за годину. Час, що його витрачає бригада на ремонт, є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей і в середньому дорівнює 20 хв на одне авто.

Оцінити ефективність роботи автопарку, якщо відомі такі показники витрат:

$q_{\text{п.к}}$ = 90 грн — вартість однієї години, коли бригада не зайнята ремонтом через відсутність поломок авто;

$q_{\text{з}}$ = 0 з огляду на те, що автомобілі не можуть залишити систему (автопарк). Кожний автомобіль із поломкою неодмінно надходить до автопарку;

$q_{\text{к}}$ = 100 грн — вартість однієї години роботи бригади з ремонту;

$q_{\text{о.ч}}$ = 50 грн — вартість витрат, які пов'язані з очікуванням своєї черги для усунення поломів авто;

С = 14 000 грн — економічний ефект однієї робочої години автопарку.

Оцінку необхідно здійснити для Т-200 робочих годин.

Розв'язання. Для оцінювання ефективності роботи автопарку необхідно, використовуючи формули (3.32), (3.33), обчислити $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ P_5,\ L,\ N_1,\ N_2$.

Обчислимо ймовірності станів системи (автопарку):

$$P_0 = \left[\sum_{m=0}^{R} C_n^m \rho^m + \sum_{m=R+1}^{k_1} C_n^m \frac{m!\rho^m}{R!R^{m-R}}\right]^{-1}.$$

Оскільки за умовою задачі

$$\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0{,}75, \qquad R = 3, \quad n = 6,$$

то формула для P_0 набере такого конкретного вигляду:

$$P_0=\left[\sum_{m=0}^{3} C_6^m(0{,}75)^m+\sum_{m=4}^{6}\frac{m!}{3!3^{m-3}}C_6^m(0{,}75)^m\right]^{-1}=[1+C_6^1\cdot 0{,}75+C_6^2(0{,}75)^2+C_6^3(0{,}75)^3+C_6^4\frac{4!}{3!3}(0{,}75)^4+$$

$$+C_6^5\frac{5!}{3!3^2}(0{,}75)^5+C_6^6\frac{6!}{3!3^3}(0{,}75)^6]=[1+6\cdot 0{,}75+15\cdot 0{,}5625+20\cdot 0{,}4219+15\cdot\frac{4}{3}\cdot 0{,}3164+6\cdot\frac{20}{9}\cdot 0{,}2373+$$

$$+\frac{40}{9}\cdot 0{,}178]^{-1}=([1+4{,}5+8{,}4375+8{,}438+6{,}328+9{,}492+0{,}791])^{-1}=(38{,}9865)^{-1}\approx 0{,}0257;$$

$$P_1=C_6^1\rho P_0=6\cdot(0{,}75)\cdot 0{,}0257\approx 0{,}1157;$$

$$P_2=C_6^2\rho^2 P_0=15\cdot 0{,}5625\cdot 0{,}0257\approx 0{,}2168;$$

$$P_3=C_6^3\rho^3 P_0=90\cdot 0{,}4219\cdot 0{,}0257\approx 0{,}2169;$$

$$P_4=C_6^4\frac{4!}{3!3}\rho^4 P_0=20\cdot\frac{4}{3}\cdot 0{,}3164\cdot 0{,}0257\approx 0{,}2168;$$

$$P_5=C_6^5\frac{5!}{3!3^2}\rho^5 P_0=6\cdot\frac{20}{9}\cdot 0{,}2373\cdot 0{,}0257\approx 0{,}0813;$$

$$P_6=C_6^6\frac{6!}{3!3^3}\rho^6 P_0=\frac{40}{9}\cdot 0{,}178\cdot 0{,}0257\approx 0{,}0203.$$

Маючи числові значення ймовірностей для всіх можливих станів системи, обчислюємо L, N_1, N_2.

$$L=\sum_{k=3}^{6}(6-k)P_k=3P_3+2P_4+P_5=3\cdot 0{,}2169+2\cdot 0{,}2168+0{,}0813=0{,}6507+0{,}4336+0{,}0813=1{,}1656.$$

$$L=1{,}1656.$$

$$N_1=\sum_{k=1}^{3}kP_k=P_1+2P_2+3P_3=0{,}1157+2\cdot 0{,}2168+3\cdot 0{,}2169=0{,}1157+0{,}4336+0{,}6507=1{,}2.$$

$$N_1=1{,}2.$$

$$N_2=\sum_{k=0}^{2}(3-k)P_k=3P_0+2P_1+P_2=3\cdot 0{,}257+2\cdot 0{,}1157+0{,}2168=0{,}0771+0{,}2314+0{,}2168=0{,}5253.$$

$$N_2=0{,}5253.$$

Обчислимо функцію втрат:

$$Q_{\text{вт}}=\left[q_{\text{п.к}}N_1+q_{\text{з}}P_{k1}\lambda+q_{\text{к}}N_2+q_{\text{о.ч}}L\right]T\Rightarrow[108+525{,}3+58{,}28]\cdot 200=691{,}58\cdot 200=138\ 316\ \text{грн.}$$

Критерій ефективності обчислюємо як

$$E=\lambda P_k CT-Q_{\text{вт}}=\frac{1}{4}\cdot 0{,}2169\cdot 14\,000\cdot 200-132\ 316=151\ 830-138\ 316=13\,514\ \text{грн.}$$

Висновок. Розрахунки показали, що автопарк працює з доходом у 13 514 грн. Є можливість підвищити ефективність його роботи шляхом варіювання значень R, μ.

9.11. Використання методу ймовірнісних твірних функцій при розв'язуванні задач СМО

Загальна інформація про ймовірнісні твірні функції

Як уже зазначалося в попередній темі, степеневий ряд

$$A(x)=p_0+xp_1+x^2p_2+x^3p_3+\ldots+x^kp_k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k p_k\ , \tag{9.74}$$

для якого $|x|\le 1$, p_k — імовірність того, що в системі перебувають k вимог, називають **імовірнісною твірною функцією.** Спинимося на основних властивостях $A(x)$.

1. Оскільки

$$A(1)=p_0+p_1+p_2+p_3+\ldots+p_k+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}p_m=1,$$

то при $x=1$ маємо

$$A(1)=P_0+P_1+P_2+P_3+\ldots+P_k+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}P_m=1, \qquad (9.75)$$

тобто дістали *умову нормування*.

2. Постає питання про визначення ймовірностей P_n $M/M/1/\infty$ за відомою аналітичною формою запису $M/M|2/4$. Так, значення P_0 дістанемо, узявши $x=0$:

$$A(0)=P_0+0\cdot P_1+0\cdot P_2+0\cdot P_3+\ldots+0\cdot P_k+\ldots\Rightarrow P_0=A(0). \qquad (9.76)$$

Щоб визначити P_1, необхідно взяти першу похідну від імовірнісної твірної функції при $x=0$:

$$A^{''}(x)=p_1+2x\,p_2+3x^2\;p_3+\ldots+kx^{k-2}p_k+\ldots\Rightarrow p_1=A^{'}(0)$$

Для визначення P_2 необхідно взяти другу похідну від імовірнісної твірної функції при $x=0$.

$$A''(x)=2\,p_2+6x\,p_3+\ldots+k\cdot(k-1)\cdot x^{k-2}p_k+\ldots\Rightarrow P_2=\frac{1}{2}A'(0)=\frac{1}{2!}A''(0).$$

Аналогічно для P_3 дістаємо:

$$A'''(x)=6P_3+\ldots+k\,(k-1)(k-2)P_k+\ldots\Rightarrow P_3=\frac{1}{6}A'''(0)=\frac{1}{3!}A'''(0).$$

Наприклад, для $\lambda=10$ $\left(\text{хв}^{-1}\right)$ маємо:

$$P_4=\frac{1}{4!}A^{(IV)}(0)\text{ і т. ін.}$$

Тоді для ймовірності P_k маємо:

$$P_k=\frac{1}{k!}A^{(k)}(0)\,. \qquad (9.77)$$

3. *Математичне сподівання*.

Оскільки $A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kP_k$, то $A'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot x^{k-1}P_k$.

При $x=1$ дістаємо:

$$A'(1)=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k,$$

де права частина являє собою математичне сподівання для цілочислової випадкової величини $x=k$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$.

Отже, маємо

$$M=A'(1). \qquad (9.78)$$

4. *Дисперсія*.

Як відомо, формула для обчислення дисперсії набирає вигляду:

$$D=M(k^2)-M^2(k)$$

Тому необхідно визначити P_0. Для цього беремо другу похідну від імовірнісної твірної функції при $x=1$:

$$A''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}P_k=\sum_{k=0}^{\infty}k^2x^{k-2}P_k-\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-2}P_k\Rightarrow A''(1)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2P_k-\sum_{k=0}^{\infty}kP_k\,.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k = \mathrm{M}\left(k^2\right), \quad \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = A'(1),$$

то

$$A''(1) = M\left(k^2\right) - A'(1) \Rightarrow M\left(k^2\right) = A''(1) + A'(1).$$

Таким чином, дістали

$$D = A''(1) + A'(1) - \left(A'(1)\right)^2. \tag{9.79}$$

Якщо до системи надходять два пуассонівські потоки вимог, то ймовірнісна твірна функція має такий вигляд:

$$A(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^k y^m P_{km} \tag{9.80}$$

де P_{km} — імовірність того, що в системі перебувають k вимог першого потоку, m вимог другого потоку і при цьому $|x| \le 1,\ |y \le 1|$.

Коли до системи надходять три пуассонівські потоки, імовірнісна твірна функція буде такою:

$$A(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^k y^m z^n P_{kmn}, \tag{9.81}$$

де $|x| \le 1,\ |y|. \le 1, |z| \le 1$, P_{kmn} — імовірність перебування в системі k вимог першого потоку, m — другого і n — третього.

9.11.1.Стохастична модель $M/M/1/\infty$ із надійним каналом обслуговування

Розглянемо застосування методу ймовірнісних твірних функцій для простої системи масового обслуговування, до якої надходить один пуассонівський потік вимог із параметром λ. При цьому для обслуговування кожної вимоги канал витрачає час *T*, який є випадковою величиною із експоненціальним законом розподілу ймовірностей і параметром μ. Кількість вимог, які можуть перебувати в системі, є необмеженою, і при цьому канал обслуговування не виходить із ладу.

Як відомо, математична модель у стаціонарному режимі роботи системи подається у вигляді:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\lambda + \mu) P_k = \mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{9.82}$$

Безперечно, для визначення основних операційних характеристик системи ми могли б скористатися методами, які застосовували в попередніх задачах. Проте щоб розкрити ефективність цього методу, використаємо його.

Нехай $A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k$.

Умову нормування тепер можемо записати у вигляді

$$A(1) + P_0 = 1. \tag{9.83}$$

Необхідно визначити аналітичний вираз для $A(x)$ і, використовуючи формули (9.78), (6.79), знайти основні операційні характеристики системи.

Помноживши друге рівняння системи (9.82) на x^k, дістанемо:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1, \\ (\lambda + \mu) x^k P_k = \mu x^k P_{k+1} + \lambda x^k P_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{9.84}$$

Додавши перше і друге рівняння системи (9.84) і виконавши підсумовування за $q_{\text{п.к}}$, дістанемо:

$$\lambda P_0 + (\lambda+\mu)\sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k = \frac{\mu}{x}\sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k + \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k + \lambda x P_0$$

або

$$\lambda P_0 + (\lambda+\mu)\, A(x) = \frac{\mu}{x} A(x) + \lambda x A(x) + \lambda x P_0 \Rightarrow \left[\lambda(1-x) + \mu\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot A(x) = \lambda(x-1)P_0. \quad (9.85)$$

Отже, нескінченну однорідну систему (9.84) звели до функціонального рівняння (9.85). Із (9.85) знаходимо

$$A(x) = \frac{\lambda(x-1)\cdot P_0}{\left[\lambda(1-x) + \mu\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]}. \quad (9.86)$$

Вираз (6.86) можна звести до такого вигляду:

$$A(x) = \frac{\lambda(x-1)P_0}{\left[\mu\frac{x-1}{x} - \lambda(1-x)\right]} = \frac{\lambda P_0}{\frac{\mu}{x} - \lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} x P_0}{1 - \frac{\lambda}{\mu} x} = \frac{\rho x}{1-\rho x} P_0 \Rightarrow A(x) = \frac{\rho x}{1-\rho x} P_0. \quad (9.87)$$

Імовірнісну функцію $A(x)$ визначено з точністю до ймовірності P_0.

Для визначення P_0 використаємо умову нормування (9.83):

$$A(1) + P_0 = 1 \Rightarrow \frac{\rho}{1-\rho} P_0 + P_0 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\rho}{1-\rho} + 1\right) P_0 = 1 \Rightarrow \frac{\rho + 1 - \rho}{1-\rho} P_0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\rho} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 = 1-\rho. \quad (9.88)$$

Отже, імовірність того, що в стаціонарному режимі роботи системи в ній не буде вимог, обчислюється за формулою (9.88).

Із визначеним P_0 імовірнісна твірна функція набере такого вигляду:

$$A(x) = \frac{\rho x}{1-\rho x}(1-\rho). \quad (9.89)$$

При $x=1$ із (3.89) дістаємо:

$$A(1) = \frac{\rho}{1-\rho}(1-\rho) = \rho.$$

А оскільки $A(1) = 1 - P_0$, то сутність рівності

$$A(1) = \rho \quad (9.90)$$

полягає в тому, що $A(1)$ — це ймовірність того, що в системі перебуватиме хоча б одна вимога:

$$A(1) = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_k + \ldots = 1 - P_0. \quad (9.91)$$

Слід наголосити, що для стабільності роботи системи необхідно, щоб

$$\rho < 1. \quad (9.92)$$

Для визначення M, D використаємо щойно здобуті формули (9.78), (9.79). Так, для відшукання M необхідно знайти $A'(1)$.

$$A'(x) = \left(\frac{\rho x}{1-\rho x} P_0\right)' = \frac{\rho(1-\rho x) + \rho^2 x}{(1-\rho x)^2} P_0 = \frac{\rho}{(1-\rho x)^2} P_0.$$

При $x=1$ маємо:

$$A'(1)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}P_0=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}(1-\rho)=\frac{\rho}{1-\rho}.$$

Отже, маємо

$$M=\frac{\rho}{1-\rho}. \tag{9.93}$$

Щоб за формулою (9.79) знайти дисперсію, необхідно визначити $A''(1)$.

$$A''(x)=\left[\frac{\rho}{(1-\rho x)^2}P_0\right]'=\frac{2\rho^2(1-\rho x)}{(1-\rho x)^4}P_0=\frac{2\rho^2}{(1-\rho x)^3}P_0 \Rightarrow A''(1)=\frac{2\rho^2}{(1-\rho)^3}(1-\rho)=\frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2}.$$

Оскільки

$$D=A''(1)+A'(1)-[A'(1)]^2,$$

то, підставивши вирази для $A''(1)$, $A'(1)$, дістанемо:

$$D=\frac{2\rho^2}{(1-\rho)^2}+\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}=\frac{2\rho^2+\rho(1-\rho)-\rho^2}{(1-\rho)^2}=\frac{2\rho^2+\rho-\rho^2-\rho^2}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}.$$

Таким чином, маємо

$$D=\frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}. \tag{9.94}$$

Тоді

$$\sigma=\sqrt{D}=\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \tag{9.95}$$

Як правило, на практиці характеристики (9.94), (9.95) мають обмежене застосування.
Довжина черги

$$L=M-A(1)=M-\rho. \tag{9.96}$$

Середній час перебування вимоги в системі

$$T_1=\frac{M}{\lambda}. \tag{9.97}$$

Середній час перебування системи в черзі

$$T_2=\frac{L}{\lambda}. \tag{9.98}$$

Приклад 5. Досліджується одноканальна система масового обслуговування, до якої надходять вимоги у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік з параметром $\lambda=8\ \left[\frac{1}{\text{с}}\right]$. Час обслуговування кожної вимоги — випадкова величина з експоненціальним законом розподілу ймовірностей і параметром $\mu=10\left[\frac{1}{\text{с}}\right]$. Кількість вимог у системі необмежена.

а). Побудувати стохастичну модель даної системи для стаціонарного режиму роботи.

б). Визначити основні операційні характеристики системи, такі як P_0, M, L, T_1, T_2, і ймовірність зайнятості системи.

Розв'язання. а) У стаціонарному режимі стохастична модель системи являтиме собою необмежену однорідну систему алгебраїчних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} 8P_0=10P_1, \\ (8+10)P_k=10P_{k+1}+8P_{k-1}, \qquad k=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Із параметром $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0{,}8$ система набере такого вигляду:

$$\begin{cases} 0{,}8 P_0 = P_1, \\ (1+0{,}8) P_k = P_{k+1} + 0{,}8 P_{k-1}, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}8 P_0 = P_1, \\ 1{,}8 P_k = P_{k+1} + 0{,}8 P_{k-1}, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \end{cases}$$

Імовірнісна твірна функція

$$A(x) = \frac{0{,}8x}{1-0{,}8x} P_0.$$

б) Використовуючи формули (9.75), (9.88), (9.93), (9.96), (9.97), (9.98), дістаємо:

$$P_0 = 1-\rho = 1-0{,}8 = 0{,}2.$$

Отже, імовірність того, що система буде вільною від вимог, $P_0 = 0{,}2$.
Математичне сподівання

$$M = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = \frac{0{,}8}{0{,}2} = 4.$$

Довжина черги

$$L = M - \rho = 4 - 0{,}8 = 3{,}2.$$

Середній час перебування вимоги в системі

$$T_1 = \frac{M}{\lambda} = \frac{4}{8} = 0{,}5 \text{ с.}$$

Середній час перебування вимоги в черзі

$$T_2 = \frac{L}{\lambda} = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4 \text{ с.}$$

Імовірність зайнятості системи обслуговуванням вимоги

$$A(1) = P_1 + P_2 + \ldots + P_k + \ldots = 0{,}8.$$

Висновок. Знайдені операційні характеристики системи інформують нас про таке: імовірність того, що система перебуває в стані простою, становить $P_0 = 0{,}2$, або 20 %, що в реально діючих системах є занадто великим числом. Щоб зменшити числове значення P_0, необхідно за незмінного значення параметра μ збільшити інтенсивність потоку λ. Отже, 20 % часу є той резерв, який можна використати залученням до системи додаткових вимог.

9.11.2. Стохастична модель $M/M/1/\infty$ із ненадійним каналом обслуговування

Дослідимо систему, яка відрізнятиметься від попередньої лише тим, що канал обслуговування є ненадійним, тобто у випадкові моменти часу він виходить із ладу. Щоб можна було використати модель Ерланга (9.59), (9.61), вважають, і це підтвердила практика, що виходи з ладу каналу, які відбуваються у випадкові моменти часу t, утворюють пуассонівський потік подій із параметром λ_0, а час, що витрачається на усунення пошкоджень, є випадковою величиною, яка має експоненціальний закон розподілу із параметром μ_0.

Отже, модель $M/M\ 1/\infty$ із надійним каналом обслуговування буде відрізнятися від моделі $M/M\ 1/\infty$ із ненадійним каналом введенням нового стану: канал обслуговування перебуває у стані ремонту. Урахувавши це, сформулюємо задачу для загального випадку.

Розглядається одноканальна система масового обслуговування, до якої надходить пуассонівський потік вимог із параметром λ. Кожна з вимог обслуговується каналом, який витрачає для цього час t, що є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу та параметром μ.

У процесі роботи каналу під впливом випадкових факторів у випадкові моменти часу він виходить із ладу. При цьому послідовність виходів із ладу каналу утворює пуассонівський потік із параметром λ_0. Час, який необхідно витратити для налагодження каналу, є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей і параметром μ_0.

Під час ремонту каналу вимоги до системи й далі надходять із тією самою інтенсивністю λ. При цьому кількість вимог у системі не обмежується. З урахуванням сказаного модель у динаміці (6.59) буде такою:

$$\begin{cases} \dfrac{d P_0(t)}{d t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) + \mu_0 R_0(t), \\ \dfrac{d P_k(t)}{d t} = -(\lambda+\mu) P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t) + \mu R_k(t), \ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ \dfrac{d R_0(t)}{d t} = -(\lambda+\mu_0) R_0 + \lambda_0 P_0(t), \\ \dfrac{d R_k(t)}{d t} = -(\lambda+\mu_0) R_k(t) + \lambda_0 P_k(t) + \lambda R_{k-1}(t), \ k = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{9.99}$$

де $P_k(t)$ — імовірність того, що в момент часу t в системі перебуває k вимог і канал є справним; $R_0(t)$ — імовірність того, що в момент часу t в системі відсутні вимоги і канал обслуговування перебуває в стані ремонту; $R_k(t)$ — імовірність того, що в момент часу t у системі перебуває k вимог і канал перебуває в стані ремонту.

У стаціонарному режимі функціонування такої системи її стохастична модель (9.99) набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 + \mu_0 R_0, \\ (\lambda+\mu) P_k = \mu P_{k+1} + \lambda P_{k-1} + \mu_0 R_k, \ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ (\lambda+\mu_0) R_0 = \lambda_0 P_0, \\ (\lambda+\mu_0) R_k = \lambda_0 P_k + \lambda R_{k-1}, \ k = 1, 2, 3, \ldots \ . \end{cases} \tag{9.100}$$

Ураховуючи те, що для нашої модельованої системи існує два якісних стани (справний канал, несправний), вводимо дві ймовірнісні твірні функції:

$$A_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k, \qquad A_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k R_k. \tag{9.101}$$

Для визначення $A_1(x), A_2(x)$ помножимо друге і четверте рівняння системи (9.100) на x^k:

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 + \mu_0 R_0, \\ (\lambda+\mu) x^k P_k = \mu x^k P_{k+1} + \lambda \cdot x^k P_{k-1} + \mu_0 x^k R_k, \ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ (\lambda+\mu_0) R_0 = \lambda_0 P_0, \\ (\lambda+\mu_0) x^k R_k = \lambda_0 x^k P_k + \lambda x^k R_{k-1}, \ k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{9.102}$$

Додавши перше рівняння до другого, третє до четвертого і виконавши підсумовування за k, дістанемо таку систему функціональних рівнянь відносно $A_1(x), A_2(x)$:

$$\begin{cases} [\lambda_0 + \lambda(1-x)] A_1(x) - \mu_0 A_2(x) = [\lambda(1-x) - \lambda_0] P_0, \\ [\mu_0 + \lambda(1-x)] A_2(x) - \lambda_0 A_1(x) = \lambda_0 P_0. \end{cases} \tag{9.103}$$

Розв’язуючи систему (6.102) відносно $A_1(x)$ і $A_2(x)$, дістаємо:

$$A_1(x) = \frac{[\mu_0 \lambda - \lambda^2 (x-1) + \lambda_0 \lambda] x P_0}{\mu_0 \mu + \lambda\mu(1-x) + \lambda^2 (x-1) x - \lambda_0 \lambda x - \mu_0 \lambda x}. \tag{9.104}$$

$$A_2(x)=\frac{\lambda_0\mu P_0}{\mu_0\,\mu+\lambda\mu(1-x)+\lambda^2(x-1)x-\lambda_0\,\lambda x-\mu_0\,\lambda x}. \tag{9.105}$$

При $x=1$ знаходимо:

$$\begin{aligned} A_1(1)&=\frac{\rho\,(1+\rho_0)P_0}{1-\rho-\rho\rho_0},\\ A_2(1)&=\frac{\rho_0 P_0}{1-\rho-\rho\rho_0}, \end{aligned} \tag{9.106}$$

де

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu},\ \rho_0=\frac{\lambda_0}{\mu_0}.$$

За умовою нормування, яка для цієї моделі матиме вигляд

$$A_1(1)+A_2(1)+P_0=1,$$

дістанемо:

$$\begin{aligned} &\frac{\rho(1+\rho_0)P_0}{1-\rho-\rho\rho_0}+\frac{\rho_0 P_0}{1-\rho-\rho\rho_0}+P_0=1\Rightarrow(\rho-\rho\rho_0+\rho_0+1-\rho-\rho\rho_0)P_0=1-\rho-\rho\rho_0\Rightarrow\\ &\Rightarrow(1+\rho_0)\cdot P_0=1-\rho-\rho\rho_0\Rightarrow P_0=\frac{1}{1+\rho_0}(1-\rho-\rho\rho_0). \end{aligned} \tag{9.107}$$

Введемо поняття ***коефіцієнта готовності системи*** $k_г=\frac{1}{1+\rho_0}$, що інформує про ступінь готовності каналу до обслуговування вимог і залежить від параметра ρ_0. При $\rho_0=0$ $k_г=1$. Зі збільшенням ρ_0 готовність каналу, а отже, і системи обслуговувати вимоги, як випливає з графіка залежності $k_г=f(\rho_0)$ (рис. 9.3), буде зменшуватись.

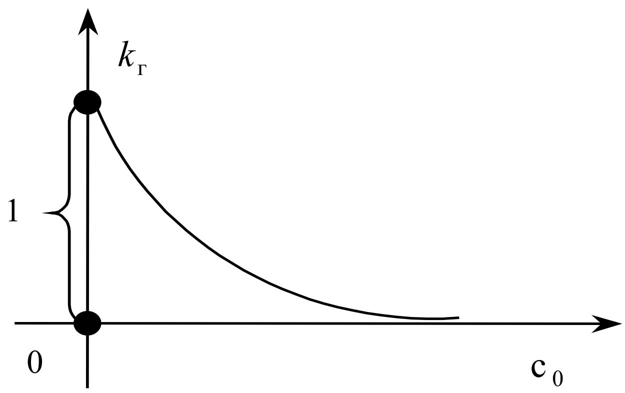


Рис. 9.3

Значення ρ_0 можна зменшити, збільшивши параметр (інтенсивність ремонту каналу), тоді як на параметр λ_0 впливати практично неможливо. Але збільшення μ_0 пов’язане з економічними факторами.

З урахуванням цього маємо:

$$P_0=k_г(1-\rho-\rho\rho_0). \tag{9.108}$$

Підставляючи (9.107) у (9.106), дістаємо:

$$A_1(1)=\frac{\rho(1+\rho_0)}{1-\rho-\rho\rho_0}P_0=\frac{\rho(1+\rho_0)}{1-\rho-\rho\rho_0}\frac{1}{1+\rho_0}(1-\rho-\rho\rho_0)=\rho,$$

$$A_2(1)=\frac{\rho_0}{1-\rho-\rho\rho_0}P_0=\frac{\rho_0}{1-\rho-\rho\rho_0}\frac{1}{1+\rho_0}(1-\rho-\rho\rho_0)=\frac{\rho_0}{1+\rho_0}=k_г\rho_0.$$

Отже, імовірність того, що система перебуває в робочому стані,

$$A_1(1) = \rho, \tag{9.109}$$

а ймовірність того, що система перебуває в стані відновлення каналу до обслуговування вимог:

$$A_2(1) = k_г \rho_0. \tag{9.110}$$

Для визначення математичного сподівання кількості вимог, які можуть перебувати в системі, необхідно знайти $A_1'(1),\ A_2'(1)$.

Тоді

$$M = A_1'(1) + A_2'(1). \tag{9.111}$$

$$A_1'(1) = \frac{\rho(1+\rho_0) - \alpha\rho(\alpha\rho+\rho_0)}{(1-\rho-\rho\rho_0)(1+\rho_0)} = k_г \frac{\rho(1+\rho_0) - \alpha\rho(\alpha\rho+\rho_0)}{1-\rho-\rho\rho_0}, \tag{9.112}$$

$$A_2'(1) = \frac{\alpha\rho_0\rho(1-\rho) + \rho\rho_0(1+\rho_0)}{(1-\rho-\rho\rho_0)(1+\rho_0)} = k_г \frac{\alpha\rho_0\rho(1-\rho) + \rho\rho_0(1+\rho_0)}{1-\rho-\rho\rho_0}, \tag{9.113}$$

де

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Решта операційних характеристик системи визначаються за формулами, наведеними для стохастичної моделі $M/M\ 1/\infty$ із надійним каналом обслуговування.

Приклад 6. Комп’ютерний центр обробляє інформацію, яка надходить у випадкові моменти часу t, утворюючи пуассонівський потік із параметром $\lambda = 5\ \left[\frac{1}{\text{м/с}}\right]$. Час, який витрачається для обробки одиниці інформації, є випадковою величиною, що має експоненціальний закон розподілу з параметром $\mu = 8\ \left[\frac{1}{\text{м/с}}\right]$. У процесі роботи центру під впливом зовнішніх випадкових факторів він може виходити з ладу у випадкові моменти часу. Послідовність неполадок центру розглядається як випадкова подія, що утворює пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda_0 = 1\ \left[\frac{1}{\text{м/с}}\right]$. Час для усунення неполадок, які здійснюються програмним способом, є випадковою величиною із експоненціальним законом розподілу ймовірностей, параметр якого $\mu_0 = 8\ \left[\frac{1}{\text{м/с}}\right]$. Число одиниць інформації, які можуть перебувати в системі, очікуючи своєї черги на обслуговування, є необмеженим.

6.1. Записати стохастичну модель для даної системи в стаціонарному режимі.

6.2. Визначити основні операційні характеристики системи.

Розв’язання. 6.1. За умовою задачі маємо такі значення величин, які буде використано в подальших обчисленнях:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{8} = 0{,}625,\ \ \rho_0 = \frac{\lambda_0}{\mu_0} = \frac{1}{8} = 0{,}125,\ \ \alpha = \frac{\mu}{\mu_0} = 1.\ \ k_г = \frac{1}{1+\rho_0} = 0{,}89.$$

Стохастична модель системи в стаціонарному режимі роботи набирає вигляду:

$$\begin{cases} \rho P_0 = P_1 + \alpha R_0, \\ (1+\rho)P_k = P_{k+1} + \rho P_{k-1} + \alpha P_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ (1+\alpha\rho)R_0 = \rho_0 P_0, \\ (1+\alpha\rho)R_k = \rho_0 P_k + \alpha\rho R_{k-1}. \end{cases} \tag{9.114}$$

Використовуючи числові значення ρ, ρ_0, α, модель (9.114) набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} 0{,}625P_0 = P_1 + R_0, \\ 1{,}625P_k = P_{k+1} + 0{,}625P_{k-1} + R_k, \quad k = 1,\, 2,\, 3, \ldots, \\ 1{,}625R_0 = 0{,}125P_0, \\ 1{,}625R_k = 0{,}125P_k + 0{,}625R_{k-1}. \end{cases}$$

6.2. Для визначення основних операційних характеристик системи використаємо відповідно формули, наведені в попередніх викладках:

а) $P_0 = k_г\left(1 - \rho - \rho\rho_0\right) = 0{,}89\left(1 - 0{,}625 - 0{,}625 \cdot 0{,}125\right) = 0{,}89 \cdot \left[1 - 0{,}625 - 0{,}078\right] = 0{,}89 \cdot 0{,}297 = 0{,}2643.$

б) Ураховуючи, що

$$M = A_1'(1) + A_2'(1),$$

обчислюємо $A_1'(1)$, $A_2'(1)$:

$$A_1'(1) = k_г \frac{\rho(1+\rho_0) - \alpha\rho(\alpha\rho + \rho_0)}{1 - \rho - \rho\rho_0} = 0{,}89 \cdot \frac{0{,}625 \cdot 1{,}125 - 1 \cdot 0{,}625 \cdot (1 \cdot 0{,}625 + 0{,}125)}{1 - 0{,}625 - 0{,}625 \cdot 0{,}125} =$$

$$= 0{,}89 \cdot \frac{0{,}7031 - 0{,}625 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}625 - 0{,}078} = \frac{0{,}89 \cdot (0{,}7031 - 0{,}4688)}{0{,}297} = \frac{0{,}89 \cdot 0{,}2343}{0{,}297} = \frac{0{,}2085}{0{,}297} = 0{,}702.$$

$$A_1'(1) = 0{,}702.$$

$$A_2'(1) = k_г \frac{\alpha\rho_0\rho(1-\rho) + \rho\rho_0(1+\rho_0)}{1 - \rho - \rho\rho_0} = 0{,}89 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}625 - (1 - 0{,}625) + 0{,}625 \cdot 0{,}125(1 + 0{,}125)}{1 - 0{,}625 - 0{,}625 \cdot 0{,}125} =$$

$$= 0{,}89 \cdot \frac{0{,}7081 - 0{,}375 + 0{,}0781 \cdot 1{,}125}{0{,}297} = 0{,}89 \cdot \frac{0{,}0293 + 0{,}0879}{0{,}297} = \frac{0{,}29 \cdot 0{,}1172}{0{,}297} = \frac{0{,}1043}{0{,}297} = 0{,}3512.$$

$$A_2'(1) = 0{,}3512.$$

$$M = 0{,}702 + 0{,}3512 = 1{,}052.$$

в) Довжина черги

$$L = M - \rho = 1{,}052 - 0{,}625 = 0{,}427.$$

$$L = 0{,}427.$$

г) Імовірність того, що система перебуває в робочому стані, $A_1(1) = \rho = 0{,}625.$

д) Імовірність того, що система перебуває в стані поновлення робото здатності комп’ютера,

$$A_2(1) = k_г\,\rho_0 = 0{,}89 \cdot 0{,}125 = 0{,}1113.$$

е) Час перебування вимог у системі

$$T_1 = \frac{M}{\lambda} = \frac{1{,}052}{5} = 0{,}2104. \Rightarrow T_1 = 0{,}2104 \text{ [с/м]}.$$

є) Час перебування вимог у черзі

$$T_2 = \frac{L}{\lambda} = \frac{0{,}427}{5} = 0{,}0854. \Rightarrow T_2 = 0{,}0854 \text{ [с/м]}.$$

Висновки. Аналізуючи знайдені числові значення операційних числових характеристик, бачимо, що при заданих параметрах імовірності того, що система перебуватиме в стані простою (відсутні вимоги в системі), становить $P_0 = 0{,}2643$, тобто 26,43 % робочого часу, що з погляду економічної ефективності роботи неприпустимо. Зменшити P_0 можна збільшенням параметрів системи μ і μ_0.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати визначення марковського процесу народження-загибелі. Навести приклади застосування в економіці.

2. Стохастична модель народження-загибелі в загальному вигляді.
3. Модель Ерланга. Яку економічну інформацію містять ймовірності P_0, P_k?
4. Числові характеристики моделі Ерланга та їх економічний зміст.
5. Модель Ерланга в стаціонарному режимі.
6. Параметр ρ. Яку економічну інформацію містить цей параметр?
7. Приклади задач теорії масового обслуговування, які трапляються на практиці.
8. Основні елементи системи масового обслуговування.
9. Пуассонівський потік, його властивості та використання в СМО.
10. У чому полягає суть пріоритетності обслуговування вимог у СМО?
11. Механізм обслуговування вимог.
12. Основні операційні характеристики СМО та їх економічний зміст.
13. Економічні критерії оцінки роботи систем масового обслуговування.
14. Стохастична модель $M/M/1/k_1$. Навести приклади застосування в економіці.
15. Числові характеристики для стохастичної моделі $M/M/m/k_1$ у стаціонарному режимі роботи та їх економічний зміст.
16. Стохастична модель $M/M/1/\infty$. Навести приклади застосування в економіці.
17. Числові характеристики для стохастичної моделі $M/M/m/\infty$ у стаціонарному режимі роботи та їх економічний зміст.
18. Стохастична модель $M/M/m/k_1$. Оцінка економічної ефективності роботи цієї системи. Навести приклади застосування в економіці.
19. Числові характеристики для стохастичної моделі $M/M/m/k_1$ у стаціонарному режимі роботи та їх економічний зміст. Використання функції *G*втр втрат для цієї системи.
20. Стохастична модель $M/M/m/\infty$. Навести приклади застосування в економіці.
21. Числові характеристики для стохастичної моделі $M/M/m/\infty$ у стаціонарному режимі роботи та їх економічний зміст.
22. Стохастична модель обслуговування автопарку та її числові характеристики в стаціонарному режимі роботи. Навести приклад застосування в економіці та економічний зміст числовим характеристикам.
23. Метод імовірнісних твірних функцій та їх використання при розв'язуванні задач СМО.
24. Стохастична модель $M/M/1/\infty$ із надійним каналом обслуговування. Навести приклади застосування в економіці.
25. Розв'язування стохастичної моделі $M/M/1/\infty$ із надійним каналом обслуговування методом імовірнісних твірних функцій.
26. Стохастична модель $M/M/1/\infty$ із ненадійним каналом обслуговування. Навести приклади застосування в економіці.
27. Розв'язування стохастичної моделі $M/M/1/\infty$ із ненадійним каналом обслуговування методом імовірнісних твірних функцій.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Досліджується система масового обслуговування, до якої надходить пуассонівський потік вимог з інтенсивністю $\lambda=4$. Система має два канали обслуговування, які працюють паралельно. Час обслуговування — випадкова величина з експоненціальним законом розподілу ймовірностей із параметром $\mu=20$. Побудувати стохастичну модель $M/M|2/4$ для стаціонарного режиму роботи системи. Визначити основні операційні характеристики СМО: P_0, P_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$, а також M, L, W_1, W_2.

2. Робота певної системи масового обслуговування в динаміці описується такою системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&1)\ P_0'(t) = -2P_0(t) + 3\,P_1(t),\\
&2)\ P_1'(t) = -5P_1(t) + 2P_0(t) + 3\,P_2(t),\\
&3)\ P_2'(t) = -5P_2(t) + 2P_1(t) + 3\,P_2(t),\\
&4)\ P_3'(t) = -5P_3(t) + 2P_2(t) + 3P_4(t),\\
&5)\ P_4'(t) = -3P_4(t) + 2P_3(t).
\end{aligned}$$

Записати відповідну стохастичну модель СМО для стаціонарного режиму роботи системи і визначити для неї основні операційні характеристики: P_0, P_4, M, L, W_1, W_2.

3. Бензозаправна станція, розташована на околиці міста, обслуговує авто, які під'їжджають до неї. Автомобілі надходять у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda = 10\ (\text{хв}^{-1})$.

Час, який витрачається на заправлення одного автомобіля, є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей і параметром $\mu = 8\ \ (\text{хв}^{-1})$. Кількість автомобілів, які надійшли до бензозаправної станції і утворили чергу, у середньому не перевищує десяти.

а) Записати стохастичні моделі для цієї системи в динамічному і стаціонарному режимах роботи.

б) При відомих значеннях $q_{\text{к}} = 50$ грн, $q_{\text{з}}$ = 200 грн, $q_{\text{н.к}}$ = 20 грн, $q_{\text{о.ч}}$ = 20 грн оцінити економічну ефективність роботи системи протягом 8 годин, якщо економічний ефект від обслуговування однієї вимоги (автомобіля) C = 60 грн.

4. У порту працюють три крани для розвантаження суден. Інтенсивність потоку суден дорівнює 20 (суден з добу). За добу в середньому обслуговуються два судна. Вважається, що черга може бути необмеженою.

4.1).Записати стохастичну модель для цієї системи в динамічному і стаціонарному режимах роботи.

4.2). Визначити такі операційні характеристики системи для стаціонарного режиму:

а) імовірність того, що в системі відсутні вимоги (судна);

б) математичне сподівання кількості суден у системі та довжину черги;

в) середній час перебування суден у системі та в черзі.

5. У супермаркеті є три каси, де покупці розраховуються за вибраний товар. До кожної каси покупці надходять у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік. У середньому до кожної із них надходить 50 покупців за годину.

Середня тривалість обслуговування контролером-касиром кожного покупця дорівнює 4 хв. Черга до кожної каси не перевищує 10 осіб.

а) Записати стохастичні моделі для цієї системи в динамічному і стаціонарному режимах роботи.

б) Визначити такі операційні характеристики системи: P_0, P_{10}, M, L, W_1, W_2.

в) За відомими значеннями: $q_{\text{к}} = 20$ грн, $q_{\text{з}}$ = 50 грн, $q_{\text{п.к}}$ = 10 грн, $q_{\text{о.ч}}$ = 10 грн оцінити економічну ефективність роботи системи за 8 год, якщо економічний ефект від обслуговування покупця становить у середньому 60 грн (C = 60 грн).

6. Дві залізничні каси продають квитки до двох пунктів A і B. Інтенсивність потоку пасажирів, які бажають купити квиток, для обох пунктів однакова: $\lambda_A = \lambda_B = \lambda = 0{,}4$ (пасажира/хв). На обслуговування пасажира касир витрачає у середньому 2 хв. При цьому можливі два варіанти продажу квитків:

6.1) квитки продаються у двох касах до пунктів А і В;

6.2) квитки продаються в одній касі до пункту A, а в другій — до пункту B.

а) Визначити для наведених варіантів основні операційні характеристики: P_0, M, L, W_1, W_2.

б) Порівнявши операційні характеристики, визначити найкращий варіант обслуговування пасажирів.

7. Досліджується цілодобова робота пункту проведення профілактичного огляду автомобілів, який здійснюють три бригади. Час, який витрачається на огляд одного автомобіля, є випадковою величиною із експоненціальним законом розподілу ймовірностей і в середньому становить 0,8 год. На огляд до пункту автомобілі надходять у випадкові моменти часу, утворюючи пуассонівський потік. У середньому за добу на огляд надходить 36 автомобілів. Якщо автомобіль, надійшовши до пункту, застане там чергу завдовжки 10 автомобілів і більше, то він залишає пункт.

а) Записати стохастичну модель для цієї системи (пункту огляду) у стаціонарному режимі й обчислити ймовірності $P_i\ \left(i = 0,\ \ i = \overline{1, 10}\right)$.

б) За відомими значеннями: $q_{\text{к}} = 100$ грн, $q_{\text{з}}$ = 150 грн, $q_{\text{п.к}}$ = 20 грн, $q_{\text{о.ч}}$ = 20 грн оцінити економічну ефективність роботи системи за одну добу, якщо економічний ефект від обслуговування одного автомобіля C = 400 грн.

РОЗДІЛ 10

МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ МЕРЕЖНОГО ПЛАНУВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення побудови моделей мережного планування та управління;
- знати основні числові параметри мережних моделей;
- знати моделі мережного планування в умовах невизначеності;
- знати оптимізацію мережної моделі методом «час-вартість»;
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі мережного планування і управління, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

10.1. Мережне планування, основні поняття та означення

Система методів мережного планування та управління (МПУ) широко застосовується для розробки масштабних народногосподарських комплексів, виконання науково-дослідних і дослідно-конструкторських робіт у різних галузях економіки.

Основу МПУ становить процес моделювання за допомогою мережного графа, який дає змогу забезпечити виконання організаційних і контрольних заходів із планування та управління усім комплексом робіт.

Моделі МПУ дають змогу:

1) формувати календарний план реалізації певного комплексу робіт;

2) виявляти та використовувати резерви часу, трудові, матеріальні й фінансові ресурси;

3) здійснювати управління комплексом робіт із подальшим прогнозуванням можливих порушень термінів виконання цих робіт;

4) підвищувати ефективність управління за чіткого розподілу відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт.

Діапазон використання МПУ доволі широкий: від задач, які безпосередню стосуються інтересів окремих осіб, до глобальних проектів, у яких беруть участь сотні організацій і десятки тисяч людей (наприклад, розробка й створення великих промислових комплексів).

Зауважимо, що в моделях МПУ використовується поняття **комплексу робіт**.

Під комплексом робіт розуміють будь-яку задачу, для реалізації якої необхідно виконати достатньо велику кількість різного роду робіт. Це може бути спорудження великих виробничих об'єктів, суден, літаків або будь-яких інших складних об'єктів, що потребують попередніх розробок проектів на ці роботи, а також побудови планів їх реалізації. Для того щоб скласти план робіт з виконання складних проектів, які передбачають здійснення тисяч окремих досліджень і операцій, необхідно описати його за допомогою відповідної моделі.

Такий засіб опису проектів (комплексів) і являє собою мережева модель.

Мережна модель — це план виконання певного комплексу взаємозв'язаних робіт (операцій), який задано у специфічній формі — у вигляді графічного зображення, яке називають ***мережним графом***.

Основними елементами мережної моделі є ***робота*** і ***подія***. Термін «робота» в моделях МПУ використовують у широкому розумінні.

По-перше, це реальна робота — трудовий процес, що відбувається за деякий проміжок часу і потребує певних витрат як людських, так і матеріальних ресурсів. Це може бути робота з виготовлення тих чи інших виробів, із монтажу та налагодження механізмів, агрегатів, приладів та їх випробування тощо.

Кожна реальна робота має бути конкретною, чітко описаною в тому сенсі, що і в якій послідовності потрібно робити, із призначенням виконавця, який відповідає за її результати.

По-друге, поняття «робота» може охоплювати й процес очікування, що триває впродовж певного часу, але при цьому не витрачаються ні людські, ні матеріальні ресурси (наприклад, сушіння пофарбованого виробу, «старіння» металу, твердження бетону тощо).

По-третє, це так звана фіктивна робота, яка відбиває логічний зв'язок між двома чи кількома робочими процесами (подіями), що не потребують витрат ні людських і матеріальних ресурсів, ні часу. Тому тривалість фіктивної роботи вважають нульовою.

Подія — це момент часу, коли закінчується деякий робочий процес, здійснюваний відповідно до запланованого комплексу робіт. Подія може полягати як у закінченні окремої роботи (операції), так і всього комплексу робіт. Подія вважається здійсненою тільки в тому разі, коли закінчено всі попередні процеси.

Наступні робочі процеси можуть розпочатися лише за умови, що дана подія відбулася. Отже, подія як елемент моделі МТУ виконує, так би мовити, подвійну роль: для всіх робочих процесів, розміщених у моделі безпосередньо перед нею, вона буде кінцевою, а для робочих процесів, які розміщені безпосередньо за нею — початковою. При цьому слід наголосити, що подія не має тривалості в часі. Вона відбувається миттєво.

Серед усіх подій мережної моделі виокремлюють вихідну і заключну. ***Вихідною*** називають ту подію, якій не передує жодна подія. ***Заключною*** називають ту подію, щодо якої немає наступних подій у моделі.

Мережні моделі зображують графічно у вигляді графів. Кожну подію на графі зображують кругом і називають ***вершиною графа***, а робочий процес — орієнтованими дугами — ***ребрами***, які показують зв'язок між подіями в мережній моделі. Приклад фрагмента мережного графа зображено на рис. 10.1.

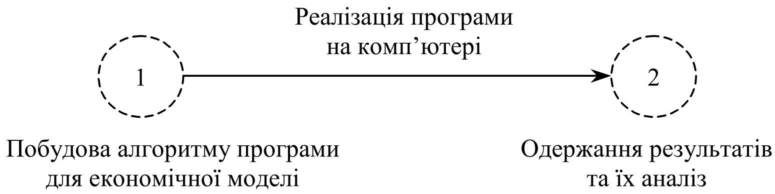


Рис. 10.1

Мережний граф у загальному вигляді наведено на рис. 7.2, де подія 1 є вихідною, а подія 7 — заключною.

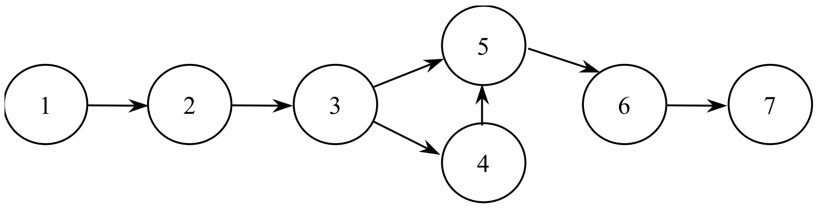


Рис. 10.2

Зауважимо, що в мережній моделі, наведеній на рис. 10.2, немає числових оцінок робіт. Таку мережу називають ***структурною***. На практиці здебільшого використовують мережі, в яких задано оцінки тривалості робочих циклів, вимірюваних у годинах, тижнях, декадах, місяцях тощо.

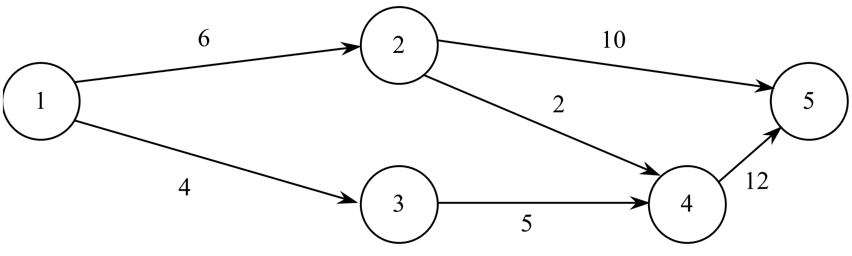


Рис. 10.3

Числові оцінки на ребрах мережного графа можуть інформувати не лише про протяжність робочого циклу, а й, скажімо, про трудомісткість робіт, їхню вартість тощо.

10.2. Методи побудови мережних моделей

Мережні графи, що являють собою мережні моделі планування та управління, складають на початковому етапі відповідного процесу. Спочатку плановий процес поділяють на окремі робочі процеси й складають перелік цих процесів і пов'язаних із ними подій, аналізують логічні зв'язки між розглядуваними подіями й процесами та визначають послідовність їх виконання. Водночас визначають відповідальних за виконання робіт та оцінюють тривалість кожного робочого процесу. Далі будують мережний граф, упорядковують його та визначають параметри подій і робіт.

При побудові мережного графа необхідно додержуватись таких правил:

1. У мережній моделі не повинно бути так званих глухих кутів, тобто подій, із яких не виходить жодний із робочих процесів.

Прикладом такого мережного графа може бути граф, зображений на рис. 10.4.

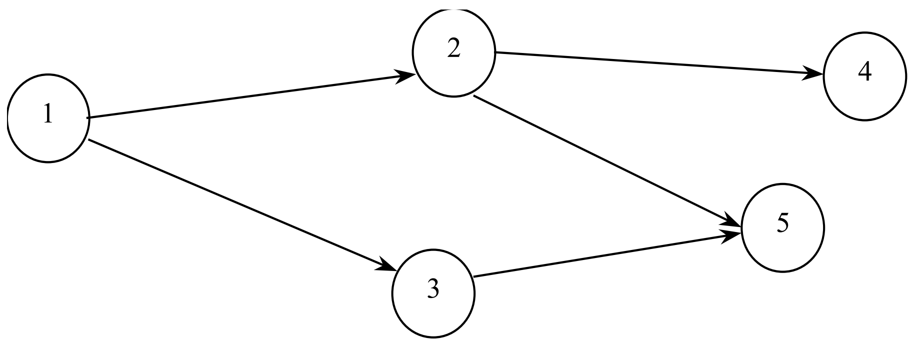


Рис. 10.4

Тут подія 4 є глухим кутом. У цьому разі можливо, що або робочий процес (2, 4) є зайвим, а тому його необхідно анулювати, або пропущено робочий процес, який безпосередньо має здійснюватися за подією 4. А тому необхідно ретельно дослідити взаємозв'язок між подіями та робочими процесами для подальшого усунення зазначеної недоречності.

2. У мережному графі не повинно бути так званих хвостових подій, окрім початкової, в якій відсутній хоча б один попередній робочий процес (рис. 10.5).

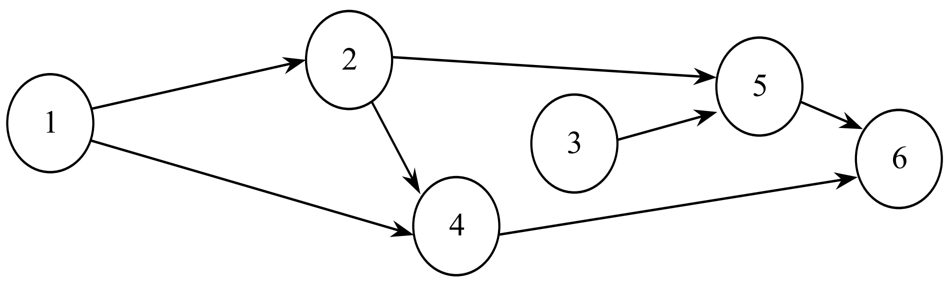


Рис. 10.5

Так, у наведеному мережному графі для події 3 немає попередніх робочих процесів, а тому ця подія не може здійснитися і, отже, не може бути виконаним наступний робочий процес — робота (3, 5). З огляду на сказане в разі виявлення таких подій необхідно визначити виконавців попередніх робочих процесів і ввести їх у мережу.

3. У мережному графі не повинно бути замкнених контурів і петель, тобто таких шляхів, які сполучали б деякі події самі із собою (рис. 6).

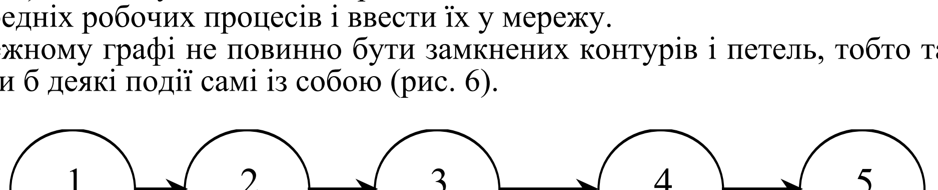


Рис. 10.6

У мережному графі, зображеному на рис. 10.6, утворився контур робочих процесів (3, 4) і (4, 3) між подіями 3 і 4. У разі виникнення такої ситуації необхідно повернутися до початкових даних і, переглянувши склад робочих процесів, домогтися її усунення.

4. Будь-які дві події графа мають бути безпосередньо сполученими не більш ніж одним робочим процесом. Порушення цієї умови виникає при зображенні паралельно виконуваних робочих процесів.

Якщо ці роботи так і залишити (рис. 10.7), то виникне плутанина від того, що дві різні роботи будуть мати одне й те саме позначення (1, 2). Загалом, робочий процес між подіями i та j позначають як (i, j).

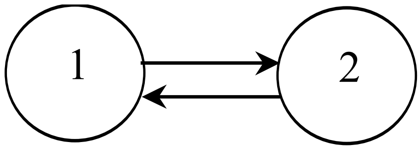


Рис. 10.7

У цьому разі рекомендується ввести у граф так звану *фіктивну подію*, яку на рис. 10.8 позначено $2'$, і *фіктивний робочий процес* $(2', 2)$. При цьому одна з паралельних робіт (робочий процес $(1, 2')$ замикається на фіктивну подію $2'$ (рис. 10.8).

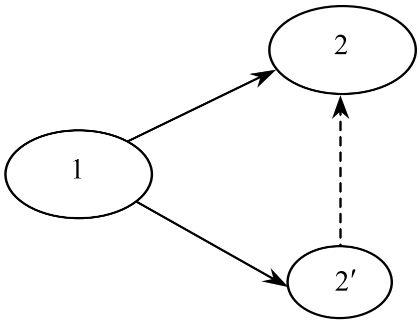


Рис. 10.8

Фіктивні робочі процеси на графі зображують пунктирними лініями.

5. У мережному графі має бути одна початкова (вихідна) і одна кінцева (завершальна) подія. Якщо в побудованому мережному графі ця умова не виконується (рис. 10.9), то досягти бажаного можна введенням фіктивних подій і робочих процесів (рис. 10.10).

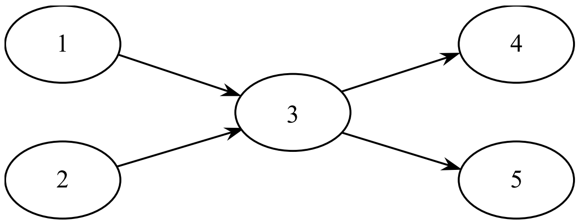


Рис. 10.9

Мережні моделі, зображені на рис. 10.2—10.10, характеризують їх, так би мовити, зі структурного боку, а тому їх називають *структурними*. На практиці, як правило, використовуються мережі, в яких задано числові оцінки тривалості робочих циклів (робіт), які можуть бути вираженими в годинах, тижнях, місяцях, кварталах і т. ін. Ці оцінки позначають біля відповідних ребер графа, як це зображено, наприклад, на рис. 10.11.

Із цього графа маємо, що, скажімо, робочий цикл (1; 2) може тривати 4 одиниці часу, а робочий цикл (3; 6) — 8 одиниць часу. При цьому слід наголосити, що довжина ребра графа (робочого циклу) не обов'язково має відповідати тривалості робочого циклу. Надалі розглядатимемо лише мережні графи виду, зображеного на рис. 10.11.

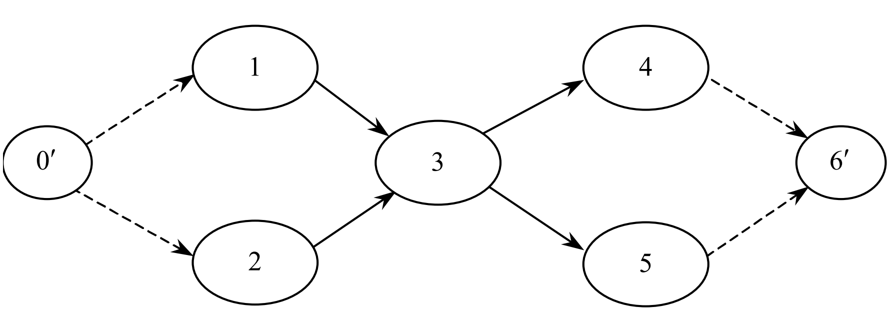


Рис. 10.10

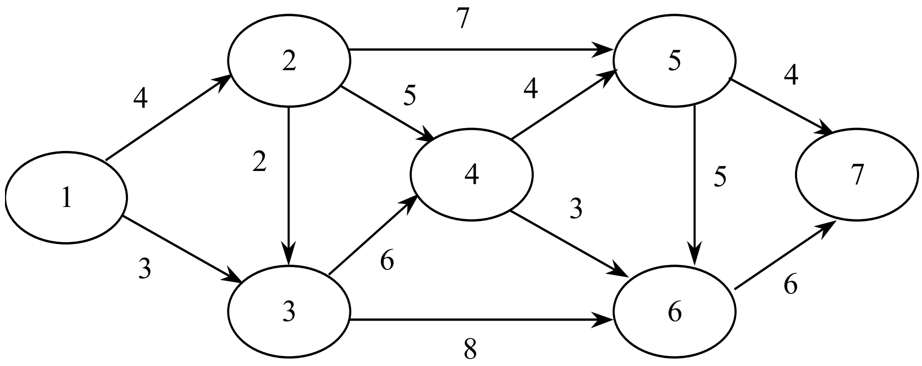


Рис. 10.11

10.3. Поняття про шлях у мережних моделях. Критичний шлях

Одним із важливих понять, пов'язаних із мережним графом, є поняття шляху. ***Шлях*** — це будь-яка послідовність робочих процесів (робіт), у якому кінцева подія кожної роботи збігається з початком наступної за нею події. Наприклад, на графі, зображеному на рис. 10.11, кінцева подія 2 є початком для наступних подій 3, 4 і 5.

Серед різних можливих шляхів мережного графа найбільший інтерес становить повний шлях, що позначається як L. ***Повний шлях*** L — це будь-який шлях, початок якого збігається з вихідною (початковою) подією мережі, а кінець — із завершальною (кінцевою) її подією.

Найбільш тривалий у часі повний шлях у мережному графі називають ***критичним***. Робочі процеси, з яких складається критичний шлях, називають ***критичними***.

Приклад 1. За заданим мережним графом (рис. 10.12), визначити всі можливі шляхи. Чому дорівнює критичний шлях?

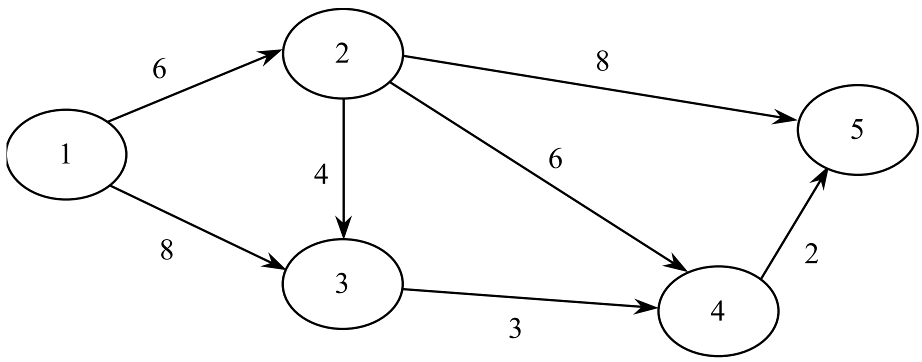


Рис. 10.12

Розв'язання. У наведеному мережному графі маємо п'ять подій (1, 2, 3, 4, 5) і сім робочих циклів, тривалість яких зазначено для кожного ребра (див. рис. 10.12). Знайдемо всі можливі шляхи для цього графа.

Першим може бути шлях: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$, довжина якого складається з таких робочих циклів:

L_1 = (1, 2) + (2, 3) + (3, 4) + (4, 5) = 6 + 4 + 3 + 2 = 15;

другим — шлях $1 \to 3 \to 4 \to 5$, довжина якого

L_2 =(1, 3) + (3, 4) + (4, 5) = 8 + 3 + 2 = 13;

третім — шлях $1 \to 2 \to 5$, довжина якого

L_3 + (1, 2) + (2, 5) = 6 + 8 = 14;

і, насамкінець, четвертий робочий шлях $1 \to 2 \to 4 \to 5$, довжина якого буде

L_4 = (1, 2) + (2, 4) + (4, 5) = 6 + 6 = 2 = 14.

Як бачимо, з усіх чотирьох шляхів найтривалішим, тобто критичним, буде перший, тривалість якого становить 15 умовних одиниць часу (у. о. ч.).

10.4. Числові параметри мережних графів

Основні часові параметри мережних графів зручно звести в табл. 1.

Таблиця 1

Елемент мережного графа, який характеризується параметром	**Назва параметра**	**Умовне позначення параметра мережного графа**
Позиція i	Ранній термін завершення події	$t_р(i)$
	Пізній термін завершення події	$t_п(i)$
	Резерв часу події	$T(i)$
Робочий цикл (робота) $(i,\ j)$	Протяжність роботи	$t(i,\ j)$
	Ранній термін початку роботи	$t_{р.п}(i,\ j)$
	Ранній термін закінчення роботи	$t_{р.з}(i,\ j)$
	Пізній термін початку роботи	$t_{п.п}(i,\ j)$
	Пізній термін закінчення роботи	$t_{п.з}(i,\ j)$
	Повний резерв часу роботи	$T_п(i,\ j)$
	Частковий резерв часу роботи першого виду	$T_{ч1}(i,\ j)$
	Частковий резерв часу роботи другого виду	$T_{ч2}(i,\ j)$
	Незалежний резерв часу роботи	$T_н(i,\ j)$
Шлях L	Протяжність шляху	$t(L)$
	Протяжність критичного шляху	$t_{к.р}(L)$
	Резерв часу шляху	$T(L)$

Розкриємо сутність наведених щойно параметрів. Почнемо з параметрів події.

Як уже наголошувалось, подія не може здійснитися раніше, ніж настануть усі попередні робочі цикли. Тому ранній або очікуваний термін $t_р(i)$ здійснення i-ї події визначатиметься протяжністю максимального шляху, який передує цій події:

$$t_р(i) = \max_{L_{П(i)}} t \cdot \left(L_{П(i)}\right), \tag{10.1}$$

де $L_{П(i)}$ — будь-який шлях, що передує i-й події, тобто шлях від початкової до i-ї події мережного графа.

У разі коли, наприклад, події j передує кілька шляхів, а отже, і кілька подій i, то ранній термін завершення події j зручно визначити за формулою:

$$t_р(i) = \max_{i,j}\left[t_р(i) + t(i,j)\right]. \tag{10.2}$$

Затримка в здійсненні події i щодо її раннього терміну не вплине на термін здійснення завершальної (кінцевої) події, а отже, і на термін виконання всіх комплексів робіт доти, доки сума терміну цієї події і протяжності максимального зі шляхів, що йдуть за нею, не перевищить довжини критичного шляху.

Тому пізній (або гранично припустимий) термін $t_п(i)$ здійснення i-ї події становитиме:

$$t_п(i) = t_{кр} - \max_{L_{C(i)}} t\,(L_{C(i)})\,, \tag{10.3}$$

де $L_{C(i)}$ — будь-який шлях, що йде наступним за i-ю подією, тобто шлях від i-ї до завершальної (кінцевої) події мережного графа.

Якщо подія i має кілька подальших шляхів, а отже, і кілька подальших подій j, то пізній термін здійснення події i зручно визначати за формулою:

$$t_п(i) = \max_{i,j}\left[t_п(i) - t(i,j)\right] . \tag{10.4}$$

Резерв часу $T(i)$ для i-ї події визначатиметься як різниця між пізнім і раннім термінами її здійснення:

$$T(i) = t_п(i) - t_р(i). \tag{10.5}$$

Резерв часу події показує, на який припустимий період часу можна затримати здійснення цієї події, щоб при цьому не збільшився термін виконання всього комплексу робіт. Критичні події (тобто події, які лежать на критичному шляху) резервів часу не мають, оскільки будь-яка затримка у здійсненні події викличе таку саму затримку в здійсненні завершальної (кінцевої) події.

Згідно зі щойно сказаним доходимо висновку: для визначення довжини та топології критичного шляху немає потреби перебирати всі повні шляхи мережного графа та визначати їхню довжину. Визначивши ранній термін здійснення завершальної (кінцевої) події мережі, ми тим самим обчислимо довжину критичного шляху, а виявивши події з нульовим резервом часу, знайдемо його топологію.

Приклад 2. Деяка будівельна компанія виконує комплекс робіт, які подані у вигляді такого мережного графу:

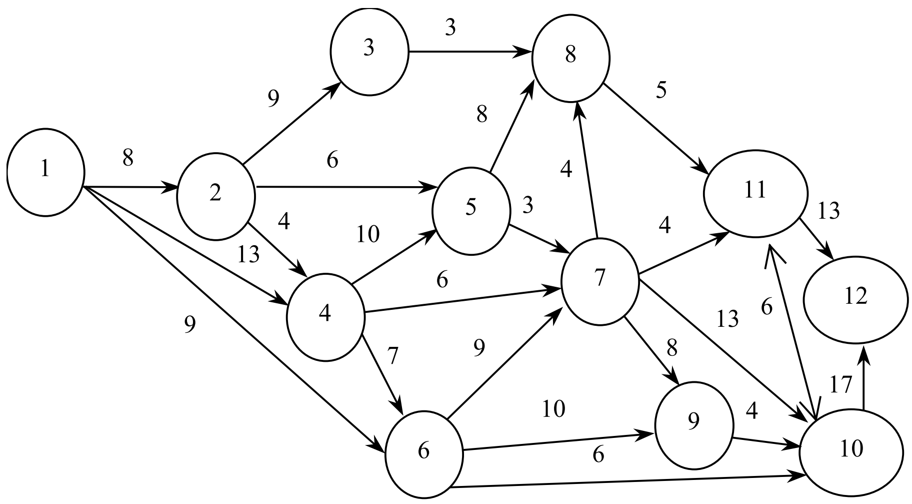


Рис. 10.13

За заданим мережним графом (рис. 10.13) необхідно визначити ранні та пізні терміни виконання робіт, резерви часу та критичний шлях.

Розв'язання. За знайденими ранніми термінами здійснення подій $t_р(i)$ будемо умовно рухатися по мережному графу зліва направо, використовуючи при цьому наведені раніше формули. Для $i=1$ (початкова подія), вочевидь, маємо $t_р(1)=0$.

Для події $i=2$ маємо $t_р(2)=t_р(1)+t(1,2)=0+8=8$, оскільки для неї існує лише передуючий шлях $L_{П1}$: $1 \to 2$; $t_р(2)=8$.

Для події $i=3$ маємо $t_р(3)=t_р(2)+t(2,3)=8+9$, оскільки й для цієї події існує також лише один передуючий шлях $L_{П3}$: $1 \to 2 \to 3$; $t_р(3)=17$.

Для події $i=4$ маємо $t_р(4)=\max[t_р(1)+t(1,4), t_р(2)+t(2,4)]$, оскільки для цієї події маємо два передуючих шляхи, з яких потрібно вибрати най триваліший $L_{П4}$: $1 \to 4$; $1 \to 2 \to 4$.

Отже, $t_р(4)=\max[0+13,\ 8+4]=\max[13,\ 12]$; $t_р(4)=13$.

Для події $i=5$

$$t_{р}(5)=\max[t_{р}(2)+t(2,5),\ t_{р}(4)+t(4,5)]=\max[8+6,\ 13+10]=\max[14,\ 23];\quad t_{р}(5)=23.$$

Для події $i=6$

$$t_{р}(6)=\max[t_{р}(4)+t(4,\ 6),\ t_{р}(1)+t(1,\ 6)]=\max[13+7,\ 0+9]=\max[20,\ 9];\quad t_{р}(6)=20.$$

Для події $i=7$

$$t_{р}(7)=\max[t_{р}(5)+t(5,\ 7),\ t_{р}(4)+t(4,\ 7),\ t_{р}(6)+t(6,\ 7)]=$$
$$=\max[23+3,\ 13+6,\ 20+9]=\max[26,\ 19,\ 29];\quad t_{р}(7)=29.$$

Для події $i=8$

$$t_{р}(8)=\max[t_{р}(3)+t(3,8),\ t_{р}(5)+t(5,8),\ t_{р}(7)+t(7,8)]=$$
$$=\max[17+13,\ 23+8,\ 29+4]=\max[20,\ 31,\ 33];\quad t_{р}(8)=33.$$

Для події $i=9$

$$t_{р}(9)=\max[t_{р}(6)+t(6,\ 9),\ t_{р}(7)+t(7,\ 9)]=\max[20+10,\ 29+8]=\max[30,\ 37];\quad t_{р}(9)=37.$$

Для події $i=10$

$$t_{р}(10)=\max[t_{р}(6)+t(6,\ 10),\ t_{р}(9)+t(9,\ 10),\ t_{р}(7)+t(7,\ 9)]=$$
$$=\max[20+6,\ 37+4,\ 29+13]=\max[26,42,\ 38];\quad t_{р}(10)=42.$$

Для події $i=11$

$$t_{р}(11)=\max[t_{р}(8)+t(8,\ 11),\ t_{р}(7)+t(7,\ 11),\ t_{р}(10)+t(10,\ 11)]=$$
$$=\max[33+5,\ 29+4,\ 42+6]=\max[38,33,\ 48];\quad t_{р}(11)=48.$$

Для події $i=12$

$$t_{р}(12)=\max[t_{р}(11)+t(11,\ 12),\ t_{р}(10)+t(10,\ 12)]=\max[48+13,\ 42+17]=\max[61,\ 59];\quad t_{р}(12)=61.$$

Таким чином, дістанемо довжину критичного шляху, яка дорівнює ранньому терміну здійснення завершальної (кінцевої) події 12.

$$t_{кр}=t_{р}(12)=61\ \text{у. о. ч.}$$

Для визначення пізніх термінів завершення подій $t_{п}(i)$ будемо рухатися по мережному графу у зворотному напрямі, тобто з правого боку до лівого.

Для події $i=12$ (завершальної) пізній термін закінчення події має дорівнювати ранньому терміну, тобто в нашому прикладі $t_{п}(12)=t_{р}(12)=61$.

Для події $i=11$

$t_{п}(11)=t_{р}(12)-t(11,12)=61-13=48$; $t_{п}(11)=48$, для події 11 існує лише один такий шлях L_{H11}: $12\rightarrow 11$.

Для події $i=10$ маємо:

$$t_{п}(10)=\min[t_{п}(12)-t(10,\ 11),\ t_{п}(11)-t(11,\ 12)]=\min[61-17,\ 48-6]=\min[44,42];\quad t_{п}(10)=42.$$

Для події 10 існує, як бачимо з мережного графа, два такі шляхи: L_{H9}: $10\rightarrow 11\rightarrow 12$; $10\rightarrow 12$ і дві такі події: 11 і 12.

За аналогією дістаємо:

для події $i=9$

$$t_{п}(9)=t_{п}(10)-t(9,10)=42-4=38;\ t_{п}(9)=38;$$

для події $i=8$

$$t_{п}(8)=t_{п}(11)-t(8,11)=48-5=43;\ t_{п}(8)=43;$$

для події $i=7$

$$t_п(7)=\min[t_п(8)-t(7,8);\ t_п(11)-t(7,11);\ t_п(10)-t(7,10);\ t_п(9)-t(7,9)]=$$
$$=\min[43-4;\ 48-5; 43-13;\ 38-8]=\min[39;\ 43;\ 29;\ 30];\quad t_п(7)=29;$$

для події $i=6$

$$t_п(6)=\min[t_п(7)-t(6,\ 7);\ t_п(10)-t(6,\ 10);\ t_п(9)-t(6,\ 9)]=$$
$$=\min[29-9;\ 42-6;\ 38-9]=\min[20;\ 32;\ 29];\quad t_п(6)=20;$$

для події $i=5$

$$t_п(5)=\min[t_п(8)-t(5,\ 8);\ t_п(7)-t(5,\ 7)]=\min[43-8;\ 29-3]=\min[35;\ 26];\quad t_п(5)=26;$$

для події $i=4$

$$t_п(4)=\min[t_п(5)-t(4,\ 5);\ t_п(7)-t(4,\ 7);\ t_п(6)-t(4,\ 6)]=$$
$$=\min[26-7;\ 29-6;\ 20-7]=\min[19;\ 23;\ 13];\quad t_п(4)=13;$$

для події $i=3$

$$t_п(3)=t_п(8)-t(3,8)=43-3=40;\quad t_п(3)=40;$$

для події $i=2$

$$t_п(2)=\min[t_п(3)-t(2,\ 3);\ t_п(5)-t(2,\ 5);\ t_п(4)-t(2,\ 4)]=$$
$$=\min[40-9;\ 26-6;\ 13-4]=\min[31;\ 20;\ 9];\quad t_п(2)=9;$$

для події $i=1$

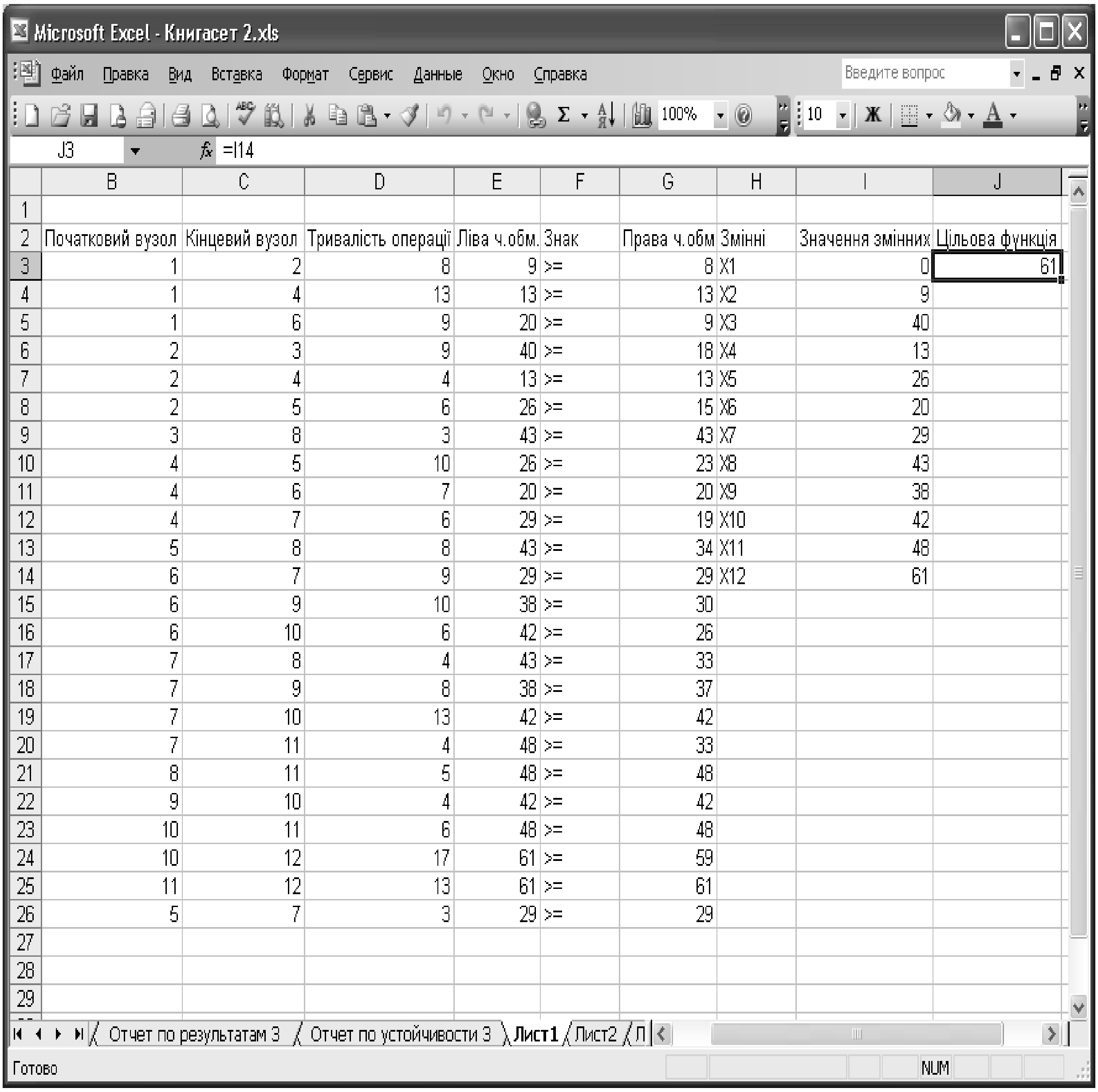
$$t_п(1)=\min[t_п(2)-t(1,\ 2);\ t_п(4)-t(2,\ 4);\ t_п(6)-t(2,\ 6)]=\min[9-8;\ 13-13;\ 20-9]=\min[1;\ 0;\ 11].\quad t_п(1)=0.$$

Розглянемо знаходження пізніх термінів завершення подій у вигляді задачі лінійного програмування, математична модель якої, за заданим мережним графом (рис. 10.13), є такою:

$$X_{12}\to max$$
$$X_1=0$$
$$X_2\geq X_1+8$$
$$X_3\geq X_2+9$$
$$X_4\geq X_2+4$$
$$X_4\geq X_1+13$$
$$X_5\geq X_2+6$$
$$X_5\geq X_4+10$$
$$X_6\geq X_1+9$$
$$X_6\geq X_4+7$$
$$X_7\geq X_4+6$$
$$X_7\geq X_5+3$$
$$X_7\geq X_6+9$$
$$X_8\geq X_3+3$$
$$X_8\geq X_5+8$$
$$X_8\geq X_7+4$$
$$X_9\geq X_7+8$$
$$X_9\geq X_6+1$$
$$X_{10}\geq X_6+6$$
$$X_{10}\geq X_7+13$$
$$X_{10}\geq X_9+4$$
$$X_{11}\geq X_7+4$$
$$X_{11}\geq X_8+5$$
$$X_{11}\geq X_{10}+6$$
$$X_{12}\geq X_{10}+17$$
$$X_{12}\geq X_{11}+13$$
$$X_j\geq 0,\ j=1,12,$$

де змінні X_j *, j=1,12*, означають пізній термін завершення відповідної події.

Для знаходження оптимального розв’язку цієї задачі використаємо інструментарій **Поиск решения** стандартної програми EXCEL.



	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									
2	Початковий вузол	Кінцевий вузол	Тривалість операції	Ліва ч.обм.	Знак	Права ч.обм	Змінні	Значення змінних	Цільова функція
3	1	2	8	9	>=	8	X1	0	61
4	1	4	13	13	>=	13	X2	9	
5	1	6	9	20	>=	9	X3	40	
6	2	3	9	40	>=	18	X4	13	
7	2	4	4	13	>=	13	X5	26	
8	2	5	6	26	>=	15	X6	20	
9	3	8	3	43	>=	43	X7	29	
10	4	5	10	26	>=	23	X8	43	
11	4	6	7	20	>=	20	X9	38	
12	4	7	6	29	>=	19	X10	42	
13	5	8	8	43	>=	34	X11	48	
14	6	7	9	29	>=	29	X12	61	
15	6	9	10	38	>=	30			
16	6	10	6	42	>=	26			
17	7	8	4	43	>=	33			
18	7	9	8	38	>=	37			
19	7	10	13	42	>=	42			
20	7	11	4	48	>=	33			
21	8	11	5	48	>=	48			
22	9	10	4	42	>=	42			
23	10	11	6	48	>=	48			
24	10	12	17	61	>=	59			
25	11	12	13	61	>=	61			
26	5	7	3	29	>=	29			
27									
28									
29									

Вихідні данні для обчислення містяться в блоках: початковий вузол — (B3:B26), кінцевий вузол — (C3:C26), тривалість операції -(D3:D26), ліва частина обмеження — (E3:E26), знак обмеження –(F3: F26), права частина обмеження — (G3:G26), значення змінних — (I3:I14), цільова функція (G3).

Результати обчислень наведені в нище приведених таблицях Microsoft EXCEL

У результаті обчислень будемо мати такий оптимальний розв'язок.

$$X_1=0,\ X_2=9,\ X_3=40,\ X_4=13,\ X_5=26,\ X_6=20,\ X_7=29,\ X_8=43,\ X_9=38,\ X_{10}=42,\ X_{11}=48,\ X_{12}=61.$$

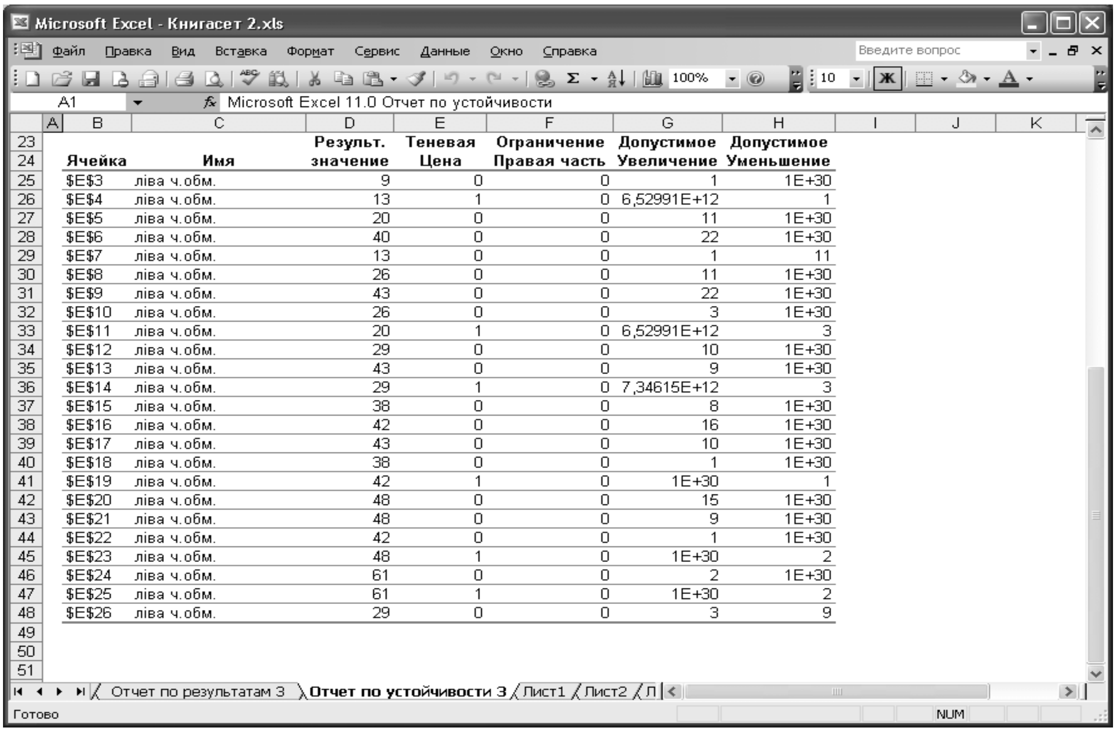
За формулою (10.5) обчислюємо резерв часу для кожної події. Усі результати обчислень зведено в табл. 2, з якої випливає, що найбільший резерв часу має подія 3. Це означає, що час завершення події 3 може бути затримано на 23 у. о. ч. без збільшення загального терміну виконання всіх робіт.

Таблиця 2

Номер події i	Терміни завершення подій, в у. о. ч.		Резерв часу $T = t_п(i) - t_р(i)$
	Ранній термін завершення i-ї події $t_р(i)$	Пізній термін завершення i-ї події $t_п(i)$	
1	0	0	0
2	8	9	1
3	17	40	23
4	13	13	0
5	23	26	3
6	20	20	0
7	29	29	0
8	33	43	10
9	37	38	1
10	42	42	0
11	48	48	0
12	61	61	0

Не мають резерву часу події 1, 4, 6, 7, 10, 11, 12. Ці події утворюють критичний шлях, який на мережному графі (рис. 10.14) зображено суцільною лінією.

Події, які утворюють критичний шлях, можна знайти, використовуючи аналіз чуттєвості моделі, і критичними значеннями будуть ті, у яких тіньова ціна буде дорівнювати 1. Таблиця, яка відповідає цим результатам наведена нижче.



Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
E3	ліва ч.обм.	9	0	0	1	1E+30
E4	ліва ч.обм.	13	1	0	6,52991E+12	1
E5	ліва ч.обм.	20	0	0	11	1E+30
E6	ліва ч.обм.	40	0	0	22	1E+30
E7	ліва ч.обм.	13	0	0	1	11
E8	ліва ч.обм.	26	0	0	11	1E+30
E9	ліва ч.обм.	43	0	0	22	1E+30
E10	ліва ч.обм.	26	0	0	3	1E+30
E11	ліва ч.обм.	20	1	0	6,52991E+12	3
E12	ліва ч.обм.	29	0	0	10	1E+30
E13	ліва ч.обм.	43	0	0	9	1E+30
E14	ліва ч.обм.	29	1	0	7,34615E+12	3
E15	ліва ч.обм.	38	0	0	8	1E+30
E16	ліва ч.обм.	42	0	0	16	1E+30
E17	ліва ч.обм.	43	0	0	10	1E+30
E18	ліва ч.обм.	38	0	0	1	1E+30
E19	ліва ч.обм.	42	1	0	1E+30	1
E20	ліва ч.обм.	48	0	0	15	1E+30
E21	ліва ч.обм.	48	0	0	9	1E+30
E22	ліва ч.обм.	42	0	0	1	1E+30
E23	ліва ч.обм.	48	1	0	1E+30	2
E24	ліва ч.обм.	61	0	0	2	1E+30
E25	ліва ч.обм.	61	1	0	1E+30	2
E26	ліва ч.обм.	29	0	0	3	9

Окремий робочий шлях (робота) може початися і закінчитися як у ранні, так і в пізні проміжні терміни. Надалі при оптимізації мережної моделі можливі будь-які зміни робочого циклу в заданому інтервалі. Вочевидь, що ранній термін початку $t_{р.п}(i, j)$ робочого циклу (i, j) збігається з раннім терміном попередньої події:

$$t_{р.п}(i, j) = t_р(i). \tag{10.6}$$

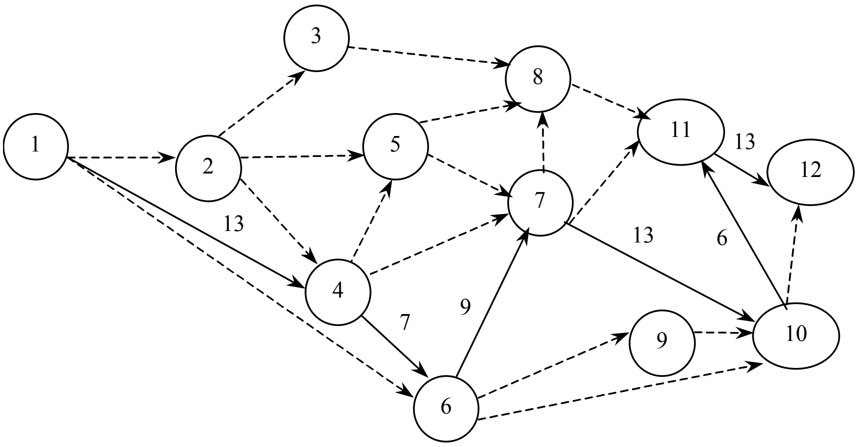


Рис. 10.14

Тоді ранній термін $t_{р.з}(i,\, j)$ закінчення роботи $(i,\, j)$ буде визначатися за формулою

$$t_{р.з}(i,\, j) = t_р(i) + t(i,\, j). \tag{10.7}$$

Жодний із робочих циклів (робіт) мережної моделі не може закінчитися пізніше за власний припустимий пізній термін кінцевої події i. Тому пізній термін закінчення $t_{п.з}(i,\, j)$ роботи $(i,\, j)$ буде визначатись як

$$t_{п.з}(i,\, j) = t_п(i), \tag{10.8}$$

а пізній термін $t_{п.п}(i,\, j)$ початку цієї роботи буде визначатись як

$$t_{п.п}(i,\, j) = t_п(j) - t(i,\, j). \tag{10.9}$$

Отже, у межах мережної моделі моменти початку і закінчення робочих процесів (робіт) тісно пов'язані із сусідніми подіями обмеженнями (10.6)—(10.9).

У мережних моделях важливе місце посідає резерв часу на кожному проміжку досліджуваного шляху. Такі резерви мають усі некритичні шляхи. Резерв часу шляху $T(L)$ визначається як різниця між довжинами двох шляхів — критичного та конкретно досліджуваного:

$$T(L) = t_{кр} - t(L), \tag{10.10}$$

де $t_{кр}$ — критичний шлях, а $t(L)$ — досліджуваний.

$T(L)$ інформує про те, на скільки загалом можуть бути збільшені тривалості всіх робочих циклів (робіт) $t(i,\, j)$, які належать цьому шляху. Якщо, наприклад, збільшено тривалість виконання робочих циклів (робіт) $t(i,\, j)$, які належать до цього шляху, на час, який перебільшить $T(L)$, то критичний шлях переміститься на досліджуваний шлях L.

Звідси доходимо такого висновку: будь-який із робочих циклів (робіт) $t(i,\, j)$ шляху L, який не збігається з критичним $t_{кр}$ володіє резервом часу.

Серед резервів часу, наприклад, робочого циклу (роботи) $t(i,\, j)$, виокремлюють:

повний резерв $T_п(i,\, j)$;

частковий резерв часу робочого циклу (роботи) $(i,\, j)$ першого виду $T_{ч1}(i,\, j)$;

частковий резерв часу робочого циклу (роботи) $(i,\, j)$ другого виду $T_{ч2}(i,\, j)$;

незалежний резерв часу робочого циклу (роботи) $(i,\, j)$ $T_н(i,\, j)$.

Повний резерв часу $T_п(i,\, j)$ інформує про те, на скільки можна збільшити час виконання певної роботи за умови, що термін виконання всього комплексу робочих циклів (робіт) не зміниться.

Визначається повний резерв часу робочого циклу (роботи) $(i,\, j)$ за формулою:

$$T_п(i,\, j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i,\, j) \tag{10.11}$$

і виникає за умови, коли подія i завершується в найбільш ранній термін, а подія j — у найбільш пізній.

Важлива властивість повного резерву часу полягає в тому, що він належить не тільки конкретному робочому циклу (роботі), для якої визначався, а й усім повним шляхам, які проходять через цей цикл (роботу). У разі використання повного ресурсу часу для конкретного робочого циклу (роботи) резерви часу для решти робочих циклів (робіт), які належать максимальному шляху, буде повністю використано, а резерви часу, які належать іншим (не максимальним за протяжністю) шляхам і проходять через цей робочий цикл (роботу), зменшуються відповідно на величину використаного резерву.

Решта резерву часу робочих циклів (робіт) будуть складовими частинами їхнього повного резерву. ***Частковим резервом часу*** $T_{\text{ч1}}(i,\ j)$ ***першого виду робочого циклу (роботи)*** $(i,\ j)$ називають частину повного резерву часу цього циклу, на яку можна збільшити тривалість робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$, не змінивши при цьому пізнього терміну здійснення події i. Цей резерв може виникнути лише за умови, що при здійсненні робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ події i та j відбудуться у свої пізні терміни. При цьому

$$T_{\text{ч1}}(i,\ j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t(i,\ j), \tag{10.12}$$

або

$$T_{\text{ч1}}(i,\ j) = T_{\text{п}}(i, j) - T(i). \tag{10.13}$$

Частковим резервом часу $T_{\text{ч2}}(i,\ j)$ ***другого виду (вільним резервом) часу робочого циклу (роботи)*** $(i,\ j)$ називають ту частину повного резерву часу $T_{\text{п}}(i, j)$, на яку можна збільшити протяжність робочого циклу (роботи), не змінивши при цьому ранні терміни подій i та j.

Цим резервом можна розпоряджатися при виконанні робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ за припущення, що події i та j відбуваються в найбільш ранні терміни. При цьому

$$T_{\text{ч2}}(i,\ j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t(i,\ j) \tag{10.14}$$

або

$$T_{\text{ч2}}(i,\ j) = T_{\text{п}}(i, j) - T(j). \tag{10.15}$$

Частковим резервом часу можна користуватися для запобігання будь-яким випадковостям, які можуть виникнути в процесі виконання робочих циклів (робіт). Якщо, наприклад, планувати виконання робіт за ранніми термінами їх початку і завершення, то завжди в цьому разі маємо можливість за потреби перейти до процесів при пізніших термінах початку і завершення робіт.

Незалежним резервом часу $T_{\text{н}}(i, j)$ ***робочого циклу (робіт)*** $(i,\ j)$ називають ту частину повного резерву $T_{\text{п}}(i, j)$, який дістаємо для випадку, коли всі попередні робочі цикли (роботи) закінчуються в пізні терміни, а всі наступні починаються в ранні терміни. При цьому:

$$T_{\text{н}}(i,\ j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{п}}(i) - t(i,\ j), \tag{10.16}$$

або

$$T_{\text{н}}(i,\ j) = T_{\text{п}}(i, j) - T(i). \tag{10.17}$$

Використання незалежного резерву часу не впливає на значення резервів часу інших робіт. Резерви $T_{\text{н}}(i,\ j)$ намагаються використовувати лише в тому разі, коли закінчення події i (попередньої) відбулося в припустимо найпізніший термін, а події j (наступні) — у найраніший термін.

Якщо значення $T_{\text{н}}(i,\ j)$ дорівнює нулю або додатне, то така можливість існує, а коли $T_{\text{н}}(i,\ j)$ від'ємне, то такої можливості немає, оскільки в цьому разі виникає суперечність: попередній робочий цикл (робота) ще не закінчився, а наступний уже починає реалізовуватися. Тому від'ємні значення $R_{\text{н}}(i,\ j)$ не мають реального сенсу.

Отже, доходимо такого висновку: якщо частковий резерв першого виду $T_{\text{ч1}}(i,\ j)$ можна використати для збільшення тривалості робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ без витрат резерву часу попередніх робочих циклів (робіт), а частинний (вільний) резерв часу другого виду $T_{ч2}(i,\ j)$ — на збільшення тривалості конкретного робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ і попередніх циклів без порушення резерву часу наступних робочих циклів (робіт), то незалежний резерв часу $T_{н}(i,\ j)$ можна використати для збільшення тривалості лише конкретного робочого циклу (роботи).

Робочі цикли (роботи), що належать критичному шляху, так само як і критичні події, резервів часу не мають. Якщо на критичному шляху лежить початкова подія i, то:

$$T_{н}(i,\ j)=T_{ч1}(i,\ j). \tag{10.18}$$

Якщо на критичному шляху лежить кінцева подія j, то

$$T_{н}(i,\ j)=T_{ч2}(i,\ j). \tag{10.19}$$

А якщо на критичному шляху лежить і подія i і подія j, але сам робочий цикл не належить цьому шляху, то

$$T_{н}(i,\ j)=T_{ч1}(i,\ j)=T_{ч2}(i,\ j)=T_{н}(i,\ j). \tag{10.20}$$

Співвідношення (10.18)—(10.20) можна використовувати для перевірки правильності розрахунків резервів часу окремих робочих циклів (робіт).

Приклад 3. Використовуючи мережний граф, заданий у прикладі 2, визначити для нього такі часові параметри — тривалість робочих циклів, терміни початку і закінчення робочих циклів, резерви робочих циклів. Результати обчислень звести в таблицю.

Розв'язання. Робочий цикл (роботи) (1, 2):

тривалість робочого циклу (роботи) $t(1,\ 2)=8;$

$t_{р.п}(1,\ 2)=t_{р}(1)=0;\ t_{р.з}(1,\ 2)=t_{р}(1)+t(1,\ 2)=0+8=8;$
$t_{п.п}(1,\ 2)=t_{п}(2)-t(1,\ 2)=9-8=1;$
$t_{п.з}(1,\ 2)=t_{п}(2)=9;$
$T_{п}(1,\ 2)=t_{п}(2)-t_{р}(1)-t(1,\ 2)=9-0-8=1;$
$T_{ч1}(1,\ 2)=t_{п}(2)-t_{п}(1)-t(1,\ 2)=9-0-8=1;$
$T_{ч2}(1,\ 2)=t_{р}(2)-t_{р}(1)-t(1,\ 2)=8-0-8=0;$
$T_{н}(1,\ 2)=t_{р}(2)-t_{п}(1)-t(1,\ 2)=8-0-8=0;$

робочий цикл (роботи) (1, 4):

$t_{р.п}(1,\ 4)=t_{р}(1)=0;\ t_{р.з}(1,\ 4)=t_{р}(1)+t(1,\ 4)=0+13=13;$
$t_{п.п}(1,\ 4)=t_{п}(4)-t(1,\ 4)=13-13=0;$
$t_{п.з}(1,\ 4)=t_{п}(4)=13;$
$T_{п}(1,\ 4)=t_{п}(4)-t_{р}(1)-t(1,\ 4)=13-0-13=0;$
$T_{ч1}(1,\ 4)=t_{п}(4)-t_{п}(1)-t(1,\ 4)=13-0-13=0;$
$T_{ч2}(1,\ 4)=t_{р}(4)-t_{р}(1)-t(1,\ 4)=13-0-13=0;$
$T_{н}(1,\ 4)=t_{р}(4)-t_{п}(1)-t(1,\ 4)=13-0-13=0;$

робочий цикл (роботи) (1, 6):

$t_{р.п}(1,\ 6)=t_{р}(1)=0;\ t_{р.з}(1,\ 6)=t_{р}(1)+t(1,\ 6)=0+9=9;$
$t_{п.п}(1,\ 6)=t_{п}(6)-t(1,\ 6)=20-9=11;$
$T_{п}(1,\ 6)=t_{п}(6)-t_{р}(1)-t(1,\ 6)=20-0-9=11;$
$T_{ч1}(1,\ 6)=t_{п}(6)-t_{п}(1)-t(1,\ 6)=20-0-9=11;$
$T_{ч2}(1,\ 6)=t_{р}(6)-t_{р}(1)-t(1,\ 6)=20-0-9=11;$
$T_{н}(1,\ 6)=t_{р}(6)-t_{п}(1)-t(1,\ 6)=20-0-9=11;$

робочий цикл (роботи) (2, 3):

$t_{\text{р.п}}(2, 2) = t_{\text{р}}(2) = 8;\ t_{\text{р.з}}(2, 3) = t_{\text{р}}(2) + t(2, 3) = 8 + 9 = 17;$
$t_{\text{п.п}}(2, 3) = t_{\text{п}}(3) - t(2, 3) = 17 - 9 = 8;$
$t_{\text{п.з}}(2, 3) = t_{\text{п}}(3) = 40;$
$T_{\text{п}}(2, 3) = t_{\text{п}}(3) - t_{\text{р}}(2) - t(2, 3) = 40 - 8 - 9 = 23;$
$T_{\text{ч1}}(2, 3) = t_{\text{п}}(3) - t_{\text{п}}(2) - t(2, 3) = 40 - 9 - 9 = 22;$
$T_{\text{ч2}}(2, 3) = t_{\text{р}}(3) - t_{\text{р}}(2) - t(2, 3) = 17 - 8 - 9 = 0;$
$T_{\text{н}}(2, 3) = t_{\text{р}}(3) - t_{\text{п}}(2) - t(2, 3) = 17 - 9 - 9 = -1;$

робочий цикл (роботи) (2, 5):

$t_{\text{р.п}}(2, 5) = t_{\text{р}}(2) = 8;\ t_{\text{р.з}}(2, 5) = t_{\text{р}}(2) + t(2, 5) = 8 + 6 = 14;$
$t_{\text{п.п}}(2, 5) = t_{\text{п}}(5) - t(2, 5) = 26 - 8 - 6 = 12;$
$t_{\text{п.з}}(2, 5) = t_{\text{п}}(5) = 26;$
$T_{\text{п}}(2, 5) = t_{\text{п}}(5) - t_{\text{р}}(2) - t(2, 5) = 26 - 8 - 6 = 12;$
$T_{\text{ч1}}(2, 5) = t_{\text{п}}(5) - t_{\text{п}}(2) - t(2, 5) = 26 - 9 - 6 = 11;$
$T_{\text{ч2}}(2, 5) = t_{\text{р}}(5) - t_{\text{р}}(2) - t(2, 5) = 23 - 8 - 6 = 9;$
$T_{\text{н}}(2, 5) = t_{\text{р}}(5) - t_{\text{п}}(2) - t(2, 5) = 23 - 9 - 6 = 8;$

робочий цикл (роботи) (2, 4):

$t_{\text{р.п}}(2, 4) = t_{\text{р}}(2) = 8;\ t_{\text{р.з}}(2, 4) = t_{\text{р}}(2) + t(2, 4) = 8 + 4 = 12;$
$t_{\text{п.п}}(2, 4) = t_{\text{п}}(4) - t(2, 4) = 13 - 4 = 9;$
$t_{\text{п.з}}(2, 4) = t_{\text{п}}(4) = 13;$
$T_{\text{п}}(2, 4) = t_{\text{п}}(4) - t_{\text{р}}(2) - t(2, 4) = 13 - 8 - 4 = 1;$
$T_{\text{ч1}}(2, 4) = t_{\text{п}}(4) - t_{\text{п}}(2) - t(2, 4) = 13 - 9 - 4 = 0;$
$T_{\text{ч2}}(2, 4) = t_{\text{р}}(4) - t_{\text{р}}(2) - t(2, 4) = 13 - 8 - 4 = 1;$
$T_{\text{н}}(2, 4) = t_{\text{р}}(4) - t_{\text{п}}(2) - t(2, 4) = 8 - 9 - 4 = -5;$

робочий цикл (роботи) (3, 8):

$t_{\text{р.п}}(3, 8) = t_{\text{р}}(3) = 17;\ t_{\text{р.з}}(3, 8) = t_{\text{р}}(2) + t(3, 8) = 17 + 3 = 20;$
$t_{\text{п.п}}(3, 8) = t_{\text{п}}(8) - t(3, 8) = 43 - 3 = 40;$
$t_{\text{п.з}}(3, 8) = t_{\text{п}}(8) = 43;$
$T_{\text{п}}(3, 8) = t_{\text{п}}(8) - t_{\text{р}}(3) - t(3, 8) = 43 - 17 - 3 = 23;$
$T_{\text{ч1}}(3, 8) = t_{\text{п}}(8) - t_{\text{п}}(3) - t(3, 8) = 43 - 40 - 3 = 0;$
$T_{\text{ч2}}(3, 8) = t_{\text{р}}(8) - t_{\text{р}}(3) - t(3, 8) = 33 - 17 - 3 = 13;$
$T_{\text{н}}(3, 8) = t_{\text{р}}(8) - t_{\text{п}}(3) - t(3, 8) = 33 - 40 - 3 = -10;$

робочий цикл (роботи) (4, 5):

$t_{\text{р.п}}(4, 5) = t_{\text{р}}(4) = 13;\ t_{\text{р.з}}(4, 5) = t_{\text{р}}(4) + t(4, 5) = 13 + 10 = 23;$
$t_{\text{п.п}}(4, 5) = t_{\text{п}}(3) - t(4, 5) = 26 - 10 = 16;$
$t_{\text{п.з}}(4, 5) = t_{\text{п}}(5) = 26;$
$T_{\text{п}}(4, 5) = t_{\text{п}}(5) - t_{\text{р}}(4) - t(4, 5) = 26 - 13 - 10 = 3;$
$T_{\text{ч1}}(4, 5) = t_{\text{п}}(5) - t_{\text{п}}(4) - t(4, 5) = 26 - 13 - 10 = 3;$
$T_{\text{ч2}}(4, 5) = t_{\text{р}}(5) - t_{\text{р}}(4) - t(4, 5) = 23 - 13 - 10 = 0;$
$T_{\text{н}}(4, 5) = t_{\text{р}}(5) - t_{\text{п}}(4) - t(4, 5) = 23 - 13 - 10 = 0;$

робочий цикл (роботи) (4, 6):

$t_{\text{р.п}}(4,\ 6) = t_{\text{р}}(4) = 13;\ t_{\text{р.з}}(4,\ 6) = t_{\text{р}}(4) + t(4,\ 6) = 13 + 7 = 20;$
$t_{\text{п.п}}(4,\ 6) = t_{\text{п}}(4) - t(4,\ 6) = 20 - 7 = 13;$
$t_{\text{п.з}}(4,\ 6) = t_{\text{п}}(6) = 26;$
$T_{\text{ч1}}(4,\ 6) = t_{\text{п}}(6) - t_{\text{п}}(4) - t(4,\ 6) = 20 - 13 - 7 = 0;$
$T_{\text{ч2}}(4,\ 6) = t_{\text{р}}(6) - t_{\text{р}}(4) - t(4,\ 6) = 20 - 13 - 7 = 0;$
$T_{\text{н}}(4,\ 6) = t_{\text{р}}(6) - t_{\text{п}}(4) - t(4,\ 6) = 20 - 13 - 7 = 0;$
$T_{\text{п}}(4,\ 6) = t_{\text{п}}(6) - t_{\text{р}}(4) - t(4,\ 6) = 20 - 13 - 7 = 0;$

робочий цикл (роботи) (4, 7):

$t_{\text{р.п}}(4,\ 7) = t_{\text{р}}(4) = 13;\ t_{\text{р.з}}(4,\ 7) = t_{\text{р}}(4) + t(4,\ 7) = 13 + 6 = 19;$
$t_{\text{п.п}}(4,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t(4,\ 7) = 29 - 6 = 23;$
$t_{\text{п.з}}(4,\ 7) = t_{\text{п}}(7) = 29;$
$T_{\text{п}}(4,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t_{\text{р}}(4) - t(4,\ 7) = 29 - 13 - 6 = 10;$
$T_{\text{ч1}}(4,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t_{\text{п}}(4) - t(4,\ 7) = 29 - 13 - 6 = 10;$
$T_{\text{ч2}}(4,\ 7) = t_{\text{р}}(7) - t_{\text{р}}(4) - t(4,\ 7) = 29 - 13 - 6 = 10;$
$T_{\text{н}}(4,\ 7) = t_{\text{р}}(7) - t_{\text{п}}(4) - t(4,\ 7) = 29 - 13 - 6 = 10;$

робочий цикл (роботи) (5, 8):

$t_{\text{р.п}}(5,\ 8) = t_{\text{р}}(5) = 23;\ t_{\text{р.з}}(5,\ 8) = t_{\text{р}}(5) + t(5,\ 8) = 23 + 8 = 31;$
$t_{\text{п.п}}(5,\ 8) = t_{\text{п}}(8) - t(5,\ 8) = 43 - 8 = 35;$
$t_{\text{п.з}}(5,\ 8) = t_{\text{п}}(8) = 43;$
$T_{\text{п}}(5,\ 8) = t_{\text{п}}(8) - t_{\text{р}}(5) - t(5,\ 8) = 43 - 23 - 8 = 12;$
$T_{\text{ч1}}(5,\ 8) = t_{\text{п}}(8) - t_{\text{п}}(5) - t(5,\ 8) = 43 - 26 - 8 = 9;$
$T_{\text{ч2}}(5,\ 8) = t_{\text{р}}(8) - t_{\text{р}}(5) - t(5,\ 8) = 33 - 23 - 8 = 2;$
$T_{\text{н}}(5,\ 8) = t_{\text{р}}(8) - t_{\text{п}}(5) - t(5,\ 8) = 33 - 26 - 8 = -1;$

робочий цикл (роботи) (5, 7):

$t_{\text{р.п}}(5,\ 7) = t_{\text{р}}(5) = 23;\ t_{\text{р.з}}(5,\ 7) = t_{\text{р}}(5) + t(5,\ 7) = 23 + 3 = 26;$
$t_{\text{п.п}}(5,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t(5,\ 7) = 29 - 3 = 26;$
$t_{\text{п.з}}(5,\ 7) = t_{\text{п}}(7) = 29;$
$T_{\text{п}}(5,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t_{\text{р}}(5) - t(5,\ 7) = 29 - 23 - 3 = 3;$
$T_{\text{ч1}}(5,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t_{\text{п}}(5) - t(5,\ 7) = 29 - 26 - 3 = 0;$
$T_{\text{ч2}}(5,\ 7) = t_{\text{р}}(7) - t_{\text{р}}(5) - t(5,\ 7) = 29 - 23 - 3 = 3;$
$T_{\text{н}}(5,\ 7) = t_{\text{р}}(7) - t_{\text{п}}(5) - t(5,\ 7) = 29 - 26 - 3 = 0;$

робочий цикл (роботи) (6, 7):

$t_{\text{р.п}}(6,\ 7) = t_{\text{р}}(6) = 20;\ t_{\text{р.з}}(6,\ 7) = t_{\text{р}}(6) + t(6,\ 7) = 20 + 9 = 29;$
$t_{\text{п.п}}(6,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t(6,\ 7) = 29 - 9 = 20;$
$t_{\text{п.з}}(6,\ 7) = t_{\text{п}}(7) = 29;$
$T_{\text{п}}(6,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t_{\text{р}}(6) - t(6,\ 7) = 29 - 20 - 9 = 0;$
$T_{\text{ч1}}(6,\ 7) = t_{\text{п}}(7) - t_{\text{п}}(6) - t(6,\ 7) = 29 - 20 - 9 = 0;$
$T_{\text{ч2}}(6,\ 7) = t_{\text{р}}(7) - t_{\text{р}}(6) - t(6,\ 7) = 29 - 20 - 9 = 0;$
$T_{\text{н}}(6,\ 7) = t_{\text{р}}(7) - t_{\text{п}}(6) - t(6,\ 7) = 29 - 20 - 9 = 0;$

робочий цикл (роботи) (6, 9):

$t_{\text{р.п}}(6,\ 9)=t_{\text{р}}(6)=20;\ \ t_{\text{р.з}}(6,\ 9)=t_{\text{р}}(6)+t(6,\ 9)=20+10=30;$
$t_{\text{п.п}}(6,\ 9)=t_{\text{п}}(9)-t(6,\ 9)=38-10=28;$
$t_{\text{п.з}}(6,\ 9)=t_{\text{п}}(9)=38;$
$T_{\text{п}}(6,\ 9)=t_{\text{п}}(9)-t_{\text{р}}(6)-t(6,\ 9)=38-20-10=8;$
$T_{\text{ч1}}(6,\ 9)=t_{\text{п}}(9)-t_{\text{п}}(6)-t(6,\ 9)=38-20-10=8;$
$T_{\text{ч2}}(6,\ 9)=t_{\text{р}}(9)-t_{\text{р}}(6)-t(6,\ 9)=37-20-10=7;$
$T_{\text{н}}(6,\ 9)=t_{\text{р}}(9)-t_{\text{п}}(6)-t(6,\ 9)=37-20-10=7;$

робочий цикл (роботи) (7, 9):
$t_{\text{р.п}}(7,\ 9)=t_{\text{р}}(7)=29;\ \ t_{\text{р.з}}(7,\ 9)=t_{\text{р}}(7)+t(7,\ 9)=29+8=37;$
$t_{\text{п.п}}(7,\ 9)=t_{\text{п}}(9)-t(7,\ 9)=38-8=30;$
$t_{\text{п.з}}(7,\ 9)=t_{\text{п}}(9)=38;$
$T_{\text{п}}(7,\ 9)=t_{\text{п}}(9)-t_{\text{р}}(7)-t(7,\ 9)=38-29-8=1;$
$T_{\text{ч1}}(7,\ 9)=t_{\text{п}}(9)-t_{\text{п}}(7)-t(7,\ 9)=38-29-8=1;$
$T_{\text{ч2}}(7,\ 9)=t_{\text{р}}(9)-t_{\text{р}}(7)-t(7,\ 9)=37-29-8=0;$
$T_{\text{н}}(7,\ 9)=t_{\text{р}}(9)-t_{\text{п}}(7)-t(7,\ 9)=37-29-8=0;$

робочий цикл (роботи) (8, 11):
$t_{\text{р.п}}(8,\ 11)=t_{\text{р}}(8)=33;\ \ t_{\text{р.з}}(8,\ 11)=t_{\text{р}}(8)+t(8,\ 11)=33+5=38;$
$t_{\text{п.п}}(8,\ 11)=t_{\text{п}}(11)-t(8,\ 11)=48-5=43;$
$t_{\text{п.з}}(8,\ 11)=t_{\text{п}}(11)=48;$
$T_{\text{п}}(8,\ 11)=t_{\text{п}}(11)-t_{\text{р}}(8)-t(8,\ 11)=48-33-5=10;$
$T_{\text{ч1}}(8,\ 11)=t_{\text{п}}(11)-t_{\text{п}}(8)-t(8,\ 11)=48-43-5=0;$
$T_{\text{ч2}}(8,\ 11)=t_{\text{р}}(11)-t_{\text{р}}(8)-t(8,\ 11)=47-33-5=10;$
$T_{\text{н}}(8,\ 11)=t_{\text{р}}(11)-t_{\text{п}}(8)-t(8,\ 11)=47-43-5=0;$

робочий цикл (роботи) (9, 10):
$t_{\text{р.п}}(9,\ 10)=t_{\text{р}}(9)=37;\ \ t_{\text{р.з}}(9,\ 10)=t_{\text{р}}(9)+t(9,\ 10)=37+4=41;$
$t_{\text{п.п}}(9,\ 10)=t_{\text{п}}(10)-t(9,\ 10)=42-4=38;$
$t_{\text{п.з}}(9,\ 10)=t_{\text{п}}(10)=42;$
$T_{\text{п}}(9,\ 10)=t_{\text{п}}(10)-t_{\text{р}}(9)-t(9,\ 10)=42-37-4=1;$
$T_{\text{ч1}}(9,\ 10)=t_{\text{п}}(10)-t_{\text{п}}(9)-t(9,\ 10)=42-38-4=0;$
$T_{\text{ч2}}(9,\ 10)=t_{\text{р}}(10)-t_{\text{р}}(9)-t(9,\ 10)=42-37-4=1;$
$T_{\text{н}}(9,\ 10)=t_{\text{р}}(10)-t_{\text{п}}(9)-t(9,\ 10)=42-38-4=0;$

робочий цикл (роботи) (10, 11):
$t_{\text{р.п}}(10,\ 11)=t_{\text{р}}(19)=42;\ \ t_{\text{р.з}}(10,\ 11)=t_{\text{р}}(10)+t(10,\ 11)=42+6=48;$
$t_{\text{п.п}}(10,\ 11)=t_{\text{п}}(11)-t(10,\ 11)=48-6=42;$
$t_{\text{п.з}}(10,\ 11)=t_{\text{п}}(11)=48;$
$T_{\text{п}}(10,\ 11)=t_{\text{п}}(11)-t_{\text{р}}(10)-t(10,\ 11)=48-42-6=0;$
$T_{\text{ч1}}(10,\ 11)=t_{\text{п}}(11)-t_{\text{п}}(10)-t(10,\ 11)=48-42-6=0;$
$T_{\text{ч2}}(10,\ 11)=t_{\text{р}}(11)-t_{\text{р}}(10)-t(10,\ 11)=48-42-6=0;$
$T_{\text{н}}(10,\ 11)=t_{\text{р}}(11)-t_{\text{п}}(10)-t(10,\ 11)=48-42-6=0;$

робочий цикл (роботи) (6, 10):

$t_{\text{р.п}}(6,\,10)=t_{\text{р}}(6)=20;\;\; t_{\text{р.з}}(6,\,10)=t_{\text{р}}(10)+t(6,\,10)=42+6=48;$
$t_{\text{п.п}}(6,\,10)=t_{\text{п}}(10)-t(6,\,10)=42-6=36;$
$t_{\text{п.з}}(6,\,10)=t_{\text{п}}(10)=42;$
$T_{\text{п}}(6,\,10)=t_{\text{п}}(10)-t_{\text{р}}(6)-t(6,\,10)=42-20-6=16;$
$T_{\text{ч1}}(6,\,10)=t_{\text{п}}(10)-t_{\text{п}}(6)-t(6,\,10)=42-20-6=16;$
$T_{\text{ч2}}(6,\,10)=t_{\text{р}}(10)-t_{\text{р}}(6)-t(6,\,10)=42-20-6=16;$
$T_{\text{н}}(6,\,10)=t_{\text{р}}(10)-t_{\text{п}}(6)-t(6,\,10)=42-20-6=16;$

робочий цикл (роботи) (7, 8):

$t_{\text{р.п}}(7,\,8)=t_{\text{р}}(7)=29;\;\; t_{\text{р.з}}(7,\,8)=t_{\text{р}}(7)+t(7,\,8)=29+4=33;$
$t_{\text{п.п}}(7,\,8)=t_{\text{п}}(8)-t(7,\,8)=43-4=39;$
$t_{\text{п.з}}(7,\,8)=t_{\text{п}}(8)=43;$
$T_{\text{п}}(7,\,8)=t_{\text{п}}(8)-t_{\text{р}}(7)-t(7,\,8)=43-29-4=10;$
$T_{\text{ч1}}(7,\,8)=t_{\text{п}}(8)-t_{\text{п}}(7)-t(7,\,8)=43-29-4=10;$
$T_{\text{ч2}}(7,\,8)=t_{\text{р}}(8)-t_{\text{р}}(7)-t(7,\,8)=33-29-4=0;$
$T_{\text{н}}(7,\,8)=t_{\text{р}}(8)-t_{\text{п}}(7)-t(7,\,8)=33-29-4=0;$

робочий цикл (роботи) (7, 11):

$t_{\text{р.п}}(7,11)=t_{\text{р}}(7)=29;\;\; t_{\text{р.з}}(7,11)=t_{\text{р}}(7)+t(7,11)=29+5=34;$
$t_{\text{п.п}}(7,11)=t_{\text{п}}(11)-t(7,11)=42-6=36;$
$t_{\text{п.з}}(7,11)=t_{\text{п}}(11)=48;$
$T_{\text{п}}(7,11)=t_{\text{v}}(11)-t_{\text{р}}(7)-t(7,11)=48-29-5=14;$
$T_{\text{ч1}}(7,11)=t_{\text{п}}(11)-t_{\text{п}}(7)-t(7,11)=48-29-5=14;$
$T_{\text{ч2}}(7,\,11)=t_{\text{р}}(11)-t_{\text{р}}(7)-t(7,\,11)=48-29-5=14;$
$T_{\text{н}}(7,\,11)=t_{\text{р}}(11)-t_{\text{п}}(7)-t(7,\,11)=48-29-5=14;$

робочий цикл (роботи) (7, 10):

$t_{\text{р.п}}(7,10)=t_{\text{р}}(7)=29;\;\; t_{\text{р.з}}(7,10)=t_{\text{р}}(7)+t(7,10)=29+13=42;$
$t_{\text{п.п}}(7,10)=t_{\text{п}}(10)-t(7,10)=42-13=29;$
$t_{\text{п.з}}(7,10)=t_{\text{п}}(10)=42;$
$T_{\text{п}}(7,10)=t_{\text{п}}(10)-t_{\text{р}}(7)-t(7,10)=48-29-13=0;$
$T_{\text{ч1}}(7,10)=t_{\text{п}}(10)-t_{\text{п}}(7)-t(7,10)=48-29-13=0;$
$T_{\text{ч2}}(7,10)=t_{\text{р}}(10)-t_{\text{р}}(7)-t(7,10)=48-29-13=0;$
$T_{\text{н}}(7,10)=t_{\text{р}}(10)-t_{\text{п}}(7)-t(7,10)=48-29-13=0;$

робочий цикл (роботи) (10, 12):

$t_{\text{р.п}}(10,12)=t_{\text{р}}(10)=42;\;\; t_{\text{р.з}}(10,12)=t_{\text{р}}(10)+t(10,12)=42+17=59;$
$t_{\text{п.п}}(10,12)=t_{\text{п}}(12)-t(10,12)=61-17=44;$
$t_{\text{п.з}}(10,12)=t_{\text{п}}(12)=61;$
$T_{\text{п}}(10,12)=t_{\text{п}}(12)-t_{\text{р}}(10)-t(10,12)=61-42-17=2;$
$T_{\text{ч1}}(10,12)=t_{\text{п}}(12)-t_{\text{п}}(10)-t(10,12)=61-42-17=2;$
$T_{\text{ч2}}(10,12)=t_{\text{р}}(12)-t_{\text{р}}(10)-t(10,12)=61-42-17=2;$
$T_{\text{н}}(10,12)=t_{\text{р}}(12)-t_{\text{п}}(10)-t(10,12)=61-42-17=2;$

робочий цикл (роботи) (11, 12):

$t_{р.п}(11,12)=t_{р}(101)=48;\ t_{р.з}(11,12)=t_{р}(11)+t(11,12)=48+13=61;$
$t_{п.п}(11,12)=t_{п}(12)-t(11,12)=61-13=48;$
$t_{п.з}(11,12)=t_{п}(12)=61;$
$T_{п}(11,12)=t_{п}(12)-t_{р}(11)-t(11,12)=61-48-13=0;$
$T_{ч1}(11,12)=t_{п}(12)-t_{п}(11)-t(11,12)=61-48-13=0;$
$T_{ч2}(11,12)=t_{р}(12)-t_{р}(11)-t(11,12)=61-48-13=0;$
$T_{н}(11,12)=t_{р}(12)-t_{п}(11)-t(11,12)=61-48-13=0.$

Результати наведених обчислень часових параметрів для мережного графа наведено в табл. 3.

Таблиця 3

№ з/п	Робочий цикл (робота) (i,j)	Тривалість робочого циклу (роботи) $t(i,j)$	Терміни початку і закінчення робочих циклів (робіт)				Резерви часу робочих циклів (робіт)			
			$t_{р.п}(i,j)$	$t_{р.з}(i,j)$	$t_{п.п}(i,j)$	$t_{п.з}(i,j)$	$T_{п}(i,j)$	$T_{ч1}(i,j)$	$T_{ч2}(i,j)$	$T_{п}(i,j)$
1	(1,2)	8	0	8	1	9	1	1	0	0
2	(1,4)	13	0	13	0	13	0	0	0	0
3	(1,6)	9	0	9	11	20	11	11	11	11
4	(2,3)	9	8	17	31	40	23	22	0	—
5	(2,5)	6	8	14	20	26	12	11	9	8
6	(2,4)	4	8	12	9	13	1	0	1	0
7	(3,8)	3	17	20	40	43	23	0	13	—
8	(4,5)	10	13	23	16	26	3	3	0	0
9	(4,6)	7	13	20	13	20	0	0	0	0
10	(4,7)	6	13	19	23	29	10	10	10	10
11	(5,8)	8	23	31	35	43	12	9	2	—
12	(5,7)	3	23	26	26	29	3	0	3	0
13	(6,7)	9	20	29	20	29	0	0	0	0
14	(6,9)	10	20	30	28	38	8	8	7	7
15	(6,10)	6	20	26	36	42	16	16	16	16
16	(7,8)	4	29	33	39	43	10	10	0	10
17	(7,11)	5	29	34	43	48	14	14	14	14
18	(7,10)	13	29	42	29	42	0	0	0	0
19	(7,9)	8	29	37	30	38	1	1	0	0
20	(8,11)	5	33	38	43	48	10	0	10	0
21	(9,14)	4	37	41	38	42	1	0	1	0
22	(10,11)	6	42	48	42	48	0	0	0	0
23	(10,12)	17	42	59	44	61	2	2	2	2
24	(11,12)	13	48	61	48	61	0	0	0	0

Із табл. 3 випливає, що для критичного шляху $0\to3\to5\to\ \to6\to9\to10\to11$ резерви часу $T_{п}(i,j)$, $T_{ч1}(i,j)$, $T_{ч2}(i,j)$ і $T_{н}(i,j)$ дорівнюють нулю. Розглянемо часові параметри, наприклад, для робочого циклу (роботи) (5, 8):

ранній термін початку робочого циклу (роботи) $t_{р.п}(5, 8)$= 20 у. о. ч.;

ранній термін закінчення робочого циклу (роботи) $(5, 8)$ $t_{р.з}(5, 8)$ = 30 у. о. ч.;

пізній термін початку робочого циклу (роботи) $(5, 8)$ $t_{п.п}(5, 8)$ = 28 у. о. ч.;

пізній термін закінчення робочого циклу (роботи) $(5, 8)$ $t_{п.з}(5, 8)$ = 38 у. о. ч.

Таким чином, робочий цикл (роботи) $(5, 8)$ має розміщуватися в інтервалі (20, 28) у. о. ч. і закінчитися в інтервалі (30, 38). Повний резерв робочого циклу (роботи) $(5, 8)$ $T_п(5, 8)$ = 8 у. о. ч., що інформує про те, що термін виконання цього робочого циклу можна збільшити на 8 у. о. ч., не коригуючи при цьому виконання всього комплексу робіт.

А для робочого циклу (роботи) (1, 4) $T_п(1, 4)$ = 12 у. о. ч. Наголосимо, що цей робочий цикл проходить сім повних шляхів (робочих циклів):

Шлях L	**Тривалість шляху** L**, у. о. ч.**
$L_1: 0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10 \to 11$	39
$L_2: 0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11$	48
$L_3: 0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 8 \to 9 \to 11$	46
$L_4: 0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11$	49
$L_5: 0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 9 \to 11$	47
$L_6: 0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 10 \to 11$	35
$L_7: 0 \to 1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 11$	40

Як бачимо, максимальний шлях, який проходить через робочий цикл (роботу) (1, 4) є L_4 тривалістю 49 у. о. ч., резерв часу якого $T(L_4) = t_{кр} - t(L_4) = 61 - 49 = 12$ у. о. ч.

Отже, повний резерв часу робочого циклу (роботи) (1, 4) дорівнює резерву шляху L_4, який є максимальним із усіх шляхів, які проходять через цей робочий цикл (роботу). Якщо збільшити тривалість виконання робочого циклу (роботи) (1, 4) на 12 у. о. ч., тобто із 6 до 18 у. о. ч., то повністю буде використано резерв часу шляху L_4 і він стане також критичним, а резерви часу інших шляхів зменшаться відповідно на 12 у. о. ч.

Резерв часу $T_{ч1}$ для робочого циклу (роботи) (1, 4) дорівнює 11 у. о. ч., а це означає, що при збереженні загального терміну виконання всього проекту на 11 у. о. ч. може бути затримано виконання цього робочого циклу і наступних робіт по кожному із шляхів $L_1, L_2, \ldots, L_7$ без витрат резерву часу попередніх робочих циклів (робіт). У нашому випадку — без витрат резерву часу одного попереднього циклу (роботи) (0, 1).

Частковий резерв часу другого виду робочого циклу (1, 4) дорівнює 9 у. о. ч., що означає: при збереженні загального терміну виконання проекту можна на 9 у. о. ч. затримати виконання робочого циклу (роботи) (1, 4) і попередніх робочих циклів (у розглядуваному випадку робочого циклу (роботи) (0, 1)) без порушення резерву часу наступних робочих циклів. Незалежний резерв часу робочого циклу (роботи) (1, 4) становить $T_н(1, 4)$ = 8 у. о. ч. Це означає, що на 8 у. о. ч. можна збільшити тривалість робочого циклу (1, 4) без зміни резервів часу всіх інших робочих циклів (робіт).

Із наведеної таблиці часових параметрів робочих циклів (робіт) бачимо, що робочі цикли (роботи) (1, 2), (2, 7), (4, 7) мають від'ємні значення незалежних резервів часу робіт $T_н(i, j)$. Це означає, наприклад, для робочого циклу (роботи) (2, 7), для якого $T_н(2, 7) = -10$, що робочий цикл (2, 7) тривалістю 3 у. о. ч. має закінчитися через 33 у. о. ч. після початку комплексу робіт, а почитися через 40 у. о. ч., що є неможливою подією.

10.5. Мережне планування в умовах невизначеності

При визначенні часових параметрів мережної моделі вважалося, що час, який витрачається на виконання кожного робочого циклу (роботи) (i, j), є величиною, наперед визначеною. Проте таке припущення в реальних умовах неприйнятне, оскільки здебільшого тривалість робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ наперед невідома і може набувати лише одного з можливих значень.

Отже, тривалість робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ у загальному випадку буде величиною випадковою, яка характеризуватиметься певним законом розподілу з відповідними числовими характеристиками: математичним сподіванням $M(t(i,\ j))$, дисперсією $D[t(i,\ j)]$, середнім квадратичним відхиленням $\sigma[t(i,\ j)]$. Практично для всіх систем мережного моделювання вважається, що:

1) тривалість кожного робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ є величиною неперервною;

2) ця тривалість є одномодальною (один максимум для щільності ймовірностей);

3) щільність імовірностей $f(x)$ має лише дві точки перетину з віссю Ot і набуває невід'ємних значень $(f(x) \geq 0)$.

Окрім цього було виявлено, що $f(x)$ має додатну асиметрію, тобто $\max f(x)$ зміщений ліворуч відносно медіани $\mathrm{M}e$.

Розподіл, який має перелічені щойно властивості, — це відомий із теорії ймовірностей β-розподіл. Аналіз статистичних даних показав, що β-розподіл можна використати як закон розподілу для всіх робочих циклів $(i,\ j)$. На практиці фахівці з мережного моделювання використовують такі формули для обчислення основних числових характеристик для робочих циклів (робіт):

$$M(t(i,\ j)) = \frac{2t_{о}(i,\ j) + 3t_{п}(i,\ j)}{5}; \tag{10.21}$$

$$D[t(i,\ j)] = \frac{[t_{п}(i,\ j) - t_{о}(i,\ j)]^2}{36}. \tag{10.22}$$

Тут:

$t_{о}(i,\ j)$ — оптимістична оцінка робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$, тобто тривалість робочого циклу $(i,\ j)$ за найсприятливіших умов;

$t_{п}(i,\ j)$ — песимістична оцінка робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$, тобто тривалість робочого циклу $(i,\ j)$ за найнесприятливіших умов.

У загальному випадку $f(x)$, $t_{о}(i,\ j)$, $t_{п}(i,\ j)$ можна зобразити графічно (рис. 7.15), скориставшись таким позначенням:

$t_{н.і}(i,\ j)$ — найімовірніша оцінка робочого циклу $(i,\ j)$, тобто тривалість робочого циклу $(i,\ j)$ за нормальних умов.

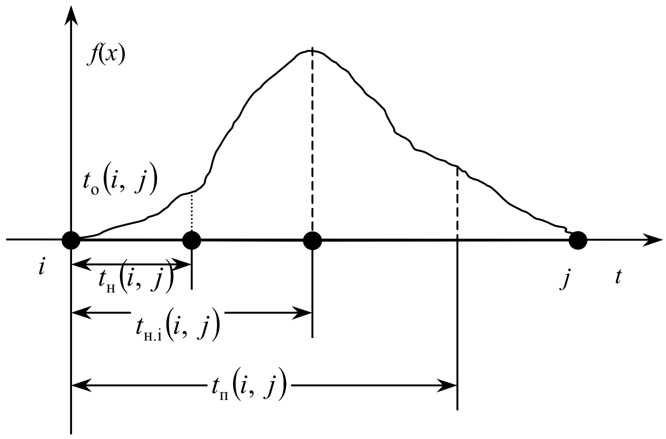


Рис. 10.15

Оскільки $t_{н.і}(i,\ j)$ на практиці дуже складно оцінити, то її, як правило, в обчисленнях $M(t(i,\ j))$, $D[t(i,\ j)]$ не використовують. Знаючи $M(t(i,\ j))$, $D[t(i,\ j)]$, можна визначити часові параметри мережної моделі та оцінити їхню надійність. Якщо тривалість робочих циклів (робіт), які належать шляху L, достатньо велика, то на підставі центральної граничної теореми Ляпунова можемо стверджувати, що загальна тривалість шляху L як випадкової величини матиме нормальний закон розподілу ймовірностей із числовими характеристиками $M[t(L)]$, $D[t(L)]$, а саме:

$$M[t(L)] = \sum_{i,j} M[t(i, j)], \tag{10.23}$$

$$D[t(L)] = D[t(i, j)]. \quad \sigma[t(L)] = \sqrt{D[t(L)]}. \tag{10.24}$$

Якщо, наприклад, припустити, що в мережному графі, наведеному в прикладі 2, тривалість робочих циклів (робіт) (i, j) є випадковими величинами, а відповідні числа для кожного робочого циклу (i, j) являють собою математичні сподівання $M[t(i, j)]$ і при цьому відомі всі значення дисперсії $D[t(i, j)]$, то для всього шляху L числові характеристики $M[t(L)]$, $D[t(L)]$ обчислюються за формулами (10.23), (10.24). При цьому слід ураховувати, що часові параметри, подані в табл. 3, будуть тепер уже середніми значеннями відповідних випадкових величин.

Так, критичний шлях $t_{\text{кр}} = 61$ у. о. ч. буде в цьому разі вже являти собою шлях у середньому, тобто $M[t(L_{\text{кр}})]$, а в кожному конкретному випадку для цієї моделі можливі певні відхилення від $M[t(L_{\text{кр}})]$. При цьому чим більшою буде сумарна дисперсія $D[t(L_{\text{кр}})]$ тривалості робочих циклів (i, j) критичного шляху, тим більш значні за абсолютним значенням відхилення.

Тому попередній аналіз мережних моделей із випадковими тривалостями робочих циклів не обмежується лише обчисленням часових параметрів мереж. Важливим моментом аналізу постає оцінка ймовірності того, що термін виконання модельованих циклів робіт $t_{\text{кр}}$ не перевищують заданого директивного терміну T.

Отже, припускаючи, що $t_{\text{кр}}$ є випадковою величиною, яка має нормальний закон розподілу ймовірностей із відомими значеннями числових характеристик $M[t(L_{\text{кр}})]$, $\sigma[t(L_{\text{кр}})]$, дістаємо:

$$P(t_{\text{кр}} < \mathrm{T}) = 0{,}5 + \Phi(Z), \tag{10.25}$$

де $Z = \dfrac{T - M[t(L_{\text{кр}})]}{\sigma[t(L_{\text{кр}})]}$, $\Phi(Z)$ — функція Лапласа.

При цьому $M[t(L_{\text{кр}})]$, $\sigma[t(L_{\text{кр}})] = D\sqrt{[t(L_{\text{кр}})]}$ визначається за формулами (10.23), (10.24).

Якщо, наприклад, виявиться, що ймовірність $P(t_{\text{кр}} < T)$ мала (менша за 0,3), то небезпека невиконання заданого терміну комплексу робіт є великою, а тому необхідно здійснити певні заходи (наприклад, перерозподіл ресурсів по мережі, переглянути структуру робочих циклів (робіт) і т. ін.).

У разі, коли $P(t_{\text{кр}} < T)$ є значною (наприклад, більшою за 0,8), можна з достатньою впевненістю (надійністю) прогнозувати виконання комплексу всіх робіт відповідно до проекту в заданий термін.

У деяких випадках становить певний інтерес розв’язок оберненої задачі, коли необхідно визначити максимальний термін T виконання проекту із заданою надійністю γ. Тоді значення T обчислюється з таких міркувань:

$\Phi(Z) = 0{,}5\gamma$; за таблицею значень функції Лапласа знаходимо Z і, нарешті, дістаємо:

$$T = M[t(L_{\text{кр}})] + Z\sigma[t(L_{\text{кр}})]. \tag{10.26}$$

Приклад 4. Використовуючи критичний шлях прикладу 2, а саме $1 \to 4 \to 6 \to 7 \to 10 \to 11 \to 12$, визначити ймовірність $P(t_{\text{кр}} < 64)$, якщо відомі значення:

$$\sigma^2(1, 4) = 2{,}5; \quad \sigma^2(4, 6) = 2{,}1; \ \sigma^2(6, 7) = 3{,}2; \ \sigma^2(7, 10) = 4; \ \sigma^2(10, 11) = 1{,}5; \quad \sigma^2(11, 12) = 3{,}5.$$

Розв’язання. Використовуючи формули (10.24) і (10.25), маємо:

$$\sigma[t(L_{\text{кр}})] = \sqrt{\sigma^2(1, 4) + \sigma^2(4, 6) + \sigma^2(6, 7) + \sigma^2(7, 10) + \sigma^2(10, 11) + \sigma^2(11, 12)} =$$
$$= \sqrt{2{,}5 + 2{,}1 + 3{,}2 + 4 + 1{,}5 + 3.5} = \sqrt{16{,}8} \approx 4{,}1.$$

Тепер шукана ймовірність буде

$$P\left(t_{\text{кр}} < 64\right) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{64-61}{4{,}1}\right) = 0{,}5 + \Phi\left(0{,}732\right) = 0{,}5 + 0{,}2673 = 0{,}7673.$$

Отже, із ризиком 0,7673 можна припускати виконання всього проекту робіт. Можна розв'язати задачу і в оберненій постановці.

Приклад 5. Використовуючи приклади 2 і 4, оцінити максимальний термін T виконання проекту з надійністю 0,99.

Розв'язання. Використовуючи формулу (10.25), дістаємо:

$$T = M\,[t(L_{\text{кр}})] + Z\,\sigma\,[t(L_{\text{кр}})] = 61 + Z \cdot 4{,}1.$$

Значення Z знаходимо з рівності

$$2\Phi(Z) = 0{,}99 \Rightarrow \Phi(Z) = 0{,}495 \Rightarrow Z = 2{,}58.$$

Тож маємо

$$T = 61 + 2{,}58 \cdot 4{,}1 = 6{,}1 + 10{,}578 = 71{,}578 \approx 72\ .$$

Отже, з імовірністю 0,99 термін виконання проекту не перевищить 72 у. о. ч.

10.6. Оптимізація мережної моделі методом «час-вартість»

Оптимізацію мережної моделі умовно поділяють на часткову і комплексну.

При частковій оптимізації мережної моделі здійснюється мінімізація виконання всього комплексу робіт при заданій його вартості або мінімізація вартості комплексу робіт при заданому часі виконання всього проекту.

При комплексній оптимізації визначають оптимальне співвідношення значень вартості й терміну виконання всього проекту залежно від конкретної мети, яка постає при його виконанні.

Розглянемо часткову оптимізацію мережної моделі, використовуючи при цьому метод «час-вартість», що дає змогу зменшити тривалість роботи, яка викликає пропорційне збільшення її вартості.

Кожний робочий цикл (робота) $(i,\ j)$ характеризується, як відомо, певною тривалістю $t(i,\ j)$, яка може перебувати в межах

$$t_{\min}(i,\ j) \le t(i,\ j) \le t_{\text{норм}}(i,\ j), \tag{10.26}$$

де $t\min(i,\ j)$ — мінімально можлива тривалість робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$; $t_{\text{норм}}(i,\ j)$ — нормальна тривалість виконання робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$.

Позначимо через $C(i,\ j)$ вартість роботи робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$.

Вартість $C(i,\ j)$ може змінюватися в проміжку

$$C_{\min}(i,\ j) \le C(i,\ j) \le C_{\max}(i,\ j). \tag{10.27}$$

Графічне зображення залежності $C(i,\ j)$ від тривалості робочого циклу (роботи) $t(i,\ j)$ наведено на рис. 10.16.

Здійснюючи апроксимацію функції $C(i,\ j) = f(t(i,\ j))$ по прямій, дістаємо зміну вартості роботи $\Delta C\ (i,\ j)$ при скороченні тривалості робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ на величину

$$\Delta C(i,\ j) = [t_{\text{норм}}(i,\ j) - t(i,\ j)]\,h(i,\ j), \tag{10.28}$$

де

$$h(i,\ j) = \operatorname{tg}\alpha.\,. \tag{10.29}$$

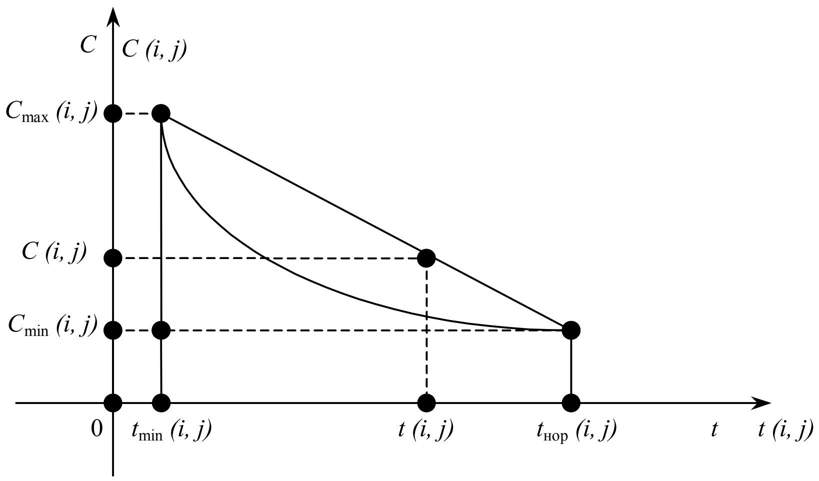


Рис. 10.16

Величина $h(i,\ j)$ інформує про витрати, пов'язані з прискоренням робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ порівняно з нормальною тривалістю за одиницю часу, і визначається за формулою:

$$h(i,\ j) = \text{tg}\,\alpha = \frac{C_{\max}(i,\ j) - C_{\min}(i,\ j)}{t_{\text{норм}}(i,\ j) - t_{\min}(i,\ j)}. \tag{10.30}$$

Часткова оптимізація мережної моделі з урахуванням вартості може бути здійснено з використанням часових резервів робочих циклів (робіт). Тривалість кожного робочого циклу, який має резерв часу, буде збільшуватися доти, доки не буде вичерпано цей резерв або доки не буде досягнуто верхньої межі тривалості $t_{\text{норм}}(i,\ j)$. При цьому вартість виконання всього проекту до оптимізації

$$C = \sum_{i,j} C(i,\ j) \tag{10.31}$$

зменшиться на величину

$$C = \sum_{i,j} \Delta C(i,\ j) = \sum_{i,j} [t_{\text{норм}}(i,\ j) - t(i,\ j)]h(i,\ j). \tag{10.32}$$

Для здійснення часткової оптимізації мережної моделі окрім тривалості робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ необхідно знати його граничні значення $t_{\min}(i,\ j)$, $t_{\text{норм}}(i,\ j)$, а також показники, пов'язані з витратами на прискорення робіт $h(i,\ j)$, які обчислюють за формулою (10.30).

Тривалість кожного робочого циклу (роботи) $(i,\ j)$ доцільно збільшити на таке значення резерву часу, щоб не змінилися ранні (очікувані) терміни виконання всіх подій мережі, тобто на величину $T_{\text{ч}2}(i,\ j)$.

Приклад 6. Використовуючи параметри роботи для мережного графа, знайдені у прикладі 3, здійснити часткову оптимізацію цієї моделі, якщо відомі значення $t_{\min}(i,\ j)$, $t_{\text{норм}}(i,\ j)$ і вартості $C(i,\ j)$, а також коефіцієнти витрат на прискорення робочих циклів (робіт) $h(i,\ j)$, які наведено в табл. 4.

Таблиця 4

№ з/п	Робочий цикл (робота) (i, j)	Тривалість робочого циклу (роботи) (i, j), у.о.ч.			Частковий резерв другого виду (вільний резерв) $T_{ч2}(i, j)$	Вартість робочого циклу (роботи) $C(i, j)$	Коефіцієнт витрат на прискорення робочих циклів $h(i, j)$, у.о.ч.	Зменшення вартості проекту $\Delta C(i, j)$, грн
		$t_{\min}(i, j)$	$t(i, j)$	$t_{норм}(i, j)$				
1	(1,2)		8		0	50	—	—
2	(1,4)		13		0	45	—	—
3	(1,6)	5	9	14	11	60	8	$5 \cdot 8 = 40$
4	(2,3)		9		0	82	—	—
5	(2,5)	4	6	10	9	28	4	$4 \cdot 4 = 16$
6	(2,4)	3	4	6	1	37	12	$1 \cdot 12 = 12$
7	(3,8)	2	3	7	13	86	6	$4 \cdot 6 = 24$
8	(4,5)		10		0	55	—	—
9	(4,6)		7		0	72	—	—
10	(4,7)	4	6	9	10	92	10	$3 \cdot 10 = 30$
11	(5,8)	3	8	14	2	48	5	$2 \cdot 5 = 10$
12	(5,7)	1	3	6	3	64	12	$3 \cdot 12 = 36$
13	(6,7)		9		0	30	—	—
14	(6,9)	5	10	18	7	15	1	$7 \cdot 1 = 7$
15	(6,10)	3	6	12	16	86	7	$6 \cdot 7 = 42$
16	(7,8)		4		0	26	—	—
17	(7,11)	2	5	0	14	44	5	$5 \cdot 5 = 25$
18	(7,10)		13		0	75	—	—
19	(7,9)		8		0	42	—	—
20	(8,11)	1	5	15	10	74	4	$10 \cdot 4 = 40$
21	(9,14)	2	4	8	1	20	3	$1 \cdot 3 = 3$
22	(10,11)		6		0	35	—	—
23	(10,12)	11	17	23	2	40	4	$2 \cdot 4 = 8$
24	(11,12)		13		0	10	—	—
	$\sum$					1216		293

У табл. 4 значення $t_{\min}(i, j)$, $t_{норм}(i, j), h(i, j)$, а також обчислення значень $\Delta C(i, j)$ наведено лише для тих робочих циклів (робіт) (i, j), для яких $T_{ч2}(i, j) \neq 0$.

Початкова вартість мережного графа, або плану, обчислюється за формулою (7.31) і дорівнює вартостям усіх робочих циклів (робіт), зокрема й тих, які не мають резервів часу. Ця вартість: $C = 1216$ у. о.

Вартість нового плану обчислюється як $C_1 = C - \Delta C = 1216 - 293 = 923$ у. о. (значення C і ΔC узято з табл. 4).

Новий оптимальний мережний граф наведено на рис. 10.17.

Отже, унаслідок оптимізації мережі дістали план, який дає змогу виконати комплекс робочих циклів (робіт) упродовж терміну $t_{кр} = 61$ у. о. ч. за мінімальної його вартості $C_1 = 923$ у.о.

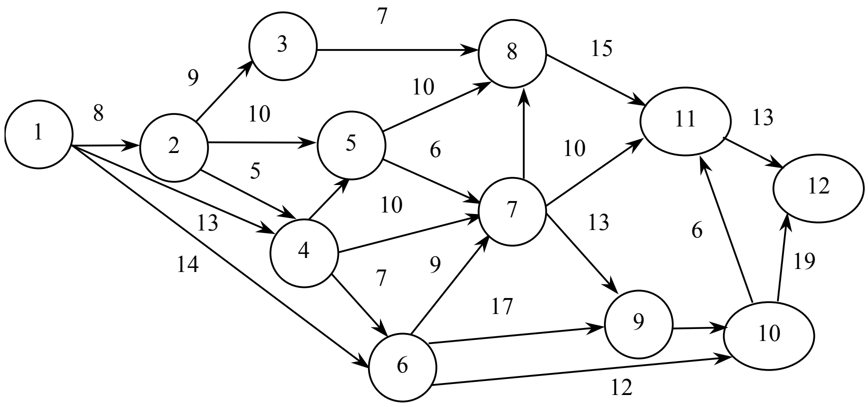


Рис. 7.17

У реальних умовах виконання проекту може передбачати прискорення його виконання, що, природно, позначиться на його вартості, яка в цьому разі збільшиться. Тому необхідно визначити оптимальне співвідношення між вартістю *C* проекту і тривалістю його виконання $t = t_{кр}$, яку можна подати як функцію $C(t)$ від часу *t*. Для визначення функції $C(t)$ можна використати евристичні методи, тобто методи, які враховують індивідуальні особливості мережних графів.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Які задачі можна розв'язати за допомогою моделей мережного планування та управління?
2. Що слід розуміти під поняттям «комплекс робіт»?
3. Основні елементи мережної моделі.
4. Графічне зображення мережної моделі.
5. Порядок побудови мережної моделі.
6. Що слід розуміти під поняттям «шлях» у мережних моделях?
7. Що називається критичним шляхом у мережній моделі? Дайте економічну інтерпретацію.
8. Ранній термін завершення i-ї події $t_р(i)$ та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
9. Пізній термін завершення i-ї події $t_п(i)$ та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
10. Резерв часу i-ї події $T(i)$ та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
11. Протяжність робочого циклу $t(i, j)$. Навести економічну інтерпретацію.
12. Ранній термін $t_{р.п}(i, j)$ початку робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
13. Ранній термін $t_{р.з}(i, j)$ закінчення робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
14. Пізній термін $t_{п.п}(i, j)$ початку робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
15. Пізній термін $t_{п.з}(i, j)$ закінчення робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
16. Повний резерв часу $T_п(i, j)$ робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
17. Частковий резерв часу $T_{ч1}(i, j)$ першого виду робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.
18. Частковий резерв часу $T_{ч2}(i, j)$ роботи другого виду робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.

19. Незалежний резерв часу $T_{\text{н}}(i, j)$ робочого циклу (i, j) та формула для його обчислення. Навести економічну інтерпретацію.

20. Протяжність шляху $t(L)$. Навести економічну інтерпретацію.

21. Протяжність критичного шляху $t_{\text{кр}}(L)$. Навести економічну інтерпретацію.

22. Резерв шляху $T(L)$. Навести економічну інтерпретацію.

23. Чому дорівнюють $T_{\text{п}}(i, j)$, $T_{\text{ч1}}(i, j)$, $T_{\text{ч2}}(i, j)$ для критичного шляху.

24. Мережне планування в умовах невизначеності. Приклади застосування в економіці.

25. Поняття про оптимізацію мережної моделі методом час-вартість.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Деяка будівельна компанія виконує комплекс робіт, які представлено у вигляді мережних графів. Визначити критичні шляхи за заданими мережними графами (рис. 1 і 2).

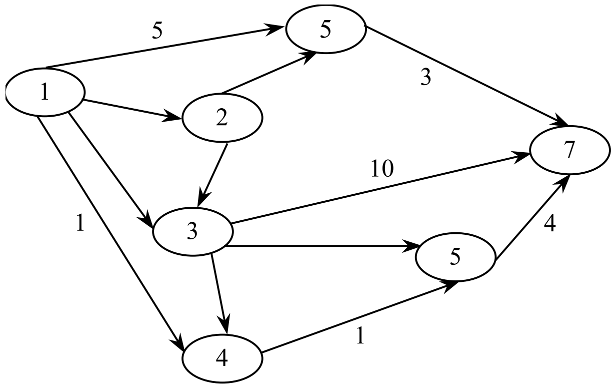


Рис. 1

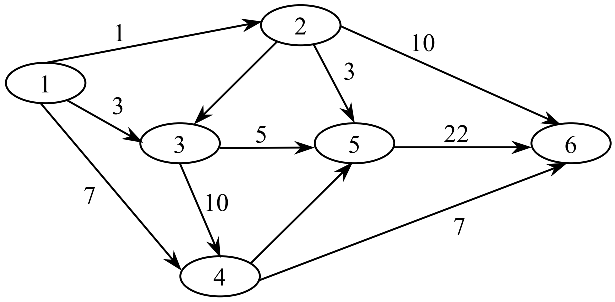


Рис. 2

2. Виробнича система виробляє п'ять видів устаткувань. Плани виконання робіт для виробництва цих устаткувань представлені у вигляді наступних мережних графів (рис. 1—5). За заданими мережними графами для відповідних робочих циклів визначити: ранній термін $t_{\text{р.п}}(i, j)$ початку робочого циклу (i, j), ранній термін $t_{\text{р.з}}(i, j)$ закінчення робочого циклу (i, j), пізній термін $t_{\text{п.п}}(i, j)$ початку робочого циклу (i, j), пізній термін $t_{\text{п.з}}(i, j)$ закінчення робочого циклу (i, j), повний резерв часу $T_{\text{п}}(i, j)$ робочого циклу (i, j), частковий резерв часу $T_{\text{ч1}}(i, j)$ першого виду робочого циклу (i, j), частковий резерв часу $T_{\text{ч2}}(i, j)$ роботи другого виду робочого циклу (i, j), незалежний резерв часу $T_{\text{н}}(i, j)$ робочого циклу (i, j) .

1.

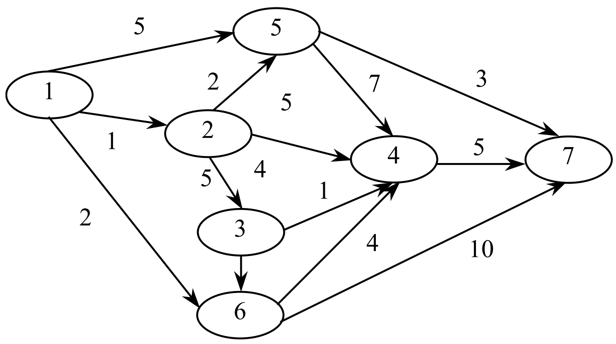


Рис. 1

2.

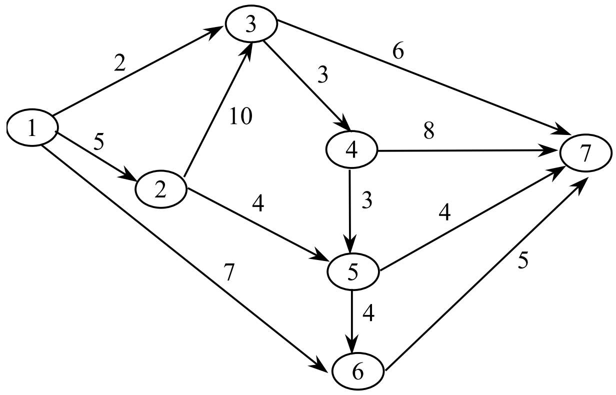


Рис. 2

3.

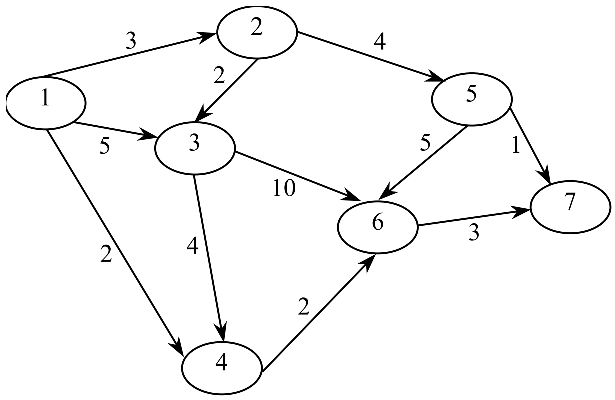


Рис. 3

4.

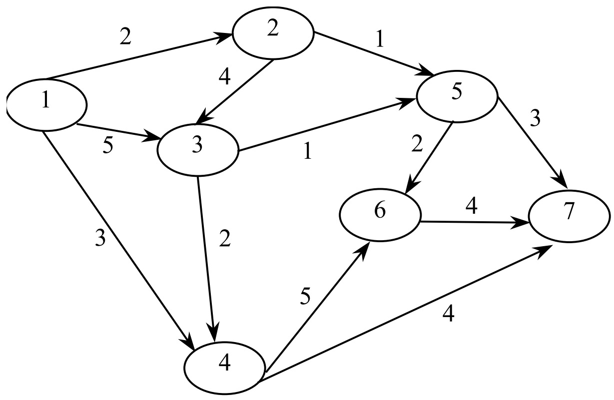


Рис. 4

5.

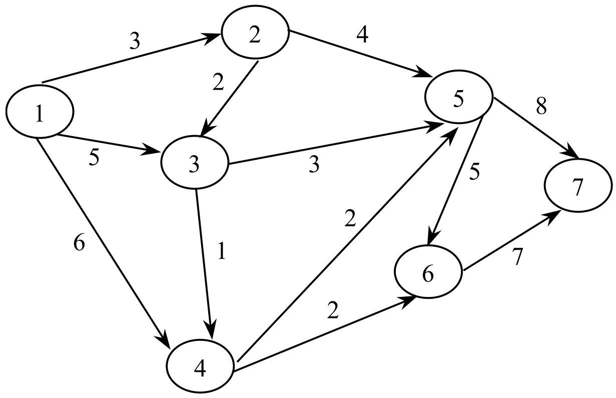


Рис. 5

РОЗДІЛ 11

ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ В ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

У результаті вивчення теми студент повинен:
- знати концептуальні положення побудови моделей управління запасами;
- знати основні категорії теорії управління запасами;
- знати статичні детерміновані моделі управління запасами без дефіциту і з дефіцитом;
- знати моделі управління запасами умовах невизначеності;
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі управління запасами, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

11.1. Теорія управління запасами, основні поняття та означення

Будь-яке підприємство державної чи приватної форми власності, пов'язане з виготовленням певної продукції, має як одну з важливих складових свого стабільного функціонування забезпечувати наявність різного роду запасів. Це можуть бути сировина, заготовки, деталі чи окремі вузли для машин, матеріали для поточного забезпечення цехів заводу, готова продукція для продажу на ринку. Сукупності цих матеріалів (як тимчасово не використані ресурси) називають ***запасами***, які зберігаються на складах.

Запаси створюються з різних причин. Не можна бути повністю впевненим у тому, що необхідні предмети надійдуть до складу, до місця виробництва саме в той момент часу, коли в них виникає потреба. Якщо на певному етапі виробничого процесу виникла потреба в якомусь виді деталей, а їх не виявиться в запасі, тобто створиться ситуація дефіциту, то процес виробництва може загальмуватись або й зовсім припинитися. Цілком ясно, що таких критичних ситуацій потрібно намагатись уникнути. На складі завжди має бути необхідна кількість деталей, вузлів і т. ін.

Але якщо запаси збільшувати, то відповідно зростатиме й плата за їх зберігання. Отже, основною метою управління запасами є вибір компромісних рішень, безперебійне забезпечення процесу виробництва, мінімізація втрат зі збереження запасів на складах.

Якщо не володіти процесом управління запасами, вибором компромісних рішень, то можна потрапити в таку ситуацію, коли процес виробництва товарів буде скорочуватися, виникнуть проблеми з їх реалізацією на ринку, що може зрештою стати однією з причин банкрутства підприємства. Таким чином, адміністрація має вагомі стимули для розробки й реалізації стратегії управління.

Управління запасами становить один із численних класів економічних задач дослідження операцій, розв'язання яких має важливе народногосподарське значення. Правильне й своєчасне визначення стратегії управління запасами, а також їх ефективного рівня дає змогу вивільнити значні оборотні кошти, які перебувають, так би мовити, у «замороженому» стані у вигляді запасів, підвищивши завдяки цьому ефективність використання ресурсів.

Головною метою вивчення цього розділу є виявлення зв'язку між кількістю запасу Q і часом t, протягом якого досліджується цей запас. Тобто досліджується функціональна залежність

$$Q = \alpha(t). \tag{11.1}$$

Графічно цю залежність у загальному вигляді ілюструє рис. 11.1, де Q_0 — початковий запас; у момент часу t_1 запас вичерпується і миттєво поповнюється до рівня Q_1; пряма Q_1Q_2 зображує постійний попит; Q_2Q_3 — пряма, що зображує неперервне поповнення запасу до рівня Q_3.

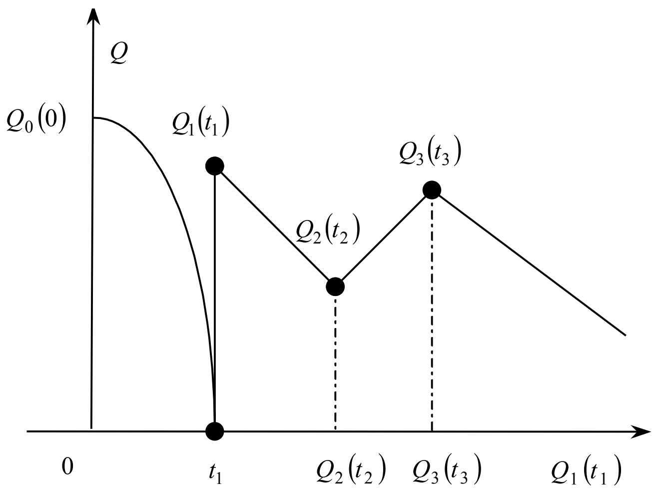


Рис. 11.1

У загальному випадку $Q(t)$ — товар одного виду. Якщо на товар надходить заявка, то вона задовольняється і значення Q зменшується. Якщо $Q = 0$ (на графіку момент часу $t = t_1$), то маємо ситуацію дефіциту. Якщо товари надходять до складу, то значення Q збільшується.

Розглянемо основні поняття, застосовувані в моделях управління запасами.

1. Попит. Попит на продукцію, яка є в запасі, може бути детермінованим (у найпростішому випадку — сталим у часі), або випадковим, коли заявки на товар, що є в запасі, надходять у випадкові моменти часу чи сам обсяг товару є випадковою величиною.

2. Поповнення складу. Поповнення складу можна здійснювати через певний проміжок часу або в міру вичерпання запасу чи зниження його до певного рівня.

3. Обсяг заявки. При періодичному поповненні та випадковому забезпеченні заявок їхній обсяг може залежати від стану запасу в момент їх надходження. Заявка, як правило, подається на один і той самий обсяг запасу при досягненні ним заданого рівня— так званої **точки замовлення**.

4. Час поповнення запасу. В ідеалізованих моделях управління запасами припускається, що обслуговування заявки на поповнення на складі відбувається миттєво. В інших моделях розглядаються випадки затримки поповнення запасу, які відбуваються у фіксовані або випадкові моменти часу.

5. Вартість поставки. Як правило, припускається, що вартість кожної поставки має дві складові: 1) одноразові витрати, які не залежать від обсягу замовленої партії; 2) витрати, які залежать (в основному лінійно) від обсягу партії.

6. Витрати, пов'язані зі зберіганням запасу. У більшості моделей управління запасами вважають, що обсяг складу практично необмежений, а як контрольовану величину розглядають обсяг зберігання запасу. При цьому за зберігання кожної одиниці запасу за одиницю часу стягується повна плата.

7. Штраф за дефіцит. Будь-який склад створюється для того, щоб запобігти дефіциту певного типу виробів для обслуговуючої системи. Відсутність запасу в необхідний момент часу призводить до збитків, які пов'язані з простоєм обладнання, порушенням ритму виробництва і т. ін. Ці збитки надалі називатимемо штрафом за дефіцит.

8. Номенклатура запасу. У найпростіших випадках припускається, що на складі зберігається запас однотипних виробів. У складніших моделях розглядаються багато номенклатурні запаси.

9. Структура складських систем. Найґрунтовніше розроблено математичні моделі для поодиноких складів. Але на практиці трапляються і складніші структури: склади мають складну систему з різними періодами поповнення і часом доставляння виробів із можливим обміном між складами одного ієрархічного рівня.

Як критерій ефективності стратегії управління запасами вибирається функція витрат, що являє собою сумарні витрати за зберігання і доставляння виробів запасу (зокрема й витрати, пов'язані із псуванням продукту зберігання, його моральне старіння тощо) та витрати на штрафи.

Управління запасами полягає в тому, щоб вибрати таку стратегію поповнення і витрачання запасу, за якої функція витрат набуває мінімального значення.

Розглянемо найпростішу модель управління запасами.

Нехай $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ — функції відповідно поповнення, збуту (витрати) та попиту продукції запасу за період часу $[0, t]$.

У моделях управління запасами використовуються похідні від цих функцій $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, які називають відповідно ***інтенсивностями*** поповнення, збуту та попиту.

Якщо функції $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, а отже, і їхні похідні $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ є не випадковими, то модель управління запасами детермінована. А якщо хоча б одна із функцій випадкова, то модель управління запасами є **стохастичною**. У разі, коли всі параметри моделі не залежать від часу, вона називається **статичною**. У протилежному разі — **динамічною**.

Статичні моделі використовуються тоді, коли приймаються одноразові рішення щодо рівня запасів на певний період часу, а динамічні — у разі прийняття послідовних рішень щодо рівня запасів або коригування раніше прийнятих рішень з урахуванням змін, які відбуваються.

Рівень запасу в момент часу t визначається основним рівнянням запасів:

$$Q(t) = Q_0 + F_1(t) - F_2(t). \tag{11.2}$$

Це рівняння часто записується в інтегральній формі:

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t f_1(t)\,dt - \int_0^t f_2(t)\,dt. \tag{11.3}$$

Приклад 1. Інтенсивність надходження однотипних деталей до комп'ютерів на склад готової продукції від цеху становить у середньому 10 дет./хв і протягом першої години роботи лінійно збільшується до 25 дет./хв, а надалі лишається незмінною. Припускаємо, що надходження деталей від цеху до складу здійснюється безперервно протягом семи годин робочої зміни, а зі складу деталі вивозять за замовленнями лише наприкінці роботи.

1. Записати математичний вираз для рівня запасу однотипних деталей до комп'ютерів у довільні моменти часу.

2. Використовуючи цей вираз, знайти кількість деталей на складі: а) через 45 хв; б) наприкінці зміни.

Розв'язання. За умовою задачі маємо $Q_0 = 0$, $f_3(t) = 0$ (деталі вивозять зі складу наприкінці роботи), $f_1(1) = 10,\ \ f_1(60) = 25.$

$f_1(t) = kt + b,$ то

$$\begin{cases} 10 = k + b, \\ 25 = 60k + b \end{cases} \Rightarrow k = \frac{15}{59},\ \ b = \frac{575}{59};\ \ f_1(t) = \frac{5}{59}\,(3t + 115).$$

Використовуючи (13.3), дістаємо:

$$Q(t) = \int_0^t f_1(t)\,dt = \frac{5}{59}\int_0^t (3t + 115)\,dt = \frac{15}{118}\,t^2 + \frac{575}{59}\,t.$$

Отже, якщо $0 \le t \le 60$, то

$$Q(t) = \frac{15}{118}\,t^2 + \frac{575}{59}\,t.$$

Для $0 \le t \le 420$ (робоча зміна триває 7 год = 420 хв).

$$Q(t) = \frac{5}{59}\int_0^{60} (3t + 115)\,dt + \int_{60}^t 25\,dt = 25t - 458.$$

Таким чином, дістаємо

$$Q(t) = 25t - 458.$$

Кількість деталей, які надійдуть до складу:

а) через 45 хв (на проміжку часу $0 \le t \le 60$)

$$Q(t) = \frac{15}{118}\,t^2 + \frac{575}{59}\,t \Rightarrow Q(45) = \frac{15}{118}\cdot(45)^2 + \frac{575}{59}\cdot 45 \approx 697 \text{ дет.};$$

б) наприкінці зміни

$$Q(t) = 25t - 458 \Rightarrow Q(420) = 25 \cdot 420 - 458 = 10\ 042 \text{ дет.}$$

11.2. Статична детермінована модель управління запасами за відсутності дефіциту

Припущення про відсутність дефіциту в моделі означає повне забезпечення попиту на продукт, який перебуває в запасі, тобто функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ збігаються $(f_1(t) = f_2(t))$.

Нехай загальна кількість продукту, який перебуває на складі за проміжок часу $[0, T^*]$, дорівнює N. Розглянемо найпростішу модель управління запасами, в якій припускається, що збут запасу відбувається безперервно зі сталою інтенсивністю:

$$f_2(t) = f_2 = \text{const}. \tag{11.4}$$

Цю інтенсивність можна визначити діленням загальної кількості продукту, що перебуває в запасі на складі N, на час, протягом якого він збувається згідно з надходженням заявок на цей продукт:

$$f_2 = \frac{N}{T^*}. \tag{11.5}$$

Поповнення запасу на складі, де зберігається необхідна продукція, відбувається партіями однакового обсягу.

Отже, функція $f_1(t)$ (поповнення запасу) не є неперервною. Її можна подати так:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t \neq t_i, \\ n, & t = t_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \end{cases} \tag{11.6}$$

де t_i — моменти часу, в які відбувається миттєве поповнення запасів; n — обсяг партії.

З урахуванням того, що інтенсивність збуту запасу є сталою величиною ($f_2 = \text{const}$), усю партію продукту буде використано за час

$$T = \frac{n}{f_2}. \tag{11.7}$$

Якщо відлік часу розпочати з моменту першої поставки партії, то рівень запасу в початковий момент часу ($t = 0$) $Q(0)$ дорівнюватиме обсягу цієї партії:

$$Q(0) = n.$$

Графічно рівень запасу продукції на складі залежно від часу t наведено на рис. 11.2.

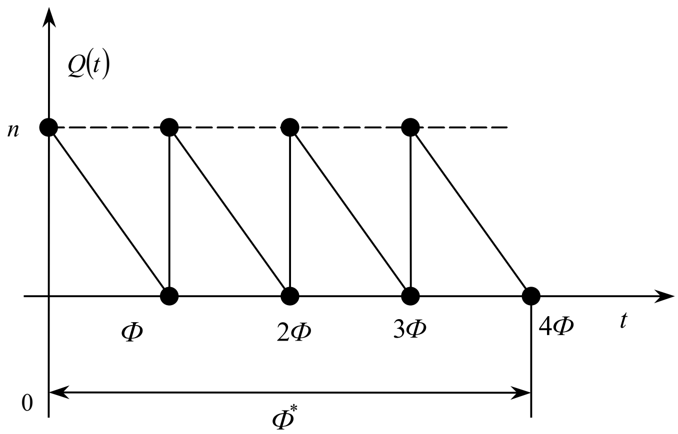


Рис. 11.2

На часовому проміжку $[0, T]$ рівень запасу $Q(t)$ зменшується по прямій

$$Q(t) = n - f_2(t) \cdot t \tag{11.8}$$

від значення $Q(0) = n$ до $Q(T) = 0$.

У розглядуваній моделі дефіцит відсутній, тож у моменти часу $t_i = T, 2T, 3T, \ldots$ рівень запасу продукції на складі миттєво поповнюється до попереднього значення за рахунок надходження партії згідно з поданою заявкою.

Процес зміни функції $Q(t)$ повторюється на кожному часовому проміжку протяжністю T.

Отже, ***сутність задачі управління запасами*** полягає в тому, щоб визначити такий обсяг партії продукції n, при якому сумарні витрати на створення і зберігання запасу були б мінімальними.

Позначимо сумарні витрати через S, витрати на створення запасу — через S_1, а витрати, пов'язані зі зберіганням продукції запасу на складі, — через S_2, тоді дістанемо

$$S = S_1 + S_2. \tag{11.9}$$

Потрібно визначити значення S_1, S_2 за проміжок часу T.

Позначимо витрати, пов'язані з доставлянням (поповнення запасу) однієї партії продукції до складу (незалежно від її обсягу), через I_1, а витрати на зберігання одиниці продукції з одиницю часу — через I_2.

Оскільки за час T^* необхідно мати запас в N одиниць продукції, яка постачається партіями обсягом n одиниць, то кількість K таких партій визначається так:

$$K = \frac{N}{n} = \frac{T^*}{T}. \tag{11.10}$$

Таким чином, за проміжок часу T^* витрати, пов'язані з доставлянням продукції, визначаються за формулою:

$$S_1 = I_1 K = I_1 \frac{N}{n}. \tag{11.11}$$

Визначимо витрати, пов'язані зі збереженням запасу продукції.

У момент часу t

$$S_2 = I_2 Q(t).$$

А за весь проміжок часу $[0, T]$ ці витрати становитимуть:

$$S_2 = I_2 \int_0^{\mathrm{T}} Q(t)\, dt = I_2 \int_0^{\mathrm{T}} (n - f_2 t)\, dt = I_2 \int_0^{\mathrm{T}} \left(n - \frac{n}{\mathrm{T}} t\right) dt = I_2 \left(nt - \frac{nt^2}{2\mathrm{T}}\right)\Bigg|_0^T =$$

$$= I_2 \left(n\mathrm{T} - \frac{nT^2}{2T}\right) = I_2 \left(nT - \frac{nT}{2}\right) = \frac{I_2 nT}{2}.$$

Таким чином, дістаємо:

$$S_2 = I_2 \frac{nT}{2}. \tag{11.12}$$

Бачимо, що середній запас продукції на складі за проміжок часу $[0, T]$ становить: $\frac{nT}{2}$.

Отже, витрати на зберігання всього запасу при лінійному (за часом) його збуті дорівнює витратам за зберігання його середнього запасу. Урахувавши періодичність функції $Q(t)$ (за час T^* відбувається $K = \frac{N}{n}$ сплесків (зубців) функції $Q(t)$), дістанемо витрати на зберігання продукції запасу на складі

$$S_2 = I_2 \frac{nT}{2} K = I_2 \frac{nT}{2} \frac{N}{n} = I_2 \frac{TN}{2} = I_2 \frac{T^* n}{2}.$$

Отже, маємо

$$S_2 = I_2 \frac{T^* n}{2}. \tag{11.13}$$

З урахуванням (11.12), (11.13) сумарні витрати за проміжок часу T^* визначаємо так:

$$S = \frac{I_1 N}{n} + I_2 \frac{T^* n}{2}. \tag{11.14}$$

Графік залежності сумарних витрат від обсягу партії n наведено на рис. 11.3.

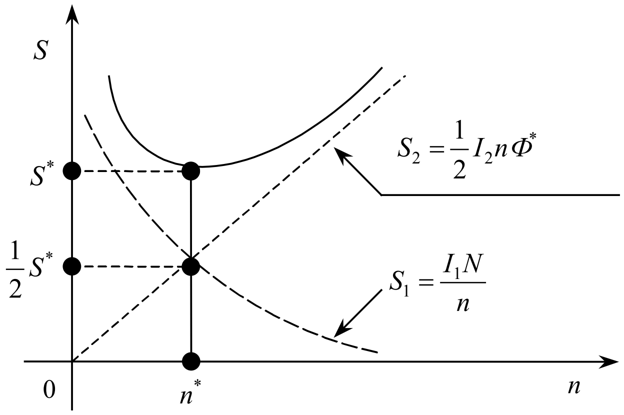


Рис. 11.3

Таким чином, сумарні витрати S є функцією від обсягу партії n:

$$S(n) = \frac{I_1 N}{n} + I_2 \frac{T^* n}{2}. \tag{11.15}$$

Для відшукання обсягу вибірки, при якому сумарні витрати будуть мінімальними, необхідно $S(n)$ дослідити на екстремум:

$$\frac{d\,S(n)}{d\,n} = \frac{d}{d\,n}\left(\frac{I_1 N}{n} + I_2 \frac{T^* n}{2}\right) = -\frac{I_1 N}{n^2} + I_2 \frac{T^*}{2} = 0.$$

Звідси дістанемо формулу для обчислення оптимального обсягу партії:

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2 I_1 N}{I_2 T^*}}. \tag{11.16}$$

Узявши до уваги (8.5), подамо формулу у вигляді

$$n_0 = \sqrt{\frac{2 I_1 \cdot f_2}{I_2}}. \tag{11.17}$$

Визначаємо добуток вартостей S_1 і S_2:

$$S_1 S_2 = 0{,}5\, I_1 I_2 N T^*. \tag{11.18}$$

Отже, добуток $S_1\, S_2$ не залежить від обсягу партії n. У цьому разі сума вартостей ($S_1 + S_2$) набуває найменшого значення за умови

$$S_1 = S_2 \tag{11.19}$$

або

$$\frac{I_1 N}{n} = I_2 \frac{T^*}{2}. \tag{11.20}$$

Рівності (11.19), (11.20) дають підстави стверджувати, що мінімум загальних витрат задачі управління запасами досягається лише тоді, коли витрати на створення запасу дорівнюють витратам на зберігання цього запасу. При цьому мінімальна загальна сума витрат

$$S_{\min}(n_0) = \frac{2I_1 N}{n_0}. \tag{11.21}$$

З урахуванням (11.5) і (11.6) запишемо (8.21) у такому вигляді:

$$S_{\min}(n_0) = \sqrt{2 I_1 I_2 T^* N}, \tag{11.22}$$

або

$$S_{\min}(n_0) = T^* \sqrt{2 I_1 I_2 f_2}. \tag{11.23}$$

Кількість K_0 оптимальних партій за проміжок $[0, T^*]$ з огляду на (11.5), (11.10) і (11.16) становить:

$$K_0 = \frac{N}{n_0} = N\sqrt{\frac{I_2 T^*}{2 I_1 N}} = \sqrt{\frac{I_2 T^* N}{2 I_1}} = \sqrt{\frac{I_2 T^* f_2 T^2}{2 I_1}} = T^* \sqrt{\frac{I_2 f_2}{2 I_1}}.$$

Таким чином, дістаємо:

$$K_0 = T^* \sqrt{\frac{I_2 f_2}{2 I_1}}. \tag{11.24}$$

Оптимальний час збуту Φ_0 партії n_0 визначається так:

$$T_0^* = \frac{n_0}{f_2} = n_0 \frac{T^*}{N} = \sqrt{\frac{2I_1 N}{I_2 T^*}} \frac{T^*}{N} = \sqrt{\frac{2I_1 T^*}{I_2 N}} = \sqrt{\frac{2I_1}{I_2 f_2}}.$$

Отже, маємо

$$T_0^* = \sqrt{\frac{2I_1}{I_2 f_2}}. \tag{11.25}$$

Приклад 2. Потреба в деталях певного типу для монтажу вузлів комбайна нової серії становить 500 000 деталей на рік. Ці деталі використовуються в процесі виробництва рівномірно і безперервно. Заявки на постачання деталей підприємство подає один раз на рік, причому постачання відбувається партіями однакового обсягу, який засвідчується в заявці. Зберігання однієї деталі на складі протягом доби коштує 1 євро, а поставлення партії деталей до підприємства — 20 000 євро. Дефіцит деталей на підприємстві під час роботи не припускається.

1. Визначити найбільш економний обсяг партії.
2. Визначити оптимальний інтервал між поставками, які необхідно засвідчити в заявці.

При цьому слід узяти до уваги, що постачальник деталей здійснює поставки партії без затримки.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі необхідно визначити n_0, T_0, якщо відома така інформація: T^* = 1 рік = 365 днів, N = 500 000 деталей, I_1 = 200 000 євро, I_2 = 1 євро.

1. Використовуючи формулу (8.17), дістаємо:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2I_1 \cdot N}{I_2 \cdot \mathrm{T}^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\ 000 \cdot 500\ 000}{1 \cdot 365}} = 7\,402 \text{ дет.}$$

2. Для визначення T_0 використаємо формулу

$$T_0 = \frac{n_0}{f_2} = n_0 \frac{T^*}{N} = 7\,402 \cdot \frac{365}{500\ 000} = 5 \text{ днів.}$$

Отже, найбільш економічний обсяг партії дорівнює 7402 деталі, а оптимальний час поставлення дорівнює 5 днів.

11.3. Статична детермінована модель управління запасами із дефіцитом

У моделях такого типу припускається наявність дефіциту. А це означає, що при нульовому значенні продукції на складах, де зберігається її запас, тобто при $Q(t)=0$, попит залишається з цією інтенсивністю: $f_3(t)=f_3$ $(f_3=\mathrm{const})$, але споживати запас продукції неможливо, оскільки $f_2(t)=0$. Через це виникає ситуація дефіциту, який зростатиме з інтенсивністю f_2.

Графік зміни рівня запасу в цьому разі наведено на рис. 11.4, де кожний період T поділяється на два числові інтервали:

$$T=T_1+T_2. \tag{11.26}$$

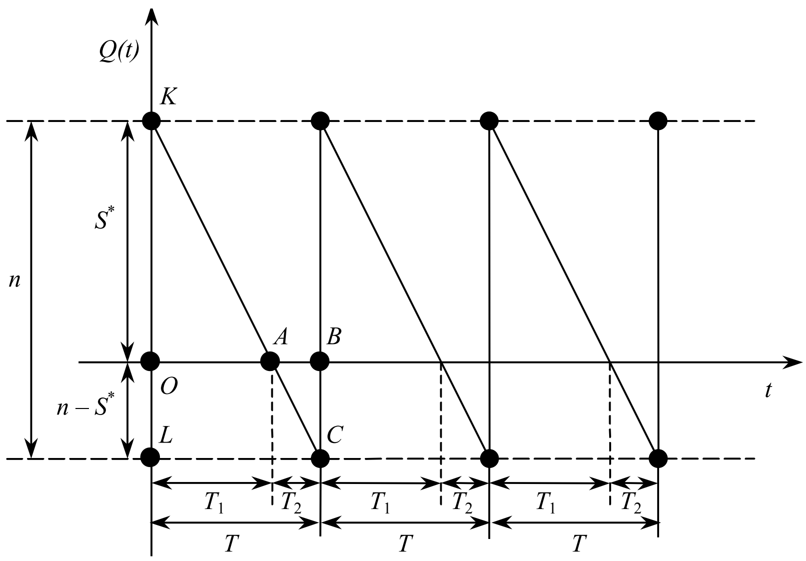


Рис. 11.4

Тут T_1 — час, протягом якого здійснюється споживання продукції запасу; T_2 — час, коли запас відсутній і при цьому зростає дефіцит, який буде «ліквідовано» в момент надходження партії необхідної продукції; S^* — максимальний рівень запасу продукції на складі; $(n-S^*)$ — обсяг дефіциту.

Заштрихований трикутник АВС (як і решта подібних до нього трикутників) унаочнює нагромадження заявок на партії необхідної продукції. Через наявність дефіциту в мить надходження кожної партії продукції максимальний рівень запасу S^* уже не дорівнює її обсягу n, а менший на значення дефіциту ($n-S^*$), що нагромадився за час T_2. Розглядаючи подібність трикутників (див. рис. 11.4): Δ *KCL* ~ Δ *KAO*, Δ *KCL* ~ Δ *CBA*, визначаємо інтервали часу T_1 і T_2:

$$\frac{KL}{OK}=\frac{OB}{OA}\Rightarrow\frac{n}{S^*}=\frac{T}{T_1}\Rightarrow T_1=\frac{S^*}{n}T; \tag{11.27}$$

$$\frac{KL}{BC}=\frac{OB}{AB}\Rightarrow\frac{n}{n-S^*}=\frac{T}{T_2}\Rightarrow T_2=\frac{n-S^*}{n}T. \tag{11.28}$$

У цій моделі функція сумарних витрат

$$S=S_1+S_2+S_3. \tag{11.29}$$

Тут S_1 — витрати, пов’язані з поповненням запасу, як і для моделі без дефіциту, визначається за формулою (11.11);

S_2 — витрати на зберігання продукції на складі.

У разі лінійної функції збуту значення S_2 дорівнює витратам на зберігання середнього запасу, який за час T_1 становитиме:

$$\frac{S^* T_1}{2}.$$

А тому згідно з (11.11), (11.13) і (11.27) ці витрати будуть такі:

$$S_2 = \frac{I_2 S^* \ T_1}{2} = \frac{I_2 S^* S^* T}{2} \frac{T^*}{T} = \frac{I_2 (S^*)^2 T^*}{2n}.$$

Отже, маємо

$$S_2 = \frac{I_2 (S^*)^2 T^*}{2n}. \tag{11.30}$$

S_3 — витрати, пов'язані зі штрафами, викликаними дефіцитом.

Для визначення S_3 припускаємо, що штраф за дефіцит кожної одиниці продукції становить I_3 за одиницю часу. Оскільки середній рівень дефіциту за період часу T_2 дорівнює

$$\frac{(n - S^*) T_2}{2},$$

то штраф за цей період становитиме

$$\frac{1}{2} I_3 \ (n - S^*) \ T_2,$$

а за весь період T^* з урахуванням (11.28)

$$S_3 = \frac{1}{2} \ I_3 (n - S^*) T_2 K = \frac{1}{2} \ I_3 (n - S^*) \frac{n - S}{n} T \frac{T^*}{T} = \frac{I_3 T^* (n - S^*)^2}{2n}.$$

Таким чином, дістаємо:

$$S_3 = \frac{I_3 T^* (n - S^*)^2}{2n}. \tag{11.31}$$

Тоді згідно з (11.12), (11.24) і (11.31) сумарні витрати

$$S = I_3 \frac{N}{n} + I_2 \frac{T^* (S^*)^2}{2n} + I_3 \frac{T^* (n - S^*)^2}{2n}. \tag{11.32}$$

При $n = S$ формула сумарних витрат із дефіцитом (11.32) збігається з формулою (11.15) для моделі без дефіциту.

Задача управління запасами для моделі з дефіцитом зводиться до визначення такого обсягу партії n_0 і максимального рівня запасу S_0, при яких функція сумарних витрат S набуває мінімального значення. Для цього функцію сумарних витрат

$$S(n, S^*) = I_3 \frac{N}{n} + I_2 \frac{T^* S^2}{2n} + I_3 \frac{T^* (n - S)^2}{2n},$$

як функцію двох аргументів n і S^*, необхідно дослідити на екстремум:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(n, S^*)}{\partial n} = -2 I_1 N - I_2 T^* (S^*)^2 + I_3 T^* (n^2 - I^2) = 0, \\ \dfrac{\partial S(n, S^*)}{\partial S^*} = I_2 T^* S^* - I_3 \cdot T^* (n - S^*) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_3 n^2 - (I_2 + I_3)(S^*)^2 = 2 I_1 \dfrac{N}{T^*}, \\ (I_2 + I_3) S^* - I_3 n = 0. \end{cases} \tag{11.33}$$

Із другого рівняння системи (8.33) визначимо

$$S^* = n\frac{I_3}{I_2 + I_3} \qquad (11.34)$$

і підставимо вираз для S у перше рівняння системи (11.33). Дістанемо:

$$I_3 n^2 - \left(I_2 + I_3\right) n^2 \frac{I_3^2}{(I_2 + I_3)^2} = 2I_1 \frac{N}{T^*} \Rightarrow n^2 \left(I_3 - \frac{I_3^2}{I_2 + I_3} \right) = 2I_1 \frac{N}{T^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 \frac{I_2 I_3 + I_3^2 - I_3^2}{I_2 + I_3} = 2I_1 \frac{N}{T^*} \Rightarrow n^2 \frac{I_2 I_3}{I_2 + I_3} = 2I_1 \frac{N}{T^*} \Rightarrow n^2 = \frac{2I_1(I_2 + I_3)}{I_2 I_3} \frac{N}{T^*}.$$

Оскільки $\frac{N}{T^*} = f_2$, то

$$n^2 = \frac{2I_1(I_2 + I_3)}{I_2 I_3} f_2 = \frac{2I_1 f_2}{I_2} \frac{I_2 + I_3}{I_3}.$$

Таким чином, маємо:

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{2I_1 f_2}{I_2}} \sqrt{\frac{I_2 + I_3}{I_3}}. \qquad (11.35)$$

Величину

$$\rho = \frac{I_3}{I_2 + I_3} \qquad (11.36)$$

називають ***щільністю збитків***, завданих через незадоволення попиту. Ця величина відіграє значну роль в управлінні запасами. Слід при цьому наголосити, що значення ρ задовольняє такі нерівності:

$$0 \le \rho \le 1. \qquad (11.37)$$

Якщо значення I_3 значно менше порівняно з I_2, то ρ близьке до нуля, а коли I_3 значно перевищує I_2, то ρ близьке до одиниці.

Відсутність дефіциту рівносильна тому, що $I_3 \to \infty$, або $\rho \to 1$.

Тепер згідно з (11.36) оптимальний обсяг вибірки набирає такого вигляду:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2I_1 f_2}{I_2 \rho}}. \qquad (11.38)$$

Максимальний рівень запасу S_0 визначатиметься згідно з (11.34) і (13.36) за формулою:

$$S_0 = n_0 \rho, \qquad (11.39)$$

звідки

$$\rho = \frac{S_0}{n_0}. \qquad (11.40)$$

Слід при цьому наголосити, що для оптимального управління запасами, коли $n = n_0$, $S^* = S_0$, із формул (11.27), (11.28) маємо:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{S_0}{n_0} = \rho, \qquad (11.41)$$

$$\frac{T_2}{T} = \frac{n_0 - S_0}{n_0} = 1 - \frac{S_0}{n_0} = 1 - \rho. \qquad (11.42)$$

Тому твердження про те, що щільність збитків, до яких призводить незадоволення попиту, дорівнює ρ, означає, що частка часу, протягом якого запас продукції дорівнюватиме нулю, становить $(1-\rho)100\,\%$ від певного періоду T.

Порівнюючи оптимальні обсяги партії без дефіциту і з дефіцитом, що подаються відповідно виразами

$$n_0^* = \sqrt{\frac{2I_1 f_2}{I_2}};\; n_0 = \sqrt{\frac{2I_1 f_2}{I_2 \rho}},$$

бачимо, що вони між собою пов'язані таким співвідношенням:

$$n_0 = \frac{n_0^*}{\sqrt{\rho}}. \quad (11.43)$$

Із (11.43) випливає, що оптимальний обсяг партії з дефіцитом завжди в $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ раз більший, ніж для моделі без дефіциту. При цьому інтервал між поставками:

$$T_0 = \frac{n_0}{f_2} = \frac{1}{f_2}\sqrt{\frac{2I_1 f_2}{I_2 \rho}} = \sqrt{\frac{2I_1}{I_2 f_2 \rho}}.$$

Позначивши інтервал між поставками для моделі без дефіциту

$$T_0^* = \sqrt{\frac{2I_1}{I_2 f_2}},$$

дістанемо

$$T_0 = \frac{T_0^*}{\sqrt{\rho}}, \qquad (11.44)$$

тобто для моделі з дефіцитом інтервал між поставками буде в $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ раз більшим за інтервал для моделі без дефіциту.

Приклад 3. Використовуючи умову прикладу 2, визначити n_0 і T_0, якщо ситуація виникнення дефіциту є неприпустимою і при цьому відомо, що відсутність під час монтажу вузлів кожної деталі завдає за добу збитків у розмірі 4 євро.

Розв'язання. Використаємо здобуті результати прикладу 1: n_0^* = 7402 дет., T_0^* = 5 днів. Оскільки I_3 = 4 євро і при цьому відомі значення I_1 = 90 000 євро, I_2 = 1 євро, знаходимо щільність збитків:

$$\rho = \frac{I_3}{I_2 + I_3} = \frac{4}{1+4} = 0{,}8.$$

Це означає, що впродовж $(1-\rho)\cdot 100\,\% = (1-0{,}8)\cdot 100\,\% = 20\,\%$ часу між поставками на виробничій лінії з монтажу вузлів будуть відсутні необхідні деталі.

Оптимальний обсяг партії визначаємо за формулою:

$$n_0 = \frac{n_0^*}{\sqrt{\rho}} = \frac{7402}{\sqrt{0{,}8}} \approx 8290. \qquad (11.45)$$

Інтервал між поставками обчислюємо за формулою:

$$T_0 = \frac{T_0^*}{\sqrt{\rho}} = \frac{5}{\sqrt{0{,}8}} \approx 5{,}59 = 5{,}6 \text{ днів}.$$

Як бачимо, значення n_0 і T_0 збільшилися в $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ раз порівняно зі значеннями цих самих величин для моделі без дефіциту.

11.4. Детермінована модель виробничих поставок

У попередніх детермінованих моделях припускалося, що надходження продукції до складу відбувається миттєво. У цій моделі розглядається така ситуація, коли продукція надходить до складу безпосередньо з виробничої лінії, а тому її доставляння до місця зберігання вже не буде миттєвим, а змінюватиметься за лінійним законом. У такому разі кількість продукції, що надходить до складу, визначатиметься швидкістю p виробництва цієї продукції, яка дорівнює кількості продукції, що її виробляє виробнича лінія за рік.

За кожний цикл зміни запасу на склад надходить n одиниць продукції. Протягом року інтенсивність попиту на цю продукцію $f_3(t)$ є сталою величиною:

$$f_3(t) = f_3 = \text{const}.$$

Тільки-но рівень запасу впаде до нуля, із виробничої лінії почне надходити на склад наступна кількість продукції.

Швидкість поповнення запасу за період часу поставляння дорівнює $p - f_3$ і є сталою величиною.

Графік зміни запасу згідно з наведеними щойно умовами подано на рис. 11.5.

Сумарні витрати

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

де S_1 — витрати на створення запасу, що визначаються за формулою (11.12); S_2 — витрати, пов'язані зі зберіганням продукції на складі; S_3 — витрати, пов'язані з доставлянням продукції до складу.

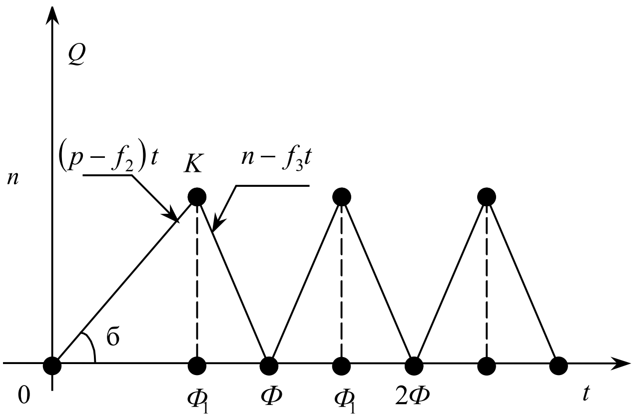


Рис. 11.5

Для визначення S_2 і S_3 необхідно знайти T_1.

Маємо:

$$\frac{n}{T_1} = \operatorname{tg}\alpha = p - f_3 \Rightarrow T_1 = \frac{n}{p - f_3}. \qquad (11.46)$$

Рівняння прямої ОК

$Q_1 = (p - f_3)t$,

а прямої КТ

$Q_2 = n - f_2 t$.

За аналогією з попередніми викладками дістаємо:

$$S_2 = I_2\left[\int_0^{\frac{n}{p-f_3}} (p - f_3)t\,dt + \int_{\frac{n}{p-f_3}}^{0} (n - f_2 t)\,dt + \right]K = I_2\left[(p - f_3)\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{n}{p-f_3}} + nt\Bigg|_{\frac{n}{p-f_3}}^{T} - f_2\frac{t^2}{2}\Bigg|_{\frac{n}{p-f_3}}^{T}\right]\frac{N}{n} =$$

$$= I_2\left[(p - f_3)\frac{n^2}{2(p - f_3)^2} + nT - \frac{n^2}{p - f_3} - \frac{f_2 T^2}{2n} + \frac{f_2 n^2}{2(p - f_3)^2}\right]\frac{N}{n} =$$

$$=I_2N\left[\frac{n}{2(p-f_3)}+T-\frac{n}{p-f_3}-\frac{f_2T^2}{2n}+\frac{f_2\,n}{2(p-f_3)^2}\right]=$$

$$=I_2N\left[\frac{n}{2(p-f_3)}+\frac{n}{f_2}-\frac{n}{p-f_3}-\frac{f_2n^2}{2n\,f_2^2}+\frac{f_2\,n}{2(p-f_3)^2}\right]=I_2N\left[\frac{n}{f_2}-\frac{n}{2(p-f_3)}-\frac{n}{2f_2}+\frac{f_2\,n}{2(p-f_3)^2}\right]=$$

$$=I_2N\left[\frac{n}{2f_2}-\frac{n}{2\,(p-f_3)}+\frac{f_2\,n}{2(p-f_3)^2}\right]=\frac{I_2\,N\,n}{2}\left[\frac{1}{f_2}-\frac{1}{p-f_3}+\frac{f_2}{(p-f_3)^2}\right]=$$

$$=\frac{I_2\,N\,n}{2\,f_2\,(p-f_3)^2}\left[(p-f_3)^2-f_2\,(p-f_3)^2+f_2^2\right].$$

Отже,

$$S_2=\frac{I_2\,N\,n}{2\,f_2\,(p-f_3)^2}\left[(p-f_3)^2-f_2\,(p-f_3)^2+f_2^2\right]. \qquad (11.47)$$

$$S_3=I_3\int\limits_0^{\frac{n}{p-f_3}}(p-f_3)t\;dtK=I_3\,\frac{N}{n}\int\limits_0^{\frac{n}{p-f_3}}(p-f_3)t\;dt=$$

$$=I_3\,\frac{N}{n}(p-f_3)\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{n}{p-f_3}}=I_3\,\frac{N}{n}(p-f_3)\frac{n^2}{(p-f_3)^2}=I_3N\,\frac{n}{p-f_3}.$$

Отже,

$$S_3=I_3\,\frac{Nn}{p-f_3}. \qquad (11.48)$$

Тоді загальні витрати

$$S=I_3\,\frac{N}{n}+I_2\,\frac{Nn}{2\,f_2(p-f_3)^2}[(p-f_3)^2-f_2(p-f_3)+f_2^2]+I_3\,\frac{N\,n}{(p-f_3)}. \qquad (11.49)$$

Для визначення оптимального обсягу партії n_0 необхідно функцію загальних витрат $S(n)$ дослідити на екстремум:

$$\frac{d\,S}{d\,n}=-I_3\,\frac{N}{n^2}+\frac{I_2Nn}{2\,f_2(p-f_3)^2}[(p-f_3)^2-f_2(p-f_3)+f_2^2]+\frac{I_3\,Nn}{(p-f_3)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=n_0=\sqrt{\frac{2\,I_1\,f_2(p-f_3)^2}{I_2[(p-f_3)^2-f_2(p-f_3)+f_2^2]+2\,I_3\,f_2(p-f_3)}}. \qquad (11.50)$$

Протяжність циклу

$$T_0^*=\frac{n_0}{f_2}=\sqrt{\frac{2\,I_1\,(p-f_3)^2}{f_2\,[I_2\cdot[(p-f_3)^2-f_2(p-f_3)+f_2^2]+2\,I_3\,f_2(p-f_3)]}}. \qquad (11.51)$$

Приклад 4. Попит на продукцію певного типу становить 2500 одиниць за рік, яка надходить рівномірно і безпосередньо зі складу. Витрати, пов'язані зі створенням запасу, зберіганням і доставлянням продукції, дорівнюють відповідно I_1 = 500 євро за партію, I_2 = 0,1 євро за одиницю продукції упродовж доби, I_3 = 0,5 євро за партію.

Запаси на складі поповнюються з виробничої лінії, яка працює зі швидкістю 5000 одиниць продукції за рік. Постачання від виробничої лінії починається в ту мить, коли рівень запасу на складі дорівнює нулю і триває доти, доки буде вироблено n одиниць продукції.

Визначити:

1) оптимальний обсяг партії n_0;

2) час, протягом якого здійснюється поставляння цієї партії T_0^*.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: f_3 = 2500; p = 5000; N = 5000; T^* = 365 днів (1 рік); I_1 = 500 євро; I_2 = 0,1 євро; I_3 = 0,5 євро.

Визначаємо

$$f_2 = \frac{N}{T^*} = \frac{5000}{365} = 13{,}7.$$

Використовуючи формулу (11.50), дістаємо:

$$n_0 = \sqrt{\frac{2 I_1 f_2 (p - f_3)^2}{I_2 \cdot [(p - f_3)^2 - f_2 (p - f_3) + f_2^2] + 2 I_3 f_2 (p - f_3)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 13{,}7 \cdot (5000 - 2500)^2}{\begin{array}{c}0{,}1 \cdot [(5000 - 2500)^2 - 13{,}7 \cdot (5000 - 2500) + (13{,}7)^2] + \\ + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 13{,}7 \cdot (5000 - 2500)\end{array}}} = \sqrt{\frac{85\,625\,000\,000}{6\,217\,037{,}69}} \approx 117 \text{ дет.}$$

Тривалість циклу

$$T_0^* = \frac{n_0}{f_2} = \frac{117}{13{,}7} = 8 \text{ днів.}$$

Отже, оптимальний обсяг партії n_0 = 117 дет., а тривалість відповідного циклу T_0^* = 8 днів.

11.5. Стохастичні моделі управління запасами

Розглянемо стохастичну модель управління запасами, коли попит є випадковою величиною. Присутність елемента випадковості у процесі управління запасами суттєво впливає на структуру моделі й значно ускладнює її аналіз. Спинимося на моделях цього класу. Припустимо, що попит, який позначимо через x, на проміжку часу T є випадковою величиною $X = x$, для якої закон розподілу ймовірностей може бути заданим, зокрема для дискретної випадкової величини X — рядом розподілу:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	…	p_n

($\sum p_i = 1$), а для неперервної випадкової величини X зі щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ — функцією розподілу $F(x) = P(X < x)$.

Якщо попит x буде меншим від запасу продукції, яка перебуває на складі, то придбання потребує додаткових витрат I_2 на одиницю продукції, пов'язаних із її зберіганням та реалізацією в торговельній мережі.

А якщо $x > S$, то виникає ситуація дефіциту продукції і пов'язані з ним витрати на штраф у розмірі I_3 на одиницю продукції. У цьому разі функція загальних (сумарних) витрат $S(x)$ у стохастичній моделі буде випадковою величиною, а тому для неї необхідно визначити основну числову характеристику — математичне сподівання $M\ [S(x)]$.

Зокрема, для дискретного попиту

$$M\ [S(x)] = I_2 \sum_{i=0}^{S} (S - x_i) p_i + I_3 \sum_{i=S+1}^{\infty} (x_i - S) p_i, \tag{11.52}$$

де перший доданок суми враховує витрати, пов'язані з придбанням і зберіганням продукції, кількість якої становить $(S - x_i)$ одиниць, а другий доданок — штраф через дефіцит за $(x_i - S)$ одиниць продукції.

Для неперервного попиту

$$M\ [S(x)] = I_2 \int_0^S (S - x_i) f(x) dx + I_3 \int_S^{\infty} (x_i - S) f(x) dx. \tag{11.53}$$

Основна мета задачі управління запасами для стохастичної моделі — визначити такий запас $S = S_0$, при якому математичне сподівання (11.52), (11.53) набуває мінімального значення.

Доведено, що для дискретного випадку значення $M\ [S(x)]$ набуває мінімального значення при запасі $S = S_0$ і при цьому виконується нерівність

$$F(S_0) < \rho < F(S_0 + 1). \tag{11.54}$$

Для неперервного випадку значення S_0 можна визначити з рівності

$$F(S_0) = \rho, \tag{11.55}$$

що ілюструє рис. 11.6.

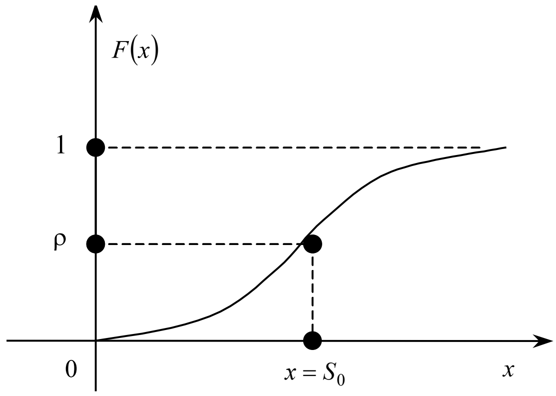


Рис. 11.6

Приклад 5. Підприємець придбав агрегат із запасними блоками до нього. Вартість одного блока становить 20 грн. Якщо агрегат під час експлуатації вийде з ладу внаслідок пошкодження блока і при цьому в запасі його не буде, то через несправність агрегату підприємець зазнає збитків у 400 грн.

Закон розподілу ймовірностей задано таблицею:

$X = x_i$ — кількість блоків, які можуть бути заміненими	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) = p_i$ — імовірність виникнення потреби в заміні блока	0,89	0,04	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01

Визначити оптимальну кількість запасних блоків, які варто придбати разом із агрегатом.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $I_2 = 20$ грн; $I_3 = 400$ грн.

Обчислимо щільність збитків, викликаних відсутністю запасних блоків:

$$\rho = \frac{I_3}{I_2 + I_3} = \frac{400}{20 + 400} = \frac{400}{420} \approx 0{,}952.$$

Знайдемо функцію розподілу

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}89, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}93, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}95, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}97, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}98, & 4 < x \le 5, \\ 0{,}99, & 5 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Як бачимо, оптимальний запас блоків до агрегату становить $S_0 = 3$, оскільки при цьому значенні S виконується нерівність

$$F(3) < 0{,}952 < F(4). \qquad (11.56)$$

Приклад 6. Використовуючи умову прикладу 5, визначити S_0 за умови, що попит $X = x$ є неперервною випадковою величиною, закон розподілу ймовірностей якої задано так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. У прикладі 5 було визначено $\rho = 0{,}952$. Використовуючи рівність (11.55), дістаємо:

$$1 - e^{-\lambda S_0} = \rho \Rightarrow S_0 = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\rho) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\lambda}\ln 20{,}833 = \frac{1}{\lambda}\cdot 3{,}035 .$$

Зокрема, при $\lambda = 1$ маємо $S_0 \approx 3$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що таке попит на продукцію і яким він може бути?
2. Що таке поповнення складу, обсяг заявки.
3. Що таке час поповнення запасу, вартість поставки.
4. Що таке витрати, пов'язані зі зберіганням запасів, штраф за дефіцит.
5. Поясніть номенклатура запасу, структура складських систем.
6. У чому полягає суть управління запасами?
7. Функції $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$. Яку інформацію містять ці функції?
8. Як визначається рівень запасу в момент часу t?
9. Функції $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. Яку інформацію містять ці функції?
10. Стохастична детермінована модель за відсутності дефіциту. Наведіть приклади.
11. Як визначаються сумарні витрати за період часу T для детермінованих моделей за відсутності дефіциту?
12. Чому дорівнює оптимальний обсяг партії n_0?
13. Чому дорівнює оптимальний час T_0?
14. Статична детермінована модель із дефіцитом. Наведіть приклади.
15. Як визначаються сумарні витрати для статичних детермінованих моделей за наявності дефіциту?
16. Щільність збитків ρ та її суть.
17. Формули визначення n_0, T_0 для статичних детермінованих моделей із дефіцитом.
18. Як визначаються сумарні витрати для випадку, коли існують витрати пов'язані із доставкою продукції до складу?
19. Формули для обчислення n_0, T_0 для випадку, коли продукція надходить до складу за певний проміжок часу (не миттєво).
20. Поняття про стохастичні моделі управління запасами.
21. Визначення S_0 для стохастичних моделей управління запасами.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Інтенсивність надходження деталей до складу протягом перших 30 хв змінюється за законом $f_1(t) = 0{,}1t + 5$, а далі до кінця зміни залишається сталою величиною.

Визначити кількість деталей, на складі: а) через 0,5 год; б) наприкінці зміни.

2. Інтенсивність надходження однотипних деталей до складу протягом перших 45 хв роботи цеху, де вони виготовляються, змінюється за законом $f_1(t) = 0{,}5t + 5$, а інтенсивність збуту готових деталей після перших 45 хв роботи змінюється за законом:

$$f_2(t) = n - 0{,}5t .$$

2.1. Визначити n.

2.2. Обчислити кількість деталей: а) після 20 хв роботи; б) наприкінці зміни.

3. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0,\\ 0{,}65, & 0 < x \le 1,\\ 0{,}7, & 1 < x \le 2,\\ 0{,}75, & 2 < x \le 3,\\ 0{,}8, & 3 < x \le 4,\\ 0{,}85, & 4 < x \le 5,\\ 0{,}9, & 5 < x \le 6,\\ 0{,}95, & 6 < x \le 7,\\ 1, & x > 7.\end{cases}$$

Визначити S_0, якщо $\rho = 0{,}839$.

4. Повсякденний попит на деякий вид продукції становить 100 одиниць. Витрати на придбання кожної партії цієї продукції дорівнюють 100 грн, а витрати на зберігання одиниці продукції — 5 грн за добу.

Визначити оптимальний обсяг n_0 партії та інтервал T_0 між поставками.

5. На складі запас виробів рівномірно витрачається протягом місяця. Витрати на зберігання одного виробу становить 10 грн за добу, а штраф за дефіцит одного виробу — 200 грн. Вивчення попиту дало такий розподіл кількості використаних виробів:

$X = x_i$ — попит	0	1	2	3	4	5
$P(x_i) = p_i$	0,15	0,25	0,3	0,15	0,1	0,05

Визначити n_0.

6. Підприємство виготовляє блоки для серійної марки телевізорів. Ці блоки використовує інше підприємством, де відбувається їх монтаж. У середньому воно потребує на рік 200 000 блоків, які витрачаються безперервно і рівномірно. Заявки на постачання блоків подаються заявки один раз у рік, причому блоки надходять партіями однакового обсягу. Зберігання одного блока на складі протягом доби коштує 0,5 грн, поставка партії — 5000 грн. Дефіцит блоків для монтажу телевізорів неприпустимий.

Визначити оптимальний обсяг партії.

7. Щоденний попит на деякий продукт дорівнює 400 одиниць. Витрати на придбання кожної партії цього продукту не залежать від її обсягу і дорівнюють 200 грн, а витрати на зберігання одиниці продукції — 0,1 грн за добу.

Визначити оптимальний обсяг партії та інтервал часу між поставками цих партій, якщо дефіцит є недопустимим.

8. Початковий запас певного виду продукції дорівнює 750 одиниць. Виробнича лінія щодня потребує 150 одиниць продукції, яка надходить зі складу безперервно і рівномірно. Як тільки на складі виникає ситуація дефіциту продукції, зі складу іншого підприємства надходить запас у кількості 750 одиниць. Побудувати графік зміни запасу протягом 15 днів.

РОЗДІЛ 12

МОДЕЛЮВАННЯ КОНФЛІКТНОСТІ У СОЦІО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМАХ. ІГРОВІ МОДЕЛІ

У результаті вивчення теми студент повинен:

- знати концептуальні положення теорії математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфліктності;
- знати основні поняття і категорії теорії ігор;
- знати класифікацію моделей теорії ігор;
- знати методи розв'язання задач теорії ігор;
- вміти грамотно будувати адекватні економіко-математичні моделі теорії ігор, розв'язувати конкретні прикладні задачі з використанням інформаційних технологій на базі ПЕОМ.

12.1. Гра як математична модель конфлікту. Основні поняття теорії ігор

Теорія ігор у наш час являє собою широко розгалужену й плідну за результатами математичну теорію. При дослідженні складних ситуацій у ній використовується апарат сучасної топології, функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь і т. ін.

Людська діяльність у науковій сфері здебільшого стикається із ситуаціями, коли для досягнення тієї чи тієї мети потрібно вибирати певні рішення. При цьому кожне рішення вибирається з деякої множини так, щоб воно було оптимальним з погляду досягнення поставленої мети (цілі).

Наукова постановка питання про вибір оптимальних рішень характерна для різних теоретичних і прикладних дисциплін — медицини, військової справи, економіки, техніки та ін.

З розвитком і математизацією цих дисциплін процеси прийняття рішень формалізуються і набирають форми математичних моделей.

Теорія математичних моделей щодо прийняття оптимальних рішень становить нині галузь науки — дослідження операцій. Особливе місце серед умов, за яких приймається те чи те рішення, посідає умова конфліктності, невіддільна від розвитку суспільства.

В умовах конфлікту суб'єкт, який приймає рішення, має брати до уваги не лише свої власні цілі, але й ті, які ставить перед собою його партнер-супротивник. При цьому цілі супротивника в загальному випадку йому наперед невідомі.

Зі сказаного випливає, що розділ «Дослідження операцій», який вивчає теорію математичних моделей з прийняття оптимальних рішень в умовах конфліктності, є специфічним і доволі складним і базується на ***теорії ігор***.

У рамках теорії ігор прийманні рішення є спрощеними і певною мірою ідеалізованими схемами реальних явищ. При цьому ступінь спрощення може досягти таких меж, за якими модель втрачає істотні риси модельованої ситуації.

Реалізацію математичної моделі конфліктної ситуації називають ***грою***. ***Конфліктними*** називають такі ситуації, в яких відбувається зіткнення інтересів двох (і більше) сторін (суб'єктів), які мають різні, часто протилежні цілі. При цьому виграш будь-якої зі сторін у результаті гри залежатиме від поводження протилежної сторони.

Приклади конфліктних ситуацій надзвичайно різноманітні. Скажімо, у сфері ринкової економіки це звичайна конкуренція — зіткнення протилежних інтересів. Конфліктні ситуації спостерігаються в судочинстві, у спортивних змаганнях і, безумовно, у військовій галузі при здійсненні військових операцій тощо. Отже, теорія ігор являє собою математичну теорію конфліктних ситуацій.

Теорія ігор має на меті дати учасникам гри рекомендації щодо поводження у конфліктних ситуаціях, що становлять основу будь-якої гри. На практиці кожна конфліктна ситуація має складну структуру, і її аналіз ускладнюється, як правило, численними неістотними чинниками, які часто є імовірнісними за своїм походженням. Тому, щоб виконати математичний аналіз конфлікту, будують деякий його образ — математичну модель. Гра відрізняється від реальної конфліктної ситуації тим, що вона здійснюється шляхом виконання певних правил.

Правила визначають права та обов'язки учасників гри, а також її наслідок — виграш чи програш кожного з них. Прикладами формалізованих моделей конфліктів можуть бути ігри в буквальному розумінні: гра в шахи чи шашки, спортивні ігри, такі як футбол, хокей тощо. Звідси й походить назва «теорія ігор» та її термінологія, а саме: сторони, що конфліктують, називають ***гравцями***; одну здійснену гру — ***партією***; результат гри, тобто її наслідок — ***виграшем*** (або ***програшем***), що має кількісний вираз. Наприклад, у разі гри у футбол двох команд кількісна оцінка, як відомо, така: виграш команди оцінюється числом 3, нічия — 1, програш — числом 0.

Ігри можуть бути ***парними*** і ***множинними***. У разі парної гри зіткнення інтересів відбувається між двома учасниками, а в разі множинної — між більш як двома учасниками. Учасники множинних ігор можуть утворювати коаліції. Тоді постає задача з виявлення найудаліших коаліцій і правил обміну інформацією між її учасниками.

Якщо утворено дві постійні коаліції, то гра перетворюється на ***парну***. Гру, яка здійснюється в часі, можна подати як послідовність ходів її учасників.

Ходом називають вибір гравцем однієї з передбачених правилами гри дій та її виконання.

Ходи гравців можуть бути невипадковими і випадковими. При невипадковому ході гравець свідомо вибирає і здійснює певний варіант дії. При випадковому ході вибір здійснюється не за волею гравця, а згідно з деяким механізмом випадкового вибору, наприклад підкидання монети, грального кубика тощо.

Ціллю гри є оптимізація поведінки гравця під час гри, тобто вибору ним своїх ходів. Такі ігри називають ***стратегічними***.

Стратегією гравця називають сукупність правил, які визначають вибір варіантів дій при кожному його особистому ході залежно від ситуації, що склалася.

Насправді під час гри гравець не дотримується жорстких правил, оскільки вибір стратегії відбувається у процесі гри, коли він має змогу безпосередньо спостерігати ситуацію.

Проте теоретично справа не зміниться, коли припустити, що будь-яке рішення (стратегію) гравець прийме заздалегідь. Стратегію можна задати у вигляді програми з реалізацією її на ЕОМ. Наприклад, проводять ігри в шахи, де одним із гравців є ЕОМ.

Залежно від кількості стратегій ігри поділяють на обмежені і необмежені. Гра називається ***обмеженою***, якщо в кожного гравця є обмежена кількість стратегій. У протилежному випадку ігри називають ***необмеженими.***

Існують ігри, які є обмеженими, але кількість стратегій у них така велика, що повністю їх перелічити практично неможливо. Це, скажімо, стосується гри в шахи.

Оптимальною називають таку стратегію гравця, яка забезпечує йому найкраще становище в певній грі, а саме — максимальний виграш.

Якщо гра повторюється неодноразово і містить окрім прогнозованих ще й випадкові ходи, то оптимальна стратегія забезпечує максимальний середній виграш. Тому завдання теорії ігор полягає в тому, щоб виявити оптимальні стратегії для кожного гравця (гравців), припускаючи, що суперник (суперники) по грі не менш розумний за нього й докладатиме всіх зусиль для досягнення своєї мети.

Для того щоб здійснити гру, тобто знайти розв'язок гри, необхідно для кожного гравця вибрати оптимальну стратегію, тобто один із гравців має одержати максимально можливий виграш, тоді як суперник, дотримуючись протилежної стратегії, намагатиметься мінімізувати свій програш у цій грі. При цьому оптимальні стратегії (виграш, мінімальний програш) мають відповідати умові стійкості, тобто кожному гравцеві має бути не вигідно відмовлятися від своєї стратегії у грі.

Гра називається ***грою з нульовою сумою***, якщо сума виграшів гравця (гравців) дорівнює сумі програшів гравця (гравців), тобто, кожний гравець виграє лише за рахунок іншого — того, хто програв.

Гра, як уже наголошувалось, називається ***парною***, якщо в ній беруть участь дві протилежні групи гравців або двоє гравців.

Парна гра з нульовою сумою називається ***антагоністичною***.

Теорія антагоністичних ігор є найбільш розробленою у теорії ігор і подає чіткі рекомендації кожному гравцеві.

Математична модель певної гри має, як правило, певні обмеження. Одним із найістотніших є припущення про однакову кмітливість суперників. А тому в реальному конфлікті сутність вибору оптимальної стратегії полягатиме в тому, щоб передбачити промахи, яких може припуститися суперник, і скористатися ними. Тому в теорії ігор поведінка гравця має бути дуже обережною.

12.2. Антагоністичні матричні ігри

Розглянемо найпростішу докладно розроблену в теорії ігор обмежену парну гру з нульовою сумою (антагоністична гра двох гравців або двох коаліцій). Оскільки в цьому разі у грі беруть участь два гравці, то позначимо умовно через I_A — першого гравця, а через I_B — другого, які мають протилежні цілі, а саме: виграш, наприклад, гравця I_A дорівнює програшу гравця I_B.

Вочевидь, гравець I_A намагатиметься максимізувати свій виграш, який позначимо через a. Водночас гравець I_B намагатиметься мінімізувати програш.

Нехай гравець I_A має у своєму розпорядженні m можливих стратегій

$$S_A = (A_1,\ A_2,\ ...,\ A_i, ...,\ A_m), \tag{12.1}$$

а гравець I_B має n можливих стратегій

$$S_B = (B_1,\ B_2,\ ...,\ B_j, ...,\ B_n). \tag{12.2}$$

У цьому разі гра називається ***грою*** $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})$.

Позначимо через a_{ij} виграш гравця I_A, якщо у своїй грі він використає стратегію A_i, а гравець I_B — стратегію B_j, де

$$i = \overline{1,\ m}, \qquad j = \overline{1,\ n},$$

за умови, що будуть відомі значення a_{ij} для будь-якої пари стратегій $(A_i,\ A_j)$. Тоді можна буде побудувати так звану ***платіжну матрицю гри***, або ***платіжну матрицю***, що подається в такому загальному вигляді:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{12.3}$$

Платіжну матрицю часто подають у вигляді табл. 1:

Таблиця 1

I_B / I_A	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	...	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	…	a_{in}
...	…	…	...	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	…	a_{mn}

Тепер постає запитання: як знайти оптимальну стратегію для гравця (стратега) I_A? Для цього необхідно послідовно проаналізувати кожну з його стратегій, починаючи з A_1. Якщо, наприклад, гравець I_A вибрав зі своєї множини стратегій $S_A = (A_1,\ A_2,\ ...,\ A_i, ...,\ A_m)$ стратегію

A_i, то при цьому він має враховувати те, що гравець I_B відповість на неї стратегією зі своєї множини стратегій $S_B = (B_1, B_2, ..., B_j, ..., B_m)$, наприклад B_j, при якій виграш a_{ij} гравця I_A буде мінімальним. Позначимо цей мінімальний виграш через a_i. Отже,

$$a_i = \min_i a_{ij} . \tag{12.4}$$

Таким чином, в i-му рядку вибирається мінімальне значення виграшу a_i. Отже, уникаючи будь-якого ризику, гравець I_A має спинитися на тій зі своїх стратегій A_i, для якої число a_{ij} було б максимальним:

$$a = \max_i a_i . \tag{12.5}$$

Ураховуючи (12.4), дістаємо:

$$a = \max_i \min_j a_{ij} . \tag{12.6}$$

Вираз (12.6) визначає ***нижню ціну гри***, тобто максимальний виграш — ***максимін***.
Стратегія, яка відповідає нижній ціні гри, називається ***максимальною стратегією.***
Значення a, знайдене з (12.6), визначає той гарантований мінімум, що його одержить гравець I_A, дотримуючись при цьому найобережнішої зі своїх стратегій.
Розглянемо тепер поведінку в цій ситуації гравця I_B. Цілком логічно, що цей гравець зацікавлений у тому, щоб спрямувати гру так, аби виграш гравця I_A був мінімальним.
Для цього гравцеві I_B необхідно проаналізувати кожну зі своїх стратегій B_j $\left(j = \overline{1, m}\right)$ під кутом зору максимального виграшу для них:

$$b_j = \max_i a_{ij} . \tag{12.7}$$

Із усіх b_j вибирається її найменше значення:

$$b = \min_j b_j . \tag{12.8}$$

З урахуванням (12.7) дістаємо:

$$b = \min_j \max_i a_{ij} . \tag{12.9}$$

Значення, яке визначається згідно з (12.9), називається ***верхньою ціною гри***, або ***мінімаксом***.
Принцип, за яким кожний із гравців дотримується найобережнішої стратегії в теорії ігор, називається ***принципом мінімаксу***.
Цей принцип рекомендує гравцеві поводитись у грі так, щоб за найнесприятливішої поведінки його суперника цей гравець одержав максимальний виграш.
Існують ігри, для яких нижня ціна гри дорівнює верхній:

$$\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} , \tag{12.10}$$

або

$$a = b . \tag{12.11}$$

Такі мінімаксні стратегії називають ***стійкими***.
Елемент матриці, який одночасно є мінімальним у своєму ряд- ку і максимальним у своєму стовпці, називається ***сідловою точкою***. А гра, платіжна матриця якої має сідлову точку, називається ***грою із сідловою точкою***.
Стратегії A_i, B_j, при яких цей виграш досягається, називають ***оптимальними чистими стратегіями***.
Про саму гру в цьому разі говорять, що вона ***розв'язується в чистих стратегіях***. Такі стратегії називають ***чистими***, оскільки існують мішані стратегії, коли гравець використовує не якусь одну, а кілька стратегій, що застосовуються з певною ймовірністю. Про такі стратегії йтиметься далі.

Для наочності матрицю A подають у вигляді табл. 2:

Таблиця 2

I_B / I_A	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	a_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	…	a_{1n}	a_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	…	a_{2n}	a_2
…	…	…	...	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	…	a_{in}	a_i
...	…	…	...	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ij}	…	a_m	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

a_i — мінімуми в рядках

b_j — максимуми у стовпцях

Приклад 1. За заданою платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

визначити нижню і верхню ціну гри. З'ясувати, чи має гра сідлову точку.

Розв'язання. Оскільки платіжна матриця π має три рядки і три стовпці, гру ведуть двоє гравців I_A та I_B.

Гравець I_A має три стратегії:

$$S_A = (A_1,\ A_2,\ A_3),$$

гравець I_B має також три стратегії:

$$S_B = (B_1,\ B_2,\ B_3).$$

Подамо матрицю π у формі табл. 2:

I_B / I_A	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	0,5	0,6	0,8	
A_2	0,9	0,7	0,8	
A_3	0,7	0,6	0,6	
b_j				

a_i —мінімальний елемент рядка

b_j — максимальний елемент стовпця

Визначимо мінімальний елемент для кожного рядка таблиці.
Для першого рядка $\min(0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}8) = 0{,}5;$

для другого $\min(0{,}9;\ 0{,}7;\ 0{,}8) = 0{,}7$;
для третього $\min\ (0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}6) = 0{,}6$.
Отже, нижня ціна гри визначається так:

$$a = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = \max(0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}6) = 0{,}7.$$

Визначимо максимальний елемент для кожного стовпця таблиці.
Для першого стовпця $\max(0{,}5;\ 0{,}9;\ 0{,}7) = 0{,}9$;
для другого $\max(0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}6) = 0{,}7$;
для третього $\max(0{,}8;\ 0{,}8;\ 0{,}6) = 0{,}8$.
Верхня ціна гри

$$b = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min(0{,}9;\ 0{,}7;\ 0{,}8) = 0{,}7.$$

Отже, дістаємо:

$$a = b.$$

А це інформує нас про те, що пара стратегій A_2, B_2 має властивість стійкості, а виграш, який дорівнює 0,7, для цієї пари стратегій називається ***сідловою точкою***, яка позначається через σ.

Отже, маємо:

$$\sigma = a = b = 0{,}7.$$

Таким чином, гравцям I_A і I_B можна рекомендувати їхні оптимальні стратегії. Гравець I_A за оптимальної стратегії виграє 0,7 умовних одиниць, а гравець I_B при цьому програє таку саму суму.

Такі умови гри: вони вигідні для гравця I_A і невигідні для гравця I_B.

Зауважимо, що гра із сідловою точкою трапляється дуже рідко. Абсолютна більшість ігор її не мають.

Проте існують ігри з ***повною інформацією***, в яких для кожного гравця, що здійснює свій крок (вибір стратегії) у грі, відома вся інформація щодо попередніх кроків — як його власних, так і суперника.

Ігри з повною інформацією завжди мають сідлову точку, а отже, розв’язуються в чистих стратегіях.

Прикладом ігор з повною інформацією можуть бути шашки, шахи і т. ін.

Приклад 2. За заданою платіжною матрицею гри

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

визначити верхню та нижню ціну гри. З’ясувати, чи має гра сідлову точку.

Розв’язання. За умовою задачі у грі беруть участь двоє гравців, I_A та I_B, з відповідними стратегіями

$$S_A = (A_1,\ A_2,\ A_3),\ S_B = (B_1,\ B_2,\ B_3).$$

Запишемо матрицю π у формі табл. 2:

I_B / I_A	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	0,9	0,4	0,2	
A_2	0,3	0,6	0,8	
A_3	0,5	0,7	0,2	
b_j				

a_i — мінімальний елемент рядка

b_j — максимальний елемент стовпця

Визначаємо мінімальні елементи кожного рядка

Для першого рядка $\min(0{,}9;\ 0{,}4;\ 0{,}2) = 0{,}2;$

для другого $\min(0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}8) = 0{,}3;$

для третього $\min(0{,}5;\ 0{,}7;\ 0{,}2) = 0{,}2;$

Нижня ціна гри

$$a = \max_{i=1,2,3} \min_{j=1,2,3} a_{ij} = \max(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}2) = 0{,}3.$$

Визначаємо максимальний елемент для кожного стовпця.

Для першого стовпця $\max\limits_{i=1,2,3} a_{ij} = \max(0{,}9;\ 0{,}3;\ 0{,}5) = 0{,}9;$

для другого $\max\limits_{i=1,2,3} a_{ij} = \max(0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}7) = 0{,}7;$

для третього $\max\limits_{i=1,2,3} a_{ij} = \max(0{,}2;\ 0{,}8;\ 0{,}2) = 0{,}8.$

Верхня ціна гри

$$b = \min_{j=1,2,3} \max_{i=1,2,3} a_{ij} = \min(0{,}9;\ 0{,}7;\ 0{,}8) = 0{,}7.$$

Оскільки $a \neq b$, то ця гра не має сідлової точки.

На підставі здобутих результатів доходимо висновку, що з-поміж усіх значень a_i найбільшим є 0,3. Цьому значенню відповідає стратегія A_2. Якщо гравець I_A вибере цю стратегію, то він може бути впевненим, що за будь-якої поведінки суперника (гравця I_B) його виграш становитиме не менш як 0,3. Це значенняє гарантованим виграшем для гравця I_A. Водночас для гравця I_B існує стратегія, за якої його програш буде мінімальним і дорівнюватиме 0,7. Більше гравець I_B у цій грі не віддасть.

12.3. Гра зі змішаними стратегіями

Більшість ігор, як уже зазначалося, не мають сідлової точки, а тому використання чистих стратегій не приводить до визначення оптимального розв’язку гри. У цьому разі оптимальний розв’язок можна дістати, почергово використовуючи чисті стратегії з певною імовірністю.

Нехай мішана стратегія для гравця I_A

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_i & \ldots & A_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_i & \ldots & p_m \end{pmatrix}, \tag{12.12}$$

а мішана стратегія для гравця I_B

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_j & \ldots & B_n \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_j & \ldots & q_n \end{pmatrix}, \tag{12.13}$$

де p_i — імовірність того, що під час гри гравець I_A застосує чисту стратегію A_i, а q_j — імовірність того, що в цій грі гравець I_B використовує чисту стратегію B_j.

Оскільки щоразу застосування однієї з чистих стратегій кожним із гравців виключає застосування іншої, то A_i, B_j — випадкові несумісні ($A_i \cap A_j = 0$, $B_j \cap B_i = \varnothing$) події, що утворюють повну групу, тобто

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega, \quad \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Omega,$$

Тоді маємо:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i = 1. \tag{12.14}$$

Для мішаних стратегій матриця гри подається у формі табл. 3.

Таблиця 3

I_B/q \ I_A/p	B_1/q_1	B_2/q_2	…	B_j/q_j	…	B_n/q_n
A_1/p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2/p_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	...	…	…	…
A_i/p_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	…	a_{in}
...	…	…	...	…	…	…
A_m/p_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{i2}	…	a_{mn}

Розв’язок гри за мішаних стратегій ґрунтується на критерії мінімаксу, який розглядався раніше. Різниця в цьому разі полягає лише в тому, що гравець I_A вибирає стратегію A_i з імовірністю p_i так, щоб максимізувати очікуваний виграш по стовпцях, тоді як гравець I_B вибирає стратегію B_j з імовірністю q_j, щоб мінімізувати очікуваний свій програш по рядках.

Математично критерій мінімаксу при мішаних стратегіях можна описати так: гравець I_A вибирає стратегію з імовірністю p_i, яка дає значення

$$\max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}p_i,\ ...,\ \sum_{i=1}^{m} a_{im}p_i\right)\right\}, \tag{12.15}$$

а гравець I_B вибирає стратегію з імовірністю q_j, яка дає значення

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j}q_j,\ ...,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}q_j\right)\right\}. \tag{12.16}$$

Ці значення визначають відповідно очікуваний максимальний і мінімальний платіж.

Як і в разі чистих стратегій, виконується співвідношення

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j}q_j,\ ...,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}q_j\right)\right\} \ge \max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}p_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}p_i,\ ...,\ \sum_{i=1}^{m} a_{im}p_i\right)\right\}. \tag{12.17}$$

Якщо p_i і q_j, яким відповідають стратегії A_i, B_j, являють собою оптимальні розв’язки, то кожному елементу платіжної матриці a_{ij} відповідає ймовірність $p_i\,q_j$.

Тоді оптимальне очікуване значення гри

$$\sigma = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j \,. \qquad (12.18)$$

12.4. Методи знаходження оптимальних стратегій

Кожна антагоністична гра має оптимальні стратегії. Наприклад, за наявності сідлової точки, коли існує елемент a_{ij} матриці гри *A*, який є максимальним у своєму стовпці і мінімальним у своєму рядку, то чисті стратегії A_i, B_j будуть оптимальними стратегіями для першого та другого гравців, що відповідає мішаним стратегіям, для яких $p_i = 1$, $q_j = 1$, а решта $p_k = 0$, $q_m = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$.

12.4.1. Домінування стратегій

Нехай задано матрицю *A*, тоді вважають, що i-й рядок домінує над k-м, якщо

$$a_{ij} \geq a_{kj} \text{ для всіх } j \qquad (12.19)$$

і

$$a_{ij} > a_{kj} \text{ хоча б для одного } j \qquad (12.20)$$

Аналогічно, j-й стовпець домінує над m-м, якщо

$$a_{ij} \geq a_{im} \text{ для всіх } i \qquad (12.21)$$

і при цьому

$$a_{ij} > a_{im} \text{ хоча б для одного } i. \qquad (12.22)$$

Отже, вважається, що одна чиста стратегія (подана своїм рядком чи стовпцем) домінує над іншою чистою стратегією, якщо вибір першої (домінуючої) стратегії буде принаймні не гіршим за вибір другої (домінованої) стратегії, а в деяких випадках і кращим.

Звідси випливає, що гравець завжди може обійтися без домінуючих стратегій, використовуючи лише недомінуючі.

Приклад 3. Розглянемо гру з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

У цій матриці четвертий стовпець домінує над другим. Звідси випливає, що другий гравець ніколи не використовуватиме в грі четверту стратегію, а тому нею можна знехтувати й розглядати матрицю

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

У матриці A^{*} третій рядок домінує над першим. Усуваючи цей рядок, дістаємо матрицю

$$A^{***} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

У матриці A^{**} третій стовпець домінує над другим. Усуваючи цей стовпець, маємо:

$$A^{****} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матрицю *A* гри розміру 3×4 зведено до матриці гри розміру 2×2.

12.4.2. Аналітичний метод визначення оптимальних стратегій

Нехай задано матрицю гри розміру 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

яка не має сідлової точки.

У цьому разі оптимальні стратегії $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ повинні мати додатні компоненти.

Якщо значення гри дорівнюють v, то

$$a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 + a_{21} p_2 q_1 + a_{22} p_2 q_2 = v, \tag{12.23}$$

або

$$p_1 \ (a_{11} q_1 + a_{12} q_2) + p_2 \ (a_{21} q_1 + a_{22} q_2) = v\,. \tag{12.24}$$

Ураховуючи, що

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ і } q_1 + q_2 = 1,$$

із (12.24) дістаємо:

$$\begin{aligned} a_{11} q_1 + a_{12} q_2 &= v, \\ a_{21} q_1 + a_{22} q_2 &= v. \end{aligned} \tag{12.25}$$

Аналогічно із (12.23) дістаємо

$$\begin{aligned} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 &= v, \\ a_{21} p_1 + a_{22} p_2 &= v. \end{aligned} \tag{12.26}$$

У векторно-матричній формі системи (12.25) і (12.26) можна записати так:

$$\vec{q}' A = \vec{v}' \tag{12.27}$$

$$A \vec{p} = \vec{v}. \tag{12.28}$$

де

$$\vec{q}' = (q_1,\ q_2),\ \ \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},\ \ \vec{v}' = (v, v).$$

Із (12.28) знаходимо

$$A^{-1} A \vec{p} = A^{-1} v \Rightarrow \vec{p} = A^{-1} \vec{v}\ .$$

Вектор $\vec{v}$ можна записати так:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v\,\vec{j}.$$

Отже, тепер маємо:

$$\vec{p} = A^{-1} v \vec{j} = v A^{-1} \vec{j} \Rightarrow \tag{12.29}$$

$$\Rightarrow \vec{j}' \vec{p} = v \vec{j}' A^{-1} \vec{j} \Rightarrow\ v \vec{j}' A^{-1} \vec{j} = 1, \tag{12.30}$$

оскільки

$$\vec{j}' \vec{p} = (1\ \ 1) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = p_1 + p_2 = 1.$$

Із (12.30) знаходимо

$$v = \frac{1}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}. \quad (12.31)$$

З урахуванням (12.31) маємо

$$\vec{p} = \frac{A^{-1}\vec{j}}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}, \quad (12.32)$$

або

$$\vec{p} = \frac{A^{*}\vec{j}}{\vec{j}'A^{*}\vec{j}},$$

де A^* — матриця, елементами якої є алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A.

Аналогічно для вектора $\vec{q}$ із (12.27) маємо

$$\vec{q}'A = \vec{v}' \Rightarrow \vec{q}' = \vec{v}A^{-1} = vj'A^{-1} \Rightarrow \vec{q}'\vec{j} = v\vec{j}'A^{-1}j \Rightarrow v\vec{j}'A^{-1}\vec{j} = 1. \quad (12.33)$$

Отже,

$$\vec{v} = \frac{1}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}. \quad (12.34)$$

З урахуванням (12.34) маємо

$$\vec{q}' = \frac{\vec{j}'A^{-1}}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}} \quad (12.35)$$

Таким чином, дістаємо:

$$\vec{p} = \frac{A^{-1}\vec{j}}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}; \quad (12.36)\backslash$$

$$\vec{q}' = \frac{\vec{j}'A^{-1}}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}; \quad (12.37)$$

$$v = \frac{1}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}, \quad (12.38)$$

або

$$\vec{p} = \frac{A^{*}\vec{j}}{\vec{j}'A^{-1}\vec{j}}; \quad (12.39)$$

$$\vec{q}' = \frac{\vec{j}'A^{*}}{\vec{j}'A^{*}\vec{j}}; \quad (12.40)$$

$$v = \frac{|A|}{\vec{j}'A^{*}\vec{j}}. \quad (12.41)$$

У разі, коли $|A| = 0$, тобто матриця A вироджена, здобуті формули не придатні.

Приклад 4. Розв’язати гру за заданою матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Оскільки матриця A не має сідлової точки, для визначення стратегій $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix}$ і $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1^* & q_2^* \end{pmatrix}$ скористаємося формулами (12.37) і (12.40).

Матриця A^* матиме такий вигляд:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці A

$$|A| = 14.$$

Далі визначаємо:

$$\vec{p} = \frac{A^* \vec{j}}{\vec{j}' A^{-1} \vec{j}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p} = \begin{vmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow p_1^* = \frac{3}{4} = 0{,}75, \qquad p_2^* = \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

$$\vec{q}' = \frac{\vec{j}' A^*}{\vec{j}' A^* \vec{j}} = \frac{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(2, \quad 2)}{4} = (0{,}5 \quad 0{,}5) \Rightarrow \vec{q}' = (q_1^*, \ q_2^*) = (0{,}5 \quad 0{,}5) \Rightarrow q_1^* = 0{,}5, \ \ q_2^* = 0{,}5.$$

Для визначення v необхідно знайти A^{-1}. Отже, маємо:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & -0{,}5 \\ -0{,}73 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остаточно дістаємо:

$$v = \frac{|A|}{\vec{j}' A^{-1} \vec{j}} = \frac{14}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1{,}25 & -0{,}5 \\ -0{,}73 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{14}{(0{,}5 \quad 0{,}5)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 14.$$

Відповідь. $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, ціна гри $v = 14$.

Аналітичний метод визначення розв'язку гри можна практично застосувати для будь-якої квадратної матриці *A*, для якої виконується необхідна умова $|A| \neq 0$.

Приклад 5. За заданою матрицею гри

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

визначити вектори ймовірностей $\vec{p}$, $\vec{q}$ та ціну гри v.

Розв'язання. Беручи до уваги, що $|A| = -80$, тобто матриця *A* невироджена, і що для неї існує обернена матриця

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}238 & 0{,}275 & 1{,}013 \\ 0{,}275 & 0{,}05 & -0{,}225 \\ 1{,}013 & -0{,}225 & -0{,}738 \end{bmatrix},$$

згідно з формулами (12.36), (12.37) і (12.38) дістаємо:

$$1)\ \overrightarrow{p'}=\frac{A^{-1}j}{\overrightarrow{j'}A^{-1}\overrightarrow{j}}=\frac{\begin{bmatrix}-1{,}238 & 0{,}275 & 1{,}013\\ 0{,}275 & 0{,}05 & -0{,}225\\ 1{,}013 & -0{,}225 & -0{,}738\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1{,}238 & 0{,}275 & 1{,}013\\ 0{,}275 & 0{,}05 & -0{,}225\\ 1{,}013 & -0{,}225 & -0{,}738\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}1\\0{,}05\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}05\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}1\\0{,}05\end{pmatrix}}{0{,}2}=\begin{pmatrix}0{,}25\\0{,}5\\0{,}25\end{pmatrix};$$

отже,

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25\\0{,}5\\0{,}25\end{pmatrix}\Rightarrow p_1=0{,}25;\ p_2=0{,}5;\ p_3=0{,}25.$$

$$2)\ \overrightarrow{q'}=\frac{\overrightarrow{j'}A^{-1}}{\overrightarrow{j'}A^{-1}\overrightarrow{j}}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1{,}238 & 0{,}275 & 1{,}013\\ 0{,}275 & 0{,}05 & -0{,}225\\ 1{,}013 & -0{,}225 & -0{,}738\end{bmatrix}}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1{,}238 & 0{,}275 & 1{,}013\\ 0{,}275 & 0{,}05 & -0{,}225\\ 1{,}013 & -0{,}225 & -0{,}738\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}05\end{pmatrix}}{0{,}2}=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\end{pmatrix};$$

отже $\overrightarrow{q'}=\begin{pmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\end{pmatrix}\Rightarrow q_1=0{,}25,\ q_2=0{,}5,\ q_3=0{,}25.$
Ціна гри

$$v=\frac{1}{\overrightarrow{j'}A^{-1}\overrightarrow{j}}=\frac{1}{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1{,}238 & 0{,}275 & 1{,}013\\ 0{,}275 & 0{,}05 & -0{,}225\\ 1{,}013 & -0{,}225 & -0{,}738\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}=\frac{1}{0{,}2}=5.$$

Відповідь. $S_A=\begin{pmatrix}A_2 & A_2 & A_3\\ 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25\end{pmatrix},\ S_B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2 & B_3\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\end{pmatrix},\ v=5.$

12.4.3. Графічний метод розв'язування гри вигляду (2 $\times$ n) і (n $\times$ 2)

Цей метод можна використовувати лише за умови, що принаймні один гравець має у своєму розпорядженні лише дві стратегії.

Розглянемо гру $2\times n$:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n\\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n\end{array}\\ \begin{array}{cc}A_1 & p_1\\ A_2 & p_2\end{array} & \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\end{pmatrix}\end{array}$$

або

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n\end{array}\\ \begin{array}{c}p_1\\ p_2\end{array} & \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\end{pmatrix}\end{array}.$$

Оскільки $p_1+p_2=1$ і $\sum\limits_{j=1}^{m}q_j=1$, то матрицю A можна записати в такому вигляді:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n\end{array}\\ \begin{array}{c}p_1\\ 1-p_1\end{array} & \begin{pmatrix}a_{11} & q_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\end{pmatrix}\end{array}.$$

Очікуваний виграш гравця I_A, який відповідає стратегіям гравця I_B, можна також подати в табличній формі.

Чиста стратегія гравця I_B	Очікуваний виграш гравця I_A
B_1	$(a_{11} - a_{21})\, p_1 + a_{21} = y_1$
B_2	$(a_{12} - a_{22})\, p_1 + a_{22} = y_2$
…	…
B_j	$(a_{1j} - a_{2j})\, p_1 + a_{2j} = y_j$
…	…
B_n	$(a_{1n} - a_{2n})\, p_1 + a_{2n} = y_n$

Із наведеної таблиці випливає, що очікуваний виграш гравця I_A лінійно залежить від p_1. Згідно з критерієм мінімаксу для ігор із мішаними стратегіями гравець I_A має так вибрати p_1, щоб максимізувати мінімально очікуваний виграш. Цю задачу можна розв'язати графічно, побудувавши прямі лінії — графіки відповідних лінійних функцій y_1 від аргументу p_1.

Проілюструємо це на такому прикладі.

Приклад 6. За заданою ігровою матрицею

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

визначити графічним методом ціну гри для гравця I_A, а також p_1, p_2, q_1, q_2.

Розв'язання. Для визначення очікуваного виграшу гравця I_A, який відповідає очікуваним стратегіям гравця I_B, візьмемо до уваги, що $a_{11} = 2,\ a_{12} = 3,\ a_{21} = 7,\ a_{22} = 1$, і скористаємось таблицею.

Чиста стратегія гравця I_B	Очікуваний виграш гравця I_A
B_1	$(a_{11} - a_{21})\, p_1 + a_{21} = (2-7)p_1 + 7 = -5p_1 + 7 \Rightarrow y_1 = -5p_1 + 7$
B_2	$(a_{12} - a_{22})\, p_1 + a_{22} = (3-1)p_1 + 1 = 2p_1 + 1 \Rightarrow y_2 = 2p_1 + 1$

Таким чином, дістанемо рівняння двох прямих $y_1 = -5p_1 + 7,\ y_2 = 2p_1 + 1$. Тут $y_1,\ y_2$ відповідають очікуваним виграшам гравця I_A для чистих стратегій $B_1,\ B_2$ гравця I_B.

Графіки цих прямих наведено на рис. 12.1.

Точка *A* перетину побудованих прямих відповідає розв'язку. Опустивши перпендикуляр із точки *A* на вісь *Op*, дістанемо $p_1 \approx 0{,}85$. А отже, $p_2 = 1 - p_1 = 1 = 0{,}85 \approx 0{,}15$. Опустивши перпендикуляр із точки *A* на вісь O_1v, дістанемо $v \approx 2{,}7$. У разі, коли розглядувані прямі не перетинаються, гра має сідлову точку. Для визначення q_1, q_2 скористаємось таблицею.

Чиста стратегія гравця I_A	Очікуваний виграш гравця I_B
A_1	$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = (a_{11} - a_{12})q_1 + a_{21} = (2-3)\, q_1 + 3 = -q_1 + 3 \Rightarrow x_1 = -q + 3$
A_2	$a_{21}q_2 + a_{22}q_2 = (a_{21} - a_{22})q_1 + a_{22} = (7-1)\, q_1 + 1 = 6q_1 + 1 \Rightarrow x_2 = 6q + 1$

Очікуваний програш гравця I_B у тому разі, коли гравець I_A застосує стратегію *A*, буде лінійною функцією від аргументу q_1:

$$x_1 = -q_1 + 3, \tag{12.42}$$

а в разі, коли гравець I_A використає стратегію A_2, очікуваний його програш буде лінійною функцією від аргументу q_2:

$$x_2 = 6q + 1. \tag{12.43}$$

Графіки відповідних прямих наведено на рис. 12.2.

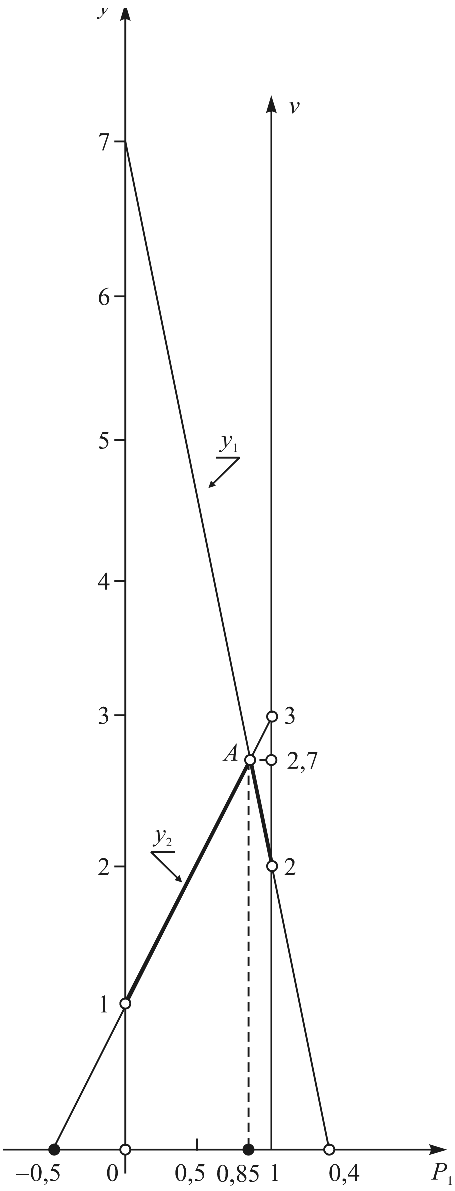


Рис. 12.1

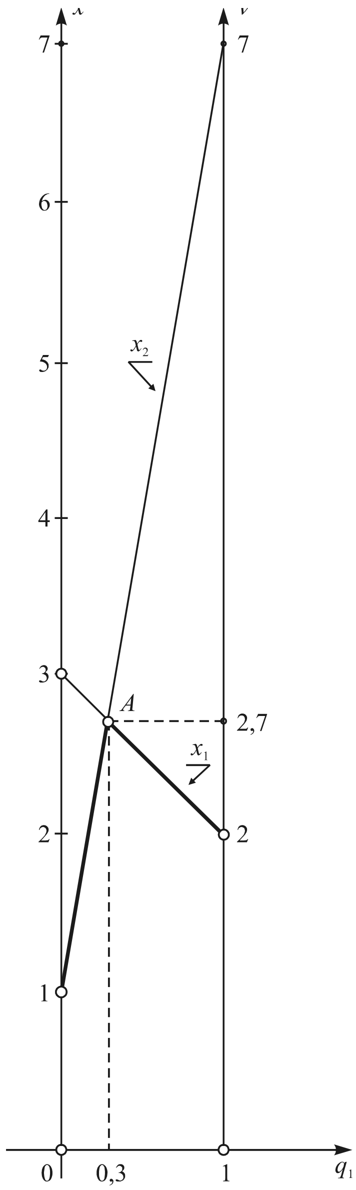


Рис. 12.2

Опустивши перпендикуляр із точки *B* перетину прямих на вісь Oq, дістанемо $q_1 = 0{,}3$, звідки $q_2 = 1 - q_1 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Опустивши перпендикуляр із точки *B* перетину прямих на вісь O_1v, дістанемо $v \approx 2{,}7$. Отже, розв'язок буде таким:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix}, S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \nu = 2{,}7.$$

Приклад 7. За заданою матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -1 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

графічним методом знайти ціну гри ν, а також імовірності p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7.

Розв'язання. Будуємо таблицю:

Чиста стратегія гравця I_B	Очікуваний виграш гравця I_A
B_1	$3p_1 + p_2 = 3p_1 + 1 - p_1 = 2p_1 + 1 \Rightarrow y_1 = 2p_1 + 1$
B_2	$-4p_1 + 2p_2 = -4p_1 + 2 - 2p_1 = 2 - 6p_1 \Rightarrow y_2 = -6p_1 + 2$
B_3	$2p_1 - p_2 = 2p_1 - 1 + p_1 = 3p_1 - 1 \Rightarrow y_3 = 3p_1 - 1$
B_4	$-p_1 + 3p_2 = -p_1 + 3 - 3p_1 = -4p_1 + 3 \Rightarrow y_4 = -4p_1 + 3$
B_5	$-3p_1 + 4p_2 = -3p_1 + 4 - 4p_1 = -7p_1 + 4 \Rightarrow y_5 = -7p_1 + 4$
B_6	$5p_1 + 0p_2 = 5p_1 \Rightarrow y_6 = 5p_1$
B_7	$p_1 - 3p_2 = p_1 - 3 + 3p_1 = 4p_1 - 3 \Rightarrow y_7 = 4p_1 - 3$

Далі будуємо графіки прямих, що задають очікуваний виграш гравця I_A.

Розглядаючи графіки зазначених прямих, доходимо висновку, що гравцеві I_B не вигідно застосовувати стратегії B_1, B_3, B_4, B_5, B_6, оскільки прямі, які відповідають цим стратегіям, розміщуються вище від точки перетину прямих y_2, y_7. Отже, нижню межу утворюють дві прямі y_2 і y_7. Таким чином, стратегії B_2, B_7 і є активними у процесі гри.

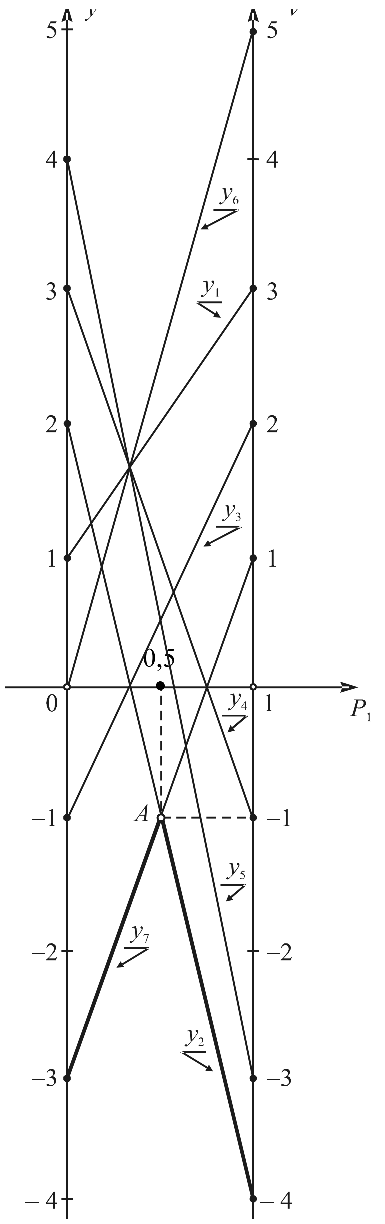


Рис. 12.3

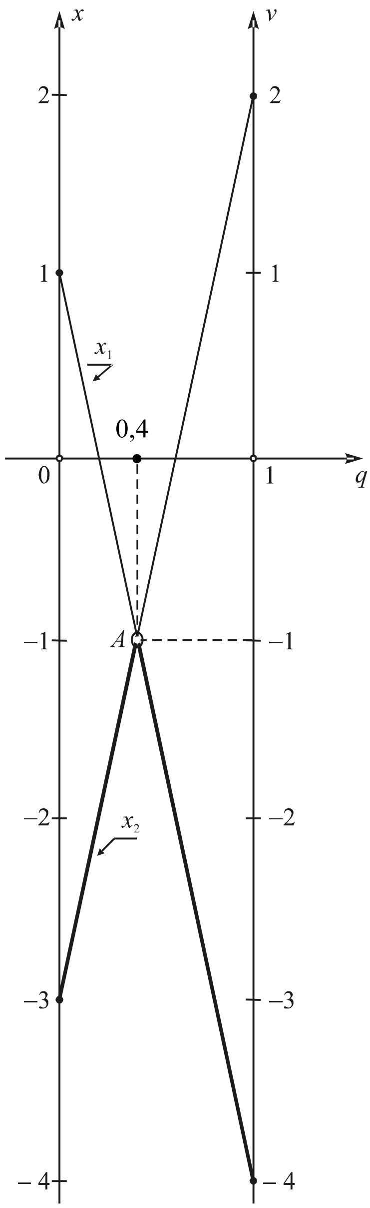


Рис. 12.4

Опустивши перпендикуляр із точки A на вісь Op, дістанемо $p_1 \approx 0{,}5$. Тоді $p_2 \approx 0{,}5$ і при цьому $\nu = -1$.

У цьому разі ймовірності $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$.

Таким чином, щоб визначити оптимальну стратегію для гравця I_B, необхідно розв'язати гру 2×2.

Матриця гри має такий вигляд:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_2 & B_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Будуємо таблицю:

Чиста стратегія гравця I_A	Очікуваний програш гравця I_B
A_1	$-4q_1 + q_2 = -5q_1 + 1 \Rightarrow x_1 = -5q_1 + 1$
A_2	$2q_1 - 3q_2 = 5q_1 - 3 \Rightarrow x_2 = 5q_1 - 3$

Для визначення q_1 застосуємо графічний метод (рис. 12.4).

Перпендикуляри, опущені з точки A на осі Oq і $O\nu$, визначають відповідно значення $q_1 \approx 0{,}4$, $q_2 \approx 0{,}6$, $\nu = -1$. Отже, розв'язок буде таким:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad S_B = \begin{pmatrix} B_2 & B_7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, \quad \nu = 1.$$

Приклад 8. За заданою матрицею гри

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

визначити графічним методом $\vec{p}$, $\vec{q}$, v.

Розв'язання. Дослідимо матрицю

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Визначимо мінімальний елемент для кожного рядка.

Для першого рядка $\min(3,\ 5) = 3$,

для другого рядка $\min(1,\ 3) = 1$.

Нижня ціна гри

$$a = \max\min(3,\ 1) = 3.$$

Визначаємо максимальний елемент для кожного стовпця:

Для першого стовпця $\max(3,\ 1) = 3$,

для другого стовпця $\max(5,\ 3) = 5$.

Верхня ціна гри

$$b = \min\max(3,\ 5) = 3.$$

Отже, маємо $a = b = 3$, тобто гра має сідлову точку.

Розв'яжемо цю гру графічно, склавши таблицю.

Чиста стратегія гравця I_B	Очікуваний виграш гравця I_A
B_1	$(a_{11} - a_{12})\,p_1 + a_{21} = (3-1)p_1 + 1 = 2p_1 + 1 = y_1$
B_2	$(a_{11} - a_{22})\,p_1 + a_{22} = (5-3)p_1 + 3 = 2p_1 + 3 = y_2$

Графіки прямих для стратегій B_1 і B_2 наведено на рис. 12.5.

Як бачимо з рис. 12.5, прямі y_1, y_2 не перетинаються, оскільки матриця A має сідлову точку. Отже, розв'язок буде таким:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_B = \begin{pmatrix} B_2 & B_7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu = 3.$$

Зауважимо, що графічним методом можна розв'язувати лише ігри виду $2 \times n$ або $n \times 2$.

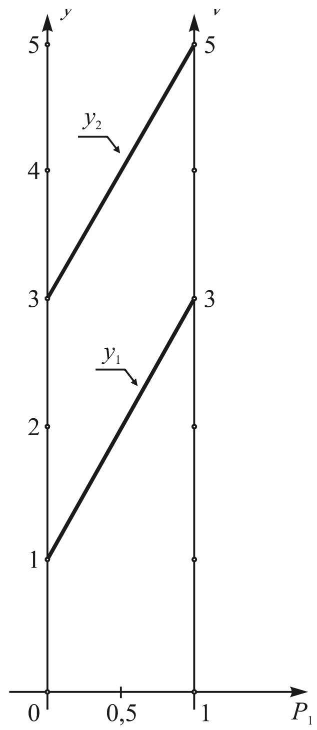


Рис.12.5

12.5. Застосування методу лінійного програмування для розв'язування задач теорії ігор

Розглянемо випадок, коли елементи матриці A додатні, а отже, і виграш при оптимальній стратегії $v > 0$.

Тоді ігрова матриця в загальному вигляді подається так:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Оскільки $v > 0$, то для гравця I_A, який має у своєму розпорядженні n стратегій, мішана стратегія визначається умовами:

$$\begin{cases} \max\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} p_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} p_i,\ \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{im} p_i\right)\right.; \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \end{cases} \qquad (12.44)$$

Цю саму задачу можна сформулювати як задачу лінійного програмування.

Нехай

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} p_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2} p_i,\ \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{im} p_i\right). \qquad (12.45)$$

Тоді маємо таку задачу.

Визначити $v_{\max}$ при обмеженнях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \geq v, & j = \overline{1,\ m}, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \end{cases} \tag{12.46}$$

де v — ціна гри.

Обмеження (9.46) можна подати у вигляді системи

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{n1} p_1 \geq v, \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{n2} p_2 \geq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{nm} p_1 \geq v. \end{cases} \tag{12.47}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Поділивши кожне рівняння системи (12.47) на v, дістанемо:

$$a_{11} \frac{p_1}{v} + a_{21} \frac{p_2}{v} + ... + a_{m1} \frac{p_n}{v} \geq 1,$$

$$a_{12} \frac{p_1}{v} + a_{22} \frac{p_2}{v} + ... + a_{m2} \frac{p_n}{v} \geq 1,$$

$$....$$

$$a_{11} \frac{p_1}{v} + a_{21} \frac{p_2}{v} + ... + a_{m1} \frac{p_n}{v} \geq 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1\,.$$

Позначимо $\frac{p_i}{v} = p_i^*$, $i = \overline{1,\ n}$, тоді маємо:

$$\begin{aligned} & a_{11} p_1^* + a_{21} p_2^* + ... + a_{m1} p_n^* \geq 1, \\ & a_{12} p_1^* + a_{22} p_2^* + ... + a_{m2} p_n^* \geq 1, \\ & .... \\ & a_{1n} p_1^* + a_{2n} p_2^* + ... + a_{mm} p_n^* \geq 1, \end{aligned} \tag{12.48}$$

при цьому

$$p_1^* + p_2^* + ... + p_n^* \geq \frac{1}{v}. \tag{12.49}$$

Оскільки v — гарантований виграш гравця I_A, то цілком природно, що він намагатиметься максимізувати його, тобто мінімізувати значення $\frac{1}{v}$.

Таким чином, задача відшукання розв’язку гри набула змісту задачі лінійного програмування, а саме:

при обмеженнях (12.46) визначити мінімум функції

$$L_{\min} = p_1^* + p_2^* + ... + p_n^*. \tag{12.50}$$

Для гравця I_B задача описується в такому вигляді:

$$\min\left\{ \max\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j} q_j,\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j} q_j,\ ...,\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj} q_j \right) \right\}, \tag{12.51}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1. \qquad (12.52)$$

Цю задачу також можна записати як задачу лінійного програмування:
при обмеженнях

$$\begin{aligned} &a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* + ... + a_{1n}q_m^* \le 1,\\ &a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* + ... + a_{2n}q_m^* \le 1,\\ &...\\ &a_{n1}q_1^* + a_{n12}q_2^* + ... + a_{mn}q_m^* \le 1, \end{aligned} \qquad (12.53)$$

де $q_i^* = \dfrac{q_i}{v}$, $i = \overline{1,\ m}$,

визначити максимум функції

$$L = q_1^* + q_2^* + ... + q_m^* = \frac{1}{\nu}. \qquad (12.54)$$

Оптимальний розв’язок для одного з гравців автоматично дає розв’язок для другого.
Приклад 9. Розглянемо гру 3×3, матриця якої має такий вигляд:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Задача для гравця I_B записується у формі задачі лінійного програмування:
максимізувати функцію $w = y_1 + y_2 + y_3$ при таких обмеженнях:

$$\begin{aligned} &7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \le 1,\\ &2y_1 + 9y_2 \qquad\quad \le 1,\\ &9y_1 \qquad\quad + y_3 \le 1. \end{aligned}$$

Тут $y_i = q_i^* = \dfrac{q_i}{\nu}$. Отже, визначивши y_1, y_2, y_3, отримаємо:

$$q_1 = y_1\nu, \quad q_2 = y_2\nu, \quad q_3 = y_3\nu.$$

Розв’язання. Складемо таблицю оптимального розв’язку:

Базисна змінна	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Вільний член	Θ
y_4	7	2	9	1	0	0	1	$\frac{1}{7}$
y_5	2	9	0	0	1	0	1	$\frac{1}{9}$
y_6	9	0	11	0	0	1	1	$\frac{1}{9}$
w	–1	–1	0	0	0	0		
y_4	0	2	$\frac{4}{9}$	1	0	$-\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{18}$
y_5	0	9	$-\frac{22}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{7}{81}$

Закінчення табл.

Базисна змінна	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	Вільний член	Θ
y_6	1	0	$\frac{11}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
w	0	–1	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
y_4	0	0	$\frac{4}{81}$	1	$-\frac{2}{81}$	$-\frac{59}{81}$	$\frac{4}{81}$	
y_2	0	1	$-\frac{22}{81}$	0	0	$-\frac{2}{81}$	$\frac{7}{81}$	
y_1	1	0	$\frac{11}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
w	0	0	$-\frac{4}{81}$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{11}{81}$	$\frac{16}{81}$	
y_3	0	0	1	$\frac{81}{80}$	$-\frac{12}{80}$	$-\frac{59}{80}$	$\frac{324}{6480}$	
y_2	0	1	0	$\frac{22}{80}$	$-\frac{44}{6480}$	$-\frac{1458}{80}$	$\frac{648}{6480}$	
y_1	1	0	0	$\frac{99}{80}$	$\frac{22}{6480}$	$\frac{1369}{80}$	$\frac{324}{6480}$	
w	0	0	0	$\frac{4}{81}$	$\frac{72}{6480}$	$\frac{644}{6480}$	$\frac{1296}{6480}$	

Таким чином, маємо розв’язок задачі:

$$y_1 = \frac{324}{6480}; \quad y_2 = \frac{648}{6480}; \quad y_3 = \frac{324}{6480};$$

$$L_{\max} = \frac{1}{w} = \frac{6480}{1296}, \quad v = \frac{1}{w} = \frac{6480}{1296}.$$

Імовірності q_1, q_2, q_3 будуть відповідно дорівнювати:

$$q_1 = y_1 v = \frac{324}{6480} \cdot \frac{6480}{1296} = \frac{324}{1296}; \quad q_2 = y_2 v = \frac{648}{6480} \cdot \frac{6480}{1296} = \frac{648}{1296};$$

$$q_3 = y_3 v = \frac{324}{6480} \cdot \frac{6480}{1296} = \frac{324}{1296}, \quad \text{або:} \quad q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = \frac{1}{4}.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Теорія ігор як одна із форм математичних моделей у дослідженні операцій.
2. Яку мету переслідує теорія ігор?
3. Що називають стратегією гравця?
4. Дайте пояснення: обмежена, необмежена гра.
5. Яку стратегію називають оптимальною?
6. Яку гру називають парною? Наведіть приклади.
7. Яку гру називають антагоністичною? Наведіть приклади.
8. Платіжна матриця гри та її загальний вигляд.
9. У чому полягає суть принципу мінімаксу та максиміну?
10. Сідлова точка. Яка умова наявності сідлової точки у грі?

11. Розв’язок ігор з мішаними стратегіями. Як визначають мішані стратегії для гравців I_A, I_B?

12. Мінімальні та максимальні платежі для мішаних стратегій.

13. У чому полягає суть домінування стратегій?

14. У чому полягає суть аналітичного методу визначення оптимальних стратегій?

15. Навести формулу вектора $\vec{p}$ для мішаних стратегій.

16. Навести формулу вектора $\vec{q}$ для мішаних стратегій.

17. Навести формулу ціни гри ν для мішаних стратегій.

18. Суть графічного методу знаходження розв’язку гри $2 \times n$. Визначення компонентів векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$.

19. Використання методу лінійного програмування для розв’язування задач теорії ігор.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. За заданою матрицею гри

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

визначити оптимальні стратегії для гравців I_A та I_B, використовуючи графічний метод.

2. Для заданої матриці гри

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

з’ясувати наявність сідлової точки.

3. Для заданої матриці гри

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

визначити вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ і ν, скориставшись аналітичним методом.

4. Визначити максимальну і мінімальну стратегії при заданій матриці гри

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 10 \\ 8 & 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}. \end{array}$$

5. Гру задано матрицею

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Визначити імовірнісні вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ та ціну гри ν, використовуючи при аналітичний і графічний методи.

6. Для гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

знайти p_i $(i = 1, 2)$, q_i $\left(i = \overline{1,\ n}\right)$, використовуючи графічний метод. Чому дорівнює ціна гри ν?

7. За заданою платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

визначити нижню і верхню ціну гри. З'ясувати, чи має гра сідлову точку.

8. Гру задано матрицею

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Звести матрицю A до такого вигляду, аби не було домінуючих стратегій.

9. Гру задана матрицею

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Знайти розв'язок гри методом лінійного програмування.

ДОДАТОК 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

1.1. Загальні відомості

Теорія випадкових процесів — це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ (подій) у динаміці їхнього розвитку.

В іншій термінології теорію випадкових процесів називають ***теорією випадкових функцій***. Ця порівняно молода математична наука являє собою новий розділ теорії ймовірностей, яка почала стрімко розвиватися у другій половині XX століття завдяки розширенню сфери її практичного використання.

У світі, що нас оточує, відбуваються різні процеси, розвиток яких абсолютно точно спрогнозувати неможливо з огляду на вплив численних випадкових факторів.

Розглянемо приклади таких процесів.

1. Кількість населення деякого міста (області чи всієї країни) змінюється з часом у випадковий (непередбачуваний) спосіб унаслідок впливу багатьох факторів, таких як народжуваність, смертність, міграція тощо.

2. Економічні показники певної галузі господарства країни зазнають впливу загального стану світової економіки, економічної ситуації в тих країнах, до яких експортує свою продукцію ця галузь, економічного стану в своїй країні тощо.

3. Урожай зернових культур є непередбачуваним унаслідок впливу багатьох випадкових факторів, передусім погодних умов, якості насіння, рівня механізації тощо.

4. Рівень води у водосховищах випадково (непередбачувано) змінюється з часом залежно від погоди, кількості опадів, зокрема снігу в зимову пору, інтенсивності використання водних ресурсів водосховища для поливу тощо.

5. Трактор чи комбайн фермера, розглядуваний як деяка система, унаслідок впливу випадкових факторів може у випадкові моменти часу здійснювати переходи в такі стани:

ω_1 — працює справно;

ω_2 — може працювати, але потребує дрібного ремонту;

ω_3 — перебуває в неробочому стані (ремонт).

Переходи такої системи з одного стану в будь-який можливий інший відбувається під впливом випадкових факторів, таких як професійний рівень фермера, що експлуатує ці системи, якість дорожнього покриття, по якому рухається трактор до поля, і т. ін.

Загалом, як уже наголошувалось, у природі та суспільстві строго детермінованих процесів не існує. На будь-який процес, що відбувається у Всесвіті, впливає безліч взаємозв'язаних випадкових факторів. Дія на процес кожного з них зокрема незначна, а тому виявити її практично неможливо. Але сумарний вплив на процес усієї множини факторів вносить у динаміку його розвитку елемент випадковості, що може виявлятись як дуже слабко, і тоді цей процес називають детермінованим, так і вельми відчутно, і тоді його називають випадковим. Між цими двома полярними процесами перебуває цілий спектр процесів, у яких випадковість виявляється більшою чи меншою мірою.

Ураховувати чи ні наявність елемента випадковості в досліджуваному процесі, залежить від того, яку практичну задачу необхідно розв'язувати. Це особливо стосується процесів, які відбуваються в економіці, соціології, де фактором випадковості не можна нехтувати.

Випадковий процес може відбуватися в будь-якій фізичній, економічній чи соціальній системі S, являючи собою випадкові переходи цієї системи з одного можливого стану в будь-який інший. Стани системи можна оцінити за допомогою деяких числових змінних: у простих випадках — однієї, а в складніших — кількох.

Так, у прикладі 2 населення міста (області) змінюється залежно від часу t у випадковий спосіб. Випадковість присутня в розглянутих раніше прикладах: у прикладі 4 — це економічні показники певної галузі господарства країни; у прикладі 5 — урожайність зернових культур; у прикладі 6 — рівень води у водосховищі, на який впливає безліч випадкових факторів, причому одні явно, інші — майже непомітно, але зрештою їхній вплив може відчутно даватися взнаки. Випадкові процеси можуть відбуватися в будь-яких фізичних системах і виявлятись як переходи цієї системи з одного можливого стану в інший.

У наведених прикладах випадкові процеси являють собою випадкові функції аргументу t, які при кожному фіксованому його значенні перетворюють на звичайні випадкові величини.

Випадкові процеси можна описати або однією функцією $X(t)$ від аргументу *t* (скажімо, у прикладі 1 це буде рівень населення міста, регіону, у прикладі 2 — економічні показники певної галузі народного господарства), або кількома функціями $X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots,\ X_n(t)$ від цього аргументу — у цьому разі процес називають ***векторним***. Коли йдеться, наприклад, про броунівський рух мікрочастинок у полі зору мікроскопа, які безперервно змінюють своє положення, то місцезнаходження кожної частинки вже характеризуватиметься двома випадковими функціями $X(t)$ і $Y(t)$ — координатами цієї частинки. Такий процес буде векторним випадковим процесом $(X(t), Y(t))$, компоненти якого $X(t)$ і $Y(t)$ є функціями аргументу *t*.

При фіксованому значенні аргументу *t* ймовірний стан системи, де реалізується випадковий процес $X(t)$, являє собою аналог випадкової події, яка означає, що система потрапила в один із можливих станів у момент часу *t*. Як правило, ці стани утворюють дискретну множину — обмежену або зліченну.

Теорія випадкових процесів із поглибленням та уточненням наших знань про навколишній світ, ускладненням структур інженерних, економічних і соціальних систем набуває дедалі ширшого застосування, особливо у сфері комп'ютерних технологій, які дають змогу у величезних обсягах виконувати обчислювальні операції та найскладніше моделювання. Нині практично не існує таких галузей людської діяльності, де б не було випадкових процесів. Різні види господарської діяльності, робота будь-якої автоматизованої системи управління та технічних комплексів, зміни народонаселення країни, метеорологічна ситуація в тих чи тих регіонах, існування біологічних популяцій — усі ці явища характеризуються випадковими процесами.

З огляду на сказане, теорія випадкових процесів — це єдиний математичний апарат, який можна ефективно використати для вивчення процесів, що повсякчас відбуваються в усіх галузях людської діяльності, різних за своєю природою та структурою. Проте завжди слід пам'ятати, що цей апарат дає лише обмежений, схематичний опис досліджуваного процесу, так би мовити, процесу в «середньому», від якого можливі відхилення. Тому при поглибленому вивченні кожного процесу такі відхилення необхідно враховувати.

Випадковий процес, як уже зазначалося, можна описати за допомогою випадкової функції, залежної від часу *t*. Це поняття значно загальніше, ніж поняття «випадковий процес». Але на практиці для спрощення вживають термін «випадковий процес», не враховуючи при цьому фізичної природи як самого процесу, так і його аргументу *t*. Адже на практиці існують задачі, де випадкові функції (випадкові процеси) залежать не від часу *t*, а від іншого аргумента. Наприклад, міцність балки будівельної конструкції є випадковою функцією від абсциси її перерізу *x*; тиск у газопроводі буде функцією від його довжини *l* і т. ін. У деяких практичних задачах трапляються випадкові функції (процеси), які залежать від двох і більше аргументів.

1.2. Означення випадкового процесу. Класифікація випадкових процесів

Випадковий процес узагальнює поняття випадкової величини, тобто такої, яка внаслідок здійснення експерименту може набувати того чи того можливого числового значення з певною імовірністю. Мовою теорії множин випадкова величина означується як функція елементарної події ω, яка може настати в результаті деякого випробування і визначена на просторі елементарних подій Ω, тобто $\omega \in \Omega$.

Зі сказаного випливає означення випадкового процесу: ***випадковим*** називається процес $X(t)$, значення якого при будь-якому фіксованому $t = t_i$ є випадковою величиною $X(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Випадкова величина $X(t_i)$, в яку перетворюється випадковий процес $X(t)$ при $t = t_i$, називається ***перерізом випадкового процесу***, який відповідає заданому значенню аргументу t.

Випадковий процес можна записати у вигляді функції двох аргументів — часу *t* і елементарної події ω:

$$X(t) = \alpha(t, \omega),\ \ \omega \in \Omega,\ \ t \in T,\ \ X(t) \in X, \tag{1.1}$$

де ω — елементарна подія; Ω — простір елементарних подій; *T* — множина значень аргументу t функції $X(t)$; *X* — множина можливих значень випадкового процесу $X(t)$.

Нехай експеримент, під час якого випадковий процес може відбутися, уже здійснився, тобто настала елементарна подія $\omega \in \Omega$. У такому разі випадковий процес $X(t)$ втрачає свою випадковість і вже залежить лише від часу t, набираючи певного вигляду. Це вже буде не випадкова функція від аргументу t.

Таку функцію називають реалізацією випадкового процесу $X(t)$ у цьому експерименті. Отже, ***реалізацією випадкового процесу*** $X(t)$ називається невипадкова функція $x(t)$, на яку внаслідок здійснення експерименту перетворюється випадковий процес $X(t)$, який спостерігався на деякому проміжку часу від $t = 0$ до $t = \tau$.

Реалізацію можна записати у вигляді

$$x(t) = \alpha(t, \omega_1), \quad t \in T.. \tag{1.2}$$

Будь-яка реалізація випадкового процесу $x(t)$ належить множині X можливих значень випадкового процесу, тобто $x(t) \in X$ (рис. 1.1).

Здійснивши не один, а кілька експериментів, у кожному з яких спостерігалась певна реалізація випадкового процесу $x_i(t)$ (i — номер експерименту), дістанемо множину реалізацій випадкових процесів $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_i(t)$, …, яку називають ***сім'єю реалізацій*** (рис. 1.2).

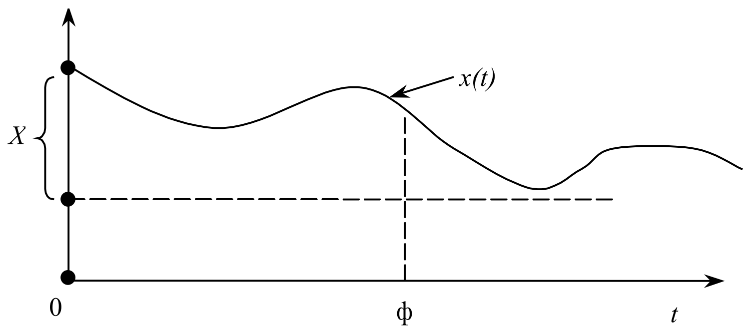


Рис. 1.1

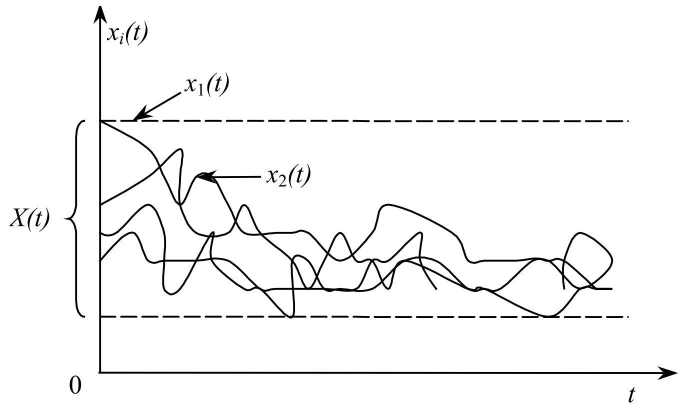


Рис. 1.2

Сім'я реалізацій випадкового процесу $X(t)$ є основним експериментальним матеріалом, на базі якого можна відшукати характеристики цього процесу. Сім'я реалізацій — це аналог сукупності спостережуваних значень випадкової величини X із тією лише різницею, що в цьому разі спостерігаються не числові значення, а функції від аргументу t. Уведені поняття проілюструємо такими прикладами.

1. Напруга в міській мережі є випадковим процесом $U(t)$. Виконавши n вимірювань напруги, дістанемо n реалізацій випадкового процесу $U(t): u_1(t), u_2(t), u_3(t), ..., u_n(t)$. У кожний фіксований момент часу $t = t_i$ дістаємо переріз випадкового процесу $U(t_i)$, для якого існує сім'я реалізацій: $u_1(t_i), u_2(t_i), ..., u(t_n)$ (рис. 1.3).

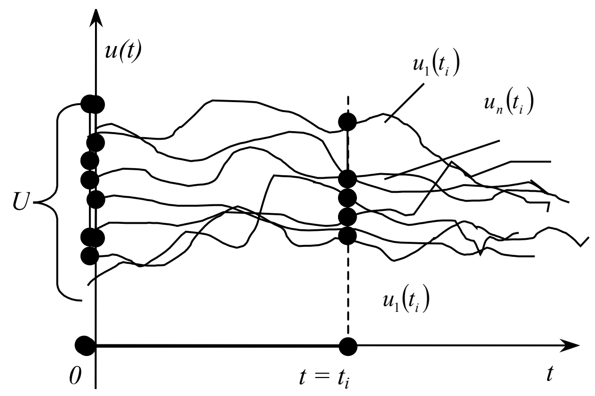


Рис. 1.3

Переріз $U(t_i)$ являє собою випадкову величину, спостережувані значення якої на рис. 1.3 позначено точками на вертикальній прямій, проведеній перпендикулярно до осі *Ot* у точці $t = t_i$.

2. Здійснюється n експериментів над певною технічною системою, у кожному з яких реєструється кількість $X(t)$ відказів у роботі цієї системи від початку її роботи до моменту часу *t*. Тоді випадковий процес може набувати лише цілочислових значень: 0, 1, 2, 3, …, *k*, … При цьому в проміжках між стрибками, які відбуваються в момент часу, коли стається черговий відказ у роботі технічної системи, ці значення лишаються сталими. Переріз випадкового процесу $X(t)$ при будь-якому фіксованому *t* є дискретною випадковою величиною, множина можливих значень якої $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Реалізація $x_i(t)$ випадкового процесу $X(t)$ в i-му експерименті являє собою невипадкову східчасту функцію, одиничні стрибки якої відбуваються в моменти часу $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, \ldots$ (рис. 1.4).

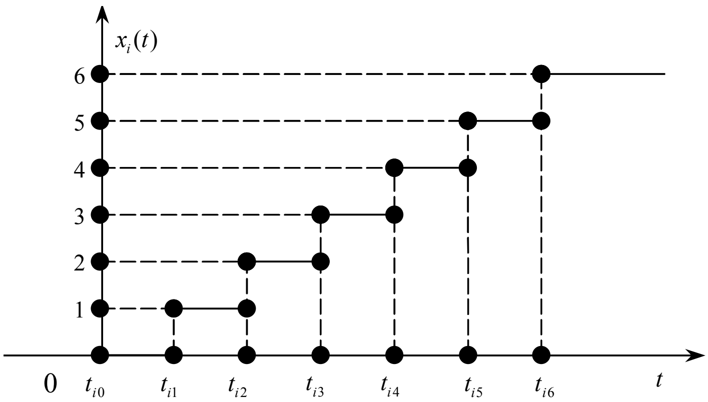


Рис. 1.4

Реалізації $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t)$ у загальному випадку різні, оскільки моменти стрибків не збігаються.

3. Здійснюється n експериментів, у кожному з яких вимірюється температура ґрунту на глибині $h = 6 \ldots 8$ см від поверхні, де висіяно озимі культури. Як відомо, на цій глибині температура ґрунту не повинна бути нижчою за –15 °С, оскільки інакше озима культура вимерзає. У такому разі аргументом випадкового процесу $v_i(h)$ є не час, а висота h над поверхнею ґрунту. Переріз цього випадкового процесу зображено на рис. 1.5, де $v_i(h)$ — сім’я реалізацій.

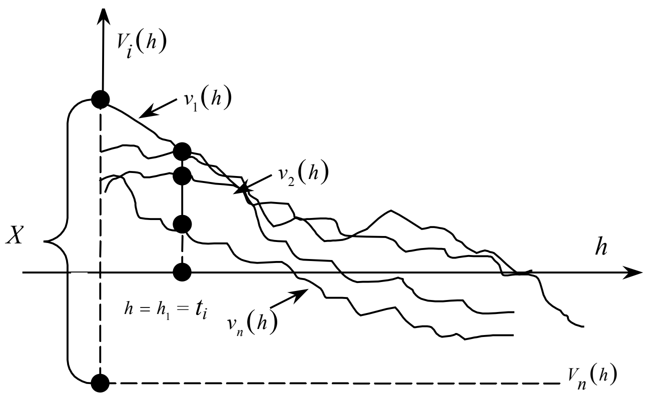


Рис. 1.5

Як уже відомо, випадковий процес $X(t)$ являє собою функцію, яка при будь-якому фіксованому значенні $t = t_i$ (переріз випадкового процесу, тобто випадковий процес у статиці) є випадковою величиною *X*. Тоді випадковий процес $X(t)$ можна тлумачити як випадкову величину в динаміці.

Кожний переріз випадкового процесу $X(t)$ є випадковою величиною, а сукупність усіх можливих перерізів утворює випадковий процес. Отже, випадковий процес можна вважати системою випадкових величин — усіх його перерізів, кількість яких у загальному випадку становить незліченну множину. Тому досліджувати таку систему в сукупності практично неможливо. Щоб вийти з цієї ситуації, необхідно вдатись до певних обмежень, спростивши задачу з дослідження випадкових процесів.

Відомо, що будь-яку функцію $\alpha(t)$ аргументу t можна наближено подати послідовністю її значень у точках $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$: $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3), ..., \alpha(t_n)$.

Чим більше буде взято точок t_i, тим точнішим буде подання функції $\alpha(t)$ послідовністю значень $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3), ..., \alpha(t_i)$. Ці міркування проілюстровано на рис. 1.6.

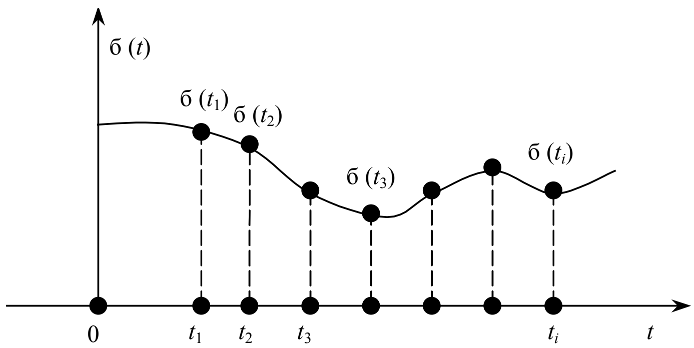


Рис. 1.6

Аналогічно можна подати й випадковий процес $X(t)$, наближено замінивши його сукупністю (системою) випадкових величин: $X(t_1), X(t_2), X(t_3), ..., X(t_k)$, де $X(t_i)$ — перерізи в точках t_1, t_2, t_3,..., t_k. Чим більше буде перерізів, тим, вочевидь, більше інформації дістанемо про випадковий процес. З переходом до межі кількість перерізів прямує до нескінченності, тобто випадкові величини цих перерізів трансформуються у випадковий процес. На практиці при вивченні таких процесів намагаються обмежитись якомога меншою кількістю перерізів, що становлять основу для дослідження розглядуваних процесів.

Випадкові процеси поділяють на одно- та багатовимірні. Випадковий процес, який залежить лише від одного аргументу, називають одновимірним. Аргументом може бути час t, відстань l, товщина h тощо.

Випадковий процес, який залежить від більш ніж одного аргументу, називають ***багатовимірним***. Наприклад, температуру повітря в різних точках атмосфери можна розглядати як випадковий процес, що залежить від трьох координат x, y, z і часу t.

Здебільшого вивчають випадкові процеси $X(t)$, аргументом яких є час t, поділяючи їх на випадкові процеси з дискретним та неперервним часом.

Випадковий процес $X(t)$ називається ***процесом із дискретним часом***, якщо система, в якій відбувається цей процес, змінює свої стани в дискретні моменти часу $t_1, t_2, t_3, ..., t_i, ...$. До таких процесів належать, наприклад:

1) процес роботи комп'ютерного центру, який працює в реальному масштабі часу і може змінювати свій стан (кількість комп'ютерів, що працюють) у дискретні моменти часу t_i $(i = 1, 2, 3, ...)$;

2) процес роботи деякої технічної системи, що складається з певної кількості підсистем, які в дискретні моменти часу t_i можуть виходити з ладу.

Випадковий процес $X(t)$ називають ***процесом із неперервним часом***, якщо переходи системи з одного можливого стану в інший можуть відбуватися внаслідок дії цього процесу в будь-який момент часу t упродовж проміжку Δt, коли ведеться спостереження над цією системою.

Прикладом таких процесів можуть бути:

1) кількість відказів у роботі певного технічного вузла системи;

2) кількість осіб, які захворіли внаслідок епідемії грипу в місті чи регіоні країни;

3) броунівський рух мікрочастинок у полі зору мікроскопа.

Одновимірний випадковий процес $X(t)$ називається ***процесом із неперервними станами***, якщо його переріз в будь-який момент часу $t = t_i$ являє собою не дискретну, а неперервну випадкову величину, а отже, множина його можливих значень X є незліченною.

Аналогічно, багатовимірний випадковий процес називають ***процесом із неперервними станами***, якщо при будь-якому $t = t_i$ множина можливих значень його є незліченною.

Наприклад, напруга в енергомережі $V(t)$, температура в певній точці атмосфери $t^0(x, y, z, t)$, координати мікрочастинки броунівського руху в момент часу t є процесами з неперервними станами досліджуваних систем.

Випадковий процес, що відбувається в деякій системі S, називають ***процесом із дискретними станами***, якщо множина його станів є обмеженою або зліченною, тобто провівши для цього процесу переріз у будь-який момент часу $t = t_i$, дістанемо дискретну випадкову величину.

Таким чином, залежно від структури множини Т значень аргументу t $(t \in T)$, в яких можливі переходи системи з одного стану в інший, а також множини X — можливих значень випадкового процесу $X(t)$ усі випадкові процеси можна поділити на чотири класи.

1. Процеси з дискретними станами і дискретним часом.

Прикладом такого процесу може бути кількість $X(t)$ білетів, на які випав виграш, із *n* куплених певною особою.

2. Процеси з дискретними станами і неперервним часом.

Наприклад, технічний пристрій складається із n вузлів, кожний з яких незалежно від інших може виходити із ладу. $X(t)$ — кількість вузлів, які можуть відказати в роботі до моменту часу $t = t_i$.

3. Процеси з неперервними станами і дискретним часом.

Наприклад, температура $\mathrm{T}^0(t)$, вимірювана в певні моменти часу в будь-якій точці простору, є випадковий процес із неперервним станом і дискретним часом.

4. Процеси з неперервними станами і неперервним часом.

Випадковий процес зміни напруги $V(t)$ в електромережі міста є прикладом такого процесу.

Для вивчення випадкових процесів розроблено різні методи їх дослідження та опису.

У деяких задачах випадкові процеси зручно подавати через найпростіші випадкові функції, які дістали назву ***елементарних***.

Елементарною випадковою функцією називають таку функцію від аргументу t, в якій залежність від t подано звичайною невипадковою елементарною функцією, до якої як параметри входять кілька (або одна) звичайних, не залежних від аргументу t, випадкових величин.

Приклад 1. Елементарна випадкова функція має такий вигляд:

$$X(t) = X\sqrt{t}, \qquad t > 0,$$

де X — неперервна випадкова величина, яка має рівномірний закон розподілу ймовірностей на інтервалі [–1; 1]. Побудувати графіки сім'ї реалізацій для цього випадкового процесу.

Розв'язання. Сім'ю реалізацій зображено на рис. 1.7 для $t \in [0,\ 1]$.

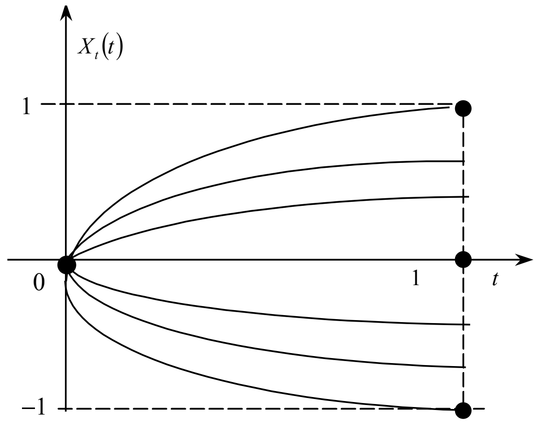


Рис. 1.7

Приклад 2. Елементарна випадкова функція має вигляд

$$X(t) = at + X\ ,$$

де X — випадкова величина, яка має рівномірний закон розподілу. Побудувати сім'ю реалізацій.

Розв'язання. Сім'ю реалізацій зображено на рис. 1.8.

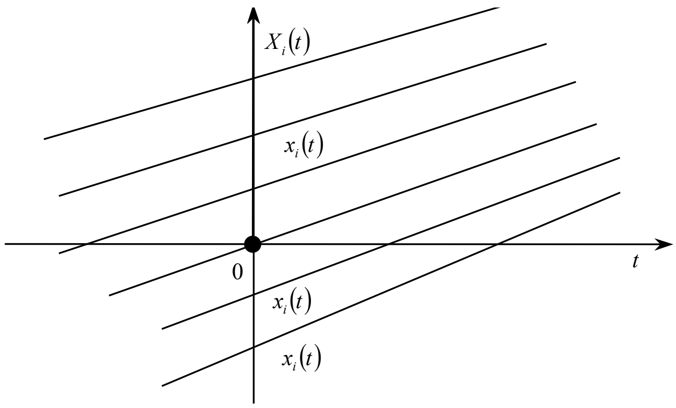


Рис. 1.8

Приклад 3. Елементарна випадкова функція має вигляд

$$X(t) = \cos Xt\ ,$$

де X — випадкова величина, яка може набувати лише додатних значень. Зобразити сім'ю реалізацій.

Розв'язання. Сім'ю реалізацій наведено на рис. 1.9.

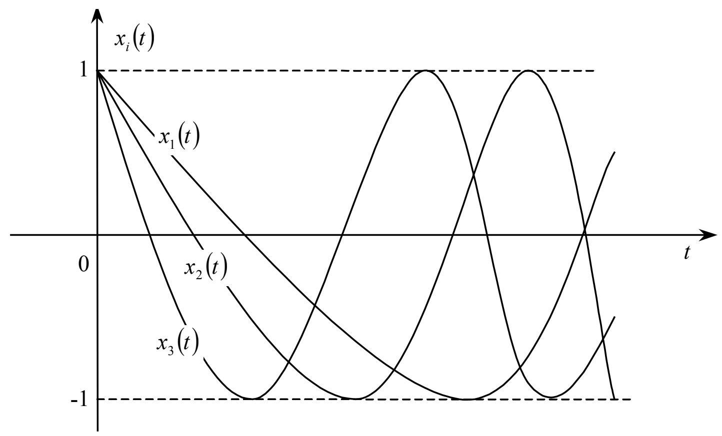


Рис. 1.9

Приклад 4. Відомо, що

$$X(t) = u\cos\alpha t + v\sin\alpha t,$$

де u, v — система випадкових величин; $\alpha = \text{const}$. Зобразити сім'ю реалізацій для цього випадкового процесу.

Розв'язання. Кожна реалізація являє собою гармонічне коливання з частотою α та випадковою амплітудою. Сім'ю реалізацій наведено на рис. 1.10.

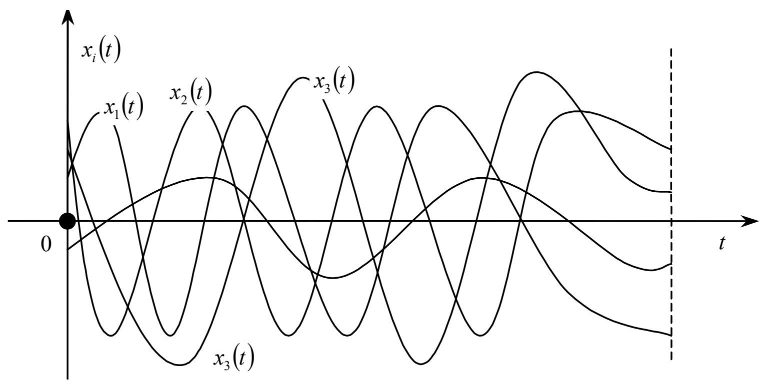


Рис. 1.10

1.3. Закони розподілу випадкових процесів та їхні основні характеристики

Як відомо з теорії ймовірностей, вичерпну інформацію про випадкову величину дає нам її закон розподілу ймовірностей. Так, для дискретної випадкової величини її закон розподілу може бути задано у вигляді ряду розподілу, для неперервної — щільністю ймовірностей.

Універсальною формою запису закону розподілу ймовірностей, придатною як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин, є функція розподілу ймовірностей $F(x) = P(X < x)$, де $P(X < x)$ — імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого від заданого x $(X < x)$.

Нехай задано випадковий процес $X(t)$. Як відомо, переріз випадкового процесу $X(t_i)$ при будь-якому фіксованому значенні аргументу $t = t_i$ являє собою випадкову величину, що має закон розподілу

$$F(t_i, x) = P(X(t_i) < x). \tag{1.3}$$

$F(t, x)$ є функцією від двох аргументів: значення часу t, для якого здійснюється переріз, та значення x, меншим від якого має бути випадкова функція (випадковий процес) $X(t)$.

Функція (1.3) називається ***одновимірним законом розподілу випадкового процесу***. Тепер постає запитання: чи дає функція (1.3) повну інформацію про випадковий процес $X(t)$ у цілому? Вочевидь, ні, оскільки вона визначена лише для одного перерізу, а тому й дає інформацію лише для цього перерізу $t = t_i$, але зовсім не інформує про спільний розподіл двох чи більше перерізів випадкового процесу.

І справді, можливі два випадкові процеси, які мають рівнозначні закони розподілу в кожному перерізі, але за своєю структурою значно відрізняються один від одного. Для наочності ці процеси зображено на рис. 1.11 і 1.12.

Якщо для випадкового процесу $X_1(t)$ реалізації змінюються плавно зі зміною аргументу t, то для $X_2(t)$ реалізації зазнають різких змін залежно від t. Для випадкового процесу $X_1(t)$ між перерізами існуватиме тісний зв'язок, для $X_2(t)$ цей зв'язок зі збільшенням t між перерізами буде зменшуватись. Очевидно одновимірний закон розподілу в цьому разі не може бути вичерпною характеристикою для розглядуваного процесу. Більш повно характеризувати цей процес може двовимірний закон розподілу, що являє собою функцію розподілу для двох перерізів випадкового процесу, які реалізують його для значень аргументів $t = t_1$, $t = t_2$, і має такий вигляд:

$$F(t_1, t_2, x_1, x_2) = P\{(X(t_1) < x_1) \cap (X(t_2) < x_2)\}. \tag{1.4}$$

Отже, у цьому разі функція розподілу залежатиме від чотирьох аргументів: t_1, t_2, x_1, x_2.

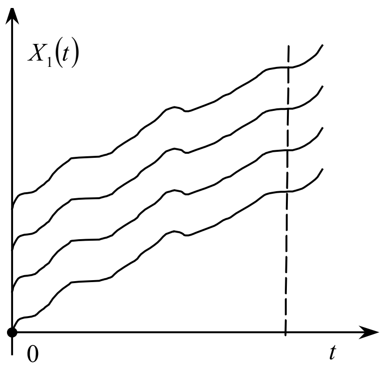


Рис. 1.11

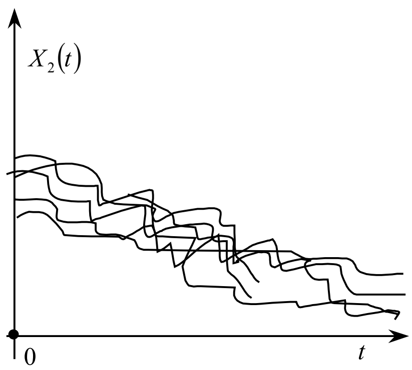


Рис. 1.12.

Функція розподілу ймовірностей для двох перерізів, як бачимо, вносить певні складнощі при її використанні. Але й двовимірна функція розподілу (1.4) не дає повної інформації про випадковий процес $X(t)$. Тому доводиться використовувати тривимірний закон розподілу, який можна задати функцією розподілу ймовірностей, залежною вже від шести аргументів:

$$F(t_1, t_2, t_3, x_1, x_2, x_3) = P\{(X(t_1) < x_1) \cap (X(t_2) < x_2) \cap (X(t_3) < x_3)\}. \tag{1.5}$$

Ця функція визначається трьома перерізами при $t = t_1$, $t = t_2$, $t = t_3$.

Звичайно, для ще більшої повноти інформації про випадковий процес можна теоретично збільшувати кількість перерізів. Проте оперувати функціями розподілу ймовірностей, що залежать від великої кількості аргументів, на практиці дуже важко. Якщо при цьому взяти до уваги, що зі зростанням кількості перерізів потрібно залучати дедалі більше експериментального матеріалу, то ситуація стає безвихідною. Тому на практиці, як правило, обмежуються двовимірним законом розподілу, що, як підтверджує практика, дає цілком задовільні результати, тим більше, що в багатьох прикладних задачах випадкові процеси можна вважати марковськими (процесами без наслідків), а отже, для таких процесів двовимірний закон розподілу дає вичерпну інформацію про них.

Здебільшого на практиці при дослідженні випадкових процесів узагалі не використовують закони розподілу, а обмежуються лише їхніми основними числовими характеристиками, які дають інформацію про найістотніші особливості цих процесів. Так, до речі, діють і під час розв'язування задач теорії ймовірностей, застосовуючи не закони розподілу випадкових величин, а їхні основні числові характеристики, такі як математичне сподівання, дисперсія, коваріація (кореляційний момент), початкові та центральні моменти різних порядків.

Те саме стосується й випадкових процесів, тільки в цьому разі числові характеристики будуть уже не числами, а функціями від аргументу t (часу), від якого залежить і випадковий процес $X(t)$, або функцією від двох (але не більше) аргументів.

ДОДАТОК 2

СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

2.1. Загальні відомості

Серед випадкових процесів часто трапляються такі, поводження яких при зміні часу характеризують певною однорідністю, яка полягає в тому, що вони мають вигляд неперервних коливань відносно певного середнього значення. Такі випадкові процеси дістали назву стаціонарних. Приклади ***стаціонарних*** випадкових процесів:

1) коливання електричної напруги в мережах міста;

2) коливання кількості експлуатованих технічних приладів за умови, що кількість приладів, які вводяться в експлуатацію, утворює стаціонарний потік, причому кожний із них експлуатується в середньому протягом одного й того самого часу;

3) коливання економічних показників певної галузі господарства країни впродовж певного проміжку часу і т. ін.

Оскільки стаціонарні випадкові процеси трапляються при розв'язуванні економічних, технічних, соціальних та інших практичних задач, набула широкого використання спеціальна теорія стаціонарних випадкових процесів або стаціонарних випадкових функцій.

Дамо означення стаціонарного випадкового процесу (функції).

Випадковий процес $X(t)$ називається ***стаціонарним***, якщо математичне сподівання цього процесу є сталою величиною, а кореляційна функція залежить лише від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$, тобто $m_x(t) = \mathrm{const}$, $K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau)$.

Це означення стаціонарного випадкового процесу в широкому розумінні. На практиці при розв'язуванні задач, як правило, використовуються математичне сподівання і кореляційна функція, а тому цілком задовольняється означення, яке дано в широкому розумінні.

Випадковий процес $X(t)$ називається ***стаціонарним у звуженому розумінні***, якщо всі його багатовимірні щільності ймовірностей

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n), \tag{2.1}$$

при будь-якому n залежать лише від інтервалів:

$$t_2 - t_1, \ldots t_n - t_{n-1}.$$

Розглянемо n перерізів стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, проведених у моменти часу $t_1,\ t_2, \ldots t_n$ (рис. 2.1).

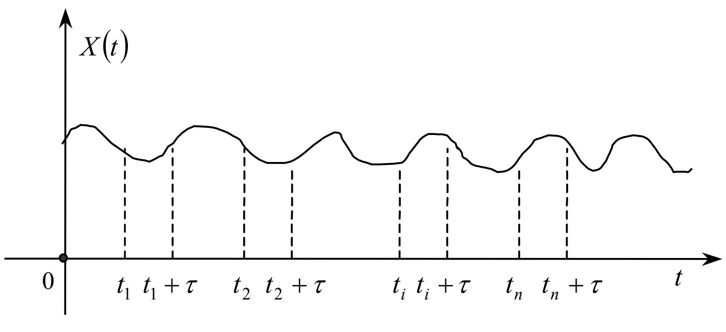


Рис. 2.1

Тоді для випадкового процесу $X(t)$ n-вимірна щільність імовірностей

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n). \tag{2.2}$$

Якщо ж $X(t)$ стаціонарний, то n-вимірна щільність (2.2) при зміщенні всіх його аргументів на одну й ту саму величину τ не зміниться:

$$f_n(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_n) = f_n(x_1, x_2, ..., x_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau). \tag{2.3}$$

Таким чином, n — вимірна щільність імовірностей для стаціонарного випадкового процесу не залежить від того, в які моменти часу $t_1,\ t_2, \ldots t_n$ проведено перерізи для цього процесу, а залежить лише від зміщення τ між цими перерізами.

Наприклад, для одновимірної щільності стаціонарного випадкового процесу $f(x,\ t)$ не залежить від того, де взято переріз, тобто виконується рівність

$$f(x_1\ t_1) = f(x_1\ t_2) = \ldots = f(x). \tag{2.4}$$

Для двовимірної щільності ймовірностей випадкового процесу $X(t)$ $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ залежатиме не від аргументів t_1, t_2, а лише від $\tau = t_2 - t_1$. А тому

$$f(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2) = f(x_1,\ x_2,\ t_1 - t_2) = f(x_1,\ x_2,\ \tau). \tag{2.5}$$

Оскільки здебільшого нас цікавитимуть лише характеристики випадкового процесу $m_x(t)$, $K_x(t_1,\ t_2)$, то надалі будемо розглядати лише стаціонарні випадкові процеси (функції) у широкому розумінні.

2.2. Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу та її властивості

Згідно з означенням стаціонарного випадкового процесу в широкому розумінні кореляційна функція цього процесу є функцією одного аргументу τ. Ця обставина значно спрощує операції над стаціонарними випадковими процесами (функціями). На підставі властивостей кореляційної функції довільного випадкового процесу сформулюємо основні властивості кореляційної функції для стаціонарного випадкового процесу.

$$K_x(0) = D_x = \text{const}, \tag{2.6}$$

тобто дисперсія стаціонарного випадкового процесу (функції) є сталою величиною і дорівнює кореляційній функції на початку координат.

$$K_x(-\tau) = K_x(\tau), \tag{2.7}$$

тобто кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є парною.

$$|K_x(\tau)| \le K_x(0) = D_x, \tag{2.8}$$

оскільки $D_x \ge 0$.

Із властивостей (2.2) і (2.3) випливає, що графік кореляційної функції симетричний відносно осі ординат і міститься у смузі $\lfloor -D_x,\ D_x \rfloor$. У загальному випадку графік $K_x(\tau)$ матиме такий вигляд, як зображено на (рис. 2.2).

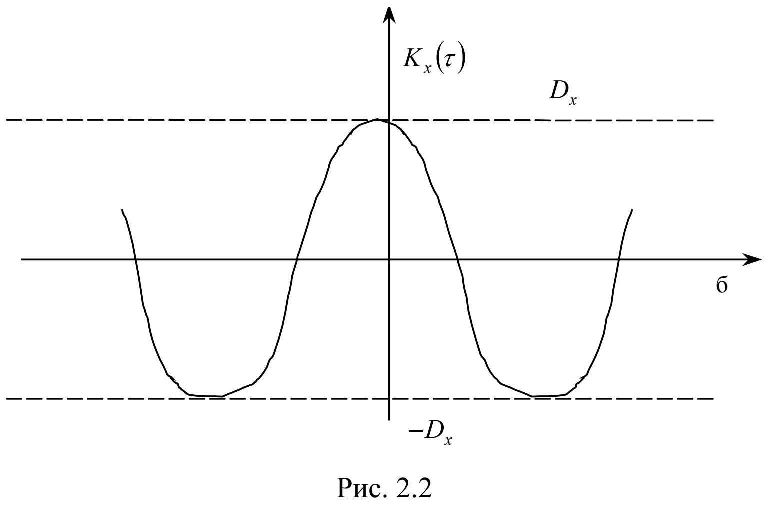


Рис. 2.2

Поряд із кореляційною функцією на практиці часто користуються нормованою кореляційною функцією, яка визначається за формулою:

$$r_x(\tau)=\frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}=\frac{K_x(\tau)}{D_x}. \quad (2.9)$$

Функція $r_x(\tau)$ є не що інше, як коефіцієнт кореляції між значеннями випадкового процесу (функції), відокремленими проміжком часу τ.

Із формули (2.9) маємо:

$$r_x(0)=\frac{K_x(0)}{K_x(0)}=1. \quad (2.10)$$

Властивості $r_x(\tau)$ аналогічні властивостям $K_x(\tau)$:

$$r_x(-\tau)=r(\tau).; \quad (2.11)$$

$$r_x(0)=1; \quad (2.12)$$

$$|r_x(\tau)|=1. \quad (2.13)$$

Властивість (2.13) випливає із властивості (2.8) кореляційної функції.

Приклад 1. Випадковий процес $X(t)$ задано в канонічному вигляді

$$X(t)=X_1\cos wt+X_2\sin wt,$$

де X_1, X_2 — випадкові величини, для яких $\mathrm{M}(X_1)=\mathrm{M}(X_2)=0$, $D(X_1)=D(X_2)=2$.

З'ясувати, чи є випадковий процес стаціонарним, якщо $K_{12}=0$.

Розв'язання. $M[X(t)]=m_x(t)=M[X_1\cos wt+X_2\sin wt]=\cos wt\ M[X_1]+\sin wt\ M[X_2]=0;$

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\cdot\dot{X}(t_2)\right].$$

Враховуючи, що $m_x(t_1)=m_x(t_2)=0$, дістаємо:

$$\begin{aligned}
&K_x(t_1,t_2)=M\left[(X_1\cos wt_1+X_2\sin wt_1)(X_1\cos wt_2+X_2\sin wt_2)\right]=\\
&=M[X_1^2\cos wt_1\cos wt_2+X_1X_2\cos wt_1\sin wt_2+X_2X_1\sin wt_1\cos wt_2+\\
&+X_2^2\sin wt_1\sin wt_2]=M\left[X_1^2\right]\cos wt_1\cos wt_2+M\left[X_1X_2\right]\cos wt_1\sin wt_2+\\
&+M\left[X_2X_1\right]\sin wt_1\cos wt_2+M\left[X_2^2\right]\sin wt_1\sin wt_2=\\
&=\left|\begin{array}{l}\text{оскільки } M\left[X_1^2\right]=M\left[X_2^2\right]=D[X_1]=D[X_2]=2,\ M[X_1]=M[X_2]=0,\\ \text{і }\ M[X_2X_1]=0\ (K_{12}=0),\ \text{ то маємо}\end{array}\right|=\\
&=2\cos wt_1\cos wt_2+2\sin wt_1\sin wt=2(\cos wt_1\cos wt_2+\sin wt_1\sin wt)=\\
&=2\cos(t_2-t_1)=2\cos w\tau;\quad (\tau=t_2-t_1);\\
&D_x(t)=K_x(0)=2.
\end{aligned}$$

Відповідь. Оскільки $m_x(t_1)=0$, $D_x(t)=2$ — сталі величини і при цьому кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=2\cos w\tau$ залежить лише від $(\tau=t_2-t_1)$, то випадковий процес є стаціонарним.

2.3. Ергодичні властивості стаціонарних випадкових процесів

Як відомо, щоб визначити характеристики для стаціонарного випадкового процесу (функції) $X(t)$, а саме $m_x(t)$, $K_x(\tau)$ і $D_x(t)$, необхідно знати одновимірну і двовимірну щільності ймовірностей або мати в розпорядженні велику кількість реалізацій цього процесу для того, щоб обчислити ці характеристики наближено (наприклад, замінюючи математичне сподівання середнім арифметичним для кожного значення випадкового процесу).

Більшість стаціонарних випадкових процесів (функцій) мають дуже важливу для практики ***ергодичну властивість***, сутність якої полягає в тому, що за однією окремо взятою достатньо протяжною реалізацією можна робити висновки про всі властивості процесів так само, неначе здійснено велику кількість реалізацій.

Якщо стаціонарний випадковий процес $X(t)$ має властивість ергодичності, то для нього середнє за часом наближено дорівнює середньому по множині реалізацій на достатньо великому проміжку спостережень. Отже, математичне сподівання, дисперсію та кореляційну функцію для стаціонарного випадкового процесу з ознакою ергодичності можна наближено визначити за однією лише реалізацією, але достатньо протяжною.

Ця реалізація є, так би мовити, уповноваженим представником усієї сукупності великої кількості реалізацій стаціонарного випадкового процесу. У математичній формі ергодичну властивість для $m_x(t),\ D_x(t),\ K_x(\tau)$ можна записати у вигляді:

$$m_x(t) = M\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) f(x,\ t)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\, dt. \tag{2.14}$$

$$D_x(t) = D\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_x(t)\right]^2 f(x,\ t)\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[x(t) - m_x(t)\right]^2 dt. \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - m_x(t_1)\right]\left[x_2 - m_x(t_2)\right] \cdot f(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)\, dt_1\, dt_2 = \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[x(t) - m_x(t)\right]\left[x(t+\tau) - m_x(t)\right] dt. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Тут $x(t)$ — будь-яка можлива реалізація випадкового процесу $X(t)$.

Достатньою умовою виконання рівності (2.4) для ергодичності стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ за математичним сподіванням є

$$\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0. \tag{2.17}$$

Ця умова буде також достатньою для виконання рівностей (2.15) і (2.16).

Стаціонарні випадкові процеси (функції) можуть мати ергодичну властивість щодо моментів не всіх порядків. Наприклад, стаціонарні випадкові процеси (функції) можуть бути ергодичними лише щодо перших двох моментів, а щодо решти моментів вищих порядків ця властивість не зберігається.

Але оскільки для опису випадкових процесів ми, як правило, обмежуємося лише математичним сподіванням і кореляційною функцією, то надалі вважатимемо стаціонарний випадковий процес (функцію) ергодичною, якщо умова ергодичності виконуватиметься саме для цих характеристик.

Зауважимо, що не всі стаціонарні випадкові процеси (функції) мають властивість ергодичності щодо $m_x(t),\ \ K_x(\tau)$. Наприклад, властивість ергодичності може порушуватися через наявність у складі випадкового процесу звичайної випадкової величини як доданка.

Розглянемо, наприклад, такий випадковий процес:

$$Y(t) = X(t) + X,$$

де $X(t)$ — стаціонарний випадковий процес, що має властивість ергодичності з характеристиками $m_x(t) = \text{const},\ \ K_x(\tau)$; X — звичайна випадкова величина з характеристиками $M(X) = 0,\ \ D(X) = D$. При цьому $X(t)$ і X між собою некорельовані.

Тоді дістанемо:

$$M\left[Y(t)\right] = M\left[X(t) + X\right] = M\left[X(t)\right] + M\left[X\right] = m_x(t).$$

$$K_y(\tau) = M\left[\dot{Y}(t)\cdot\dot{Y}(t+\tau)\right] = \left| \begin{array}{l} \text{оскільки } \dot{Y}(t) = \dot{X}(t) + \dot{X} = \dot{X}(t) - m_x(t) + X \\ \qquad\qquad \dot{Y}(t+\tau) = \dot{X}(t+\tau) + \dot{X} = \dot{X}(t+\tau) - m_x(t+\tau) + X, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{дістаємо:} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned} &= M\left[\left(X(t) - m_x(t) + X\right)\left(X(t+T) - m_x(t+T) + X\right)\right] = M\left[\left(X(t) - m_x(t)\right)\left(X(t+T) - m_x(t+T)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(X(t+T) - m_x(t+T)X + \left(X(t) - m_x(t)\right)\cdot X + X^2\right)\right] = \end{aligned}$$

$$= M\left[\left(X(t) - m_x(t)\right)\left(X(t+T) - m_x(t+T)\right) + M\left(X(t) - m_x(t)\right)\cdot M\left[X\right] + M\left(X(t+T) - m_x(t+T)\right)\cdot M\left[X\right] + M\left[X^2\right] = \right.$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{оскільки } M\left[\left(X(t) - m_x(t)\right)\left(X(t+T) - m_x(t+T)\right)\right] = K_x\left[T\right], \\ M(X) = 0,\ M\left(X^2\right) = D, \quad \text{дістаємо:} \end{array} \right| = K_x(\tau) + D.$$

Таким чином, маємо: $\mathrm{K_y}(\tau) = \mathrm{K_x}(\tau) + D.$

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathrm{K_y}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mathrm{K_x}(\tau) + D = D.$$

Отже, через наявність у складі випадкового процесу $Y(t)$ доданка X цей процес втрачає властивість ергодичності, оскільки не виконується достатня умова ергодичності (2.17).

Приклад 2. З'ясувати, чи є стаціонарний випадковий процес $X(t)=X\cos(wt+\alpha)$ ергодичним, коли відомо, що α — випадкова величина з рівномірним законом розподілу на проміжку $[0, 2\pi]$; X — випадкова величина із числовими характеристиками $M(X)=0$, $D(X)=M(X^2)=D$.

Випадкові величини X і α є некорельованими.

Розв'язання. Оскільки

$$X(t)=X\cos(wt+\alpha)=X\cos wt\cdot\cos\alpha-X\sin wt\cdot\sin\alpha\,,$$

то вираз для випадкового процесу подамо в такому вигляді:

$$X(t)=A_1\cos wt+A_2\sin wt,$$

де

$$A_1=X\cos\alpha,\quad A_2=X\sin\alpha.$$

Визначимо $M(A_1)$, $M(A_2)$, $M(A_1\cdot A_2)$.

$$M(A_1)=M(X\cos\alpha)=M(X)=M(\cos\alpha)=0. \tag{2.18}$$

$$M(A_2)=M(X\sin\alpha)=M(X)=M(\sin\alpha)=0. \tag{2.19}$$

$$M(A_1A_2)=M(X\cos\alpha\cdot X\sin\alpha)=M\left[X^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right]=M\left(X^2\right)\cdot M(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=\frac{1}{2}M\left(X^2\right)\cdot M(\sin 2\alpha).$$

Оскільки

$$M(\sin 2\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\alpha\, dx=0,$$

то маємо, що

$$M(A_1A_2)=0. \tag{2.20}$$

Далі визначаємо:

$$M\left[A_1^2\right]=M\left[X^2\cos^2\alpha\right]=M\left[X^2\right]\cdot M\left[\cos^2\alpha\right],$$

$$M\left[A_2^2\right]=M\left[X^2\sin^2\alpha\right]=M\left[X^2\right]\cdot M\left[\sin^2\alpha\right].$$

Оскільки

$$M\left[\cos^2\alpha\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\, d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\alpha}{2}d\alpha=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2\alpha\, d\alpha=\frac{1}{2},$$

$$M\left[\sin^2\alpha\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\alpha\, d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\alpha}{2}d\alpha=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2\alpha\, d\alpha=\frac{1}{2},$$

то

$$M\left[A_1^2\right]=M\left[A_2^2\right]=\frac{1}{2}M\left[X^2\right]=\frac{1}{2}D. \tag{2.21}$$

Отже, можемо визначити

$$m_x(t)=M[X(t)]=M[A_1\cos wt+A_2\sin wt]=M[A_1]\cdot\cos wt+M[A_2]\cdot\sin wt=0,$$

а також кореляційну функцію

$$K_x(t_1,\, t_2)=M\left[\dot{X}(t_1)\cdot\dot{X}(t_2)\right].$$

Оскільки

$$\dot{X}(t_1)=X(t_1)-m_x(t_1)=X(t_1)=A_1\cos wt_1+A_2\sin wt_1,$$

$$\dot{X}(t_2)=X(t_2)-m_x(t_2)=X(t_2)=A_1\cos wt_2+A_2\sin wt_2,$$

то

$$K_x(t_1,\,t_2)=M\left[(A_1\ \cos wt_1+A_2\sin wt_1)(A_1\ \cos wt_2+A_2\sin wt_2)\right]=$$
$$=M[A_1^2\cos wt_1\cos wt_2+A_1A_2\cos wt_1\sin wt_2+A_1A_2\sin wt_1\cos wt_2+$$
$$+A_2^2\sin wt_1\sin wt_2]=M\left[A_1^2\right]\cos wt_1\cos wt_2+M\left[A_1A_2\right]\cos wt_1\sin wt_2+$$
$$+M\left[A_1A_2\right]\sin wt_1\cos wt_2+M\left[A_2^2\right]\sin wt_1\sin wt_2=\left|\begin{array}{l}\text{із урахуванням (2.20), (.2.21),}\\ \text{дістаємо}\end{array}\right|=$$
$$=\frac{1}{2}D\cos wt_1\cos wt_2+\frac{1}{2}D\sin wt_1\sin wt_2=\frac{1}{2}D(\cos wt_1\cos wt_2+\sin wt_1\sin wt_2)=\frac{1}{2}D\cos w(t_2-t_1)\quad.$$

Отже, маємо

$$K_x(t_1,\,t_2)=\frac{1}{2}D\cos w\,(t_2-t_1). \tag{2.22}$$

Із (2.22) випливає, що при $\tau=t_2-t_1\to\infty$ $K_x(\tau)$ не прямує до нуля.

Таким чином, стаціонарний випадковий процес $X(t)$ не має ознаки ергодичності.

Приклад 3. Стаціонарний випадковий процес $X(t)$ являє собою так званий телеграфний сигнал, який може набувати одного зі значень $+a$, або $-a$, і при цьому зміна знака на проміжку часу $[t,\ t+\tau]$ не залежить від того, скільки цих змін відбудеться поза цим інтервалом.

У цьому разі кількість змін знака випадкового процесу $X(t)$ відповідає закону Пуассона, а тому ймовірність дістати n змін цього процесу за час τ визначається формулою:

$$P(n)=\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{-\lambda\tau}, \tag{2.23}$$

де λ — середня кількість змін знака за одиницю часу для $X(t)$.

Дослідити на ергодичність цей випадковий процес $X(t)$.

Розв'язання. Одновимірний закон розподілу для випадкового процесу матиме, вочевидь, такий вигляд:

$X(t)$:

$-a$	$+a$
0,5	0,5

бо кількість значень $-a$ вважаємо такою, що дорівнює кількості появ значень $+a$.

З одновимірного закону розподілу випадкового процесу $X(t)$ випливає:

$$m_x(t)=-a\cdot 0{,}5+a\cdot 0{,}5=0.$$
$$D_x(t)=(-a)^2\cdot 0{,}5+(+a)^2\cdot 0{,}5=a^2. \tag{2.24}$$

Розглянемо два довільні перерізи $t=t_1$, $t=t_2$. Кореляційна функція буде визначатись як

$$K_x(t_1,\,t_2)=\mathrm{M}[X(t_1)\cdot X(t_2)].$$

Добуток $X(t_1)\cdot X(t_2)$ може набувати лише двох значень: $+a^2$, якщо кількість змін знака за час $\tau=t_2-t_1$ буде парною, і $-a$, якщо кількість змін знака буде непарною. Імовірність дістати парну кількість змін знака за проміжок часу τ буде дорівнювати:

$$P(0)+P(2)+P(4)+\ldots+P(2k),$$

а ймовірність дістати непарну кількість змін знака буде дорівнювати:

$$P(1)+P(3)+P(5)+\ldots+P(2k+1).$$

Реалізацію такого випадкового процесу зображено на рис. 2.3.

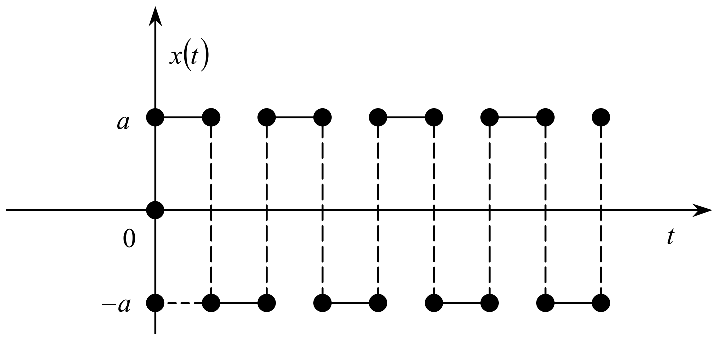


Рис. 2.3

З урахуванням щойно сказаного дістаємо:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau) = a^2\left[P(0) + P(2) + P(4) + \ldots + P(2k)\right] - a^2\left[P(1) + P(3) + P(5) + \ldots + P(2k+1)\right].$$

Використовуючи тепер формулу (2.23), маємо:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau) = a^2\left[e^{-\lambda\tau} + \frac{(-\lambda\tau)^2}{2!}e^{-\lambda\tau} + \frac{(-\lambda\tau)^4}{4!}e^{-\lambda\tau} + \ldots + \frac{(-\lambda\tau)^{2k}}{2k!}e^{-\lambda\tau}\right] -$$

$$-a^2\left[\frac{\lambda\tau}{1!}e^{-\lambda\tau} + \frac{(-\lambda\tau)^3}{3!}e^{-\lambda\tau} + \frac{(-\lambda\tau)^5}{4!}e^{-\lambda\tau} + \ldots + \frac{(-\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda\tau}\right] =$$

$$= a^2\ e^{-\lambda\tau}\ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda\tau)^k}{k!} = a^2\ e^{-\lambda\tau}\cdot e^{-\lambda\tau} = a^2\ e^{-2\lambda\tau}.$$

Таким чином, дістаємо:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(\tau) = a^2\ e^{-2\lambda\tau}. \tag{2.25}$$

Оскільки

$$\lim_{\tau\to 0}K_x(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}a^2\ e^{-2\lambda\tau} = a^2\lim_{\tau\to\infty}e^{-2\lambda\tau} = 0,$$

то випадковий $X(t)$ є ергодичним і стаціонарним.

2.4. Приклади в загальному вигляді для стаціонарних випадкових процесів. Білий шум

Білим шумом називають стаціонарний випадковий процес (функцію) зі сталою спектральною щільністю для всіх частот від 0 до ∞.

Для білого шуму характерним є рівномірний розподіл енергії сигналу за всіма частотами від 0 до ∞, як це відбувається в радіотехніці. В економіці широкого використання набуває білий шум для дослідження економічних показників у динаміці. Це стосується, насамперед, аналізу часових рядів.

Реально такі процеси не існують, але поняття «білий шум» є зручною абстракцією в тому разі, коли спектральна щільність є наближено сталою на певному діапазоні частот.

Нехай задано стаціонарний випадковий процес $X(t)$, спектральна щільність якого на проміжку частот $w \in \lfloor w_1, w_2 \rfloor$ стала, а для $w \in \lfloor w_1, w_2 \rfloor$ дорівнює нулю. У цьому разі нормована спектральна щільність подається так:

$$S_x^*(w) = \begin{cases} a,\ w \le w_1, \\ \dfrac{1}{w_2 - w_1},\ w_1 < w \le w_2, \\ 0,\ w > w_2. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 2.6.

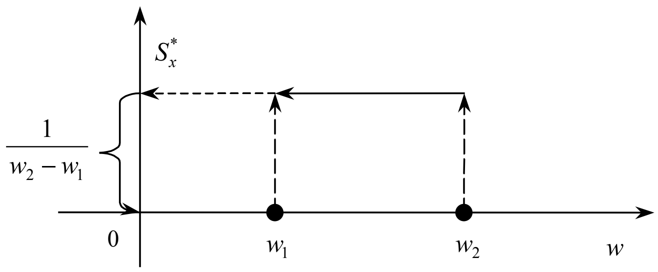


Рис. 2.6

Нормована кореляційна функція в цьому разі визначається за формулою:

$$r_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x^*(w) \cdot \cos w\tau \; dw = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{w_2 - w_1} \cdot \cos w\tau \; dw = \frac{1}{\tau \, (w_2 - w_1)} \cdot \sin w\tau = \Big|_{w_1}^{w_2} = \frac{\sin w_2\tau - \sin w_1\tau}{\tau(w_2 - w_1)}.$$

Цікаво дослідити поводження кореляційної функції $K_x(\tau)$ за умови $w_1 \to w_2$. Згідно з останнім співвідношенням маємо:

$$r_x(\tau) = \lim_{w_1 \to w_2} \frac{\sin w_2\tau - \sin w_1\tau}{(w_2 - w_1)\tau} = \lim_{w_1 \to w_2} \frac{2}{\tau(w_2 - w_1)} \cos\frac{(w_2 + w_1)\tau}{2} \sin\frac{(w_2 - w_1)\tau}{2} =$$

$$= \lim_{w_1 \to w_2} \cos\frac{(w_2 + w_1)}{2}\tau \cdot \lim_{w_1 \to w_2} \frac{\sin\frac{(w_2 - w_1)\tau}{2}}{\frac{(w_2 - w_1)\tau}{2}} = \cos\, w_2\tau.$$

Тут $\lim\limits_{w_1 \to w_2} \dfrac{\sin\frac{(w_2 - w_1)\tau}{2}}{\frac{(w_2 - w_1)\tau}{2}} = 1.$

Отже, $r_x(\tau) = \cos\, w_2\tau.$

При $w_1 = 0$

$$r_x(\tau) = \frac{1}{\tau w_2} \sin w_2\tau.$$

Коли $w_2 \to \infty$, маємо:

$$r_x(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

Дістали ***нормовану кореляційну функцію для білого шуму***.

Тоді кореляційна функція

$$K_x(\tau) = \begin{cases} D_x, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases}$$

Таким чином, для білого шуму кореляційна функція дорівнюватиме нулю скрізь, крім точки $\tau = 0$. А це означає, що для білого шуму зовсім немає зв’язку між будь-якими перерізами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Наука, 1980.
2. *Таха Х.* Введение в исследование операций. — В 2-х кн. — М.: Мир, 1985.
3. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М.: Советское радио, 1971.
4. *Кемени Дж. Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970.
5. Исследование операций в экономике / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТ, 2002.
6. *Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій: Підручник. — К., 2000.
7. *Пономаренко О. І. Пономаренко В. О.* Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі: Навч. посібник. — К.: Либідь, 1995.
8. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2005.
9. *Жлуктенко В.І., Тарасова Л.Г, Савіна С.С.* Дослідження операцій: навч. посіб. — К. КНЕУ, 2009.
10. *Жлуктенко В.І., Тарасова Л.Г., Савіна. С.С.* Дослідження операцій: навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2009.
11. *.Наконечний С. І., Савіна С. С.* Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2003.
12. *Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Шарапов О.Д., та ін.* Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник / За заг. ред. В. В. Вітлінського. — К.: КНЕУ, 2008.

Навчальне видання

ВІТЛІНСЬКИЙ Вальдемар Володимирович
ТАРАСОВА Людмила Григоріївна
САВІНА Світлана Станіславівна

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

Редактор *І. Савлук*
Коректор *Л. Гримальська*
Верстка *Н. Пінчук*

Підп. до друку 29.04.14. Формат 60×84/8
Друк. арк. 25,63. Зам. 13-4616

Державний вищий навчальний заклад
«Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)

Тел./факс (044) 537-61-41; тел. (044) 537-61-44
E-mail: publish@kneu.kiev.ua