МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

С. І. НАКОНЕЧНИЙ
С. С. САВІНА

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ КНЕУ 2005

Рецензенти:

Ю. Г. Лисенко, д-р екон. наук, проф.
(Донецький національний університет)
О. Є. Кузьмін, д-р екон. наук, проф., засл. працівник нар. освіти України
(Національний університет «Львівська політехніка»)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 14/18.2-745 від 21.04.03

ББК 22.18
Н-22

Наконечний С. І., Савіна С. С.
Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: КНЕУ, 2005. — 452 с.
ISBN 966–574–538–7

Навчальний посібник написано відповідно до програми курсу «Математичне програмування» для підготовки бакалаврів з економіки. У посібнику розглядаються основні математичні методи та моделі дослідження економічних систем та процесів, що є основою для прийняття обґрунтованих управлінських рішень в реальних умовах. Розділи з першого по п'ятий присвячені задачам лінійного програмування, теорії двоїстості, економічному аналізу оптимальних планів. З шостого по одинадцятий розділи розглядаються складніші задачі математичного програмування: цілочислові, нелінійні, динамічні, стохастичні, дробово-лінійні, задачі теорії ігор.

Теоретичний матеріал ілюструється числовими економіко-математичними моделями, які адекватно відображають основні виробничо-економічні процеси. В кількох розділах наведено понадпрограмний матеріал.

Рекомендується для бакалаврів університетів з напрямку «Економіка і підприємництво» та студентів інших навчальних закладів, які вивчають курси «Математичне програмування» та «Дослідження операцій», а також для слухачів різних курсів і шкіл підвищення кваліфікації для економістів.

ББК 22.18

ISBN 966–574–538–7

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Головне завдання фахівців з економіки та підприємництва — керувати економічними системами, розробляючи і впроваджуючи стратегічні та тактичні плани. Керування економічними системами — це, по суті, використання знань про системи, здобуття нової інформації та застосування її з метою відшукання найефективніших способів досягнення заданих результатів. Організаційна форма, що має будуватися не за бюрократичним принципом, а на засадах адхократії, стає структурою холдингового типу: за таких умов координується робота багатьох тимчасових груп, які розпочинають і припиняють свою діяльність згідно з темпами змін у навколишньому середовищі.

Отже, для керування економічними системами необхідна інформація. Людство вступило у XXI століття, у якому стрімко відбуваються процеси інформатизації та інтелектуалізації суспільства.

Знання та індивідуальний підхід перетворюються на основну цінність інформатизованого суспільства. Більш того, головним фактором для людини стає не абсолютний дохід, а, як стверджує Р. Інглегарт, ступінь безпечності, статус і якість життя. Прагнення до матеріальних цінностей змінюється на прагнення до самовираження, пошуку сенсу життя, бажання залишити свій слід у ньому. Дедалі більше людей на Заході надають перевагу праці не найдохіднішій, а творчо цікавій, яка дає змогу самореалізуватися. Те, що К. Маркс і Ф. Енгельс цілком справедливо визначали як суспільство вільної індивідуальності, починає виявлятися у країнах Заходу.

Наразі ми стаємо свідками інтелектуалізації та інформатизації західного суспільства і можемо бути впевненими, що цей процес не обмине Україну. Наша країна має до цього готуватися, розвивати наукові дослідження, виховувати відповідних фахівців і, що найважливіше, таких, котрі мають відповідний рівень знань.

На наших очах пройшла комп’ютерна революція. У домівках з’явилися комп’ютери, оснащені сучасним програмним забезпеченням з широкими можливостями. Завдяки Інтернету наше суспільство має змогу використовувати у своїй діяльності світові досягнення науки, культури тощо. Десять років тому такий перебіг справ мало хто міг передбачити. Немає сумніву, що у наступному десятиріччі комп’ютер стане таким же поширеним, як і телефон.

Інформатизація суспільства — закономірний процес. Наприклад, у США злам припав на 1991 рік, коли вперше витрати на придбання інформаційної техніки (112 млрд дол.) перевищили витрати на придбання промислового обладнання (107 млрд дол.). Цей рік можна вважати першим роком інформаційної ери. Відтоді різниця між зазначеними витратами постійно збільшується. Зростання ролі знань, сучасних технологій, добування нової важливої для керування інформації притаманне інформатизованим суспільствам. С.Л. Удовик вдало на прикладі компаній «IBM» та «Microsoft» показав сутність і переваги використання інформаційних технологій. Наприкінці 1996 року ринкова вартість компанії «Microsoft» становила 85,5, а «IBM» — 70,7 млрд дол., хоча остання продавала набагато більше продукції. Окрім того, вартість основних виробничих засобів та устаткування «IBM» сягає 16,6 млрд дол., а «Microsoft» — не перевищує 930 млн дол. Отже, з позиції індустріального суспільства основною вартістю «Microsoft» є «повітря» — ідеї, думки, набутий працівниками досвід, престижне ім’я, можливості, особливо можливості перспективні, а також розумні й творчі голови службовців. Як вдало висловився Д. Танскотт з приводу «Microsoft», активи компанії щовечора розходяться по домівках. Більш того, з погляду матеріальних активів інша добре відома у нас компанія — «Visa International» — просто не існує, хоча й здійснює фінансові угоди на третину трильйона доларів за рік.

Зауважимо, що в розвинутих країнах чисельність працівників, зайнятих у сфері виробництва, з року в рік зменшується. Так, нині у США частка таких працівників становить близько 10%, а в інтелектуальних сферах зайнято вже майже 60%.

Принагідно зазначимо, що рівень рентабельності у виробничій сфері не перевищує 5—15%, а в інтелектуальній — 1000—2000%. Саме тому високотехнологічні й інтелектуальні суспільства практично не переживають криз — рівень рентабельності їхньої продукції витримує багаторазове зниження цін.

За умов інформатизації суспільства головним його надбанням стає інтелектуальний продукт, отримуваний завдяки розробці нових технологій та інвестиціям у знання.

Підкреслимо, що коли йдеться про інформатизацію суспільства, то керівник має відповідати за використання й ефективність знань. Отже, у таких суспільствах змінюються сутність і методи керування економічними системами.

Інформаційна та комп’ютерна революція прискорює розвиток суспільства, яке буде не капіталістичним і не комуністичним, а інформаційним. Ефективність сягне такого високого рівня, що всі члени суспільства в матеріальному плані будуть повністю задоволені. Проте це не означає, що в суспільстві не буде суперечностей. Суспільство внаслідок такої революції поділиться на два протилежні класи, а саме, на тих, хто опанував комп'ютерні технології, і на тих, хто цього не зробив або не зміг зробити. Виникне реальне протистояння в суспільстві, яке може мати негативніші наслідки, ніж перехід наших предків від кустарного до фабричного виробництва. Річ у тім, що промислова революція, яка розтягнулася в часі, дала можливість людям адаптуватися до нових умов. При цьому створювалися нові робочі місця. Комп'ютерна революція проходить стрімко, загрожує зруйнувати більше робочих місць, ніж створити, формуються нові жорсткі «класові» бар'єри, особливо між високо- і малоосвіченими членами суспільства.

Принагідно зазначимо, що українське суспільство значною мірою відстає від світового рівня у процесах інформатизації, використання комп'ютерної техніки. Важливою для нашого суспільства є проблема вдосконалення керування економічними системами на базі комп'ютерних технологій, тобто інтенсивного впровадження систем підтримки прийняття рішень (СППР), які впродовж трьох останніх десятиліть широко застосовуються у розвинутих країнах. Наприклад, для розроблення програмного забезпечення СППР США щорічно витрачають понад 1 млрд доларів. Хоча в Україні такі системи ще практично не використовуються, але інтелектуальна діяльність нашого суспільства є доволі прогресуючою і динамічною, його інформатизація потребуватиме використання СППР. Фахівці-економісти мають бути готовими до такого перебігу процесів інформатизації.

СППР, окрім загального програмного забезпечення, містять у собі банк економіко-математичних методів і моделей. Щоб ефективно застосовувати СППР, необхідно знати засадні принципи та прийоми математичного моделювання, вміти будувати економіко-математичні моделі економічних процесів та явищ, знати методи оптимізації різних задач. Усе це є змістом дисциплін економіко-математичного циклу. Отже, глибоке вивчення цього циклу дисциплін дасть змогу фахівцеві-економісту вступити в інформаційне суспільство, допоможе здобувати нові знання та унікальну інформацію. Цей цикл дисциплін є базовим у підготовці економістів і підприємців. Тільки з допомогою методів математичного моделювання можна збагатитися знаннями про системи, у тому числі й економічні. Математичне програмування є однією з засадних дисциплін економіко-математичного циклу, які вивчають в економічних вузах.

У пропонованому навчальному посібнику на прикладі економічних задач досить популярно викладені основні методи математичного програмування, освоєння яких не потребує глибоких математичних знань, а лише старанної праці. У посібнику дано теоретичні засади та алгоритми розв'язання задач математичного програмування, домашні завдання тощо.

У підручнику, окрім загальнодоступного матеріалу, включено параграфи 1.4; 2.8.7; 2.9; 3.7; 5.10; 6.6, що містять понадпрограмний матеріал і присвячені студентам, які ширше і глибше цікавляться прикладною математикою.

Вказаний матеріал не є обов'язковим для бакалаврів-економістів, але його вивчення є бажаним для студентів, які будуть займатися математичним моделюванням. Читач може опустити відмічений текст, що не впливатиме на подальше засвоєння матеріалу. Кінцевий рівень знань відповідає програмі курсу «Математичне програмування».

Увагу допитливого студента звернемо на той факт, що розвиток математичного програмування почався трохи більше шести десятиліть тому. 1939 року академік Л.В. Канторович, досліджуючи деякі задачі економічного змісту, розробив методи чисельного розв'язування екстремальних задач. Цей науковий напрямок розвивається досить бурхливо. Ряд вчених за розроблення методів оптимізації отримали Нобелівські премії, серед них — і академік Л.В. Канторович. Отже, працьовиті і талановиті студенти мають можливість ознайомитися в періодичній пресі з останніми досягненнями у сфері оптимізації функціонування і розвитку економічних процесів. Опанувати математичне моделювання і методи оптимізації студенти мають неодмінно, щоб стати в інформаційному суспільстві фахівцями високого рівня.

«Мало є речей, які не піддаються математичному обґрунтуванню; і коли вони не піддаються, це ознака того, що наші знання про них дуже малі і нечіткі. А маючи змогу вдатись до математичного обґрунтування, великою дурістю було б шукати якесь інше, — це все одно, що йти навпомацки в темряві, коли поряд стоїть свічка».

Дж. Арбатнот

РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ, СФЕРИ ТА ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ

1.1.Предмет та об'єкти математичного програмування

Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming*, що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Сутність задачі економічного вибору та пов'язану з цим необхідність використання моделей та методів математичного програмування проілюструємо на прикладі.

Приклад 1.1. Фірма спеціалізується на виготовленні та реалізації електроплит і морозильних камер. Припустимо, що збут продукції необмежений, проте обсяги ресурсів (праці та основних матеріалів) обмежені. Завдання полягає у визначенні такого плану виробництва продукції на місяць, за якого виручка була б найбільшою.

Норми використання ресурсів та їх загальний запас, а також ціни одиниці кожного виду продукції наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

ІНФОРМАЦІЯ, НЕОБХІДНА ДЛЯ СКЛАДАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ПРОГРАМИ

Вид продукції	Норми витрат на одиницю продукції			Ціна одиниці продукції, ум. од.
	робочого часу, люд.-год.	листового заліза, $м^2$	скла, $м^2$	

Морозильна камера	9,2	3	—	300
Електрична плита	4	6	2	200
Загальний запас ресурсу на місяць	520	240	40	—

Розглянемо кілька можливих варіантів виробничої програми.

Перша виробнича програма. Очевидно, що найпростішим з усіх можливих варіантів є виробництво одного виду продукції. Припустимо, що виготовляються лише морозильні камери. Ресурс робочого часу (520 люд.-год.) дає змогу виготовляти 520 : 9,2 = 56 морозильних камер. Наявна кількість листового заліза забезпечує виготовлення 240 : 3 = 80 морозильних камер. Скло для виготовлення даного виду продукції не використовується. Отже, кожного місяця можна випускати лише 56 морозильних камер, що дасть виручку обсягом 56 · 300 = 16800 ум. од.

Зазначимо, що у разі реалізації такої виробничої програми загальний запас листового заліза використовується не повністю, а скло не використовується взагалі.

Друга виробнича програма. Визначимо кількість електроплит, які можна виготовити за даних обсягів ресурсів:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий час}: & 520:4=130 \\ \textit{листове залізо}: & 240:6=40 \\ \textit{скло}: & 40:2=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 \quad \textit{електроплит.}$$

На виробництво 20 електроплит буде використано таку кількість ресурсів:

	буде використано	*залишок*
робочий час:	20 · 4 = 80 (люд.-год.)	520 – 80 = 440 (люд.-год.)
листове залізо:	20 · 6 = 120 (м^2)	240 – 120 = 120 (м^2)
скло:	20 · 2 = 40 (м^2)	немає

Залишки першого та другого ресурсів забезпечать виробництво морозильних камер обсягом:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{робочий} \quad \textit{час}: & 440:9{,}2=47 \\ \textit{листове залізо}: & 120:3=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40 \textit{ морозильних камер.}$$

Отже, друга виробнича програма уможливлює виробництво 20 електроплит та 40 морозильних камер. Виручка становитиме:

$$20 \cdot 200 + 40 \cdot 300 = 16000 \text{ ум. од.}$$

Зіставляючи першу та другу виробничі програми, бачимо, що за першою виручка є більшою, отже, вона краща, ніж друга.

Зрозуміло, що розглянуті програми не вичерпують усіх можливих варіантів. Наприклад, доцільно було б розглянути програму виробництва 41 морозильної камери та можливої кількості електроплит; 42 морозильних камер та можливої кількості електроплит; 43 морозильних камер та можливої кількості електроплит і т.д. Отже, для того, щоб знайти найкращий варіант виробництва продукції, необхідно перебрати досить велику кількість всіх можливих варіантів (для інших задач у більшості випадків кількість таких варіантів є дуже великою або нескінченною).

Зауважимо, що дана задача є надто спрощеною порівняно з реальними економічними задачами, в яких кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв’язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов’язана назва предмета — «математичне програмування».

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, ***предметом*** якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об’єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв’язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв’язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

1.2.Математична постановка задачі математичного програмування

Подамо схематично довільну економічну систему у такому вигляді (рис.1.1):

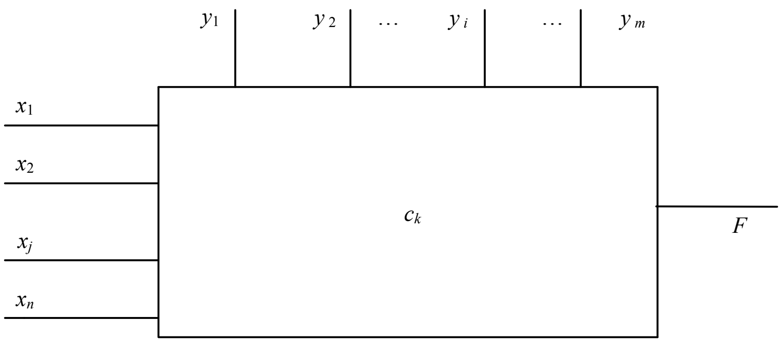


Рис.1.1. Схема економічної системи

Параметри c_k ($k = 1, 2, ..., l$) є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про таку економічну систему, як сільськогосподарське підприємство, то його параметрами є наявні ресурси (земельні угіддя, робоча сила, сільськогосподарська техніка, тваринницькі та складські приміщення), рівень урожайності сільськогосподарських культур, продуктивності тварин, норми витрат ресурсів, ціни та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Частина параметрів c_k для певної системи може бути сталими величинами, наприклад, норми висіву насіння сільськогосподарських культур, норми споживання тваринами кормів тощо, а частина — змінними, тобто залежатиме від певних умов, як, скажімо, урожайність сільськогосподарських культур, собівартість продукції, реалізаційні ціни на рослинницьку й тваринницьку продукцію.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість корів, неперервною — площа посіву озимої пшениці, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою — кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j $(j = 1, 2, ..., n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_i $(i = 1, 2, ..., m)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай F — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$F = f(x_1, x_2, ..., x_n;\ \ y_1, y_2, ..., y_m;\ c_1, c_2, ..., c_l). \qquad (1.1)$$

Функцію F називають ***цільовою функцією***, або ***функцією мети***. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max_{x_j}(\min) F^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ c_1, c_2, \ldots, c_l)\ . \qquad (1.2)$$

Можливості вибору x_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m; c_1, c_2, \ldots, c_l)\{\leq, =, \geq\}0;$$
$$(i = 1, 2, \ldots, S). \qquad (1.3)$$

Тут набір символів ($\leq$, $=$, $\geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\leq$, для інших — рівності ($=$), а для решти — нерівності типу $\geq$.

Система (1.3) називається ***системою обмежень***, або ***системою умов*** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n). \qquad (1.4)$$

Залежності (1.2)—(1.4) утворюють ***економіко-математичну модель*** економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1.Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2.У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3.Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4.Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3), (1.4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних x_1, x_2, ..., x_n, що задовольняє умови (1.3) і (1.4), називають ***допустимим планом***, або ***планом***. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною ***стратегією економічної системи, програмою дій***. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів утворює ***область існування планів***.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається ***оптимальним***. Оптимальний план є ***розв'язком задачі математичного програмування*** (1.2)—(1.4).

1.3.Приклад економіко-математичної моделі

Повертаючись до наведеного прикладу 1.1, побудуємо економіко-математичну модель даної задачі.

Позначимо через x_1 кількість вироблених морозильних камер, а через x_2 — електроплит. Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів.

Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, що наведені в табл. 1.1, запишемо сумарні витрати робочого часу: $9{,}2x_1 + 4x_2$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 520 люд.-год. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання листового заліза та скла:

$$3x_1 + 6x_2 \le 240\ ;$$

$$2x_2 \le 40.$$

Необхідно серед множини всіх можливих значень x_1 та x_2 знайти такі, за яких сума виручки максимальна, тобто: $\max F = 300x_1 + 200x_2$.

Отже, умови задачі, описані в прикладі 1.1, можна подати такою економіко-математичною моделлю:

$$\max F = 300x_1 + 200x_2,$$

за умов:

$$9{,}2x_1 + 4x_2 \le 520;$$

$$3x_1 + 6x_2 \le 240;$$

$$2x_2 \le 40;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Остання умова фіксує неможливість набуття змінними від'ємних значень, тому що кількість виробленої продукції не може бути від'ємною. Розв'язавши задачу відповідним методом математичного програмування, дістаємо такий розв'язок: для максимальної виручки від реалізації продукції необхідно виготовляти морозильних камер — 50 штук, електроплит — 15 (x_1 = 50, x_2 = 15).

Перевіримо виконання умов задачі:

$$9{,}2 \cdot 50 + 4 \cdot 15 = 520;$$

$$3 \cdot 50 + 6 \cdot 15 = 240;$$

$$2 \cdot 15 = 30 < 40.$$

Всі умови задачі виконуються, до того ж оптимальний план дає змогу повністю використати два види ресурсів з мінімальним надлишком третього.

Виручка становитиме: $F = 300 \cdot 50 + 200 \cdot 15 = 18\,000$ ум. од.

Отриманий оптимальний план у порівнянні з першим варіантом виробничої програми уможливлює збільшення виручки на $18\,000 - 16\,800 = 1200$ ум. од., тобто на $\frac{1200}{16\,800} 100\% = 7{,}1\%$.

1.4.Багатокритеріальна оптимізація

Зауважимо, що в класичній постановці задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від реалізації виробленої продукції чи максимум рівня рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Крім того, бажаним є застосування кількох критеріїв одночасно, причому вони можуть бути взагалі несумісними. Наприклад, вимога досягти максимальної ефективності виробництва за мінімальних витрат ресурсів з погляду постановки математичної задачі є некоректною. Мінімальні витрати ресурсів — це нульові витрати, що мають місце за повної відсутності будь-якого процесу виробництва. Аналогічно максимальна ефективність може бути досягнута лише у разі використання певних обсягів (звичайно не нульових) ресурсів. Тому коректними є постановки задач такого типу: досягти максимальної ефективності при заданих витратах чи досягти заданого ефекту за мінімальних витрат.

Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатокритеріальної оптимізації. Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, розроблено математичні методи, що дають змогу будувати компромісні плани, тобто здійснювати багатокритеріальну оптимізацію.

Найчастіше способи використання багатьох критеріїв у задачах математичного програмування зводяться до штучного об'єднання кількох вибраних показників в один. Наведемо кілька таких способів [7].

Нехай у задачі обрано m критеріїв оптимальності F_i $(i=\overline{1,m})$. Загальний критерій може мати вигляд суми окремих показників ефективності з відповідними коефіцієнтами:

$$F^* = k_1F_1 + k_2F_2 + ... + k_mF_m \,, \qquad (1.5)$$

де $k_1,...,k_m$ — додатні чи від'ємні коефіцієнти. Додатні коефіцієнти відповідають тим критеріям, які потрібно максимізувати, а від'ємні — тим, які мінімізуються. Абсолютні значення коефіцієнтів

$k_1,...,k_m$ відповідають пріоритету (важливості) того чи іншого показника.

Наприклад, якщо розв'язується виробнича задача, то з додатними коефіцієнтами ввійдуть такі величини, як обсяг прибутку, отриманого від реалізації товарів та послуг, з від'ємними — витрати ресурсів (часу, праці), собівартість одиниці продукції.

Узагальнений критерій може подаватись у вигляді дробу, де в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно максимізувати, припустимо $F_1,...,F_n$, а в знаменнику — добуток тих, які потрібно мінімізувати $F_{n+1},...,F_m$:

$$F^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} F_i}{\prod_{i=n+1}^{m} F_i}. \qquad (1.6)$$

Загальним недоліком критеріїв (1.5), (1.6) є те, що існує можливість недостатню ефективність одного критерію компенсувати іншим. Наприклад, зниження значення виконання попередніх замовлень (в (1.6) буде в чисельнику) може компенсуватися зменшенням використання ресурсів (знаменник дробу (1.6)). Оскільки окремі величини в чисельнику та знаменнику пропорційно зменшилися, то значення дробу не змінюється, проте складені на основі таких розрахунків плани можуть призвести до негативних наслідків.

Такі критерії порівнюють із запропонованим Львом Толстим жартома «критерієм оцінки людини» у вигляді дробу, де в чисельнику зазначають справжні достоїнства людини, а у знаменнику — її думку про себе. Отже, якщо людина майже немає достоїнств (чисельник дробу буде малим числом) і водночас у неї зовсім відсутня зарозумілість (в знаменнику — майже нуль), то вона буде мати нескінченно велику цінність (оскільки будь-яке число, поділене на нескінченно малу величину, дає нескінченність).

Отже, до використання зазначених способів формування цільових функцій необхідно підходити зважено та продумано.

Ще один метод запропонував І. Никовський [24]. Оптимальний план знаходять окремо за кожним з вибраних критеріїв, після чого отримують множину значень цільової функції $F_i^* \left(i = \overline{1, m}\right)$. На останньому етапі розв'язується початкова задача з одним критерієм виду:

$$\min F = \left|\frac{F_1^* - \overline{F}_1}{F_1^*}\right| = \left|\frac{F_2^* - \overline{F}_2}{F_2^*}\right| = \ldots = \left|\frac{F_m^* - \overline{F}_m}{F_m^*}\right|, \tag{1.7}$$

де $\overline{F}_i (i = \overline{1, m})$ — значення *i-го* критерію оптимальності в оптимальному компромісному плані. За такого підходу розв'язок задачі визначається за критерієм, що дорівнює мінімальному значенню модулів часток відхилень значень кожної цільової функції у компромісному плані від їх оптимальних значень у їх же оптимальних значеннях, що робить всі критерії однаково важливими. Для врахування переваг одних критеріїв над іншими доцільно застосовувати узагальнений критерій такого виду:

$$\min F = k_1\left|\frac{F_1^* - \overline{F}_1}{F_1^*}\right| = k_2\left|\frac{F_2^* - \overline{F}_2}{F_2^*}\right| = \ldots = k_m\left|\frac{F_m^* - \overline{F}_m}{F_m^*}\right|. \qquad (1.8)$$

Недоліками цих двох способів є, по-перше, жорстке співвідношення між значеннями відхилень критеріїв оптимальності, що значно звужує множину допустимих планів; по-друге, одному значенню деякого критерію може відповідати множина інших, причому таких, за яких оптимальний план з економічного погляду ефективніший; по-третє, відсутня методика об'єктивного визначення коефіцієнтів $k_1,...k_m$.

Зведення багатокритеріальної задачі до задачі з одним критерієм може також здійснюватися через виділення з вибраного набору показників одного, який вважають найважливішим — F_k і намагаються досягти його максимального значення (якщо необхідно знайти мінімум, то досить змінити знак показника). Всі інші показники (критерії) є другорядними, і на них накладаються обмеження виду: $F_i \geq z_i$, де z_i є нижньою межею значення відповідного показника, або $F_i \leq z_i$, якщо необхідно, щоб значення показника не перевищувало z_i. Для виробничих задач можна виділити як найважливіший показник ефективності прибуток і, максимізуючи його величину, додатково вводити обмеження щодо рентабельності виробництва не нижче або собівартості не вище певного рівня. Такі обмеження входять до системи початкових умов задачі.

Останнім розглянемо так званий «метод послідовних поступок». Всі обрані критерії необхідно ранжирувати за спаданням їх важливості: спочатку головний, скажімо F_1, потім менш важливий F_2 і т. д. Вважатимемо, що необхідно досягти максимального значення за всіма критеріями (якщо необхідно знайти мінімум, то змінюють знак показника). Спочатку розв'язується задача з одним головним критерієм (знаходиться значення $\max F_1$), потім призначають деяку невелику за абсолютним значенням «поступку» ΔF_1, на яку можна змінити (зменшити) значення критерію $\max F_1$ задля того, щоб досягти максимального (більшого) значення за наступним критерієм F_2. Величина «поступки» залежить від потрібної точності розрахунків та достовірності початкових даних. Потім до системи початкових обмежень задачі приєднують обмеження, що встановлює рівень можливого відхилення показника: $F_1 \leq (\max F_1 - \Delta F_1)$, і розв'язують нову задачу з критерієм оптимальності F_2 і т.д. Процес розв'язання задачі у такий спосіб показує, ціною яких «поступок» досягається бажаний результат.

Очевидно, що багатокритеріальні задачі математичного програмування не мають універсального способу розв'язування.

Отже, вибір та коректне застосування будь-якого з наведених способів залишається за суб'єктом прийняття рішень. Завдання математичного програмування полягає в забезпеченні потрібною кількістю науково обґрунтованої інформації, на підставі якої здійснюється вибір управлінського рішення.

1.5.Історична довідка

В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л.В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л.В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року — праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На жаль, у період найбурхливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках і стосувалося опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, Н. П. Федоренка, С.С. Шаталіна, В.М. Глушкова, В. С. Михалевича, Ю.М. Єрмольєва та ін.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

1.6. Класифікація задач математичного програмування

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — ***детерміновані*** задачі і ***стохастичні***. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається ***стохастичним програмуванням***.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи. Схематично класифікацію задач зображено на рис.1.2 (Поділ наведений для детермінованих задач, але він такий же і для стохастичних).

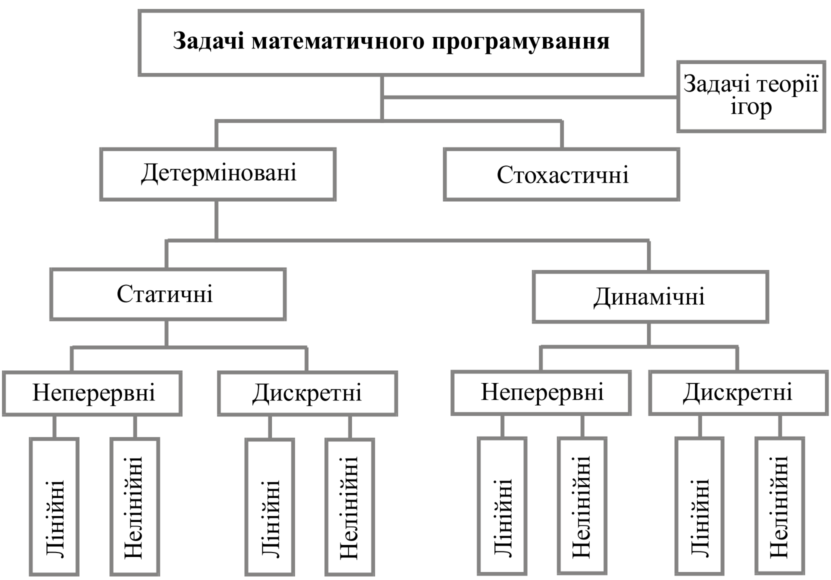


Рис. 1.2. Класифікація задач математичного програмування

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути ***статичними*** (однокроковими) або ***динамічними*** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2005 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2005 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають ***стратегічним***. У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними***. Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на ***дискретні*** і ***неперервні***. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. Їх називають задачами ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на ***лінійні*** та ***нелінійні***. Якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними, тобто містять змінні x_j тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом***. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. ***Задача належить до опуклого програмування*** у тому разі, коли цільова функція ***вгнута***, якщо вона мінімізується, та ***опукла***, якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу ($\leq$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу (≥) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. ***Квадратичне програмування*** — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають ***дробово-лінійне програмування***, коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі ***теорії ігор***, які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, ***ігри двох осіб із нульовою сумою***.

Наведена вище класифікація задач використана для структурування курсу «Математичне програмування».

1.7.Приклади економічних задач математичного програмування

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об’єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з’ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв’язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливлює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв’язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л.В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях(задана асортиментність).

Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств.

Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв’язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади.

Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

«Тут все есть, коли нет обмана:
И черти, и любовь, и страхи, и цветы».

А. С. Грибоедов

РОЗДІЛ 2. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ДЕЯКІ З МЕТОДІВ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. Приклади побудови економіко-математичних моделей економічних процесів та явищ

У даному розділі розглядається найпростіший тип задач. Як було з'ясовано раніше, такі задачі є статичними. В їх моделі використовують детерміновані дані та лінійні функції для опису взаємозв'язків між елементами. Розв'язок знаходиться на деякій неперервній множині. Наведемо кілька розглянутих вище типових задач математичного програмування, сформульованих у термінах лінійного програмування.

***Задача визначення оптимального плану виробництва*:** для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску n видів продукції $X = (x_1, x_2, \ldots, x_\text{n})$ за умови найкращого способу використання її наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяні m ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне оснащення тощо. Відомі загальні запаси ресурсів $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, норми витрат i-го ресурсу на виробництво одиниці j-ої продукції $a_{ij}\left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$ та прибуток з одиниці j-ої реалізованої продукції $c_j\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Критерій оптимальності: максимум прибутку.

Позначимо через x_1, x_2, …, x_n обсяги виробництва відповідно першого, другого і т. д. видів продукції.

Оскільки на одиницю продукції 1-го виду витрачається a_{11} ресурсу першого виду, то на виробництво першого виду продукції обсягом x_1 необхідно витратити $a_{11}x_1$ цього ресурсу. На другий вид продукції обсягом x_2 витрати першого ресурсу дорівнюватимуть $a_{12}x_2$ і т. д. На виробництво всіх видів продукції буде використано такий обсяг першого ресурсу: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$. Ця величина має не перевищувати наявного обсягу першого ресурсу — b_1. Отже, обмеження щодо використання першого ресурсу матиме вигляд: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$. Аналогічно записують обмеження стосовно використання всіх інших виробничих ресурсів. Прибуток від реалізації виготовленої продукції всіх видів становитиме: $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Загалом лінійна економіко-математична модель даної задачі матиме вигляд:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$$

Математична модель виробничої задачі може бути застосована для різних економічних задач, де виникає проблема вибору найкращого варіанта розподілу обмеженої кількості ресурсів, хоча з першого погляду може здаватися, що постановка задачі не стосується виробничих процесів. Наведемо кілька конкретних прикладів виробничих задач.

Приклад 2.1. Фірма має 1 млн грн обігових коштів. Відомі витрати грошей у кожному місяці, а також обов'язкові залишки обігових коштів на кінець кожного місяця. Також передбачається, що для успішного функціонування фірма витрачатиме значно меншу суму, ніж 1 млн грн. Отже, решту коштів можна надавати у кредит. Необхідно визначити оптимальний розподіл обігових коштів протягом кварталу для досягнення максимального прибутку за процентними ставками, якщо відомі витрати та потреби в резервах:

1.01 —31.01: витрати — 80000 грн; необхідний запас на 31.01 — 300 000 грн;
1.02 —28.02: витрати — 30000 грн; необхідний запас на 28.02 — 200 000 грн;
1.03 —31.03: витрати — 50000 грн; необхідний запас на 31.03 — 190 000 грн.

Кредит терміном на 1 місяць дає 2% прибутку, терміном на 2 місяці — 5%, а терміном на 3 місяці — 8%.

Вважатимемо, що кредити надаються першого числа кожного місяця і погашаються також першого числа відповідного місяця.

Побудова економіко-математичної моделі.

Кредити терміном на один місяць можна надавати кожного місяця протягом кварталу, тому позначимо через x_{11} суму кредиту, що надано на один місяць з 1.01, аналогічно x_{12},x_{13} — суми одномісячних кредитів, що надані відповідно в другому та у третьому місяцях.

Кредити терміном на два місяці протягом першого кварталу можна надавати лише в першому і другому місяцях, тому позначимо через x_{21} суму кредиту, що надано на два місяці в січні, x_{22} — суму кредиту, що надана в лютому на два місяці. Нарешті, кредит на три місяці можна надати лише один раз із 1.01, його позначимо через x_{31}.

Розглянемо ситуацію на початку першого місяця кварталу: початкова сума 1 млн грн витрачатиметься на вкладення коштів у всі види кредитів, потреби в обігових коштах для господарської діяльності фірми становитимуть 80000 грн, а на кінець місяця фірма бажає мати резерв обсягом 300000 грн. Отже, використання коштів у січні можна описати у моделі так:

$$1\,000\,000 - x_{11} - x_{21} - x_{31} - 80\,000 \geq 300\,000\ .$$

Наявні кошти в кінці місяця (окрім резерву) визначаються за формулою:

$$S1 = 1\,000\,000 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 80\,000 - 300\,000 =$$
$$= 620\,000 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}).$$

На початку другого місяця сума $S1$ може надаватися в кредит, але лише двох видів та має забезпечувати витрати діяльності. Одночасно на початку другого місяця повертаються кошти, що є процентами за одномісячний кредит, який було надано в січні. Враховуючи необхідність резерву на кінець другого місяця, маємо таке обмеження щодо використання коштів у лютому:

$$S1 - x_{12} - x_{22} + 1{,}02x_{11} - 30\,000 \geq 200\,000\ ,$$

а наприкінці лютого обсяг наявних коштів становитиме:

$$S2 = S1 - (x_{12} + x_{22}) + 1{,}02x_{11} - 230\,000\ .$$

Аналогічно запишемо використання коштів у березні:

$$S2 - x_{13} + 1{,}02x_{12} + 1{,}05x_{21} - 50000 \geq 190000\ .$$

Загальна сума коштів, отриманих як проценти за надані кредити, дорівнюватиме:

$$P = 0{,}02(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 0{,}05(x_{21} + x_{22}) + 0{,}08x_{31}\,.$$

Загалом математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\max P = 0{,}02(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 0{,}05(x_{21} + x_{22}) + 0{,}08x_{31}$$

за умов:

$$\begin{cases} 1\,000\,000 - x_{11} - x_{21} - x_{31} - 80\,000 \geq 300\,000; \\ S1 - x_{12} - x_{22} + 1{,}02x_{11} - 30\,000 \geq 200\,000; \\ S2 - x_{13} + 1{,}02x_{12} + 1{,}05x_{21} - 50\,000 \geq 190\,000. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,3}), (j = \overline{1,3}).$$

Приклад 2.2. На ринок поставляється картопля з трьох фермерських господарств за цінами відповідно 80, 75 та 65 коп. за 1 кг. На завантаження 1 т картоплі в господарствах відповідно витрачається по 1, 6 та 5 хвилин. Замовлено 12 т картоплі, і для своєчасної доставки необхідно, щоб на її завантаження витрачалося не більше сорока хвилин. Потрібно визначити, з яких фермерських господарств і в якій кількості необхідно доставляти картоплю, щоб загальна вартість закупівлі була мінімальною, якщо фермери можуть виділити для продажу відповідно 10, 8 та 6 т картоплі.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо: x_1 — кількість картоплі, що буде закуплена у першому господарстві (т); x_2, x_3 — кількість картоплі, закупленої відповідно у другого та третього фермерів (т).

Поставка потрібної кількості картоплі описується рівністю:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12\,,$$

наступне обмеження описує витрати часу на завантаження продукції:

$$x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 40\,,$$

обмеження щодо можливостей поставок продукції з кожного господарства:

$x_1 \le 10;$
$x_2 \le 8;$
$x_3 \le 6.$

Вартість продукції, що закуповується, визначається як сума добутків ціни на відповідні її обсяги. Ціни 1 т картоплі відповідно дорівнюють 800, 750 та 650 грн в даних трьох фермерських господарствах. Отже, цільову функцію можна записати так:

$$F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3 .$$

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 800x_1 + 750x_2 + 650x_3$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12; \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 40; \\ x_1 \le 10; \\ x_2 \le 8; \\ x_3 \le 6. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \ (i = 1, 2, 3).$$

Задача про «дієту»: деякий раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного продукту — $c_j \left(j = \overline{1, n}\right)$, кількість необхідних організму поживних речовин m та потреба в кожній i-ій речовині — $b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$. В одиниці j-го продукту міститься $a_{ij} \left(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}\right)$ поживної речовини i. Необхідно знайти оптимальний раціон $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Позначимо через x_1, x_2, …, x_n — кількість відповідного j-го виду продукту $\left(j = \overline{1, n}\right)$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче зазначеного рівня $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$. Економіко-математична модель матиме вигляд:

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \ge b_3; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Аналогічно як у виробничій задачі, економіко-математична модель задачі про «дієту» (або про суміш) також може описувати інші економічні процеси. По суті цей тип задач дає змогу знаходити оптимальне поєднання деякого набору компонент в одне ціле, причому таке поєднання має задовольняти певні умови.

Приклад 2.3. Стандартом передбачається, що октанове число бензину А-76 має бути не нижчим 76, а вміст сірки — не більшим, ніж 0,3%. Для виготовлення такого бензину на заводі використовуються чотири компоненти. Дані про обсяги запасів компонентів, які змішуються, їх вартості, октанові числа та вміст сірки наведені в табл. 2.1:

Таблиця 2.1

ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ КОМПОНЕНТ БЕНЗИНУ

Показник	Компонента бензину			
	№ 1	№ 2	№ 3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Наявний обсяг, т	700	600	500	300
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Необхідно визначити, скільки тонн кожного компонента потрібно використати для того, щоб отримати 1000 т бензину А-76 з мінімальною собівартістю.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_j кількість j-го компонента в суміші (т), j = 1,2,3,4.

Перше обмеження забезпечує потрібне значення октанового числа в суміші:

$$68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76 \cdot 1000.$$

Вміст сірки в суміші має не перевищувати 0,3%:

$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \leq 0{,}3 \cdot 1000,$$

а загальна маса утвореної суміші має дорівнювати 1000 т:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

Використання кожного компонента має не перевищувати його наявного обсягу:

$x_1 \leq 700;$
$x_2 \leq 600;$
$x_3 \leq 500;$
$x_4 \leq 300.$

Собівартість суміші визначається за формулою:

$$F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4.$$

Загалом, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\min F = 40x_1 + 45x_2 + 60x_3 + 90x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 68x_1 + 72x_2 + 80x_3 + 90x_4 \geq 76\,000; \\ 0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 \geq 300; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000; \\ x_1 \leq 700; \\ x_2 \leq 600; \\ x_3 \leq 500; \\ x_4 \leq 300. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

Приклад 2.4. Учасник експедиції складає рюкзак, і йому необхідно розв'язати питання про те, які взяти продукти. У розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко, цукор. У рюкзаку залишилось для продуктів лише 45 дм^3 об'єму, до того ж необхідно, щоб загальна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса (за масою) було більше, ніж борошна принаймні удвічі, борошна не менше, ніж молока, а молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак, щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДУКТІВ

Показники	Продукт			
	м'ясо	борошно	молоко	цукор
Об'єм (дм^3/кг)	1	1,5	2	1
Калорійність (ккал/кг)	1500	5000	5000	4000

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 масу (в кг) м'яса, борошна, молока і цукру відповідно.

Сумарна маса продуктів має не перевищувати 35 кг:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 35,$$

а об'єм, який вони мають займати, — не більше 45 дм^3:

$$x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 45.$$

Крім того, мають виконуватися співвідношення стосовно пропорцій за масою продуктів:

а) м'яса принаймні удвічі більше, ніж борошна, отже:

$$x_1 \ge 2x_2;$$

б) борошна не менше, ніж молока: $x_2 \ge x_3$;

в) молока хоча б у вісім разів більше, ніж цукру: $x_3 \ge 8x_4$.

Калорійність всього набору продуктів можна визначити так:

$$F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4.$$

Отже, економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$\max F = 1500x_1 + 5000x_2 + 5000x_3 + 4000x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 35; \\ x_1 + 1{,}5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 45; \\ x_1 \ge 2x_2; \\ x_2 \ge x_3; \\ x_3 \ge 8x_4. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

Транспортна задача: розглядається m пунктів виробництва та n пунктів споживання деякої однорідної продукції. Відомі обсяги виробництва продукції у кожному i-му пункті — $a_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ та потреби кожного j-го пункту споживання — $b_j \left(j = \overline{1,n}\right)$. Також задана матриця розмірністю $m \times n$, елементи якої $c_{ij} \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ є вартостями транспортування одиниці продукції з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції $X = x_{ij} (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ з урахуванням наявності продукції у виробників та забезпечення вимог споживачів.

Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень.

Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від i-го виробника до j-го споживача.

Можна вивезти від кожного виробника продукцію, що є в наявності. Тому для кожного i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ має виконуватись умова: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$. Забезпечення кожного споживача потрібною кількістю продукції дає умова: $x_{1j}+x_{2j}+...+x_{mj}=b_j$ для кожного $j(j=\overline{1,n})$. Загальна вартість перевезень є сумою добутків $c_{ij}x_{ij}\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Необхідно, щоб виконувалась умова $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$. Отже, економіко-математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$
\begin{gathered}
\min F=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+\\
+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}
\end{gathered}
$$

за умов:

$$
\begin{gathered}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}\le a_1;\\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}\le a_2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}\le a_m.\\
x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1;\\
x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2;\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n.\\
x_{ij}\ge 0\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).
\end{gathered}
$$

Як і в двох попередніх задачах математична модель транспортної задачі може використовуватись і тоді, коли в постановці задачі немає навіть згадки про перевезення продукції тощо.

Приклад 2.5. Фермерське господарство спеціалізується на вирощуванні озимої пшениці і має три ділянки землі площею S_1 = 40 га, S_2 = 90 га, S_3 = 55 га. Враховуючи наявну кількість посівного матеріалу, є можливість засіяти всю площу озимою пшеницею трьох сортів. Кількість пшениці сорту «Миронівська-808» забезпечить посів на 80 га, «Безоста-1» — 60 га та «Одеська — 51» — 45 га. Урожайність сорту «Миронівська-808» на даних ділянках становить відповідно 41 ц/га, 40 ц/га, 46 ц/га. Аналогічно для сорту «Безоста-1» маємо: 38 ц/га, 41 ц/га, 45 ц/га, а для «Одеської-51» — 30 ц/га, 28 ц/га, 40 ц/га.

Необхідно розподілити посівний матеріал за земельними ділянками так, щоб отримати максимальний урожай (валовий збір) озимої пшениці.

Побудова економіко-математичної моделі.

Позначимо через x_{ij} площу (га) i-ої земельної ділянки, що буде засіяна j-м сортом озимої пшениці (домовимося, що сорти «Миронівська-808», «Безоста-1», «Одеська-51» відповідатимуть номерам 1, 2, 3), (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, 3).

Тоді використання земельних угідь описуватиме така система обмежень:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90;$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55.$$

Використання посівного матеріалу формально можна описати так:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80;$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60;$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45.$$

Валовий збір зерна розраховується як сума добутків урожайностей відповідних сортів пшениці на їх посівні площі, тобто:

$$F = 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} +$$
$$+ 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} +$$
$$+ 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33}.$$

Отже, економіко-математична модель задачі загалом буде мати вигляд:

$$\max F = 41x_{11} + 40x_{21} + 46x_{31} +$$
$$+ 38x_{12} + 41x_{22} + 45x_{32} +$$
$$+ 30x_{13} + 28x_{23} + 40x_{33}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 90; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 55; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60; \\ x_{13} + x_{22} + x_{33} = 45. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \; (i = 1,2,3), \; (j = 1,2,3).$$

Наведені приклади економіко-математичних моделей економічних процесів та явищ є навчальними. Адекватні економіко-математичні моделі будуть значно складнішими.

2.2.Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ — так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.1}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{2.3}$$

Отже, потрібно знайти значення змінних x_1, x_2, …, x_n, які задовольняють умови (2.2) і (2.3), і цільова функція (2.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування у § 1.2 були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) та умови невід'ємності змінних (2.3), називається ***допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

Допустимий план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається ***опорним планом*** задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (2.2) у вигляді рівностей, а також обмеження (2.3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, називається ***невиродженим***, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він ***вироджений***.

Опорний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, за якого цільова функція (2.1) досягає масимального (чи мінімального) значення, називається ***оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

Задачу (2.1)—(2.3) можна легко звести до канонічної форми, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) всі b_i (i = 1, 2, …, m) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від'ємне, то, помноживши i-те обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши ***додаткову змінну*** x_{n+1}: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$.

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводять до рівності, віднімаючи від лівої частини ***додаткову*** змінну x_{n+2}, тобто: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$ ($x_{n+1} \ge 0$, $x_{n+2} \ge 0$).

Доведемо, що заміна нерівностей рівняннями за допомогою введення додаткових змінних не змінить розв'язку початкової задачі. Розглянемо лінійну нерівність з n невідомими:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b. \tag{2.4}$$

Для зведення нерівності (2.4) до рівняння необхідно до її лівої частини додати деяку невід'ємну величину $x_{n+1} \ge 0$. У результаті дістаємо лінійне рівняння, яке містить $n+1$ змінну:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. Кожному розв'язку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності (2.4) відповідає єдиний розв'язок $Y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ рівняння (2.5), який одночасно є розв'язком нерівності (2.4), і, навпаки, кожному розв'язку $Y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ рівняння (2.5) і нерівності (2.4) відповідає єдиний розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності (2.4).

Доведення: Нехай X^* — розв'язок нерівності (2.4), тоді підстановкою $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ нерівність виконується:

$$a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^* \le b .$$

Перенесемо ліву частину даної нерівності в праву і позначимо вираз у правій частині через x_{n+1}^*, тобто:

$$0 \le b - (a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^*) = x_{n+1}^*.$$

Отже, розв'язок $Y^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ задовольняє рівняння (2.5) і водночас нерівність (2.4). Дійсно, і при підстановці $x_{n+1}^* \ge 0$ в рівняння маємо:

$$\begin{aligned} & a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^* + x_{n+1}^* = \\ & = a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^* + \left[b - (a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^*)\right] = b. \end{aligned}$$

Навпаки, нехай Y^* задовольняє рівняння (2.5) і нерівність (2.4), тобто:

$$a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^* + x_{n+1}^* = b \text{ і } x_{n+1}^* \ge 0 .$$

Тоді, відкидаючи в лівій частині рівності невід'ємну величину x_{n+1}^*, отримаємо нерівність:

$$a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_n x_n^* \le b\ .$$

2.3. Форми запису задач лінійного програмування

Задачу лінійного програмування зручно записувати за допомогою знака суми «Σ». Справді, задачу (2.1)—(2.3) можна подати так:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.6)$$

Ще компактнішим є запис задачі лінійного програмування у векторно-матричному вигляді:

$$\max(\min)\ Z = CX$$

за умов:

$$AX = A_0; \qquad (2.7)$$

$$X \ge 0,$$

Де

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},\ \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матрицею коефіцієнтів при змінних;

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$ — вектор змінних; $$A_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$ — вектор вільних членів;

$C=(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$ — вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Часто задачу лінійного програмування зручно записувати у векторній формі:

$$\max(\min)Z = CX$$

за умов:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0; \tag{2.8}$$

$$X \geq 0,$$

де

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

є векторами коефіцієнтів при змінних.

2.4.Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Розглянемо на площині x_1Ox_2 сумісну систему лінійних нерівностей:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq b_1;\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2;\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leq b_m.\end{cases} \tag{2.9}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Кожна нерівність цієї системи геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2, ...,m). Умови невід'ємності змінних визначають півплощини з граничними прямими $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$. Система сумісна, тому півплощини як опуклі множини, перетинаючись, утворюють спільну частину, що є опуклою множиною і являє собою сукупність точок, координати кожної з яких є розв'язком даної системи (рис. 2.1).

Сукупність цих точок (розв'язків) називають ***багатокутником розв'язків***, або ***областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування***. Це може бути точка (єдиний розв'язок), відрізок, промінь, багатокутник, необмежена багатокутна область.

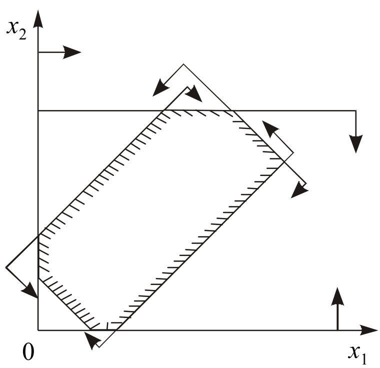


Рис. 2.1

Якщо в системі обмежень (2.9) буде три змінних, то кожна нерівність геометрично визначатиме півпростір тривимірного простору, граничними площинами котрого будуть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ *(i = 1, 2, ...,m),* а умови невід'ємності — півпростори з граничними площинами $x_j = 0$ (j = 1, 2, 3), де i — номер обмеження, а j — номер змінної. Якщо система обмежень сумісна, то ці півпростори як опуклі множини, перетинаючись, утворять у тривимірному просторі спільну частину, що називається ***багатогранником розв'язків***. Він може бути точкою, відрізком, променем, багатокутником, багатогранником, багатогранною необмеженою областю.

Нехай у системі обмежень (2.9) кількість змінних більша, ніж три: x_1, x_2,... x_n; тоді кожна нерівність визначає півпростір n-вимірного простору з граничною гіперплощиною $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Кожному обмеженню виду (2.9) відповідають гіперплощина та напівпростір, який лежить з одного боку цієї гіперплощини, а умови невід'ємності — півпростори з граничними гіперплощинами $x_j = 0$ ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Якщо система обмежень сумісна, то за аналогією з тривимірним простором вона утворює спільну частину в n-вимірному просторі — опуклий багатогранник допустимих розв'язків.

Отже, геометрично задача лінійного програмування являє собою відшукання координат такої точки багатогранника розв'язків, при підстановці яких у цільову лінійну функцію остання набирає максимального (мінімального) значення, причому допустимими розв'язками є усі точки багатогранника розв'язків.

Цільову функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

в n-вимірному просторі основних змінних можна геометрично інтерпретувати як сім'ю паралельних гіперплощин, положення кожної з яких визначається значенням параметра Z.

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування на прикладі. Нехай фермер прийняв рішення вирощувати озиму пшеницю і цукрові буряки на площі 20 га, відвівши під цукрові буряки не менше як 5 га. Техніко-економічні показники вирощування цих культур маємо у табл. 2.3:

Таблиця 2.3

ПОКАЗНИКИ ВИРОЩУВАННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Критерієм оптимальності є максимізація прибутку.

Запишемо економіко-математичну модель структури виробництва озимої пшениці та цукрових буряків, ввівши такі позначення:

x_1 — шукана площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — шукана площа посіву цукрових буряків, га.

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \qquad (2.10)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \le 20; \qquad (2.11)$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270; \qquad (2.12)$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80; \qquad (2.13)$$

$$x_2 \ge 5; \qquad (2.14)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (2.15)$$

Геометричну інтерпретацію задачі зображено на рис. 2.2.

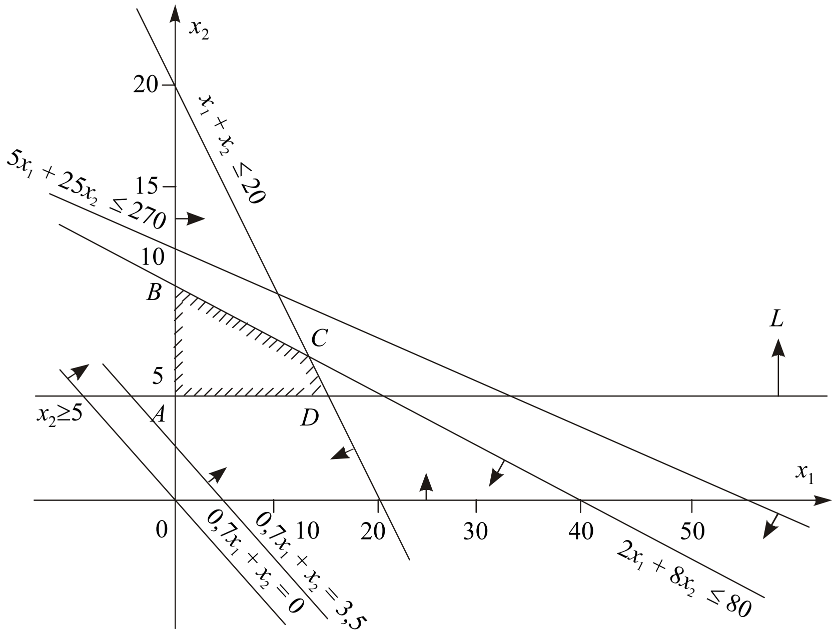


Рис. 2.2. Область допустимих розв’язків задачі

Область допустимих розв’язків цієї задачі дістаємо так. Кожне обмеження, наприклад $x_1 + x_2 \le 20$, задає півплощину з граничною прямою $x_1 + x_2 = 20$. Будуємо її і визначаємо півплощину, яка описується нерівністю $x_1 + x_2 \le 20$. З цією метою в нерівність $x_1 + x_2 \le 20$ підставляємо координати характерної точки, скажімо, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Переконуємося, що ця точка належить півплощині $x_1 + x_2 \le 20$. Цей факт на рис.2.2 ілюструємо відповідною напрямленою стрілкою. Аналогічно будуємо півплощини, які відповідають нерівностям (2.11)—(2.15). У результаті перетину цих півплощин утворюється область допустимих розв’язків задачі (на рис.2.2 — чотирикутник $ABCD$). Цільова функція $Z = 0,7x_1$

$+ x_2$ являє собою сім'ю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z. Зокрема, якщо $Z = 0$, то маємо $0,7x_1 + x_2 = 0$. Ця пряма проходить через початок системи координат. Коли $Z = 3,5$, то маємо пряму $0,7x_1 + x_2 = 3,5$.

2.5. Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування

Властивості розв'язків задачі лінійного програмування формулюються у вигляді чотирьох теорем (доведення теорем та їх наслідки наведено нижче).

Властивість 1. (Теорема 2.2) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2. (Теорема 2.3) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв'язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3. (Теорема 2.4) Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \leq n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 4. (Теорема 2.5) Якщо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \geq 0$, що відповідають додатним x_j, є лінійно незалежними.

Доведемо сформульовані теореми.

Теорема 2.2. Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Доведення. Необхідно довести, що коли X_1 та X_2 — плани задачі лінійного програмування (2.1)—(2.3), то їх опукла комбінація $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ також є планом задачі.

Так як X_1 і X_2 — плани задачі, то виконуються такі співвідношення:

$$AX_1 = A_0,\ X_1 \geq 0;\ AX_2 = A_0,\ X_2 \geq 0.$$

Якщо підставити в систему обмежень значення X, то отримаємо:

$$AX = A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 = \lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_0 = (\lambda_1 + \lambda_2)A_0 = A_0.$$

Отримали, що X задовольняє систему обмежень задачі лінійного програмування (2.2), і оскільки $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, то й $X \geq 0$, тобто задовольняють і умову (2.3). У такий спосіб доведено, що X — план задачі лінійного програмування.

Теорема 2.3. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин багатогранника розв'язків. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Доведення. Припустимо, що багатогранник розв'язків задачі обмежений і має скінченну кількість кутових точок. Позначимо його через Q. У двовимірному просторі Q має вид багатокутника, що зображено на рис. 2.3. Позначимо кутові точки через $X_1, X_2, ..., X_p$, а оптимальний план — X_0.

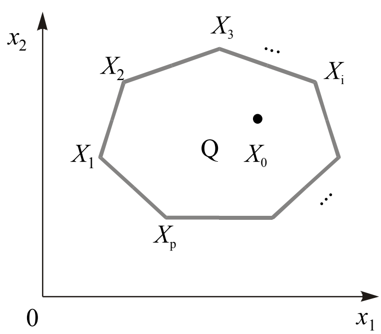


Рис. 2.3. Багатокутник розв'язків задачі у двовимірному просторі

Задача (2.1) — (2.3) розв'язується на максимум, отже, при будь-якому X із Q для значення X_0 виконується нерівність $F(X_0) \geq F(X)$. Якщо X_0 — кутова точка, то перша частина теореми доведена. Припустимо, що X_0 не є кутовою точкою, тоді X_0 є точкою, яка належить опуклій множині (доведено в попередній теоремі). Отже, її можна подати як опуклу лінійну комбінацію кутових точок множини Q, тобто

$$X_0 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p,$$

$$\lambda_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1, p}), \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 .$$

У зв'язку з тим, що $F(X)$ — лінійна функція, отримаємо:

$$\begin{aligned} F(X_0) &= F(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p) = \\ &= \lambda_1 F(X_1) + \lambda_2 F(X_2) + \ldots + \lambda_p F(X_p). \end{aligned} \tag{2.16}$$

У такому розкладі серед значень $F(X_i)$ $(i = \overline{1, p})$ вибираємо найбільше (припустимо, що воно відповідає кутовій точці $X_k (1 \leq k \leq p)$ і позначимо його через m, тобто $F(X_k) = m$. Замінимо в (2.16) кожне значення $F(X_i)$ цим найбільшим значенням. Оскільки $\lambda_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1, p}), \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, то

$$F(X_0) \leq \lambda_1 m + \lambda_2 m + \ldots + \lambda_p m = m \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = m .$$

За припущенням X_0 — оптимальний план, отже, з одного боку, $F(X_0) \geq F(X_k) = m$, а з другого, доведено, що $F(X_0) \leq m$, значить, $F(X_0) = m = F(X_k)$, де X_k — кутова точка. Отже, лінійна функція досягає максимального значення в кутовій точці (X_k).

Для доведення другої частини теореми припустимо, що $F(X)$ набирає максимальних значень більше, ніж в одній кутовій точці, наприклад у точках $X_1, X_2, ..., X_q$, $(1 \le q \le p)$, тоді $F(X_1) = F(X_2) = \ldots = F(X_q) = m$. Якщо X опукла лінійна комбінація цих кутових точок, то:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_q X_q,$$

$$\lambda_i \ge 0,\ (i = \overline{1, q}), \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1, \text{ тоді:}$$

$$F(X) = F(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_q X_q) =$$

$$= \lambda_1 F(X_1) + \lambda_2 F(X_2) + \ldots + \lambda_q F(X_q) = \lambda_1 m + \lambda_2 m + \ldots + \lambda_q m = m \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = m,$$

тобто лінійна функція F набирає максимальних значень у довільній точці X, яка є опуклою лінійною комбінацією кутових точок $X_1, X_2, ..., X_q$.

Зауваження. Якщо багатокутник розв'язків — необмежена область (рис. 2.4), то не кожну точку можна подати у вигляді опуклої лінійної комбінації її кутових точок. У такому разі задачу лінійного програмування з багатокутником розв'язків, що є необмеженою областю, можна звести до задачі з обмеженою областю, ввівши в систему додаткове обмеження $x_1 + x_2 \le L$, де L — достатньо велике число. Введення цього обмеження означає відтинання прямою $x_1 + x_2 = L$ від багатокутної необмеженої області обмеженого багатокутника, для

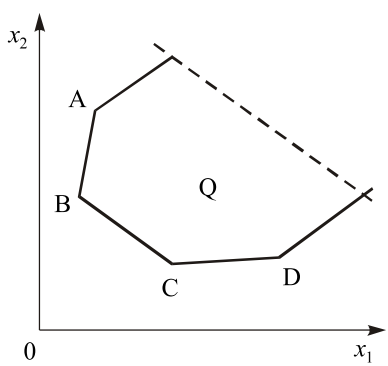


Рис. 2.4. Багатокутник розв'язку задачі у двовимірному просторі з необмеженою областю

якого виконується наведена теорема.

Очевидно, що координати кутових точок, які утворяться в результаті введення нового обмеження, залежать від L. Якщо в одній з них лінійна функція набирає максимального значення, то воно залежить від L. Змінюючи L, значення функціонала можна зробити як завгодно великим, а це означає, що лінійна функція необмежена на багатограннику розв’язків.

Теорема 2.4. Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ $(k \le n)$ у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв’язків.

Доведення. Припустимо, що точка X не є кутовою. Тоді вона може бути виражена опуклою лінійною комбінацією двох інших точок X_1 та X_2 багатокутника розв’язків, тобто:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2;\ \lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Компоненти векторів X_1 та X_2, значення λ_1 і λ_2 невід’ємні і останні $n - k$ компонентів вектора X дорівнюють нулю, тому відповідні $n - k$ компонент векторів X_1 та X_2 також мають дорівнювати нулю, тобто

$$X_1 = (x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1, 0, ..., 0),$$

$$X_2 = (x_1^2, x_2^2, ..., x_k^2, 0, ..., 0).$$

Оскільки X_1 та X_2 — плани, то

$$A_1x_1^1 + A_2x_2^1 + ... + A_kx_k^1 = A_0,$$

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + ... + A_kx_k^2 = A_0.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, отримаємо:

$$(x_1^1 - x_1^2)A_1 + (x_2^1 - x_2^2)A_2 + ... + (x_k^1 - x_k^2)A_k = 0.$$

За припущенням вектори $A_1, A_2, ..., A_k$ лінійно незалежні, тому останнє співвідношення виконується, якщо

$$(x_1^1 - x_1^2) = 0; (x_2^1 - x_2^2) = 0; ... (x_k^1 - x_k^2) = 0 .$$

Звідси: $x_1^1 = x_1^2;\ x_2^1 = x_2^2; ... x_k^1 = x_k^2.$

Отже, X неможливо подати як опуклу лінійну комбінацію двох інших точок багатокутника розв'язків. Значить, X — кутова точка.

> **Теорема 2.5.** Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots$ $\ldots + A_n x_n = A_0$, $X \geq 0$, що відповідають додатним x_j, є лінійно незалежними.

Доведення. Не порушуючи загальності, можна вважати нерівними нулю перші k елементів вектора X, отже,

$$\sum_{i=1}^{k} A_i x_i = A_0 .$$

Здійснимо доведення від супротивного. Припустимо, що система векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ лінійно залежна. Тоді існують такі числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$, не всі рівні нулю, за яких виконується співвідношення:

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + ... + \beta_k A_k = 0 .$$

За умовою

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... x_k A_k = A_0 .$$

Задамо деяке число $\varepsilon > 0$, помножимо на нього першу рівність, далі результат спочатку додамо до другого, а потім віднімемо від другого рівняння:

$$(x_1 + \varepsilon\beta_1) A_1 + (x_2 + \varepsilon\beta_2) A_2 + ... + (x_k + \varepsilon\beta_k) A_k = A_0 ,$$

$$(x_1 - \varepsilon\beta_1) A_1 + (x_2 - \varepsilon\beta_2) A_2 + ... + (x_k - \varepsilon\beta_k) A_k = A_0 .$$

Отже, система рівнянь задачі лінійного програмування $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = A_0$ має два розв'язки, які можуть і не бути планами.

$$X_1 = (x_1 + \varepsilon\beta_1; x_2 + \varepsilon\beta_2; ...; x_k + \varepsilon\beta_k, 0, ..., 0)$$
$$X_2 = (x_1 - \varepsilon\beta_1; x_2 - \varepsilon\beta_2; ...; x_k - \varepsilon\beta_k, 0, ..., 0).$$

Всі $x_i > 0$, тому число $\varepsilon > 0$ можна вибрати настільки малим, що всі перші компоненти X_1 та X_2 набуватимуть додатних значень, тоді X_1 та X_2 — плани. При цьому $1/2\,X_1 + 1/2\,X_2 = X$, тобто X — опукла лінійна комбінація точок X_1 та X_2, що суперечить умові теореми, оскільки X — кутова точка.

Припущення стосовно лінійної залежності векторів $A_1, A_2, ..., A_k$ привело до суперечності. Отже, воно є неправильним, а система векторів — лінійно незалежна.

Наслідок 1. Оскільки вектори $A_1, A_2, ..., A_n$ мають розмірність m, то кутова точка багатокутника розв'язків має не більше, ніж m додатних компонентів $x_i > 0\ (i = \overline{1, m})$.

Наслідок 2. Кожній кутовій точці багатокутника розв'язків відповідає $k \le m$ лінійно незалежних векторів системи $A_1, A_2, ..., A_n$.

З наведених властивостей можна висновувати:

якщо функціонал задачі лінійного програмування обмежений на багатограннику розв'язків, то:

1) існує така кутова точка багатогранника розв'язків, в якій лінійний функціонал досягає свого оптимального значення;

2) кожний опорний план відповідає кутовій точці багатогранника розв'язків.

Тому для розв’язання задачі лінійного програмування необхідно досліджувати лише кутові точки багатогранника (опорні плани), не включаючи до розгляду внутрішні точки множини допустимих планів.

2.6.Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Для розв’язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв’язків у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Розглянемо задачу.

Знайти

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{2.17}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m. \end{cases} \tag{2.18}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \,. \tag{2.19}$$

Припустимо, що система (2.18) за умов (2.19) сумісна і багатокутник її розв’язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування (§2.4) кожне i-те обмеження-нерівність у (2.18) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2, …, m). Системою обмежень (2.18) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі — ***багатокутник розв'язків***.

Умова (2.19) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$.

Скористаємося для графічного розв'язання задачі лінійного програмування властивостями, наведеними в §2.5:

якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язків. Якщо ж цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (2.17) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1.Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.18) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2.Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3.Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4.Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5.Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6.Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

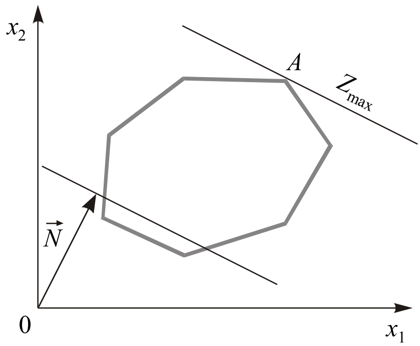
7.Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки:

1. Цільова функція набирає максимального значення в єдиній вершині *A* багатокутника розв'язків (рис.2.5).

2. Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка *AB* (рис.2.6). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

3. Задача лінійного програмування не має оптимальних планів: якщо цільова функція необмежена згори (рис.2.7) або система обмежень задачі несумісна (рис.2.8).



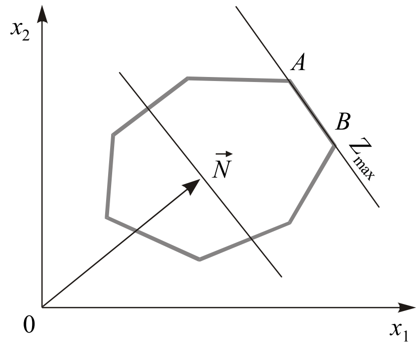
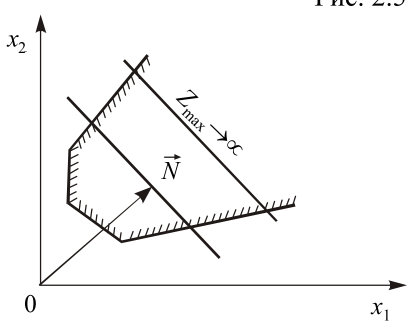


Рис. 2.5 Рис. 2.6



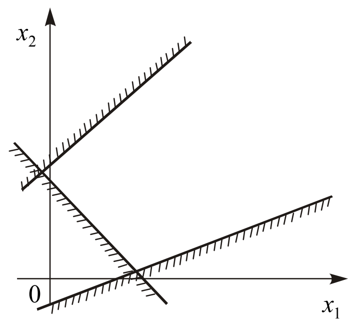


Рис. 2.7 Рис. 2.8

4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис.2.9 і 2.10). На рис.2.9 у точці *B* маємо максимум, на рис.2.10 у точці *A* — мінімум, на рис. 2.11 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.

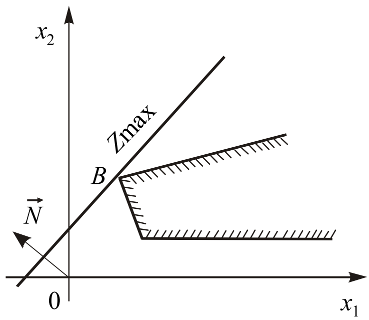


Рис. 2.9

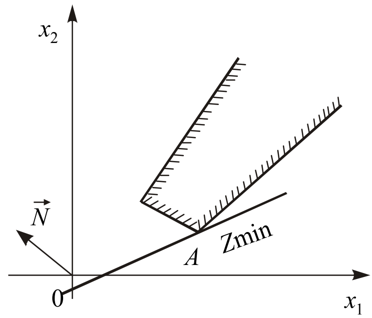


Рис. 2.10

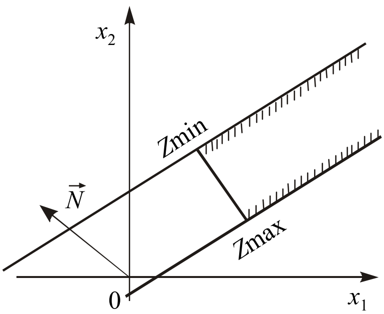


Рис. 2.11

Розв'язувати графічним методом можна також задачі лінійного програмування *n*-вимірного простору, де $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних кількість змінних *n* на дві більша, ніж число обмежень *m*, тобто $n - m = 2$.

Тоді, як відомо з курсу вищої математики, можна дві з *n* змінних, наприклад x_1 та x_2, вибрати як вільні, а інші *m* зробити базисними і виразити через вільні. Припустимо, що це зроблено. Отримаємо $m = n - 2$ рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n. \end{cases}$$

Оскільки всі значення $x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n})$, то мають виконуватись умови:

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0,$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0; \\ x_4 = \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases} \qquad (2.19.1)$$

Розглянемо, як можна зобразити ці умови геометрично. Візьмемо, наприклад, першу з них:

$$x_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0.$$

Узявши величину x_3 рівною своєму крайньому значенню — нулю, отримаємо рівняння:

$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0 \text{ .}$$

Це рівняння прямої. Для такої прямої $x_3 = 0$, по одну сторону від неї $x_3 > 0$, а по другу — $x_3 < 0$. Відмітимо ту сторону прямої $\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3 > 0$.

В аналогічний спосіб побудуємо і всі інші обмежуючі прямі: $x_4 = 0$; $x_5 = 0$;...; $x_n = 0$ і відмітимо для кожної з них півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

У такий спосіб отримують $n-2$ прямі та дві осі координат ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). Кожна з них визначає півплощину, де виконується умова $x_i > 0\ (i = \overline{1, n-2})$. Частина площини в x_1Ox_2 належить водночас всім півплощинам, утворюючи багатокутник допустимих розв'язків.

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \text{ .}$$

Підставивши вирази для x_3, x_4, x_5, ...; x_n з (2.19.1) у цей функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції F всіх n змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2:

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,$$

де γ_0 — вільний член, якого в початковому вигляді функціонала не було.

Очевидно, що лінійна функція $F' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ досягає свого максимального значення за тих самих значень x_1 та x_2, що й $F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$. Отже, процедура відшукання оптимального плану з множини допустимих далі здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

Приклад 2.6. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування

$$\min F = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 - 2x_7$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5; \\ x_1 + x_2 - x_5 = -4; \\ x_2 + x_6 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_6 + 2x_7 = 7. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1,7}).$$

Розв'язання. Маємо n = 7 — кількість змінних, m = 5 — кількість обмежень. Виберемо як вільні змінні x_1 та x_2 і виразимо через них всі інші базисні змінні. З першого рівняння маємо:

$$x_3 = -x_1 + x_2 + 4. \qquad (2.19.2)$$

З третього рівняння:

$$x_5 = x_1 + x_2 + 4, \qquad (2.19.3)$$

а з четвертого:

$$x_6 = -x_2 + 5. \qquad (2.19.4)$$

Підставляючи (2.19.2) в друге рівняння системи і (2.19.4) в останнє, розв'язуємо їх відносно x_4 та x_7. Отримаємо:

$$x_4 = 3x_1 - 2x_2 + 1;$$

$$x_7 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 6 .$$

Далі за алгоритмом беремо $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$ — координатні осі; інші обмежуючі прямі знаходимо, узявши $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$. Багатокутник допустимих розв'язків зображено на рис. 2.12.

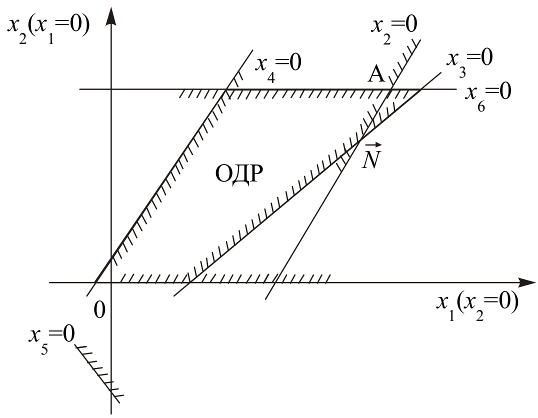


Рис. 2.12

Знайдемо вигляд функціонала, вираженого через x_1 та x_2. Для цього знайдені щойно вирази для x_3, x_4, x_5, x_6 та x_7 через вільні змінні x_1 і x_2 підставимо у функціонал і, звівши подібні члени, отримаємо: $F = -5x_1 - 2x_2 - 12$. Відкидаючи вільний член, маємо: $F' = -5x_1 - 2x_2$. Будуємо вектор $\vec{N}(-5, -2)$, перпендикулярно до нього — пряму F'. Рухаючи пряму F' в напрямку, протилежному $\vec{N}$ (необхідно знайти мінімальне значення функції F), отримаємо точку мінімуму — A (рис. 2.13).

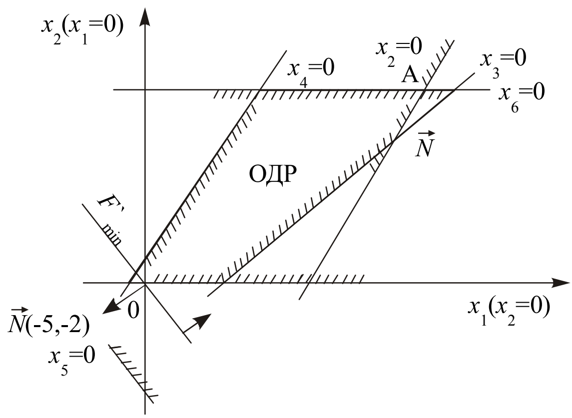


Рис. 2.13

У точці А перетинаються дві обмежуючі прямі: $x_6 = 0$ та $x_7 = 0$. Отже, для відшукання її координат необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2\,x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком системи є $x_1^* = 8{,}5$; $x_2^* = 5$. Підставивши ці значення у відповідні вирази, знайдемо оптимальні значення базисних змінних:

$$x_3^* = 0{,}5;\ x_4^* = 16{,}5;\ x_5^* = 17{,}5;\ x_6^* = 0;\ x_7^* = 0.$$

Підстановкою значень x_1^* та x_2^* в лінійну функцію F отримуємо значення цільової функції:

$$F' = -5 \cdot 8{,}5 - 2 \cdot 5 - 12 = -64{,}5\,.$$

2.7.Приклади розв'язування задач графічним методом

Розглянемо застосування графічного методу для розв'язування деяких економічних задач.

Приклад 2.7. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає два види збірних книжкових полиць — А та В. Полиці обох видів виготовляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки деталей однієї полиці кожної моделі подано в табл. (2.4).

Таблиця 2.4

ТРИВАЛІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ КНИЖКОВИХ ПОЛИЦЬ

Верстат	Тривалість обробки полиці моделі, хв.		Ресурс робочого часу верстатів, год. на тиждень
	A	B	
1	30	15	40
2	12	26	36

Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі A дорівнює 50 у. о., а моделі B — 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі A ніколи не перевищує попиту на модель B більш як на 30 одиниць, а продаж полиць моделі B не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити обсяги виробництва книжкових полиць цих двох моделей, що максимізують прибуток фірми. Для цього слід побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв’язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва книжкових полиць моделей A та B. Нехай x_1 — кількість полиць моделі A, виготовлених фірмою за тиждень, а x_2 — кількість полиць моделі B. Цільова функція задачі — максимум прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона подається так:

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2 .$$

Обмеження задачі враховують тривалість роботи верстатів 1 та 2 для виготовлення продукції та попит на полиці різних моделей.

Обмеження на тривалість роботи верстатів 1 та 2 мають вид:
для верстата 1:

$$30x_1 + 15x_2 \le 2400 \text{ (хв)};$$

для верстата 2:

$$12x_1 + 26x_2 \le 2160 \text{ (хв)}.$$

Обмеження на попит записуються так:

$$x_1 - x_2 \le 30 \text{ та } x_2 \le 80.$$

Загалом економіко-математичну модель цієї задачі можна записати так:

$$\max Z = 50x_1 + 30x_2 \tag{2.20}$$

за умов:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400; & (2.21) \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160; & (2.22) \\ x_1 - x_2 \le 30; & (2.23) \\ x_2 \le 80. & (2.24) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \tag{2.25}$$

Ця економіко-математична модель є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Розв'язання. Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі. Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис.2.14). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з півплощин задовольняють розглядувану нерівність, а іншої — ні. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 2.14 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша півплощина.

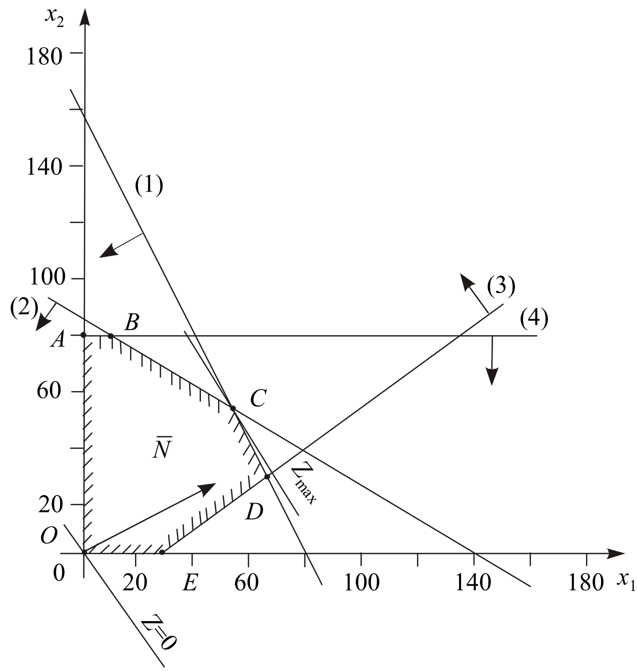


Рис. 2.14

Умова невід'ємності змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі — шестикутник *OABCDE*. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника *OABCDE*, в якій цільова функція *Z* набирає найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $\vec{N} = (c_1;\, c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$

завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). У нашій задачі вектор $\vec{N} = (50; 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор, протилежний йому, — напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ паралельно самій собі згідно з напрямом вектора $\vec{N}$ доти, доки не визначимо вершину багатокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 2.14 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника *OABCDE* є точка *C*. Координати цієї точки є оптимальним планом задачі, тобто такими обсягами виробництва книжкових полиць видів А та В, що забезпечують максимум прибутку від їх реалізації за даних умов.

Координати точки *C* є розв'язком системи рівнянь (2.17) і (2.18):

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50; 60)$; $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300.$

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 — моделі В, то вона отримає максимальний прибуток — 4300 у. о. Це потребуватиме повного використання тижневих ресурсів робочого часу верстатів 1 та 2.

Приклад 2.8. Для невеликої птахоферми потрібно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких вирощують з 4-х до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що потижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що за 4 тижні курча споживає не менше 500 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, беручи до уваги лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів — зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість маємо у табл.2.5.

Таблиця 2.5

ПОЖИВНІСТЬ ТА ВАРТІСТЬ КОРМІВ

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, у. о.
	білку	клітковини	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини.

Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимоги до загальної маси кормової суміші та її поживності.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 — маса зерна, а x_2 — соєвих бобів (в кг) у готовій кормовій суміші.

Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити понад 500 кг, тобто

$$x_1 + x_2 \geq 500.$$

Розглянемо обмеження щодо поживності кормової суміші.

Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10x_1 + 50x_2 \geq 20\,(x_1 + x_2),$$

а також не більше як 5 % клітковини:

$$2x_1 + 8x_2 \leq 5\,(x_1 + x_2).$$

Загалом математична модель задачі оптимізації кормового раціону має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}40x_1 + 0{,}90x_2 \qquad (2.26)$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 500; & (2.27) \\ -10x_1 + 30x_2 \ge 0; & (2.28) \\ -3x_1 + 3x_2 \le 0. & (2.29) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0. \qquad (2.30)$$

Розв'язання. Графічну інтерпретацію задачі подано на рис.2.15. Множина допустимих її розв'язків необмежена. Для вектора $\vec{N}$ = (0,4; 0,9) можна змінити масштаб, наприклад, $\vec{N}$ = (200; 450). Найменшого значення цільова функція Z досягає в точці A, що лежить на перетині граничних прямих, які відповідають обмеженням (2.27) та (2.28). Визначимо її координати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500; \\ -10x_1 + 30x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 375; \\ x_2 = 125. \end{cases}$$

Отже, X^* = (375; 125); min Z = 0,4 · 375 + 0,9 · 125 = 262,5.

Згідно з відшуканим оптимальним планом задачі для того, щоб отримати 500 кг кормової суміші мінімальної вартості (262,50 у. о.), потрібно взяти 375 кг зерна та 125 кг соєвих бобів. За такого співвідношення компонентів кормової суміші вимоги до її поживності виконуватимуться:

0,10 · 375 + 0,50 · 125 = 100 кг білка, що становить рівно 20% загальної маси суміші;

0,02 · 375 + 0,08 · 125 = 17,5 кг клітковини в кормовій суміші, що становить 3,5% її маси і не перевищує 5%.

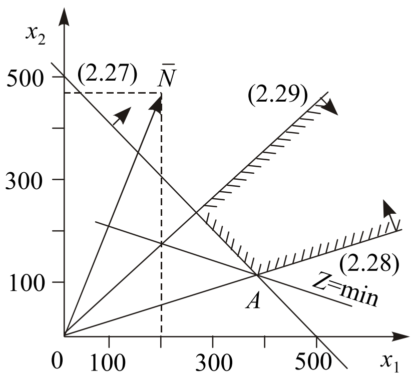


Рис. 2.15

Приклад 2.9. Фірма виготовляє з одного виду сировини два продукти А та В, що продаються відповідно за 8 та 15 копійок за упаковку. Ринок збуту для кожного з них практично необмежений. Сировина для продукту А обробляється верстатом 1, а для продукту В — верстатом 2. Потім обидва продукти упаковуються на фабриці. Схему виробництва продуктів А та В зображено на рис. 2.16.

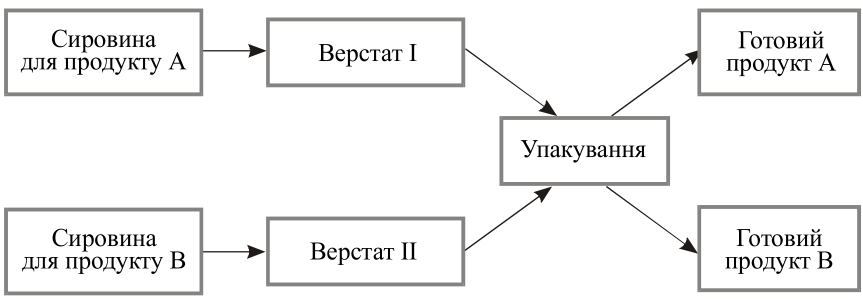


Рис. 2.16. Схема виготовлення продуктів

Ціна 1 кг сировини — 6 копійок. Верстат 1 обробляє за годину 5 т сировини, а верстат 2—4 т сировини із втратами, що становлять відповідно 10 і 20%. Верстат 1 може працювати 6 год на день, причому його використання коштує 288 грн/год; верстат 2—5 год на день, що коштує 336 грн/год.

Маса продукту А в одній упаковці дорівнює 1/4 кг, а продукту В — 1/3 кг. Фабрика може працювати 10 год на день, щогодини упаковуючи 12 000 одиниць продукту А або 8000 одиниць продукту В. Вартість її роботи протягом 1 год становить 360 грн.

Необхідно відшукати такі значення x_1 та x_2 обсягів використання сировини для виготовлення продуктів А та В (у тоннах), які забезпечують найбільший щоденний прибуток фірми.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_1 та x_2 — відповідно обсяги сировини, використовувані для виготовлення продукту А та В за один день, т.

Запишемо обмеження задачі. Згідно з умовою обмеженими ресурсами є тривалість використання верстатів 1 і 2, а також тривалість роботи фабрики з упакування продуктів А та В.

1.Обмеження на використання верстата 1.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактична тривалість використання верстата 1 з обробки сировини для виготовлення продукту А має не перевищувати 6 год, тобто:

$$\frac{\text{Обсяг сировини для виготовлення продукту А, т}}{\text{Продуктивність верстата, т/год}} \le 6 \text{ год}.$$

Математично це запишеться так:

$$x_1 / 5 \le 6, \text{ або } x_1 \le 30.$$

2.Обмеження щодо використання верстата 2 виразимо аналогічно:

$$x_2 / 4 \le 5, \text{ або } x_2 \le 20.$$

3.Обмеження щодо тривалості роботи фабрики з упакування продуктів А та В.

Економічний зміст цього обмеження такий: фактична кількість часу, витраченого на упакування продуктів А та В, має не перевищувати 10 год на день:

$$\frac{\text{Кількість сировини для виготовлення продукту А} - \text{Втрати сировини під час обробки, т}}{\text{Маса упаковки продукту А, т} \times \text{Продуктивність під час упакування продукту А, шт./год}} +$$

$$+\frac{\text{Кількість сировини для виготовлення продукту В} - \text{Втрати сировини під час обробки, т}}{\text{Маса упаковки продукту В, т} \times \text{Продуктивність під час упакування продукту В, шт./год}} \le 10\,\text{год}.$$

Математично це запишеться так:

$$\frac{x_1 - 0{,}1x_1}{1/4000 \cdot 12000} + \frac{x_2 - 0{,}2x_2}{1/3000 \cdot 8000} \le 10,$$

або:

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \le 10,$$
$$3x_1 + 3x_2 \le 100.$$

Побудуємо цільову функцію задачі. Прибуток фірми дорівнює різниці між доходом від реалізації виготовленої продукції та витратами на її виробництво.

1. Дохід від виробництва продуктів А та В визначається так:

$$\frac{\text{Обсяг продукту, що надходить на упакування, т}}{\text{Маса упаковки продукту, т}} \times \text{Ціна однієї упаковки, грн},$$

Або

$$\frac{x_1 - 0{,}1x_1}{1/4000} \cdot 0{,}08 + \frac{x_2 - 0{,}2x_2}{1/3000} \cdot 0{,}15 .$$

Загальний дохід дорівнює $288x_1 + 360x_2$.

2.Витрати на сировину визначаємо як загальну кількість сировини в тоннах, використовуваної для виробництва продуктів А та В, помножену на вартість 1 т сировини у гривнях:

$$60\,(x_1 + x_2) = 60x_1 + 60x_2 .$$

3.Витрати, пов’язані з використанням верстатів 1 і 2, визначаємо множенням фактичної тривалості роботи верстата з обробки сировини на вартість 1 год роботи відповідного верстата:

$$\frac{x_1}{5} \cdot 288 + \frac{x_2}{4} \cdot 336 = \frac{288}{5} x_1 + 84 x_2 .$$

4.Витрати, пов’язані з упакуванням продуктів А та В, дорівнюють добутку фактичної тривалості роботи фабрики ($0{,}3x_1 + 0{,}3x_2$) на вартість 1 год її роботи, яка становить 360 грн:

$$360\,(0{,}3x_1 + 0{,}3x_2) = 108x_1 + 108x_2.$$

Беручи до уваги всі складові цільової функції, можна записати математичний вираз прибутку фірми за день:

$Z = (288x_1 + 360x_2) – (60x_1 + 60x_2) – (288/5x_1 + 84x_2) – (108x_1 + 108x_2) = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2)$.

Отже, маємо такий остаточний запис економіко-математичної моделі:

$$\max Z = 12/5 \cdot (26x_1 + 45x_2) \qquad (2.31)$$

за умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 100; & (2.32) \\ x_1 \le 30; & (2.33) \\ x_2 \le 20; & (2.34) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0. \qquad (2.35)$$

Незважаючи на порівняно складний процес моделювання, математично ця задача дуже проста й легко розв’язується графічно.

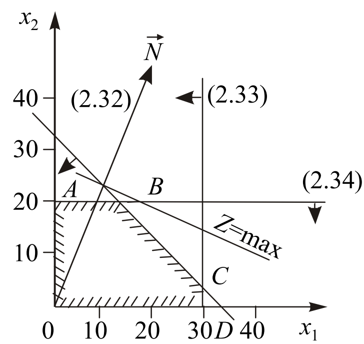


Рис. 2.17

Розв’язання. Графічне розв’язання задачі ілюструє рис.2.17.

Областю допустимих планів, що утворюється системою обмежень задачі, є багатокутник *ABCDO*. Найбільшого значення цільова функція досягає у вершині В. Координати цієї точки визначаються розв’язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 100; \\ x_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 40/3; \\ x_2 = 20. \end{cases}$$

Оптимальний план задачі: $X^* = (40/3;\ 20)$; $\max Z = 2992$ грн.

Отже, для того, щоб отримати найбільший денний прибуток 2992 грн, фірма має обробляти 40/3 тис. кг сировини, виробляючи продукт А, і 20 тис. кг — виробляючи продукт В. За такого оптимального плану випуску продукції верстат 2 працюватиме 20/4 = 5 год на день, тобто з повним навантаженням, а верстат 1 працюватиме лише 40/15 = 2 год 20 хв щодня.

2.8.Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування

Графічний метод для визначення оптимального плану задач лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних необхідно застосовувати інший метод. З властивостей розв’язків задачі лінійного програмування відомо: оптимальний розв’язок задачі має знаходитись в одній з кутових точок багатогранника допустимих розв’язків. Тому найпростіший спосіб відшукання оптимального плану потребує перебору всіх кутових точок (допустимих планів задачі, які ще називають опорними). Порівняння вершин багатогранника можна здійснювати тільки після відшукання якоїсь однієї з них, тобто знайшовши початковий опорний план. Кожний опорний план визначається системою m лінійно незалежних векторів, які містяться в системі обмежень задачі з n векторів $A_1, A_2, ..., A_n$. Отже, загальна кількість опорних планів визначається кількістю комбінацій $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Задачі, що описують реальні економічні процеси, мають велику розмірність, і простий перебір всіх опорних планів таких задач є дуже складним, навіть за умови застосування сучасних ЕОМ. Тому необхідне використання методу, який уможливлював би скорочення кількості обчислень. 1949 року такий метод був запропонований американським вченим Дж. Данцігом — так званий симплексний метод, або ***симплекс-метод***.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв’язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з’ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод — це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

2.8.1.Початковий опорний план

Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,...,n).$$

Не порушуючи загальності, допустимо, що система рівнянь містить перші m одиничних векторів. Отримаємо:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} x_1 \ \ + a_{1,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ \ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \ \ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.37}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,...,n). \tag{2.38}$$

Система обмежень (2.37) у векторній формі матиме вигляд:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + ... + x_nA_n = A_0, \tag{2.39}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, ..., A_m$ — лінійно незалежні одиничні вектори *m*-вимірного простору, що утворюють одиничну матрицю і становлять базис цього простору. Тому в розкладі (2.39) базисними змінними будуть $x_1, x_2, ..., x_m$, а інші змінні — вільні. Прирівняємо всі вільні змінні до нуля, тобто $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, ..., x_n = 0$. Оскільки $b_i \geq 0 \ (i = \overline{1,m})$, а вектори $A_1, A_2, ..., A_m$ — одиничні, то отримаємо один із розв’язків системи обмежень (2.37):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0), \tag{2.40}$$

тобто допустимий план.

Такому плану відповідає розклад

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0, \tag{2.41}$$

де $A_1, A_2, ..., A_m$ — лінійно незалежні вектори і за властивістю 3 розв’язків задачі лінійного програмування (§ 2.5) план X_0 є кутовою точкою багатогранника розв’язків, а отже, може бути початковим опорним планом.

2.8.2. Перехід від одного опорного плану до іншого

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану (2.40), перейти до наступного опорного плану, що відповідає цілеспрямованому процесу перебору кутових точок багатогранника розв’язків.

Оскільки $A_1, A_2, ..., A_m$ є базисом m-вимірного простору, то кожен з векторів співвідношення (2.39) може бути розкладений за цими векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i, j = 1,2,...,n.$$

Розглянемо такий розклад для довільного небазисного вектора, наприклад, для A_{m+1}:

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + ... + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \quad (2.42)$$

Припустимо, що у виразі (2.42) існує хоча б один додатний коефіцієнт $x_{i,m+1}$.

Введемо деяку поки що невідому величину $\theta > 0$, помножимо на неї обидві частини рівності (2.42) і віднімемо результат з рівності (2.41). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \theta x_{2,m+1})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{m,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0. \quad (2.43)$$

Отже, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1};...x_m - \theta x_{m,m+1};\theta;0,...,0)$$

є планом задачі у тому разі, якщо його компоненти невід’ємні. За допущенням $\theta > 0$, отже, ті компоненти вектора X_1, в які входять $x_{i,m+1} \le 0$, будуть невід’ємними, тому необхідно розглядати лише ті компоненти, які містять додатні $x_{i,m+1} (i = 1,2,...,m)$. Тобто необхідно знайти таке значення $\theta > 0$, за якого для всіх $x_{i,m+1} > 0$ буде виконуватися умова невід’ємності плану задачі:

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \ge 0. \quad (2.44)$$

З (2.44) отримуємо, що для шуканого $\theta > 0$ має виконуватися умова $\theta \le \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$. Отже, вектор X_1 буде планом задачі для будь-якого θ, що задовольняє умову:

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}},$$

де мінімум знаходимо для тих i, для яких $x_{i,m+1} > 0$.

Опорний план не може містити більше ніж m додатних компонент, тому в плані X_1 необхідно перетворити в нуль хоча б одну з компонент. Допустимо, що $\theta = \theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}$ для деякого значення i, тоді відповідна компонента плану X_1 перетвориться в нуль. Нехай це буде перша компонента плану, тобто:

$$\theta^* = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Підставимо значення θ^* у вираз (2.43):

$$(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1})A_1 + (x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1})A_2 + ... + (x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1})A_m +$$
$$+ \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

якщо позначити $x_i - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{i,m+1} = x'_i$ $(i = \overline{2,m})$, $\frac{x_1}{x_{1,m+1}} = x'_{m+1}$, то рівняння можна подати у вигляді:

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + ... + x'_m A_{m+1} + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0,$$

якому відповідає такий опорний план:

$$X_2 = (0; x'_2; x'_3; ...; x'_m; x'_{m+1}; 0; ...; 0).$$

Для визначення наступного опорного плану необхідно аналогічно продовжити процес: будь-який вектор, що не входить у базис, розкласти за базисними векторами, а потім визначити таке $\theta^* > 0$, для якого один з векторів виключається з базису.

Отже, узагальнюючи розглянутий процес, можемо висновувати: визначення нових опорних планів полягає у виборі вектора, який слід ввести в базис, і вектора, який необхідно вивести з базису. Така процедура відповідає переходу від одного базису до іншого за допомогою методу Жордана—Гаусса.

Необхідно зазначити, що для випадку, коли вектор A_{m+1} підлягає включенню в базис, а в його розкладі (2.42) всі $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, не існує такого значення $\theta > 0$, яке виключало б один з векторів. У такому разі план X_1 містить m+1 додатних компонент, отже, система векторів $A_1, A_2, ..., A_m, A_{m+1}$ буде лінійно залежною і визначає не кутову точку багатогранника розв'язків. Функціонал не може в ній набирати максимального значення. Це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків.

2.8.3. Оптимальний розв'язок. Критерій оптимальності плану

Симплексний метод уможливлює направлений перебір опорних планів, тобто перехід від одного плану до іншого, який є хоча б не гіршим від попереднього за значенням функціонала. Отже, окремим питанням стає вибір вектора, який необхідно вводити в базис при здійсненні ітераційної процедури симплексного методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування (2.36)—(2.38).

Допустимо, що вона має опорні плани і вони є невиродженими. Розглянемо початковий опорний план виду (2.40):

$$X_0 = (x_1 = b_1,\, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m,\, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0).$$

Такому плану відповідає розклад за базисними векторами

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0 \qquad (2.45)$$

та значення функціонала:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_m x_m = F(X_0). \qquad (2.46)$$

Кожен з векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ можна розкласти за векторами базису, причому у єдиний спосіб:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + ... + x_{mj} A_m = A_j \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2.47)$$

тому такому розкладу відповідатиме і єдине значення функціонала:

$$F_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + ... + c_m x_{mj} \quad (j = \overline{1,n}). \qquad (2.48)$$

Позначимо через c_j коефіцієнт функціонала, що відповідає вектору A_j, та $\Delta_j = F_j - c_j$ (їх називають оцінками відповідних векторів плану) $(j = \overline{1,n})$. Тоді справедливим є таке твердження (***умова оптимальності плану*** задачі лінійного програмування):

якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів $A_j\,(j=\overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову:

$$\Delta_j = F_j - c_j \geq 0, \tag{2.49}$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування (2.36)—(2.38).

Аналогічно формулюється умова оптимальності плану задачі на відшукання мінімального значення функціонала: якщо для деякого плану X_0 розклад всіх векторів $A_j\,(j=\overline{1,n})$ у даному базисі задовольняє умову

$$\Delta_j = F_j - c_j \leq 0, \tag{2.50}$$

то план X_0 є оптимальним розв'язком задачі лінійного програмування.

Отже, для того, щоб план задачі лінійного програмування був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб його оцінки $\Delta_j = F_j - c_j$ були невід'ємними для задачі на максимум та недодатними для задачі на мінімум.

Умови оптимальності планів задач лінійного програмування є наслідками двох теорем. Скориставшись введеними в даному параграфі допущеннями та позначеннями, сформулюємо відповідні теореми, а також наведемо їх доведення.

Теорема 2.6. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j < 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна відшукати такий план *X*, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) > F(X_0)$.

Доведення. Помножимо (2.47) і (2.48) на $\theta > 0$ і віднімемо результати відповідно з (2.45) та (2.46). Отримаємо:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + ... + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0; \quad (2.51)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta x_{2j})c_2 + ... + (x_m - \theta x_{mj})c_m + \theta c_j =$$
$$= F(X_0) - \theta(F_j - c_j) = F(X_0) - \theta F_j + \theta c_j. \quad (2.52)$$

У співвідношенні (2.52) до обох частин додається величина θc_j для $j = \overline{1,n}$. У (2.51) $x_1, x_2, ..., x_m$ додатні, тому завжди можна знайти таке $\theta > 0$, що всі коефіцієнти при векторах $A_1, A_2, ..., A_m, A_j$ були б невід'ємними, інакше кажучи, отримати новий план задачі виду:

$X = (x_1 - \theta x_{1j}; x_2 - \theta x_{2j}; ...; x_m - \theta x_{mj}; \theta; 0; ...; 0)$, якому згідно з (2.52) відповідає таке значення функціонала:

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - c_j). \quad (2.53)$$

Оскільки за умовою теореми $F_j - c_j < 0$ і $\theta > 0$, то $F(X) > F(X_0)$, що й потрібно було довести.

Якщо розглядається задача на відшукання мінімального значення цільової функції, то формулюється така теорема.

Теорема 2.7. Якщо для деякого вектора A_j виконується умова $F_j - c_j > 0$, то план X_0 не є оптимальним і можна побудувати такий план *X*, для якого виконуватиметься нерівність $F(X) < F(X_0)$.

Доведення аналогічне попередньому.

2.8.4. Розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом

Розглянемо, як, виходячи з початкового опорного плану задачі лінійного програмування, за допомогою симплексного методу знайти оптимальний план.

Продовжимо розгляд задачі (2.36)—(2.38), опорний план якої $X_0 = \left(x_1 = b_1,\, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m,\, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\right)$. Для дослідження даного плану на оптимальність (за умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування) необхідно вектори $A_j (j = \overline{1,n})$ системи обмежень (2.37) розкласти за базисними векторами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ і розрахувати значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$.

Всі подальші обчислення зручно проводити в ***симплексній таблиці*** (табл. 2.6).

У стовпці «Базис» записані змінні, що відповідають базисним векторам, а в стовпці «$С_{баз}$» — коефіцієнти функціонала відповідних базисних векторів. У стовпці «План» — початковий опорний план X_0, в цьому ж стовпці в результаті обчислень отримують оптимальний план. У стовпцях $x_j (j = \overline{1,n})$ записані коефіцієнти розкладу кожного j-го вектора за базисом, які відповідають у першій симплексній таблиці коефіцієнтам при змінних у системі (2.37). У (m + 1)-му рядку в стовпці «План» записують значення функціонала для початкового опорного плану $F(X_0)$, а в інших стовпцях x_j — значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$. Цей рядок симплексної таблиці називають ***оцінковим***.

Значення $F(X_0)$ знаходять підстановкою компонент опорного плану в цільову функцію, а значення $F(X_j)$ — при підстановці коефіцієнтів розкладу кожного j-го вектора за векторами базису, тобто ці значення в табл.2.6 отримують як скалярний добуток:

$$F(X_0) = C_{баз} X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i;$$

$$F_j = F(X_j) = C_{баз} X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \ \ j = 1,2,...,n,$$

де c_i — коефіцієнти функціонала, що відповідають векторам базису.

Таблиця 2.6

ПЕРША СИМПЛЕКСНА ТАБЛИЦЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

i	Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b_l	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lj}	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	θ_m

$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$	$F(X_0)$	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_k	…	Δ_n		

Після заповнення табл.2.6 розраховують значення оцінок плану (останній рядок): $\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) - c_j, \quad j = 1,2,...,n$. Потім згідно з умовою оптимальності плану задачі лінійного програмування, якщо всі $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ (для задачі на максимум), то план є оптимальним. Допустимо, що одна з оцінок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тоді план X_0 не є оптимальним і необхідно здійснити перехід до наступного опорного плану, якому буде відповідати більше значення функціонала. Якщо від'ємних оцінок кілька, то включенню до базису підлягає вектор, який вибирається як $\min(F_j - c_j)$. Мінімум знаходять для тих індексів *j*, де $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Якщо існує кілька однакових значень оцінок, що відповідають $\min(F_j - c_j)$, то з відповідних їм векторів до базису включають той, якому відповідає максимальне значення функціонала.

Якщо хоча б для однієї від'ємної оцінки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ всі коефіцієнти розкладу a_{ij} відповідного вектора недодатні, то це означає, що функціонал є необмеженим на багатограннику розв'язків, тобто багатогранник у даному разі являє собою необмежену область і розв'язком задачі є $X = \infty$.

Нехай $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, тобто мінімальне значення досягається для *k*-го вектора $m \le k \le n$. Тоді до базису включається вектор A_k. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для того, щоб вибрати вектор, який необхідно вивести з базису (згідно з процедурою переходу від одного опорного плану задачі до іншого — §2.7.2), розраховують останній стовпчик табл.2.6 — значення θ_i.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}},\ i = 1,2,...,m,\ a_{ik} > 0 .$$

З розрахованих значень необхідно вибрати найменше $\theta^* = \min\theta_i,\ i = 1,2,...,m,\ a_{ik} > 0$. Тоді з базису виключають *i*-ий вектор, якому відповідає θ^*.

Допустимо, що $\theta^* = \min\theta_l = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$ відповідає вектору, що знаходиться в *l*-му рядку табл.2.6. Відповідний рядок симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається елемент симплексної таблиці a_{lk}, який називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{lk} і методу Жордана—Гаусса розраховують нову симплексну таблицю, що визначатиме наступний опорний план задачі.

Для визначення нового опорного плану необхідно всі вектори розкласти за векторами нового базису. Вектор A_k, який необхідно вводити до базису, в розкладі за початковим базисом має вигляд:

$$A_k = a_{1k}A_1 + \ldots + a_{lk}A_l + \ldots + a_{mk}A_m. \tag{2.54}$$

Вектор A_l виходить з базису, і його розклад за новим базисом отримаємо з виразу (2.54):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}}\left(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m\right). \tag{2.55}$$

Розклад вектора A_0 за початковим базисом має вигляд:

$$A_0 = b_1A_1 + \ldots + b_lA_l + \ldots + b_mA_m. \tag{2.56}$$

Для запису розкладу вектора в новому базисі підставимо вираз (2.55) у рівняння (2.56), маємо:

$$A_0 = b_1A_1 + \ldots + b_l\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k - a_{1k}A_1 - \ldots - a_{mk}A_m)\right] + \ldots + b_mA_m =$$
$$= \left(b_1 - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1 + \ldots + \frac{b_l}{a_{lk}}A_k + \ldots + \left(b_m - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m.$$

Отже, значення компонент наступного опорного плану розраховуються за формулами:

$$\begin{cases} b_i' = b_i - \dfrac{b_l}{a_{lk}} a_{ik} \ \ (i \neq j); \\ b_k' = \dfrac{b_l}{a_{lk}} \ \ (i = j). \end{cases} \tag{2.57}$$

Розклад за початковим базисом будь-якого з векторів має вигляд:

$$A_j = a_{1j} A_1 + \ldots + a_{lj} A_l + \ldots + a_{mj} A_m \, . \tag{2.58}$$

Розклад за новим базисом отримаємо підстановкою (2.55) у (2.58):

$$A_j = a_{1j} A_1 + \ldots + a_{lj} \left[\frac{1}{a_{lk}} (A_k - a_{1k} A_1 - \ldots - a_{mk} A_m) \right] + \ldots + a_{mj} A_m =$$

$$= \left(a_{1j} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{1k} \right) A_1 + \ldots + \frac{a_{lj}}{a_{lk}} A_k + \ldots + \left(a_{mj} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{mk} \right) A_m =$$

$$= a_{1j}' A_1 + \ldots + a_{kj}' A_k + \ldots + a_{mj}' A_m \, .$$

Новий план: $X_1 = (x_1 = a_{1j}'; \ldots; x_k = a_{kj}'; \ldots; x_m = a_{mj}')$, де

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik} \ \ (i \neq j); \\ a_{kj}' = \dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \ \ \ \ (i = j). \end{cases} \tag{2.59}$$

Формули (2.57) та (2.59) є формулами повних виключень Жордана—Гаусса.

Отже, щоб отримати коефіцієнти розкладу векторів $A_0, A_1, \ldots, A_n$ за векторами нового базису (перехід до наступного опорного плану та створення нової симплексної табл.2.7), необхідно:

1) розділити всі елементи напрямного рядка на розв'язувальний елемент;

2) розрахувати всі інші елементи за формулами повних виключень Жордана—Гаусса (правило прямокутника).

Потім необхідно здійснити перевірку нових значень оцінкового рядка. Якщо всі $F_j - c_j \geq 0$, то план X_1 — оптимальний, інакше переходять до відшукання наступного опорного плану. Процес продовжують до отримання оптимального плану, чи встановлення факту відсутності розв'язку задачі.

Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $F_j - c_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибираючи розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок (одну ітерацію) симплекс-методом. У результаті отримаємо новий опорний план, якому відповідає те саме значення функціонала, що і для попереднього плану, тобто функціонал досягає максимального значення в двох точках багатогранника розв'язків, а отже, за властивістю 2 (§ 2.5) розв'язків задачі лінійного програмування така задача має нескінченну множину оптимальних планів.

Таблиця 2.7

ДРУГА СИМПЛЕКСНА ТАБЛИЦЯ ДЛЯ ВІДШУКАННЯ ОПОРНОГО (ОПТИМАЛЬНОГО) ПЛАНУ

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1'	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}'$	…	a_{1j}'	…	a_{1k}'	…	a_{1n}'	θ_1
2	x_2	c_2	b_2'	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}'$	…	a_{2j}'	…	a_{2k}'	…	a_{2n}'	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b_l'	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}'$	…	a_{lj}'	…	a_{lk}'	…	$a_{\ln}'$	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b_m'	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}'$	…	a_{mj}'	…	a_{mk}'	…	a_{mn}'	θ_m

$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$	$F(X_1)$	0	0	…	0	…	0	Δ'_{m+1}	…	Δ'_j	…	Δ'_k	…	Δ'_n	

Розв’язання задачі лінійного програмування на відшукання мінімального значення функціонала відрізняється лише умовою оптимальності опорного плану. До базису включають вектор, для якого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, де максимум знаходять для тих j, яким відповідають $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Всі інші процедури симплексного методу здійснюються аналогічно, як у задачі лінійного програмування на відшукання максимального значення функціонала.

2.8.5.Приклад розв’язування задачі симплекс-методом

Розглянемо застосування симплекс-методу для розв’язання деяких задач лінійного програмування.

Приклад 2.10. Продукція чотирьох видів A, B, C і D проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду наведена в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ПРОДУКЦІЇ НА ВЕРСТАТАХ, год.

Верстат	Тривалість обробки одиниці продукції			
	A	B	C	D
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-години становить 10 грн для верстата 1 і 15 грн — для верстата 2. Тривалість використання верстатів обмежена: для верстата 1 вона становить 450 машино-годин, а для верстата 2 — 380 машино-годин.

Ціна одиниці продукції видів A, B, C і D дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний прибуток.

Побудова економіко-математичної моделі. Нехай x_j — план виробництва продукції j-го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на тривалість використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (маш.-год.);

для верстата 2 $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (маш.-год.).

Цільовою функцією задачі є загальний прибуток від реалізації готової продукції, який розраховується як різниця між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$\max Z = (73 - (2 \cdot 10 + 3 \cdot 15))x_1 + (70 - (3 \cdot 10 + 2 \cdot 15))x_2 + \\ + (55 - (4 \cdot 10 + 1 \cdot 15))x_3 + (45 - (2 \cdot 10 + 2 \cdot 15))x_4;$$

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 .$$

Отже, математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0;\ j = \overline{1, 4}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу симплекс-методом згідно з розглянутим алгоритмом.

1.Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0; \; j = \overline{1,\, 6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають недовикористаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 та 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

Де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, то саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають *базисними*, а решту — *вільними змінними* задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \qquad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j \left(j = \overline{1,\, 6}\right)$ векторна форма запису системи обмежень цієї задачі матиме вигляд:

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 450 \cdot \vec{A}_5 + 380 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0 \,.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0 .$$

2.Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	150
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	190
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - c_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8 ;$$

$$Z_2 - c_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10 ;$$

$$Z_3 - c_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 ;$$

$$Z_4 - c_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5 ;$$

$$Z_5 - c_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0 ;$$

$$Z_6 - c_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0 .$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3.Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), то визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку є хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ від'ємні, тобто не задовольняють умову оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4.Перехід від одного опорного плану до іншого здійснюють зміною базису, тобто через виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису вибираємо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка з-поміж тих, які не задовольняють умову оптимальності ($|-10|>|-8|$).

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_2» знаходимо відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці маємо, що $\min\theta = \{450/3;\ 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число $a_{12} = 3$ — *розв'язувальний елемент*. Дальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана—Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	10	150	2/3	1	4/3	2/3	1/3	0	225
x_6	0	80	5/3	0	–5/3	2/3	–2/3	1	48
$Z_j - c_j \geq 0$		1500	–4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими нижче правилами:

1.Кожний елемент розв'язувального (напрямного) рядка необхідно поділити на розв'язувальний елемент і отримані числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2.Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3.Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4.Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за правилом прямокутника.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 — розв'язувальний елемент (число 1);

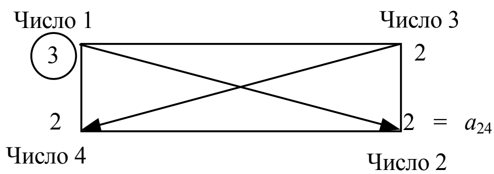
2 — число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 — елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають за такою формулою:

$$\frac{\text{Число 1}\cdot\text{Число 2} - \text{Число 3}\cdot\text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3\cdot 2 - 2\cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик «x_4» у другому рядку другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі й елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів зображення визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - c_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$Z_j - c_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0),$$

Або

$$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564\ .$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції А та 118 одиниць продукції В, є оптимальним. Він уможливлює отримання найбільшого прибутку за заданих умов (1564 грн). При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Наведені вище три симплексні таблиці можна об'єднати в одну та послідовно записувати в ній всі ітерації.

2.8.6.Метод штучного базису

У попередніх параграфах розглядався випадок, коли система обмежень задачі лінійного програмування містила одиничну матрицю порядку m. Проте більшість задач не можна звести до потрібного вигляду. В такому разі застосовується метод штучного базису.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{2.60}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.61}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.62}$$

Задача подана в канонічному вигляді і система обмежень (2.61) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i} \geq 0 \; (i = \overline{1, m})$. Такі змінні називають ***штучними***. (Не обов'язково кількість введених штучних змінних має дорівнювати m. Їх необхідно вводити лише в ті рівняння системи обмежень, які не розв'язані відносно базисних змінних.) Допустимо, що система рівнянь (2.61) не містить жодного одиничного вектора, тоді штучну змінну вводять у кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \; + x_{n+2} \; = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{2.63}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, n+m).$$

У результаті додавання змінних у рівняння системи (2.61) область допустимих розв'язків задачі розширилась. Задачу з системою обмежень (2.63) називають ***розширеною***, або ***М-задачею***. Розв'язок розширеної задачі збігатиметься з розв'язком початкової лише за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі будуть виведені з базису, тобто дорівнюватимуть нулеві. Тоді система обмежень (2.63) набуде вигляду (2.61) (не міститиме штучних змінних), а розв'язок розширеної задачі буде розв'язком і задачі (2.60)—(2.62).

Згідно з симплексним методом до базису вводять змінні, які покращують значення цільової функції. Для даної задачі на максимум вони мають його збільшувати. Отже, для того, щоб у результаті процедур симплексних перетворень виключалися з базису штучні змінні, потрібно ввести їх у цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами. Тобто цільова функція набуде вигляду:

$$\max F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$$

(У разі розв'язання задачі на відшукання мінімального значення цільової функції вводять коефіцієнти, які є досить великими числами. Цільова функція тоді має вигляд: $\min F^* = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + Mx_{n+1} + ... + Mx_{n+m}$).

Припускається, що величина M є досить великим числом. Тоді якого б малого значення не набувала відповідна коефіцієнту штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції F^* буде від'ємним для задачі на максимум та додатним для задачі на мінімум і водночас значним за модулем. Тому процедура симплексного методу одразу вилучає відповідні змінні з базису і забезпечує знаходження плану, в якому всі штучні змінні $x_{n+i} = 0 \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, то це означає, що початкова задача не має розв'язку, тобто система обмежень несумісна.

Для розв'язання розширеної задачі за допомогою симплексних таблиць зручно використовувати таблиці, оцінкові рядки яких поділені на дві частини-рядки. Тоді в ($m+2$)-му рядку записують коефіцієнти з M, а в ($m+1$)-му — ті, які не містять M. Вектор, який підлягає включенню до базису, визначають за ($m+2$)-м рядком. Ітераційний процес по ($m+2$)-му рядку проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, потім процес визначення оптимального плану продовжують за ($m+1$)-им рядком.

Взаємозв'язок між розв'язками початкової та розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема 2.8. Якщо в оптимальному плані $\widehat{X}_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ..., 0)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0,\ (i = 1, 2, ..., m)$, то план $X_{opt} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ є оптимальним планом початкової задачі.

Доведення. Зазначимо, що коли план $\widehat{X}_{opt}$ є оптимальним планом розширеної задачі, то план X_{opt} — план початкової задачі. При цьому

$$F(X_{opt}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n =$$
$$= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - M \cdot 0 - ... - M \cdot 0 = F^*(\widehat{X}_{opt}).$$

Доведемо, що план X_{opt} — оптимальний план початкової задачі. Допустимо, що X_{opt} не є оптимальним планом. Тоді існує такий оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, для якого $F(X^*) > F(X_{opt})$. Звідси для вектора $\widehat{X}^*_{opt} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$, що є планом розширеної задачі, маємо:

$$F^*(\widehat{X}^*_{opt}) = F(X^*_{opt}) > F(X_{opt}) = F^*(\widehat{X}_{opt}),$$

Тобто

$$F^*(\widehat{X}^*_{opt}) > F^*(\widehat{X}_{opt}).$$

Отже, план $\widehat{X}_{opt}$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми, а тому зроблене допущення щодо неоптимальності плану X_{opt} є неправильним.

Отже, загалом ***алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом*** складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Δ_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі здійснюється визначенням розв'язувального елемента та розрахунками елементів нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Далі ітераційний процес повторюють, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши

розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки Δ_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

Приклад 2.11. Розв'язати задачу з прикладу 2.10 із додатковою умовою: продукція С має виготовлятися обсягом не менш як 9 одиниць.

Розв'язання. Математичну модель сформульованої задачі запишемо так:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи для розв'язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Зауважимо, що нерівність типу «≥» перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Система містить лише два одиничні вектори — $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом + 1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \geq \overline{1,8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$
$$Z_0 = 8\cdot 0 + 10\cdot 0 + 0\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0\cdot 450 + 0\cdot 380 + 0\cdot 0 - M\cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	0	–M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
x_8	$-M$	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	9
$Z_j - c_j \geq 0$		0	– 8	–10	0	5	0	0	0	0	
		–9M	0	0	$-M$	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо: $Z_0 = -9M$; $Z_1 - c_1 = -8$; $Z_2 - c_2 = -10$, $Z_3 - c_3 = -M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий — числа з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у задачі 2.41, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі. Після першої ітерації з базису виведена штучна змінна x_8. Дальше розв'язування продовжуємо за алгоритмом симплексного методу.

Наступні кроки розв’язування задачі наведені у загальній таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	– 5	0	0	0	– M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	–4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	– 1	1	—
$Z_j - c_j \geq 0$		1380	– 4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	– 40/3	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	
$Z_j - c_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	–12	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	

Оптимальним планом задачі є вектор:

$$X^* = (57;\ 100;\ 9;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0),$$

$$\max Z = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції А, 100 одиниць продукції В і 9 одиниць продукції С. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 грн.

Приклад 2.12. Фінансові ресурси фірми можуть використовуватися для вкладення у два проекти. За інвестування в проект А гарантується отримання через рік прибутку в розмірі 60 коп. на кожну вкладену гривню, а вкладення в проект В дає змогу отримати дохід у розмірі 2 грн на кожну інвестовану гривню, але через два роки. За фінансування проекту В період інвестування має бути кратним двом. Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом у сумі 100 000 грн, щоб максимізувати загальний грошовий дохід, який можна отримати через три роки після початку інвестування.

Розв'язання. Нехай x_{ij} — розмір вкладених коштів у i-му році в проект j ($i = \overline{1,3}$; $j = 1, 2$). Побудуємо умовну схему розподілу грошових коштів протягом трьох років.

		Проект А	**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року	100 000	
	Альтернативні вкладення	x_{11}	x_{12}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{11}$	—
2-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$	
	Альтернативні вкладення	x_{21}	x_{22}
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{21}$	$3x_{12}$
3-й рік	Наявна сума на початок року	$100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$	
	Альтернативні вкладення	x_{31}	—
	Дохід на кінець року	$1{,}6x_{31}$	$3x_{22}$

Згідно з наведеною схемою можна записати математичну модель задачі.

Цільова функція: грошовий дохід фірми після трьох років інвестицій

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}.$$

Обмеження моделі сформулюємо згідно з такою умовою: розмір коштів, інвестованих у поточному році, не може перевищувати суми залишку коштів минулого року та доходу за минулий рік:

для 1-го року $x_{11} + x_{12} \le 100\,000$;

для 2-го року $x_{21} + x_{22} \le 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11}$;

для 3-го року $x_{31} \le 100\,000 - (x_{11} + x_{12}) + 1{,}6x_{11} - (x_{21} + x_{22}) + 1{,}6x_{21} + 3x_{12}$.

Виконавши елементарні перетворення, дістанемо систему обмежень:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\,000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0. \end{cases}$$

Отже, економіко-математична модель сформульованої задачі має такий вигляд:

$$\max Z = 1{,}6x_{31} + 3x_{22}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 100\,000; \\ -1{,}6x_{11} + x_{21} + x_{22} \le 0; \\ -3x_{12} - 1{,}6x_{21} + x_{31} \le 0, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \ i = \overline{1{,}3}; \ j = 1, 2.$$

Очевидно, що ця задача є задачею лінійного програмування і її можна розв’язати симплекс-методом. Згідно з алгоритмом необхідно звести систему обмежень задачі до канонічної форми. Це виконується за допомогою додаткових змінних x_1, x_2, та x_3, які введемо зі знаком «+» до лівої частини всіх відповідних обмежень. У цільовій функції задачі ці змінні мають коефіцієнт, що дорівнює нулю.

Розв’язування задачі наведено у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_1	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		0	–4,8	–4,8	0,44	0	0	0	3	1,6
x_{11}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	160 000	0	1,6	1	1	0	1,6	1	0
x_{31}	1,6	0	0	–3	–1,6	0	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Оптимальним є такий план:

$$X_1^* = (x_{11} = 100000; \ x_{22} = 160000).$$

За такого плану інвестувань $Z_{\max} = 480\,000$ грн.

Але задача має ще один оптимальний план, який можна дістати, вибравши розв'язувальний елемент у стовпчику «x_{12}» останньої симплексної таблиці. Це може бути або число 1, або 1,6. Візьмемо як розв'язувальний елемент 1. Виконавши один крок перетворень симплекс-методом, дістанемо таку другу кінцеву симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	0	0	0	3	1,6	0	0	0
			x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_1	x_2	x_3
x_{12}	0	100 000	1	1	0	0	0	1	0	0
x_{22}	3	0	–1,6	0	1	1	0	0	1	0
x_{31}	1,6	300 000	3	0	–1,6	0	1	3	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		480 000	0	0	0,44	0	0	4,8	3	1,6

Звідси:

$$X_2^* = (x_{12} = 100\,000;\ \ x_{31} = 300\,000), Z_{\max} = 480\,000 \text{ грн.}$$

Зобразимо використання грошових коштів фірми за першим оптимальним планом задачі у вигляді схеми:

		Проект А	Проект В
1-й рік	Наявна сума на початок року	100 000 грн	
	Вкладення	$x_{11} = 100\,000$	$x_{12} = 0$
	Дохід на кінець року		160 000 грн
2-й рік	Наявна сума на початок року	160 000 грн	
	Вкладення	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 160\,000$
	Дохід на кінець року		0 грн
3-й рік	Наявна сума на початок року	0 грн	
	Вкладення		
	Дохід на кінець року	x_{31}	**480 000 грн.**

Згідно з розглянутою схемою перший оптимальний план інвестування передбачає на перший рік усі кошти обсягом 100000 грн вкласти в проект А, що дасть змогу одержати прибуток обсягом

60000 грн, а загальна сума в кінці року становитиме 160 000 грн. На другий рік усі кошти в розмірі 160000 грн передбачається витратити на фінансування проекту В. Наприкінці другого року фірма прибутку не отримає. На третій рік фінансування проектів не передбачається, але в кінці року прибуток фірми від минулорічних інвестицій проекту В становитиме 320000 грн, а загальний грошовий дохід — 480 000 грн.

Такий же максимальний дохід можна мати, провівши інвестиції за схемою:

		Проект А		**Проект В**
1-й рік	Наявна сума на початок року		100 000 грн	
	Вкладення	$x_{11} = 0$		$x_{12} = 100\ 000$
	Дохід на кінець року		0 грн	
2-й рік	Наявна сума на початок року		0 грн	
	Вкладення	$x_{21} = 0$		$x_{22} = 0$
	Дохід на кінець року		300 000 грн	
3-й рік	Наявна сума на початок року		300 000 грн	
	Вкладення	$x_{31} = 300\ 000$		
	Дохід на кінець року			**480 000 грн.**

Згідно з другим оптимальним планом у першому році фірма спрямовує весь капітал у розмірі 100000 грн на фінансування проекту В. Це уможливить одержання грошового доходу лише наприкінці другого року обсягом 300000 грн, які на третій рік повністю інвестуються в проект А. Загальний грошовий дохід фірми за три роки діяльності за цим варіантом також становитиме 480000 грн.

Якщо як розв'язувальний елемент в останній симплексній таблиці взяти число 1,6, то матимемо третій оптимальний план:

$$x_{11} = 50\,000; x_{12} = 50\,000;$$
$$x_{22} = 80\,000;$$
$$x_{31} = 150\,000.$$
$$Z_{\max} = 480\,000.$$

Приклад 2.13. Продукція фабрики випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини — 2 м. За спеціальним замовленням споживачів фабрика постачає також рулони інших розмірів, розрізуючи стандартні.

Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведено в табл. 2.9.

Таблиця 2.9

ЗАМОВЛЕННЯ НА РУЛОНИ ПАПЕРУ

Замовлення	Потрібна ширина рулона, м	Кількість замовлених рулонів
1	0,8	150
2	1,0	200
3	1,2	300

Необхідно визначити оптимальний варіант розкрою стандартних рулонів, за якого спеціальні замовлення, що надходять, задовольняють повністю з мінімальними відходами паперу.

Розв'язання. Аби виконати спеціальні замовлення, які надійшли, розглянемо п'ять можливих варіантів розрізування стандартних рулонів, що можуть використовуватися в різних комбінаціях. Варіанти розкрою наведено в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

МОЖЛИВІ ВАРІАНТИ РОЗРІЗУВАННЯ СТАНДАРТНИХ РУЛОНІВ ПАПЕРУ

Потрібна ширина рулона, м	Кількість нестандартних рулонів за варіантами				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
0,8	2	1	1	0	0
1,0	0	0	1	2	0

1,2	0	1	0	0	1
Обсяг відходів, м	0,4	0	0,2	0	0,8

Нехай x_j — кількість стандартних рулонів паперу, які буде розрізано *j*-способом, $j = \overline{1,5}$.

Обмеження задачі пов'язані з обов'язковою вимогою повного забезпечення необхідної кількості нестандартних рулонів за спеціальними замовленнями. Якщо брати до уваги всі подані в таблиці способи розкрою, то дістанемо такі умови (обмеження) даної задачі:

1. Щодо кількості рулонів шириною 0,8 м:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 150.$$

2. Щодо кількості рулонів шириною 1 м:

$$x_3 + 2x_4 = 200.$$

3. Стосовно кількості рулонів шириною 1,2 м:

$$x_2 + x_5 = 300.$$

Цільова функція задачі — це мінімальні загальні втрати паперу під час розрізування стандартних рулонів на рулони нестандартної ширини. Математично вона має такий вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + 0{,}2x_3 + 0x_4 + 0{,}8x_5 .$$

Математична модель задачі загалом записується так:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150; \\ x_3 + 2x_4 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Для розв'язування цієї задачі застосуємо алгоритм симплекс-методу. Оскільки задачу сформульовано в канонічній формі, запишемо її відразу у векторній формі:

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

Де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

У системі векторів маємо лише один одиничний вектор $\vec{A}_5$. Тому в перше та друге обмеження введемо штучні змінні x_6 та x_7. Розширена задача матиме вигляд:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0{,}2x_3 + 0{,}8x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 150; \\ x_3 + 2x_4 + x_7 = 200; \\ x_2 + x_5 = 300; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

Процес розв'язання задачі симплекс-методом подано у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0,4	0	0,2	0	0,8	M	M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	0
x_7	M	200	0	0	1	2	0	0	1
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0
$Z_j - c_j \geq 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	0
		350 M	2 M	M	2 M	2 M	0	0	0
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0	0	
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	
$Z_j - c_j \geq 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	
		150 M	2 M	M	M	0	0	0	
x_1	0,4	75	1	1/2	1/2	0	0		
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0		
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1		
$Z_j - c_j \geq 0$		270	0	1	0	0	0		

x_2	0	150	2	1	1	0	0
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0
x_5	0,8	150	–2	0	–1	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		120	–2	0	–1	0	0

Згідно з останньою симплексною таблицею запишемо оптимальний план задачі:

$$X^* = (0;\ 150;\ 0;\ 100;\ 150),\ \min Z = 120.$$

Визначений оптимальний план передбачає: щоб у повному обсязі виконати спеціальні замовлення, які надходять на паперову фабрику, необхідно розрізати 150 стандартних рулонів другим способом, 100 рулонів — четвертим і 150 — п'ятим. За такого оптимального варіанта розкрою обсяг відходів паперу буде найменшим і становитиме 120 м.

2.8.7.Зациклення в задачах лінійного програмування

Як доведено вище, оптимальний план задачі лінійного програмування може знаходитись в одній з кутових точок багатогранника розв'язків, кількість яких є скінченною, тому, використовуючи для розв'язування задачі симплексний метод, за скінченну кількість кроків можна знайти оптимальний план або з'ясувати, що задача не має розв'язку. Однак строга монотонність симплексного алгоритму має місце лише у разі невиродженості всіх опорних планів, які отримані в ході ітераційної процедури алгоритму.

Якщо при дослідженні значень $\theta_i (i = \overline{1, m})$ у симплексній таблиці існує кілька однакових значень з-поміж $\theta_i (i = \overline{1, m})$, то це означає, що можна вибрати для виключення з базису більш ніж один вектор. Наступна ітерація симплексного методу призведе до виродженого опорного плану, в якому хоча б одна з базисних змінних дорівнюватиме нулю.

Якщо деякий опорний план буде виродженим, тобто один або більше вільних членів основної системи обмежень дорівнюватимуть нулю, то при визначенні вектора, який необхідно на наступному кроці виводити з базису, найменше значення θ буде дорівнювати нулю і відповідати тому рівнянню, вільний член якого нульовий. Отже, в наступній ітерації буде виведена з базису відповідна змінна, причому всі значення базисних змінних в наступному опорному плані залишаться без змін, тобто значення цільової функції після проведення ітерації не зміниться.

Це означає, що наступні ітерації можуть не привести до покращення значення цільової функції. В такому разі після певного числа ітерацій дістають план, який вже було отримано раніше в процесі розв'язування задачі. Подальші ітерації, проведені аналогічно, приведуть до повторного перебору тих самих опорних планів. Вироджений план є причиною того, що теоретично виникає можливість нескінченного числа повторень однакових послідовностей ітерацій, які не покращують розв'язку, тобто обчислювальна процедура не буде мати кінця. Таку ситуацію називають ***зацикленням***. Циклу можна було б уникнути, запам'ятовуючи опорні плани, що утворили цикл, і не повертаючись до них. Проте, щоб забезпечити однозначність вибору вектора, який виводиться з базису, розроблено ряд спеціальних прийомів. Найцікавішим з них є так званий ***ε-метод***.

Виродженому плану відповідає вершина множини планів, що утворена більш ніж *n* гіперплощинами. Інакше кажучи, одна вершина відповідає кільком виродженим планам, що означає злиття кількох вершин багатогранника в одну. Ідея *ε*-методу усунення зациклення полягає в роз'єднуванні злитих вершин. Для цього досить, очевидно, ввести замість нулів у відповідні рівняння якісь інші значення, однак зробити це так, щоб не було знову кількох мінімальних співвідношень у наступному кроці. У такий спосіб замість початкової матимемо змінену задачу. Проте можна легко довести, що, діставши оптимальний план зміненої задачі, й допустивши, що введені величини дорівнюють нулю, матимемо оптимальний розв'язок початкової задачі.

На практиці вводять величини, які є дуже малими – це поліноми довільно взятої малої (близької до нуля) додатної величини *ε*. Коефіцієнтами поліномів беруть коефіцієнти при невідомих (базисних і небазисних) відповідного рівняння, а степенями *ε*-номери цих невідомих, тобто для деякого *i*-го рівняння маємо поліном виду:

$$P_i(\varepsilon) = \varepsilon^i + a_{i1}\varepsilon^{m+1} + a_{i2}\varepsilon^{m+2} + \ldots + a_{in}\varepsilon^n \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

Цілком зрозуміло, що для будь-яких a_{ij} можна вибрати *ε* настільки малим, що завжди $P_i(\varepsilon) > 0$, бо доданки зі степенями *ε*, вищими від *i*-го, будуть вищого порядку малості у порівнянні з першим ε^i. Внаслідок цього всі утворені поліноми різнитимуться за величиною. В оптимальному плані необхідно буде допустити, що $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що в разі підозри на можливість зациклення (випадок, коли початковий опорний план вироджений) поліноми $P_i(\varepsilon)$ можна одразу додати до вільних членів системи обмежень, внаслідок чого матимемо: $b_i(\varepsilon) = b_i + P_i(\varepsilon),\ (i = \overline{1,m})$.

2.8.8.Геометрична інтерпретація симплексного методу

Геометричну інтерпретацію симплексного методу можна подати двома різними способами. В одному разі ілюструється зміна базису, яка здійснюється вибором векторів, які включаються до базису та виключаються з нього. В другому, простішому та наочному випадку, процес симплексного методу інтерпретується як послідовний рух через сусідні кутові точки багатогранника розв'язків, що пов'язано зі збільшенням (зменшенням) значення цільової функції.

Дві кутові точки назвемо сусідніми, якщо вони розташовані на одному ребрі багатогранника.

Допустимо, що розглядається задача на відшукання максимального значення лінійної функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ і маємо певний багатокутник її розв'язків (рис. 2.18).

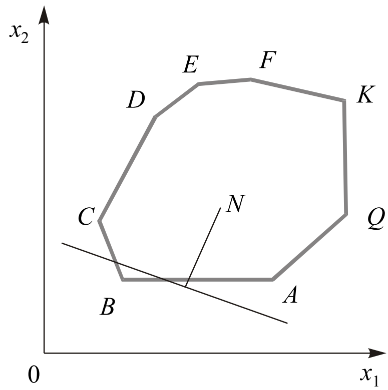


Рис. 2.18

Допустимо, що початковий опорний план відповідає кутовій точці *A*. Тоді наступний крок симплексного методу приведе до точки *Q*, ($Z(Q) > Z(A)$), а в результаті ще однієї ітерації — до точки *K*, де лінійна функція набуває максимального значення. Проте, якщо початковим опорним планом буде точка *B*, то включення вектора до базису за критерієм $\min \theta_j (Z_j - C_j)$ приводить до того, що пряма $C_1x_1 + C_2x_2 = const$ проходитиме через точку *C* і алгоритм симплексного методу приведе до точок *C*, *D, E, F, K*, тобто для отримання оптимального плану необхідно буде виконати ще чотири ітерації.

Отже, очевидно, що застосування симплексного методу не дає змоги одразу перейти від опорного плану (точки В) до оптимального (точки К). Фактично розв'язок отримують, рухаючись вздовж межі (ребер) простору розв'язків, причому не завжди такий шлях буде найкоротшим. Кількість ітерацій за реалізації симплексного алгоритму визначається вибором початкового опорного плану та кількістю кутових точок, що траплятимуться на шляху прямої $C_1x_1 + C_2x_2 = const$.

2.9.Модифікації симплексного методу

Симплексний метод є ефективною, досить простою процедурою, проте не позбавленою деяких недоліків. Цей факт пояснює численні спроби модифікування симплексного методу, які можна зустріти в літературі, наприклад [31].

Хоча теоретична основа симплексного методу гарантує збіжність до оптимального розв'язку за скінченну кількість кроків, але труднощі обчислювального характеру, що виникають внаслідок помилок округлення в процесі машинних розрахунків, у цьому методі не враховані. Такі проблеми зустрічаються передусім тоді, коли штучні змінні є частиною початкового базисного розв'язку. Використання як $\pm M$ у цільовій функції дуже великих чисел може призвести до помилки округлення, що зумовлена операціями над групою чисел, яка містить як дуже великі, так і відносно малі числа. Розглянемо задачу (2.60)—(2.61).

Зазначена загроза зменшується розбиттям процесу розв'язування задачі на два етапи. На першому етапі розв'язується задача виду:

$$\max F_0 = -Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - ... - Mx_{n+m}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} \quad = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} \quad = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,...,n+m),$$

де $x_j (j = n+1,...,n+m)$ – штучні змінні.

Очевидно значення цільової функції для оптимального плану буде $F_0(X_0) = 0$. Отже, при $F_0(X_0) = 0$ початкова задача має допустимий базисний розв'язок, причому такий, що не містить штучних змінних. На другому етапі розв'язування задачі як початковий опорний план береться X_0, і процес продовжується за звичайним алгоритмом симплексного методу. Завдяки поділу розв'язування задачі на два етапи на кожному з них у процесі обчислень використовуються майже однакові за значеннями числа. Перший етап характеризується використанням лише великих чисел як коефіцієнтів цільової функції, проте на другому етапі задача не містить штучних змінних, отже, значення, що відповідають $\pm M$, не розглядаються.

Крім того, якщо на першому етапі розв'язання задачі $F_0(X_0) < 0$, то це означає, що деякі зі штучних змінних додатні, тобто допустимих планів для початкової задачі не існує, її система обмежень несумісна, задача розв'язків не має. Отже, немає потреби переходити до другого етапу.

Двохетапний метод застосовують до задач, що вимагають операцій над дуже великими числами, які входять у цільову функцію. Однак навіть за умови, що така ситуація не склалася, тобто задача не містить штучних змінних, проблеми обчислювального характеру залишаються. Застосування методу виключення змінних Жордана—Гаусса для отримання послідовного ряду симплексних таблиць призводить до накопичення і поширення помилок округлення в такій мірі, що вони спотворюють початкові дані задачі. Розглянемо приклад, в якому помилки округлення пов'язані з визначенням умов допустимості розв'язку. Допустимо, що точне значення деякої базисної змінної $x_i = 0$, вибрано деякий напрямний вектор A_j і в цьому векторі єдина невід'ємна компонента, що відповідає *i*-ій (нульовій) базисній змінній, також дорівнює нулю. Тоді вектор A_j вводити до базису не можна. Однак, унаслідок помилки округлення можлива ситуація, коли розраховане значення базисного вектора $x_i = 10^{-15}$, а значення коефіцієнта, що відповідає *i*-ій базисній змінній та *j*-му вектору в симплексній таблиці — $a_{ij} = 10^{-12}$. Тоді вектор A_j буде вибрано для введення до базису.

З метою зменшення впливу помилок округлення був розроблений ***модифікований симплексний метод***. Основні етапи його алгоритму по суті такі ж, як і для симплексного методу. Головна відмінність полягає в тому, що для отримання послідовності симплексних таблиць у модифікованому симплексному методі не застосовується метод виключення змінних Жордана—Гаусса. Допустимо, що розглядається задача лінійного програмування, де базис утворюють останні $n + m$ векторів, які позначимо через X_2, а відповідні їм коефіцієнти цільової функції — через C_2. Аналогічно перші n змінних позначимо через X_1, а відповідні коефіцієнти цільової функції — через C_1. Коефіцієнти векторів X_1 у системі обмежень утворюють матрицю A. Тоді схематично першу та останню симплексні таблиці можна подати у вигляді (табл. 2.11):

Таблиця 2.11

Базис	План	C_1	C_2
		X_1	X_2
X_2	b	A	E
Δ_j	C_2X_2	$C_2A - C_1$	0
....			
X_B	b	$B^{-1}A$	B^{-1}
Δ_j	$C_B B^{-1}b$	$C_B B^{-1}A - C_1$	$C_B B^{-1}A - C_2$

де B^{-1} — матриця, обернена до одиничної, з першої симплексної таблиці. Як видно з наведеної табл. 2.11, вся симплексна таблиця сформована шляхом використання початкових даних (матриця А) та обернення поточного базису B^{-1}. Отже, в обчислювальних процедурах модифікованого симплексного методу головна увага зосереджена на мінімізації помилок округлення при обчисленні матриці B^{-1}.

Крім зменшення помилок округлення, модифікований симплексний метод уможливлює також зменшення тривалості розрахунків. Зокрема, якщо в матриці обмежень А відносна кількість нульових елементів велика, то модифікованим симплексним методом можна скористатись для зменшення кількості операцій множення (порівняно зі звичайним симплексним методом, у якому елементи таблиці, особливо нульові, в процесі послідовних операцій постійно змінюються). Взагалі відомо, що потрібний для реалізації модифікованого симплексного методу обсяг обчислень тим менший, чим менша щільність матриці А (щільність — це відношення кількості ненульових елементів до загальної кількості елементів матриці) та відношення кількості обмежень до кількості змінних.

Заключні зауваження

У цьому розділі розглянуто два методи (графічний і симплекс-метод) розв'язання задач лінійного програмування. Графічний метод для розв'язування реальних задач не придатний, оскільки економіко-математична модель для його застосування мусить мати тільки дві змінні (види діяльності). На практиці такі задачі не виникають. Якщо економіко-математична модель адекватно описує реальні технологічні та економічні процеси, то вона, як правило, має сотні чи навіть тисячі змінних і обмежень. Для розв'язування таких задач використовується симплексний метод, із застосуванням якого теоретично можна дістати оптимальний розв'язок довільної лінійної економіко-математичної задачі.

Графічний метод є важливим для осмислення сутності оптимізації, геометричної інтерпретації постановки та розв'язку задач лінійного програмування.

Слід підкреслити, що економічні процеси є нелінійними, стохастичними, динамічними тощо. Далі будуть описані відповідні методи розв'язання таких задач. Проте звертаємо увагу читача на те, що є багато технологічних та економічних процесів, які з достатньою для практики точністю можна описати лінійними залежностями, тобто такі моделі є лінійними, а отже, для знаходження їх оптимального розв'язку застосовується симплексний метод.

Для поглибленого вивчення методів оптимізації лінійних задач можна скористатися літературними джерелами [6; 9; 12; 19; 26; 28].

Контрольні запитання

1. Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.

2. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

3. Які є форми запису задач лінійного програмування?

4. Поясніть геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.

5. Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим?

6. Поясніть, що називається областю допустимих планів.

7. Який план називається опорним?

8. Який опорний план називається невиродженим?

9. Сформулюйте основні аналітичні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.

10. Які задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічним методом?

11. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв'язок?

12. Суть алгоритму графічного методу розв'язання задач лінійного програмування.

13. Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
14. Суть алгоритму симплексного методу.
15. Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.
16. Як вибрати спрямовуючий вектор-стовпець?
17. Як вибрати розв'язувальний елемент?
18. Суть методу Жордана—Гаусса.
19. Суть методу штучного базису.

Приклади та завдання для самостійної роботи

Розв'язати графічним методом такі задачі.

Задача 2.1. Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10000 грн на місяць. Одна хвилина радіореклами коштує фірмі 5 грн, а телереклами — 90 грн. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід свідчить, що обсяг збуту, який забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що забезпечує 1 хв радіореклами.

Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції фірми був би найбільшим.

Задача 2.2. Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для підвищення їх урожайності мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожну культуру та їх запаси у господарстві наведені в таблиці:

Таблиця 2.7

НОРМИ ВНЕСЕННЯ МІНЕРАЛЬНИХ ДОБРИВ ТА ЇХ ЗАПАСИ

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива під культури, кг діючої речовини / га		Запас добрив, кг діючої речовини
	капуста	томати	
Фосфорні	150	400	6000
Калійні	500	300	9000

Для вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 умовних одиниць, а 1 ц томатів — 20. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів— 200 ц/га.

Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізував би прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують їх запасів.

Задача 2.3. Фірма виготовляє продукцію A та B, використовуючи для цього два види сировини, добові запаси якої мають не перевищувати відповідно 210 та 240 кг. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Таблиця 2.8

НОРМИ ВИТРАТ СИРОВИНИ ДЛЯ ВИГОТОВЛЕННЯ ПРОДУКЦІЇ

Сировина	Норма витрат сировини для виготовлення одиниці продукції, кг	
	A	B
1	2	5
2	3	4

Працівники відділу збуту фірми рекомендують, щоб виробництво продукції B становило не більш як 65% загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціни одиниці продукції A та B дорівнюють відповідно 10 та 40 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, за якого максимізується дохід фірми.

Задача 2.4. Фірма виготовляє деталі видів A та B до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, тривалість використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті наведена в таблиці:

Таблиця 2.9

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ

Деталь	Тривалість обробки деталі за верстатами, хв.		
A	10	6	8
B	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі видів A та B становить відповідно 20 та 30 грн.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток фірми.

Задача 2.5. Підприємство виготовляє письмові столи типів А та В. Для одного столу типу А необхідно 2 м^2 деревини, а для столу типу В — 3 м^2. Підприємство може отримувати до 1200 м^2 деревини на тиждень. Для виготовлення одного столу типу А потрібно 12 хв роботи обладнання, а для моделі В — 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 годин на тиждень. Оцінено, що за тиждень можна реалізувати не більше 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу А становить 30 грн, а типу В — 40 грн. Скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень, щоб прибуток підприємства за вищезазначених умов був максимальним?

«И самый последний нищий, при других условиях,
способен быть первым богачом».

Сочинения Козьмы Пруткова

РОЗДІЛ 3. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА ДВОЇСТІ ОЦІНКИ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

3.1. Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування

Кожна задача лінійного програмування пов’язана з іншою, так званою ***двоїстою*** задачею.

Економічну інтерпретацію кожної з пари таких задач розглянемо на прикладі виробничої задачі (§2.1).

Пряма задача: $\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ (3.1)

за умов:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Необхідно визначити, яку кількість продукції кожного j-го виду x_j $(j = \overline{1,n})$ необхідно виготовляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. Причому відомі: наявні обсяги ресурсів — b_i $(i = \overline{1,m})$; норми витрат i-го виду ресурсу на виробництво одиниці j-го виду продукції — $a_{ij}\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, а також $c_j\ (j=\overline{1,n})$ — ціни реалізації одиниці *j-ої* продукції.

Розглянемо тепер цю саму задачу з іншого погляду. Допустимо, що за певних умов доцільно продавати деяку частину чи всі наявні ресурси. Необхідно визначити ціни ресурсів. Кожному ресурсу $b_i\ (i=\overline{1,m})$ поставимо у відповідність його оцінку $y_i\ (i=\overline{1,m})$. Умовно вважатимемо, що y_i — ціна одиниці i-го ресурсу.

На виготовлення одиниці j-го виду продукції витрачається згідно з моделлю (3.1)—(3.3) m видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{mj}$. Оскільки ціна одиниці i-го виду ресурсу дорівнює $y_i\ (i=\overline{1,m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці j-го виду продукції, обчислюється у такий спосіб:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + ... + a_{mj}y_m .$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від продажу ресурсів, перевищує суму, яку можна було б отримати від реалізації продукції, виготовленої з тих самих обсягів ресурсів, тобто:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + ... + a_{mj}y_m \geq c_j,\ \ j=1,2,...,n .$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть здійснити операцію якнайдешевше, отже, необхідно визначити мінімальні ціни одиниць кожного виду ресурсів, за яких їх продаж є доцільнішим, ніж виготовлення продукції. Загальну вартість ресурсів можна виразити формулою:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \, .$$

Отже, в результаті маємо ***двоїсту задачу***:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \tag{3.4}$$

за умов:
$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + a_{3n} y_3 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n; \end{cases} \tag{3.5}$$

$$y_i \geq 0 \; (i = 1,2,...m). \tag{3.6}$$

Тобто необхідно визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного i-го виду ресурсу $y_i, \; i = \overline{1, m}$, щоб продаж ресурсів був доцільнішим, ніж виробництво продукції.

Зауважимо, що справжній зміст величин $y_i, \; i = \overline{1, m}$ — умовні ціни, що виражають рівень «цінності» відповідного ресурсу для даного виробництва. Англійський термін «shadow prices» у літературі перекладають як «оцінка» або «тіньова, неявна ціна». Академік Л. В. Канторович назвав їх ***об'єктивно обумовленими оцінками*** відповідного ресурсу.

Задача (3.4)—(3.6) є двоїстою або спряженою до задачі (3.1)—(3.3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних поглядів. Дійсно, не важко переконатися, що двоїста задача до (3.4)—(3.6) збігається з початковою. Тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу — двоїстою. Симетричність двох таких задач очевидна. Як у прямій, так і у двоїстій задачі використовують один набір початкових даних: $b_i, i = (\overline{1,m})$, $a_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$; $c_j, (j = \overline{1,n})$. Крім того, вектор обмежень початкової задачі стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі і навпаки, а рядки матриці A (матриці коефіцієнтів при змінних з обмежень прямої задачі) стають стовпцями матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає змінна двоїстої і навпаки.

Початкова постановка задачі та математична модель може мати вигляд як (3.1)—(3.3), так і (3.4)—(3.6). Отже, як правило, кажуть про пару ***спряжених*** задач лінійного програмування.

3.2.Правила побудови двоїстих задач

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до стандартного виду. Вважають, що задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності її системи обмежень приведені до виду «$\leq$», а для задачі на відшукання мінімального значення — до виду «$\geq$».

Якщо пряма задача лінійного програмування подана в стандартному вигляді, то двоїста задача ***утворюється за такими правилами***:

1.Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2.Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3.Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4.Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5.Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

6.Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично:

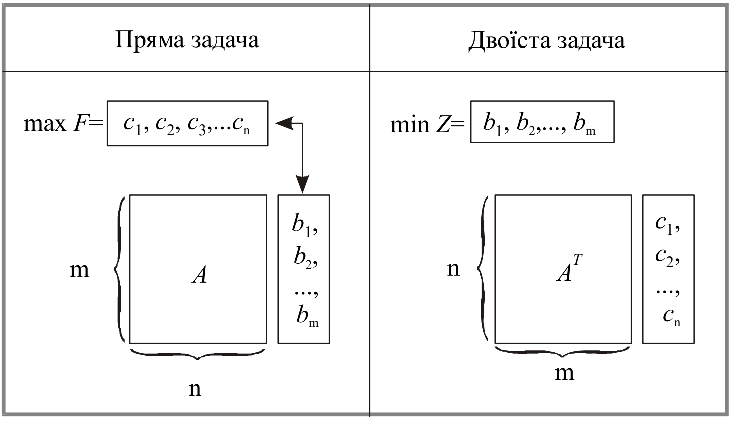


Рис. 3.1. Схема побудови двоїстої задачі до прямої

Пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої — лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком.

Всі можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач у матричній формі наведено нижче.

Пряма задача	**Двоїста задача**
Симетричні задачі	
$\max F = CX$	$\min Z = BY$
$AX \leq B$	$A^TY \geq C$
$X \geq 0$	$Y \geq 0$
$\min F = CX$	$\max Z = BY$
$AX \geq B$	$A^TY \leq C$

$X \geq 0$ | $Y \geq 0$

Несиметричні задачі

$\max F = CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	$\min Z = BY$ $A^T Y \geq C$ $Y \in]-\infty;\infty[$
$\min F = CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	$\max Z = BY$ $A^T Y \leq C$ $Y \in]-\infty;\infty[$

Приклад 3.1. До даної задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мусять мати знак «$\leq$». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\max F = -5x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$\min Z = -y_1 + 5y_2;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5; \\ -y_1 + 3y_2 \geq 2, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Або схематично (використовуючи компоненти векторів та матриць) зв'язок між парою цих задач можна зобразити так:

Пряма задача	Двоїста задача

$\max F = \boxed{-5 \quad 2}$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\min Z = \boxed{-1 \quad 5}$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Приклад 3.2. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту.

$$\min F = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \le 8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1,2,...,5.$$

Розв'язання. Пряму задачу зведемо до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F мінімізується і в системі обмежень є нерівності, то вони мають бути виду «$\ge$». Тому друге обмеження задачі необхідно помножити на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 \ge -8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16. \end{cases}$$

Двоїста задача:

$$\max Z = 20y_1 - 8y_2 - 16y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + 8y_3 \le 1; \\ -4y_1 + y_2 + 7y_3 \le 6; \\ 13y_1 - 5y_2 - y_3 \le -7; \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1; \\ y_1 - y_2 - 9y_3 \le 5. \end{cases}$$

$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0.$$

Оскільки перше обмеження початкової задачі є рівнянням, то відповідна йому змінна двоїстої задачі y_1 може набувати як додатного, так і від'ємного значення.

3.3. Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості. Розглянемо задачі (3.1)—(3.3) та (3.4)—(3.6) з економічною інтерпретацією, наведеною в § 3.1.

Лема 3.1 (основна нерівність теорії двоїстості). Якщо $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ та $Y=(y_1,y_2,...,y_m)$ — допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X)\le Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \tag{3.7}$$

Доведення. Помножимо кожне рівняння системи (3.2) на відповідну змінну двоїстої задачі:

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\le b_1; & y_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\le b_2; & y_2\\ .... & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n\le b_m. & y_m \end{array}\right.$$

Маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1y_1+a_{12}x_2y_1+...+a_{1n}x_ny_1\le b_1y_1;\\ a_{21}x_1y_2+a_{22}x_2y_2+...+a_{2n}x_ny_2\le b_2y_2;\\ ....\\ a_{m1}x_1y_m+a_{m2}x_2y_m+...+a_{mn}x_ny_m\le b_my_m. \end{cases}$$

Підсумувавши праві і ліві частини нерівностей, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \tag{3.8}$$

Аналогічно перетворимо систему обмежень (3.5) двоїстої задачі:

$$\left\{\begin{array}{l|l} a_{11}y_1+a_{21}y_2+...+a_{m1}y_m\ge c_1; & x_1\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+...+a_{m2}y_m\ge c_2; & x_2\\ .... & \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+...+a_{mn}y_m\ge c_n. & x_n \end{array}\right.$$

Підсумувавши після множення тут також ліві та праві частини, отримаємо нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{3.9}$$

Ліві частини нерівностей (3.8) та (3.9) збігаються, отже:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Нерівність (3.7) доведено.

Лема 3.2 (достатня умова оптимальності). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ — допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*), \tag{3.10}$$

то X^*, Y^* — оптимальні розв'язки відповідних задач.

Доведення. Нехай X_1 — допустимий план прямої задачі (3.1)—(3.3). Тоді на підставі нерівності (3.7) маємо: $F(X_1) \leq Z(Y^*)$. За умовою задачі $F(X^*) = Z(Y^*)$, отже

$$F(X_1) \leq Z(Y^*) = F(X^*). \tag{3.11}$$

Оскільки за допущенням X_1 — довільний допустимий план прямої задачі, то нерівність (3.11) виконується для будь-якого з можливих розв'язків. Отже, маємо, що при X^* цільова функція (3.1) набирає найбільшого значення, тобто є оптимальним розв'язком початкової задачі.

В аналогічний спосіб доводиться, що Y^* — оптимальний план двоїстої задачі.

3.3.1. Перша теорема двоїстості

Теорема (*перша теорема двоїстості*). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто

$$\max F = \min Z .$$

Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то спряжена задача також не має розв'язку.

Доведення. Допустимо, що початкова задача (3.1)—(3.3) має оптимальний план, який отриманий симплексним методом. Не порушуючи загальності, можна вважати, що останній базис складається з перших m векторів $A_1, A_2, ..., A_m$. Остання симплексна таблиця має вигляд:

Таблиця 3.1

i	Базис	$C_б$	План	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1^*	x_1^*	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2^*	x_2^*	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m^*	x_m^*	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Позначимо через D матрицю, що утворена з компонент векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ останнього базису в першій симплексній таблиці.

Для оптимального плану отримаємо:

$$B = DX^* \qquad (3.12)$$

де $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, B — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень.

Звідси:

$$B = DX^* \Rightarrow X^* = D^{-1}B. \qquad (3.13)$$

Симплексна таблиця 3.1 містить коефіцієнти розкладу векторів $A_1, A_2, ..., A_n$ початкової системи обмежень задачі за векторами базису, тобто кожному вектору з системи обмежень задачі (3.1)—(3.3) A_j відповідає в симплексній таблиці вектор A'_j, такий що

$$A_j = DA'_j, (j = \overline{1,n}). \qquad (3.14)$$

Позначимо через A' матрицю, що складається з коефіцієнтів розкладу векторів A_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Тоді буде справджуватися рівність:

$$A = DA',$$

Звідки

$$A' = D^{-1}A. \qquad (3.15)$$

Враховуючи (3.13), значення оптимального плану даної задачі знаходиться у вигляді:

$$\max F = C^* X^*,$$

де $C^* = (c_1^*, c_2^*, ..., c_m^*)$, причому

$$\overline{F} = C^* A' - C = (c_1^* A'_1 - c_1; c_2^* A'_2 - c_2; ...; c_n^* A'_n - c_n) =$$
$$= (F_1 - c_1; F_2 - c_2; ...; F_n - c_n),$$

тобто всі компоненти вектора $\overline{F}$ є оцінками оптимального плану задачі (3.1)—(3.3), а тому

$$C^* A' - C = \left(F_j - c_j\right) \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (3.16)$$

Оскільки оптимальний план початкової задачі подано у вигляді $X^* = D^{-1}B$, то за правилами побудови двоїстої задачі можна допустити, що її оптимальний план матиме вигляд:

$$Y^* = C^* D^{-1}. \tag{3.17}$$

Доведемо, що $Y^* = C^* D^{-1}$ дійсно є оптимальним планом двоїстої задачі.

Система обмежень двоїстої задачі у векторно-матричній формі матиме вигляд:

$$YA \geq C = YA - C \geq 0.$$

Підставимо в цю нерівність значення Y^*. Тоді, враховуючи (3.15), (3.16) та (3.17), отримаємо:

$$Y^* A - C = C^* D^{-1} A - C = C^* A' - C \geq 0.$$

Звідки: $Y^* A \geq C$. Отже, Y^* задовольняє систему обмежень (3.5) двоїстої задачі, тому є допустимим планом задачі (3.4)—(3.6).

Для даного плану значення функціонала дорівнюватиме:

$$Z(Y^*) = Y^* B, \tag{3.18}$$

де $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$. Підставимо в (3.18) значення Y^* з (3.17) та, враховуючи (3.13), матимемо:

$$Z(Y^*) = Y^* B = C^* D^{-1} B = C^* X^* = \max F. \tag{3.19}$$

Доведено, що $Z(Y^*)$ збігається зі значенням оптимального плану початкової задачі.

Отже, за лемою 3.2 (достатня умова оптимальності плану задачі лінійного програмування) план Y^* є оптимальним планом двоїстої задачі (3.4)—(3.6).

Аналогічно доводиться, що коли двоїста задача має розв'язок, то початкова також має розв'язок і виконується рівність:

$$\min Z = \max F.$$

Для доведення другої частини теореми допустимо, що лінійна функція початкової задачі необмежена зверху. Тоді з нерівності $F(X) \leq Z(Y)$ маємо, що $Z(Y) \geq +\infty$, що не має змісту. Отже, двоїста задача в даному разі не має розв'язків.

Доведена теорема дає змогу в процесі розв'язування однієї задачі водночас знаходити план другої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток (F_{max}) підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, однак таку саму суму грошей ($Z_{\min} = F_{\max}$) воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}$, $Y \neq Y_{opt}$ на підставі основної нерівності теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

3.3.2. Друга теорема двоїстості

Між розв'язками спряжених задач крім рівності значень цільових функцій існує тісніший взаємозв'язок. Для його дослідження розглянемо дві симетричні задачі лінійного програмування.

Пряма задача:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (3.20)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Двоїста задача:

$$\min Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases} \qquad (3.21)$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Для розв’язування задач симплексним методом необхідно звести їх до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач (3.20) і (3.21) необхідно ввести відповідно *m* та *n* невід’ємних змінних. Поставимо обмеженням кожної задачі у відповідність змінні її двоїстої задачі.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{array} \right.$$

Аналогічно:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2; \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{array} \right.$$

Отримали таку відповідність між змінними спряжених задач:

Основні змінні прямої задачі				Додаткові змінні прямої задачі			
x_1	x_2	x_k	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+l}	x_{n+m}

$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}		y_{m+k}		y_{m+n}	y_1	y_2		y_l		y_m
Додаткові змінні двоїстої задачі						Основні змінні двоїстої задачі					

Наступна теорема в літературі, як правило, має назву теореми про доповнюючу нежорсткість.

Теорема ***(друга теорема двоїстості для симетричних задач)***. Для того, щоб плани X^* та Y^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n} \tag{3.22}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0,\ i = \overline{1,m}\ . \tag{3.23}$$

Доведення. ***Необхідність***. Нехай X^* та Y^* — оптимальні плани відповідно прямої та двоїстої задач (3.20) і (3.21). З першої теореми двоїстості відомо, що

$$F(X^*) = Z(Y^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*\ ,$$

а також компоненти векторів X^* та Y^* задовольняють системи обмежень задач (3.20) та (3.21), тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le b_i,\ i = \overline{1,m}\ , \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \ge c_j,\ j = \overline{1,n}\ . \tag{3.25}$$

Помножимо (3.24) на y_i^*, а (3.25) — на x_j^* і підсумуємо праві та ліві частини. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^* y_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Праві частини останніх двох нерівностей не збігаються, але оскільки їх ліві частини однакові, то це означає, що разом вони виконуються лише за умови рівностей, тобто:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Виконаємо перетворення для кожного рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0; \qquad (3.26)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0. \qquad (3.27)$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \le b_i$, то в рівнянні (3.26) кожна з компонент $\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) \le 0$, а $y_i^* \ge 0, i = \overline{1,m}$, тому виконання рівняння (3.26) можливе лише у тому разі, коли кожний доданок виду $y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0$. Аналогічне міркування проведемо для (3.27), після чого можна висновувати, що $x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0$. Отже, необхідність умов додаткової нежорсткості доведено.

Достатність. За умовою виконуються рівняння

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m};$$

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Необхідно довести, що X^* та Y^* — оптимальні плани відповідно прямої (3.20) та двоїстої (3.21) задач.

У кожному рівнянні розкриємо дужки та підсумуємо перше рівняння по $i, \left(i = \overline{1,m}\right)$, а друге — по j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^* y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Ліві частини цих рівнянь однакові, отже, $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$. Тоді за першою теоремою двоїстості, оскільки значення цільових функцій цих задач збігаються, можна висновувати, що X^* та Y^* — оптимальні плани спряжених симетричних задач. Теорему доведено.

Очевидніший взаємозв'язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

Наслідок. Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна

i-та компонента оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості *стосовно оптимального плану X^* прямої задачі*. Якщо для виготовлення всієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом X^*, витрати одного i-го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) буде дорівнювати нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним».

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягові b_i, тобто його використано повністю, то він є «цінним» для виробництва, і його оцінка y_i^* буде строго більшою від нуля.

Економічне тлумачення другої теореми двоїстості щодо оптимального плану Y^* двоїстої задачі: у разі, коли деяке j-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво j-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

3.3.3. Третя теорема двоїстості

Як було з'ясовано в попередньому параграфі, існування двоїстих змінних уможливлює зіставлення витрат на виробництво і цін на продукцію, на підставі чого обґрунтовується висновок про доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції. Крім цього, значення двоїстої оцінки характеризує зміну значення цільової функції, що зумовлена малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Дане твердження формулюється у вигляді такої теореми.

> **Теорема *(третя теорема двоїстості)***. Компоненти оптимального плану двоїстої задачі y_i^* $(i = \overline{1, m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ за відповідними аргументами $b_i, (i = \overline{1, m})$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \; i = 1, 2, ..., m. \qquad (3.28)$$

Доведення. Розглянемо задачу лінійного програмування, подану в канонічній формі:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \qquad (3.29)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3.30)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \quad (3.31)$$

Двоїсту задачу до задачі (3.29)—(3.31) сформулюємо так: знайти оптимальний план $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$, за якого мінімізується значення

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \quad (3.32)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \quad (3.33)$$

причому умова невід'ємності змінних $y_i\ (i = \overline{1,m})$ відсутня.

Позначимо $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ — оптимальний план двоїстої задачі, $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ — оптимальний план задачі (3.29)—(3.31). За першою теоремою двоїстості відомо, що:

$$\max F = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + ... + c_n x_n^* = \min Z = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + ... + b_m y_m^*,$$

або

$$F = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + ... + b_m y_m^*. \quad (3.34)$$

Оскільки досліджується питання впливу зміни значень $b_i\ (i = \overline{1,m})$ на F, то лінійну функцію (3.34) можна розглядати як функцію від аргументів $b_i\ (i = \overline{1,m})$.

Тоді частинні похідні за змінними $b_i\ (i = \overline{1,m})$ будуть дорівнювати компонентам оптимального плану двоїстої задачі y_i^*:

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^* \ (i = 1,2,...,m) \qquad (3.35)$$

Однак дане твердження справедливе лише у тому разі, коли компоненти оптимального плану $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ залишаються постійними, а оскільки за першою теоремою двоїстості $Y^* = C^* D^{-1}$, то значення двоїстих оцінок будуть незмінними лише за умови постійної структури оптимального плану початкової задачі.

Отже, рівності (3.35) справджуються лише за незначних змін b_i, інакше суттєва зміна умов початкової задачі (правих частин системи обмежень (3.30) та цільової функції (3.32)) приведе до зміни базису в оптимальному плані прямої задачі, а значить, і до іншого розв'язку двоїстої $\widetilde{Y} \neq Y^*$.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості. Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнянні речі. Очевидно, що неможливим є просте зіставлення величин, які мають різні одиниці вимірювання. Якщо взяти як приклад виробничу задачу, то цікавим є питання: як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів (можуть вимірюватися в тоннах, м^2, люд./год, га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують, на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Отже, за умови незначних змін b_i замість задачі (3.29)—(3.31) маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо через X' оптимальний план нової задачі. Для визначення $F(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, а достатньо скористатися формулою $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* — оптимальний план задачі (3.29)—(3.31).

3.4. Приклади застосування теорії двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої задач

Кожну з двох спряжених задач можна розв'язати окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та двоїстої задач уможливлюють знаходження розв'язку двоїстої задачі за наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Приклад 3.3. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план другої задачі, використовуючи співвідношення першої теореми двоїстості.

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то їх слід звести до виду «$\leq$». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2;$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$\min F = -y_1 + 5y_2;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5; \\ -y_1 + 3x_2 \geq 2; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, то будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1. $\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

2.Векторна форма запису системи обмежень має вигляд:

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній один вектор. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

3.Розширена задача лінійного програмування буде такою:

$\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - \mathrm{M}x_5$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 — базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 — вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$.

Перший опорний план задачі:

$$X_0 = (0; 0; 0; 5; 1), \; Z_0 = -\mathrm{M}.$$

4.Подальше розв'язування прямої задачі подано у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	–5	2	0	0	– M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	– 1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - c_j \geq 0$		0 $-M$	5 $-M$	–2 $-M$	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	– 2/3

$Z_j - c_j \geq 0$		2	7	0	– 2	0	2 M
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1
$Z_j - c_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 M

З останньої симплекс-таблиці запишемо оптимальний план прямої задачі:

$$X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3;\ 0),\ Z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна висновувати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max Z = 10/3.$$

Компоненти вектора Y^* (оптимальний план двоїстої задачі) визначимо за формулою:

$$Y^* = \vec{C}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{C}_{баз} = (2;\ 0)$ та міститься в стовпчику «$c_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матриця D^{-1} також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис.

Отже,

$$Y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосувавши для розв’язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв’язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Приклад 3.4. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв’язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Розв'язання. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$\max F = y_1 + 4y_2;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 1; \\ y_1 + 2y_2 \le 2; \\ -y_1 + y_2 \le 2. \end{cases}$$
$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, \; y_2 \ge 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає першому рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 — лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис.3.2).

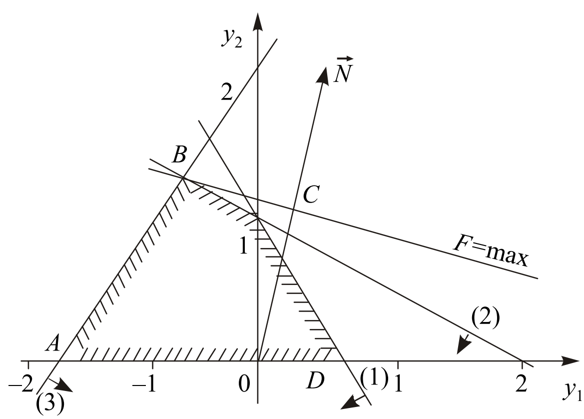


Рис. 3.2

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає в точці B багатокутника $ABCD$. Її координати визначимо розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

Отже, $Y^* = (-2/3;\ 4/3)$; $\max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2/3) + 4/3 = 0; \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2; \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1; \\ 2 = 2; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, то висновуємо, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, то друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3)$, $\min Z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$.

Умова $\min Z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3)$; $Y^* = (-2/3;\ 4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Приклад 3.5. Визначити, чи є оптимальними такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$\min Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

а) $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$; б) $X = (0;\ 1/5;\ 8/5)$; в) $X = (1/3;\ 0;\ 1/3)$.

Розв'язання. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та, допускаючи, що відповідний план X є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій будуть однаковими за величиною, то припущення правильне. Протилежне можна висновувати в таких випадках:

1.Якщо запропонований план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2.Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3.Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції F не дорівнює значенню функції Z, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

$$\max F = y_1 + 2y_2;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12; \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4; \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, \; y_2 \ge 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 8/7 - 3 \cdot 3/7 + 0 = 1; \\ 8/7 + 2 \cdot 3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються, і тому $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$ є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді розрахуємо для нього величину цільової функції: $Z = 12 \cdot 8/7 - 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 та y_2:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі:

$$y_1 + y_2 \le 2\,;$$

$$4 + 4 = 8 > 2\,.$$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $y = (4; 4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Внаслідок цього наше допущення, що $X = (8/7; 3/7; 0)$ є оптимальним планом прямої задачі, виявилося помилковим.

2. $X = (0; 1/5; 8/5)$. Підставимо цей план у систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий, і для нього $Z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_2 та x_3 додатні, то друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, чи виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$. Отже, перше обмеження виконується, і тому $y = (8/5; 2/5)$ є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього

$$F = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = Z.$$

З огляду на викладене можна висновувати, що $Y^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ — оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. $X = (1/3; 0; 1/3)$. Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \neq 2. \end{cases}$$

Оскільки $X = (1/3; 0; 1/3)$ є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати: а) ні; б) так, $X^* = (0; 1/5; 8/5)$, $\min Z = 12/5$; в) ні.

3.5.Післяоптимізаційний аналіз задач лінійного програмування

Післяоптимізаційний аналіз задачі лінійного програмування, особливо для прикладних досліджень, є не менш важливою частиною лінійного програмування, ніж знаходження оптимального розв'язку задачі. Як зазначалося вище, задачі лінійного програмування є найпростішим типом задач математичного програмування. Лінійні економіко-математичні моделі простіші через те, що в них не беруться до уваги впливи випадкових чинників на економічні процеси (об'єкти), що моделюються; динамічні процеси замінюють їх можливими статичними аналогами; використовують лінійні функції замість нелінійних, які точніше описують залежності між економічними показниками, тощо. Очевидно, що за таких допущень більшість параметрів задач лінійного програмування є наближеними величинами. Тому важливим є питання визначення діапазону стійкості оптимальних планів прямої та двоїстої задач. У даному розділі буде розглянуто вплив змін параметрів задачі, в межах яких структура оптимального плану залишається постійною, а також методи визначення ступеня змін значень оптимального плану, якщо його структура порушується.

Розглянемо задачу лінійного програмування

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{3.37}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}, \tag{3.38}$$

для якої знайдено оптимальний план. Остання симплексна таблиця має вигляд (табл.3.2). Не обмежуючи загальності, можна вважати, що базис утворюють перші m векторів.

Розглянемо вплив на оптимальний план задачі зміни таких параметрів, як компоненти вектора обмежень $b_i \ (i = \overline{1,m})$; коефіцієнти цільової функції $c_j\ (j=\overline{1,n})$; коефіцієнти матриці системи обмежень (3.37) — $a_{ij}\ (i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m})$.

Таблиця 3.2

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
				x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_{j\geq 0}$		F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

3.5.1.Аналіз діапазону зміни компонент вектора обмежень

Допустимо, що деяке k-те обмеження ($k=\overline{1,m}$) має в правій частині початкове значення — b_k. Нехай початкова величина змінилась на величину Δb_k.

Отже, k-те обмеження в системі (3.37) буде мати вигляд:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \leq b_k + \Delta b_k\ . \qquad (3.39)$$

Для зведення (3.39) до канонічного виду необхідно ввести додаткову змінну x_{n+k} (якщо обмеження має вигляд рівняння, то як таку змінну можна розглядати невід'ємну штучну змінну).

А. Розглянемо випадок, коли додаткова змінна в оптимальному плані небазисна і дорівнює нулю.

З першої теореми двоїстості відомо, що оптимальний план прямої задачі (як і кожен поточний опорний план) можна подати у вигляді:

$$X^* = D^{-1}B, \tag{3.40}$$

де D — матриця, що складена з компонент векторів $A_1, A_2, ..., A_m$ останнього базису; $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*, 0, ..., 0)$ — оптимальний план задачі (3.36)—(3.38); B — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень в останній симплексній таблиці.

Отже, якщо змінюються компоненти вектора B, то змінюються також значення $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$. Однак існує діапазон, у межах якого всі компоненти $x_j^*, (j = \overline{1, m})$ залишаються невід'ємними, тобто структура оптимального плану не змінюється. Визначимо ці межі.

Вектор B' подамо у вигляді:

$$B' = B + \Delta b_k e_k\,, \tag{3.41}$$

де e_k — одиничний вектор-стовпчик, а в ньому одиниця — k-та компонента. Тоді, використовуючи (3.40), маємо:

$$X'^* = D^{-1}B' = D^{-1}B + \Delta b_k D^{-1} e_k = X^* + \Delta b_k d_k\,, \tag{3.42}$$

де d_k — (добуток матриці D^{-1} на одиничний вектор e_k) k-ий стовпчик матриці D^{-1}.

Позначимо елементи k-го стовпчика матриці D^{-1} через $a_{1,n+k}, a_{2,n+k}, ..., a_{m,n+k}$, тоді:

$$X'^* = X^* + \Delta b_k d_k \text{ або } x_i^* + a_{i,n+k}\Delta b_k \ (i = \overline{1, m}).$$

Остання симплексна таблиця буде мати вигляд:

Таблиця 3.3

i	Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_{n+k}	…	c_{n+m}
				x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_{n+k}	…	x_{n+m}

1	x_1	c_1	$x_1^* + \Delta b_k a_{1,n+k}$	1	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n+k}$	...	$a_{1,n+m}$
2	x_2	c_2	$x_2^* + \Delta b_k a_{2,n+k}$	0	1	...	0	$a_{2,m+1}$	...	$a_{2,n+k}$	...	$a_{2,n+m}$
m	x_m	c_m	$x_m^* + \Delta b_k a_{m,n+k}$	0	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	$a_{m,n+k}$	...	a_{mn+m}
$m+1$	$F_j - c_{j \geq 0}$		F'	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_{n+k}	...	Δ_{n+m}

Оскільки необхідно, щоб план X'^* також був оптимальним, має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент даного вектора, отже,

$$x_i^* + a_{i,n+k}\Delta b_k \geq 0 \; i = \overline{1,m}. \tag{3.43}$$

Звідси:

$$\max_{a_{i,n+k}>0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\} \leq \Delta b_k \leq \min_{a_{i,n+k}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}. \tag{3.44}$$

Тоді нижньою та верхньою границями зміни значення b_k відповідно будуть:

$$\underline{b_k} = b_k + \max_{a_{i,n+k}>0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\};$$

$$\overline{b_k} = b_k + \min_{a_{i,n+k}<0}\left\{-\frac{x_i^*}{a_{i,n+k}}\right\}.$$

Якщо не існує жодного $a_{i,n+k} > 0$ для $i = \overline{1,m}$, то $\Delta b_k > -\infty$, а якщо не існує ні одного $a_{i,n+k} < 0$ для $i = \overline{1,m}$, то $\Delta b_k < \infty$.

Для задачі знаходження мінімального значення цільової функції та обмежень системи типу «≥» значення Δb_k змінює знак, оскільки замість нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq b_k + \Delta b_k$ можна розглянути рівносильну нерівність $-\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \leq -(b_k + \Delta b_k)$.

Отже, для $\underline{b_k} \leq b_k \leq \overline{b_k}$ за будь-якого значення $k = \overline{1, m}$, що відповідає додатковій небазисній змінній x_{n+k}, структура оптимального плану задачі (3.36)—(3.38) залишиться постійною.

В. Розглянемо випадок, коли додаткова змінна — базисна.

Якщо додаткова змінна x_{n+k} базисна, то це означає, що у виразі (3.42) d_k –одиничний вектор з k-ою компонентою, рівною одиниці, отже, система нерівностей (3.43) перетвориться в таку:

$$\begin{cases} x_1^* \geq 0; \\ x_2^* \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+k}^* + \Delta b_k \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^* \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, що значення додаткової базисної змінної визначає діапазон змін, в якому відповідна компонента b_k може зменшуватись (збільшуватись для обмежень типу «≥»).

Оптимальний план залишається незмінним у діапазоні $b_k + \Delta b_k$ для тих $k = \overline{1, m}$, яким відповідають додаткові базисні змінні x_{n+k}, де

$$-x_{n+k}^* \leq \Delta b_k < \infty \tag{3.45}$$

для обмежень системи (3.37) типу «≥».

Для задачі знаходження мінімального значення цільової функції та обмежень системи (3.37) типу «≥» можливі зміни компонент правої частини системи обмежень визначаються з нерівності:

$$-\infty < \Delta b_k \leq x_{n+k}^*, \text{ де, } k = \overline{1, m}. \tag{3.46}$$

С. Якщо компоненти вектора вільних членів системи обмежень задачі лінійного програмування змінюються водночас для кількох чи всіх значень $k=\overline{1,m}$, то визначення границь можливих змін величин $b_k\ (k=\overline{1,m})$ стає надто складною проблемою. Однак у такому разі завжди можна перевірити, чи задовольняють конкретні зміни величин $b_k\ (k=\overline{1,m})$ систему виду:

$$X'^{*}=D^{-1}B+\Delta b_k D^{-1}E=X^{*}+\Delta b_k D^{-1}\geq 0,$$

де E — одинична матриця. Якщо позначити елементи матриці D^{-1} через $a_{i,n+k}\ (i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,m})$, тоді:

$$X'^{*}=X^{*}+\Delta b_k D^{-1} \quad \text{або} \quad x_i^{*}+\sum_{k=1}^{m}a_{i,n+k}\Delta b_k,(i=\overline{1,m}).$$

Оскільки необхідно, щоб план X'^{*} також був оптимальним, має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент вектора, отже:

$$x_i^{*}+\sum_{k=1}^{m}a_{i,n+k}\Delta b_k\geq 0\ (i=\overline{1,m}),$$

тобто:

$$\begin{cases} x_1^{*}+a_{1,n+1}\Delta b_1+a_{2,n+1}\Delta b_2+...+a_{m,n+1}\Delta b_m\geq 0;\\ x_2^{*}+a_{1,n+2}\Delta b_1+a_{2,n+2}\Delta b_2+...+a_{m,n+2}\Delta b_m\geq 0;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_m^{*}+a_{1,n+m}\Delta b_1+a_{2,n+m}\Delta b_2+...+a_{m,n+m}\Delta b_m\geq 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Якщо значення $\Delta b_k\ (k=\overline{1,m})$ задовольняють всі нерівності системи (3.47), то структура оптимального плану задачі (3.36)—(3.38) залишається постійною.

Для визначення верхньої та нижньої границь змін $\Delta b_k\ (k=\overline{1,m})$, в межах яких структура оптимального плану залишається постійною, необхідно розв'язати систему нерівностей (3.47). Однак у більшості випадків для знаходження оптимального плану нової задачі лінійного програмування X'^* простіше розв'язати задачу симплексним методом, змінюючи вільні члени системи (3.37) на $b_i' = b_i + \Delta b_i\ (i=\overline{1,m})$.

D. Для двох значень $\Delta b_r, \Delta b_s$, що задовольняють систему (3.47), причому за оптимальним планом обмеження, що відповідають b_r, b_s, у системі (3.37) виконуються як рівняння, можна визначити норму заміщення, що показує, наскільки необхідно збільшити (зменшити) величину b_s за зменшення (збільшення) b_r, щоб значення цільової функції залишилось незмінним.

З третьої теореми двоїстості відомо, що за малих значень $\Delta b_i\ (i=\overline{1,m})$, тобто за таких значень приросту, які не змінюють значення двоїстих оцінок, а отже, задовольняють систему (3.47), виконується рівняння: $y_i^* = \frac{\partial F}{\partial b_i}$, або

$$y_i^* = \frac{\partial F}{\partial b_i} = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}.$$

Нехай величина b_r змінилась на Δb_r. Визначимо, як необхідно змінити b_s, щоб значення цільової функції залишилось тим самим. Зміна b_r означає, що $y_r^* = \frac{\Delta F_r}{\Delta b_r} \Rightarrow \Delta F_r = y_r^* \Delta b_r$, аналогічно за зміни b_s на Δb_s маємо: $y_s^* = \frac{\Delta F_s}{\Delta b_s} \Rightarrow \Delta F_s = y_s^* \Delta b_s$. Аби значення функціонала залишалось незмінним, необхідно, щоб

$$\Delta F_r = \Delta F_s = y_r^* \Delta b_r = y_s^* \Delta b_s.$$

Звідси виразимо шуканий вплив Δb_s на Δb_r:

$$\Delta b_r = \frac{y_s^*}{y_r^*} \Delta b_s. \qquad (3.48)$$

При відповідній заміні величин b_r та b_s значення цільової функції задачі (3.36)—(3.38) не зміниться, проте оптимальний план буде іншим. Нехай задача (3.36)—(3.38) описує визначення оптимального плану виробництва за умов обмежених ресурсів.

Економічний зміст нерівностей (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) полягає в тому, що вони визначають границі змін загальних обсягів ресурсів, у межах яких визначена оптимальним планом структура виробництва продукції залишається незмінною.

Рівняння (3.48) визначає, якою кількістю одного ресурсу можна замінити інший ресурс, щоб цільова функція не змінилась, причому розглядаються лише ті ресурси, які використані повністю при виробництві продукції за оптимальним планом.

3.5.2.Аналіз діапазону зміни коефіцієнтів цільової функції

Розглянемо задачу лінійного програмування (3.36)—(3.38). Допустимо, що коефіцієнт цільової функції при деякій k-ій змінній $k=\overline{1,n}$ з початковим значенням c_k змінився на величину Δc_k. Отже, цільова функція (3.36) набуде вигляду:

$$F' = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + (c_k + \Delta c_k)x_k + \ldots + c_nx_n = (C + \Delta c_k e_k)X, \quad (3.49)$$

де C, X — відповідно вектор компонент цільової функції та вектор змінних, e_k — одиничний вектор-рядок, де одиниця відповідає k-ій компоненті.

Дослідимо питання визначення границь можливих змін коефіцієнтів цільової функції, в межах яких структура оптимального плану залишається постійною.

А. Перший випадок — коефіцієнт c_k відповідає базисній змінній оптимального плану. За припущенням базисними змінними оптимального плану є перші m векторів останньої симплексної таблиці, отже, $k=\overline{1,m}$.

Зміни коефіцієнтів цільової функції в процесі реалізації симплексного методу впливатимуть лише на значення оцінкового ряду ($F_j - c_j$).

Для оптимального плану задачі (3.36)—(3.38), як відомо з § 2.7.4, оцінки векторів розраховують так:

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, j = 1,2,...,n$$
.

Якщо цільова функція має вигляд (3.49), то оцінки векторів розраховуватимуться за формулою:

$$\Delta'_j = F'_j - c_j = F'(X) - c_j = (C + \Delta c_k e_k)X - c_j =$$

$$= (CX - c_j) + \Delta c_k e_k X = (F_j - c_j) + \Delta c_k e_k X = \Delta_j + a_{kj}\Delta c_k \ (j = \overline{1,n}),$$

де a_{kj} — елементи вектора-рядка, який є результатом множення e_k на X.

Остання симплексна таблиця набуває вигляду:

Таблиця 3.4

i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	...	$c_k + \Delta c_k$	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
				x_1	x_2	...	x_k	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
1	x_1	c_1	x_1^*	1	0	...	0	...	0	$a_{1,m+1}$	...	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	x_2^*	0	1	...	0	...	0	$a_{2,m+1}$	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	x_k	$c_k + \Delta c_k$	x_k^*	0	0	...	1	...	0	$a_{k,m+1}$		a_{kn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	x_m	c_m	x_m^*	0	0	...	0	...	1	$a_{m,m+1}$	...	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		F'	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δn

Для того, щоб план задачі з цільовою функцією (3.49) та системою обмежень (3.37), (3.38) також був оптимальним, має виконуватися умова:

$$\Delta_j + a_{kj}\Delta c_k \geq 0 \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.50}$$

Отже, у разі зміни коефіцієнтів цільової функції, що відповідають базисним змінним, діапазон стійкості оптимального плану визначається з (3.50):

$$\max_{a_{kj} > 0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\} \leq \Delta c_k \leq \min_{a_{kj} < 0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}. \tag{3.51}$$

Тоді нижньою та верхньою границями змін значення c_k відповідно будуть:

$$\underline{c_k} = c_k + \max_{a_{kj}>0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\};$$

$$\overline{c_k} = c_k + \min_{a_{kj}<0}\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{kj}}\right\}.$$

Якщо не існує жодного $a_{kj} > 0$ для $k = \overline{1,m}$, то $\Delta c_k > -\infty$, а якщо не існує ні одного $a_{kj} < 0$ для $k = \overline{1,m}$, то $\Delta c_k < \infty$.

Отже, за змін c_k, що відповідає базисній змінній, в інтервалі $\underline{c_k} \le c_k \le \overline{c_k}$, якщо $k = \overline{1,m}$, структура оптимального плану задачі (3.36)—(3.38) залишиться тією самою.

В. Другий випадок — змінюється коефіцієнт цільової функції при небазисній змінній.

Зміна коефіцієнта цільової функції небазисної змінної впливає на оцінку лише цієї змінної. Допустимо, що це коефіцієнт c_k і за припущенням у даній задачі $k = \overline{m+1,n}$. Нехай цей коефіцієнт зміниться на величину Δc_k. Тоді для задачі з цільовою функцією (3.49) в останній симплексній таблиці зміниться лише одна оцінка, що відповідає небазисній змінній x_k:

$$\Delta'_k = \Delta_k + \Delta c_k,$$

де Δ_k — оцінка вектора при змінній x_k задачі (3.36)—(3.38). Дана оцінка має бути невід'ємною, отже:

$$\Delta'_k = \Delta_k + \Delta c_k \ge 0.$$

Для небазисної змінної діапазон стійкості оптимального плану визначається нерівністю:

$$-\infty < \Delta c_k \le \Delta_k. \tag{3.52}$$

Тобто для коефіцієнтів цільової функції при небазисних змінних існує лише верхня межа зміни діапазону Δc_k .

С. Якщо коефіцієнти при змінних цільової функції (3.36) задачі лінійного програмування водночас змінюються для кількох чи всіх значень $k=\overline{1,n}$, то визначення границь можливих змін величин $c_k\ (k=\overline{1,n})$ здійснюється аналогічно випадку (А).

Для того, щоб план задачі з цільовою функцією, в якій одночасно змінюються кілька чи всі значення $c_k\ (k=\overline{1,n})$, та системою обмежень (3.37), (3.38) також був оптимальним, має виконуватися умова, аналогічна (3.50):

$$\Delta_j+\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\Delta c_k\geq 0\ (k=\overline{1,n}). \tag{3.53}$$

З системи (3.53) знаходять діапазон змін $\Delta c_k\ (k=\overline{1,n})$, для якого структура оптимального плану початкової задачі буде незмінною.

Економічний зміст нерівностей (3.51), (3.52), (3.53) полягає в тому, що вони визначають границі можливих змін цін (собівартості, прибутку) одиниць кожного виду продукції, в межах яких визначена оптимальним планом структура виробництва продукції залишається незмінною.

3.5.3.Аналіз діапазону зміни коефіцієнтів матриці обмежень

Як правило, коефіцієнти $a_{ij},(i=\overline{1,m};\,j=\overline{1,n})$ матриці системи обмежень задачі (3.36)—(3.38) є достовірнішими, ніж компоненти вектора цільової функції чи вектора обмежень, оскільки вони здебільшого є технологічними коефіцієнтами (нормами витрат матеріальних ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції) і не залежать від впливу випадкових чинників у такій мірі, як рівень цін чи обсяги ресурсів.

Розглянемо випадок змін лише тих коефіцієнтів, що відповідають небазисним змінним, оскільки зміна значень коефіцієнтів матриці обмежень, що відповідають базисним змінним, приводить до зміни базисної матриці D, і здійснити такий аналіз досить складно.

Розглянемо k-ту небазисну змінну ($k=\overline{1,n}$) і відповідний їй стовпчик з компонентами $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$. Якщо деяка l-та компонента ($l=\overline{1,m}$) (чи кілька компонент) даного вектора зміниться на величину Δa_{lk}, то за алгоритмом симплексного методу це приведе до зміни значення оцінки відповідного вектора — Δ_k .

Для оптимального плану задачі (3.36)—(3.38), як відомо з §2.7.4, оцінки векторів розраховують так:

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j,\ j=1,2,...,n, \qquad (3.54)$$

або якщо $j=k$, маємо: $\Delta_k = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} - c_k$.

Позначимо через $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ k-й вектор-стовпчик матриці системи обмежень, що відповідає k-ій небазисній змінній. Нехай для деякого k виконується рівність:

$$A_k' = A_k + \Delta a_{lk} e_k\ . \qquad (3.55)$$

Розрахуємо значення оцінки вектора A_k', підставляючи в (3.54) нові значення a_{ij}:

$$\Delta_k' = \left(\sum_{i=1}^{m} c_k a_{ik} - c_k \right) + c_k \Delta a_{lk}\ . \qquad (3.56)$$

Для того, щоб план нової задачі також був оптимальним, має виконуватися умова:

$$\Delta_k' = \left(\left(\sum_{i=1}^{m} c_k a_{ik} - c_k \right) + c_k \Delta a_{lk} \right) \geq 0\ . \qquad (3.57)$$

Отже, розв'язок залишається оптимальним у такому діапазоні змін a_{ek}:

$$\Delta a_{lk} \leq \frac{\Delta_k}{-c_k}, \text{ якщо } c_k < 0; \qquad (3.58)$$

$$\Delta a_{lk} \geq \frac{-\Delta_k}{c_k}, \text{ якщо } c_k > 0\ . \qquad (3.59)$$

Економічний зміст нерівностей (3.58), (3.59) полягає в тому, що вони дають змогу визначати межі можливих змін норм витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції, в яких оптимальна структура виробництва продукції залишається незмінною. Розглянутий випадок стосується зміни коефіцієнтів a_{ij} $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ для тих видів продукції, виробництво яких за оптимальним планом є недоцільним. З першого погляду здається, що таке дослідження є беззмістовним. Однак виконані розрахунки містять додаткову інформацію, яку можна використати для прийняття управлінських рішень у виробництві, приміром визначити, у який спосіб необхідно змінити норми використання ресурсів на виготовлення одиниці нерентабельної продукції для зміни асортименту виробництва.

3.6.Двоїстий симплексний метод

Як відомо з попередніх параграфів даного розділу, кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту задачу. Теоремами двоїстості встановлено зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач. Для знаходження розв'язку однієї зі спряжених задач можна перейти до двоїстої і, використовуючи її оптимальний план, визначити оптимальний план початкової.

Перехід до двоїстої задачі не обов'язковий. Легко помітити, що звичайна симплексна таблиця в стовпчиках містить початкову задачу, а в рядках — двоїсту. Оцінками плану прямої задачі є рядок $\Delta_j = F_j - c_j$ ($j = \overline{1,n}$), а оцінками плану двоїстої — стовпчик «План» з компонентами вектора вільних членів системи обмежень B. Отже, розв'язуючи пряму задачу, симплексний метод дає змогу одночасно знаходити і розв'язок двоїстої задачі. Однак двоїсту задачу можна також розв'язати за таблицею, в якій записана пряма, а відшукавши оптимальний план двоїстої задачі, разом з тим отримати розв'язок початкової задачі. Такий спосіб розв'язання задачі лінійного програмування має назву ***двоїстого симплексного методу***. Прямий та двоїстий симплексні методи пов'язані між собою.

Нехай необхідно розв'язати задачу лінійного програмування, подану в канонічному виді:

$$\min F = CX, \tag{3.60}$$

$$AX = B, \tag{3.61}$$

$$X \geq 0. \tag{3.62}$$

Тоді двоїстою до неї буде така задача:

$$\max Z = BY \tag{3.63}$$

$$YA \leq C. \tag{3.64}$$

За алгоритмом двоїстого симплексного методу як перший опорний план вибирається деякий допустимий розв'язок двоїстої задачі (іноді в літературі його називають «псевдопланом») і зберігається його допустимість для двоїстої задачі упродовж всіх кроків.

Допустимо, що початковий базис складається з m векторів $D = (A_1, A_2, \ldots A_l, \ldots, A_m)$, причому хоча б одна з компонент вектора $X = D^{-1}B = (x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_n)$ від'ємна. Нехай $x_l < 0$, однак справджується критерій оптимальності плану, тобто всі оцінки векторів $\Delta_j = F_j - c_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$). На підставі першої теореми двоїстості план двоїстої задачі відшукуємо у вигляді: $Y = C_{\text{баз}} D^{-1}$. Цей план не є оптимальним для прямої задачі, оскільки він не задовольняє умову невід'ємності змінних (3.62) і не є оптимальним для двоїстої задачі, бо всі оцінки векторів оптимального плану двоїстої задачі мають бути невід'ємними.

Отже, вектор, що відповідає компоненті $x_l < 0$, потрібно виключити з базису початкової задачі, а вектор двоїстої задачі, що відповідає від'ємній оцінці, включити до базису двоїстої.

У прямому симплекс-методі спочатку виявляють змінну, яку слід ввести у базис, а в двоїстому симплекс-методі навпаки — спочатку визначають змінну, яку виключають з базису, а потім змінну, яку вводять у базис.

У літературі [19, 22, 28, 31] зустрічаються різні варіанти двоїстого симплексного методу, які не мають принципових відмінностей. Розглянемо такий ***алгоритм двоїстого симплексного методу***:

1.Необхідно звести всі обмеження задачі до виду «≤», ввести додаткові невід'ємні змінні, визначити початковий базис та перший опорний план $X = (b_1, b_2, ..., b_m)$.

2.Якщо всі оцінки векторів $\Delta_j = F_j - c_j \le 0$ і компоненти вектора-стовпчика «План» $(b_1, b_2, ..., b_m) \ge 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$, то задача розв'язана. Інакше необхідно вибрати найбільшу за модулем компоненту $b_l < 0$ і відповідну змінну x_l виключити з базису.

3.Якщо в l-му рядку, що відповідає змінній x_l, не міститься жодного $a_{lj} < 0$, то цільова функція двоїстої задачі необмежена на багатограннику розв'язків, а початкова задача розв'язку не має. Інакше існують деякі $a_{lj} < 0$ і тоді для відповідних стовпчиків визначають аналогічно прямому симплекс-методу оцінки θ:

$$\theta_j = \min_j \left| \frac{\Delta_j}{a_{lj}} \right| \; (a_{lj} < 0),$$

що дає змогу вибрати вектор, який буде включено в базис.

4. Виконавши крок методу повних виключень Жордана—Гаусса, переходять до наступної симплексної таблиці (Переходять до пункту 2).

Зазначимо, що для задачі знаходження максимального значення цільової функції за наведеним алгоритмом необхідно перейти до цільової функції $F' = -F$, або дещо змінити сам алгоритм.

Детальне доведення всіх кроків алгоритму двоїстого симплексного методу розглянуто в [10].

Приклад 3.6. Знайти мінімальне значення функції

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4; \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Розв'язання: Помножимо другу нерівність на (– 1) і введемо додаткові змінні.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,5}).$$

Початковий базис — вектори A_4 та A_5. Псевдоплан $X = (x_4 = 4; x_5 = -5)$.

Складемо початкову симплексну таблицю.

Базис	$C_{баз}$	План	– 2	1	5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

x_4 $\leftarrow x_5$	0 0	4 – 5	1 –1	1 5	–1 –1	1 0	0 1
$F_j - c_j \le 0$		0	2	–1	–5	0	0

Оскільки $b_2 = -5 < 0$, то з базису необхідно вивести вектор A_5 і відповідну змінну x_5.

Для визначення вектора, що вводиться в базис, розрахуємо значення θ_j. В другому рядку містяться два від'ємних коефіцієнти $a_{21} = -1,\ \ a_{23} = -1$, які відповідають векторам A_1 та A_3. Визначимо, який з цих векторів необхідно вводити в базис.

$$\left|\frac{\Delta_1}{a_{21}}\right| = \left|\frac{2}{-1}\right| < \left|\frac{\Delta_3}{a_{23}}\right| = \left|\frac{-5}{-1}\right|.$$

Отже, $\theta_2 = \min(2;5) = 2$, значить, у базис слід ввести вектор A_1. Розв'язувальним елементом буде a_{21} (–1).

У результаті реалізації методу повних виключень Жордана—Гаусса за два кроки отримаємо оптимальний план.

$\leftarrow x_4$ x_1	0 –2	–1 5	0 1	6 –5	–2 1	1 0	1 –1
$F_j - c_j \le 0$		–10	0	9	–7	0	2
x_3 x_1	5 –2	1/2 9/2	0 1	–3 –2	1 0	–1/2 1/2	–1/2 –1/2
$F_j - c_j \le 0$		–13/2	0	–12	0	–7/2	–3/2

Згідно з останньою симплексною таблицею маємо такий оптимальний план початкової задачі:

$$X^* = \left(\frac{9}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right),\quad F_{\min} = -\frac{13}{2}$$

та оптимальний план двоїстої задачі:

$$Y^* = \left(\frac{7}{2};\ \frac{3}{2}\right),\quad Z_{\max} = -\frac{13}{2}.$$

Для розрахунку оптимального плану двоїстої задачі необхідно було значення оцінок $\Delta_j = F_j - c_j$ домножити на (– 1), оскільки ці спряжені задачі є симетричними.

Зауважимо, що здебільшого двоїстий симплексний метод за кількістю ітерацій не кращий, ніж звичайний. Однак, в окремих задачах він дає змогу спростити розрахунки. В наведеному вище прикладі для знаходження оптимального плану звичайним симплексним методом необхідно було б вводити штучну змінну. Завдяки двоїстому симплекс-методу розв'язування задачі простіше, зменшена кількість ітерацій.

Крім того, двоїстий симплексний метод буває вигіднішим для розв'язування задач, що випливають з уже розв'язаних, наприклад, якщо введенням кількох нових обмежень уточнюють задачу або ж пристосовують її до змінених реальних умов.

3.7.Параметричне програмування

У параграфі 3.5 було розглянуто, як змінюється оптимальний план задачі лінійного програмування, якщо змінюються коефіцієнти цільової функції чи компоненти вектора обмежень. Однак дослідження стосувалися лише визначення діапазону змін, у межах якого структура оптимального плану залишалась тією самою, до того ж кожного разу розглядали вплив зміни лише однієї складової.

Однак на практиці трапляються випадки, коли коефіцієнти цільової функції чи компоненти вектора обмежень залежать від якогось одного чинника, наприклад часу, і потрібно знайти розв'язок задачі за будь-якої зміни цього показника, який називають ***параметром задачі***.

Параметричне програмування — це метод визначення залежності змін розв’язку задачі від зміни вектора коефіцієнтів цільової функції чи вектора обмежень.

3.7.1.Параметричні зміни вектора обмежень

Розглянемо задачу лінійного програмування у разі лінійної залежності компонентів вектора обмежень від параметра *t*. Нехай:

$$b_i' = b_i + tp_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [a;b]. \tag{3.65}$$

Тоді задачу лінійного програмування сформулюємо у вигляді:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{3.66}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 + tp_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 + tp_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m + tp_m. \end{cases} \tag{3.67}$$

$$t \in [a;b]$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}). \tag{3.68}$$

Очевидно, що для кожного фіксованого значення $t = t_0 \in [a;b]$ задача (3.66)—(3.68) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв’язана симплексним методом.

У разі визначення розв’язку задачі, придатного для довільного можливого значення параметра $t \in [a;b]$, потрібні розв’язки іноді вдається знаходити за допомогою дещо видозміненого алгоритму симплексного методу.

Нехай $t = t_0$. Тоді згідно з першою теоремою двоїстості оптимальний план прямої задачі (як і кожен поточний опорний план) можна подати у вигляді:

$$X^* = D^{-1}B, \tag{3.69}$$

де D — матриця, що складена з компонент векторів останнього базису; $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ — оптимальний план задачі (3.66)—(3.68); B — вектор, що складається з вільних членів системи обмежень в останній симплексній таблиці.

Отже, якщо змінюються компоненти вектора B, то змінюються також значення вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. У векторній формі (3.65) має вигляд:

$$B' = B + t_0 P\,, \tag{3.70}$$

де B — вектор з компонентами b_i, а вектор P складається з компонент p_i виразу (3.65). Використовуючи (3.69), маємо:

$$X'^{*} = D^{-1}B' = D^{-1}B + t_0 D^{-1}P\,. \tag{3.71}$$

Добутком $D^{-1}B$ буде вектор, який позначимо через $\tilde{B}$, а результатом множення D^{-1} на P — вектор $\tilde{P}$, тоді:

$$X'^{*} = \tilde{B} + t_0 \tilde{P}\,. \tag{3.72}$$

Допустимо, що задачу (3.66)—(3.68) розв'язано, і остання симплексна таблиця має вид:

Таблиця 3.5

i	Базис	$C_{баз}$	$\tilde{B}$	$\tilde{P}$	План	c_1	…	c_{m+1}	…	c_n
						x_1	…	x_{m+1}	…	x_n
1	x_1	c_1	$\tilde{b}_1$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{b}_1 + t_0\tilde{p}_1$	a_{11}	…	$a_{1,m+1}$	…	$a_{1,n}$
2	x_2	c_2	$\tilde{b}_2$	$\tilde{p}_2$	$\tilde{b}_2 + t_0\tilde{p}_2$	a_{21}	…	$a_{2,m+1}$	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_m	c_m	$\tilde{b}_m$	$\tilde{p}_m$	$\tilde{b}_m + t_0\tilde{p}_m$	a_{m1}	…	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$\tilde{B}^{*}$	$\tilde{P}^{*}$	X'^{*}	Δ_1	…	Δ_{m+1}	…	Δ_n

Таблиця містить два додаткових стовпчики, що дає змогу стежити за перетвореннями величин $\tilde{b}_i, \tilde{p}_i\ (i = \overline{1, m})$ після здійснених ітерацій.

Оскільки таблиця 3.5 містить за допущенням оптимальний план задачі (3.66)—(3.68) X'^{*}, то має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент вектора (3.72), отже,

$$\tilde{b}_i + t_0\tilde{p}_i \geq 0\ (i = \overline{1, m}). \tag{3.73}$$

Допустимо тепер, що у формулі (3.73) параметр t_0 не фіксований, а може набувати довільних значень на заданому інтервалі [a;

b]. Якщо для всіх цих значень параметра нерівності (3.73) задовольняються, тобто

$$\tilde{b}_i + t\tilde{p}_i \geq 0 \; (i = \overline{1,m}; a \leq t \leq b), \qquad (3.74)$$

то це означає, що знайдений план X'^* оптимальний для всіх значень $t \in [a;b]$ і є розв’язком параметричної задачі (3.66)—(3.68). Проте в загальному випадку нехай за певних значень $t \in [a;b]$ нерівності (3.73) не задовольняються і план X'^* уже не буде оптимальним. Тому необхідно виявити множину всіх значень $t = t_0 \in [a_0; b_0]$ (де проміжок [a_0; b_0] менший, ніж [a; b]), для яких знайдений план є оптимальним, і, виключивши її з подальшого розгляду, знаходити оптимальний план для другої множини точок з інтервалу $[a;b]$ і т. д. Отже, процес розв’язання параметричної задачі передбачає послідовний поділ заданого проміжку $[a;b]$ зміни параметра t на ряд таких підпроміжків, щоб для всіх значень $t_0 \in [a_0; b_0]$ того самого підпроміжку оптимум цільової функції досягався в одній точці (вершині) багатогранника планів задачі, але щоб кожному підпроміжку зміни параметра відповідав окремий оптимальний план.

Отже, розв'язування параметричної задачі (3.66)—(3.68) починають з деякого значення $t = t_0$ і записують задачу (3.66)—(3.68) у вигляді початкової симплексної таблиці, що має вигляд, аналогічний таблиці 3.5. Знаходять симплексним методом оптимальний план задачі (якщо він існує) для даного значення параметра (таблиця 3.5). Зазначимо, що значення компонент оптимального плану подається у вигляді двох доданків, що містяться в двох додаткових стовпчиках $\bar{B}$ та $\bar{P}$. Загальні значення цільової функції оптимального плану розраховують додаванням до суми стовпця $\bar{B}$ суми стовпця $\bar{P}$, помноженої на $t = t_0$ (згідно з 3.72). Отже, величина $X'^* = \bar{B}^* + t_0\bar{P}^*$ є лінійною функцією параметра *t*.

Визначимо границі значень параметра *t*, для яких вектор X'^* буде оптимальним планом. Для цього з остаточної таблиці 3.5, де $t = t_0$, складаємо і розв'язуємо систему нерівностей (3.74). У разі існування оптимального плану задачі при $t = t_0$ система нерівностей (3.74), очевидно, сумісна, оскільки існує хоча б один її розв'язок. Зрозуміло також, що обов'язково деякі з $p_i \neq 0$, бо інакше параметричної задачі не було б. Слід розрізняти два випадки при розв'язанні системи нерівностей (3.74):

а) Якщо існують такі значення *i*, для яких $\tilde{p}_i > 0$, тоді розв'язками відповідних нерівностей будуть:

$$t = t_0 \geq \frac{-\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow a_0 = \max_{\tilde{p}_i > 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}, \qquad (3.75)$$

що дає нижню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати *a* або бути меншою за неї: $a_0 \leq a$.

Якщо немає $\tilde{p}_i > 0$, тобто всі $\tilde{p}_i \leq 0$, то значення *t,* для яких знайдений план X'^* буде оптимальним, знизу не обмежені, тобто $a_0 \to -\infty$.

б) Якщо існують такі значення *i*, для яких $\tilde{p}_i < 0$, то розв'язками відповідних нерівностей будуть:

$$t = t_0 \leq \frac{-\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \Rightarrow b_0 = \min_{\tilde{p}_i < 0} \left\{ -\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{p}_i} \right\}. \qquad (3.76)$$

В такому разі розв'язок системи нерівностей дає верхню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати або бути більшою за *a* ($b_0 \geq a$). Якщо немає $\tilde{p}_i < 0$, тобто всі $\tilde{p}_i \geq 0$, то сукупність значень *t,* для яких знайдений план X'^* буде оптимальним, зверху необмежена ($b_0 \to +\infty$), і в цьому останньому разі задача розв'язана повністю, оскільки

$$a < b < b_0 \to +\infty .$$

Отже, для верхньої границі шуканого інтервалу дістаємо формулу:

$$b_0 = \begin{cases} \min\limits_{\tilde{\beta}_i < 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{\beta}_i} \right\}, & \text{якщо існують } \tilde{\beta}_i < 0, \\ +\infty, & \text{якщо всі } \tilde{\beta}_i \geq 0. \end{cases} \tag{3.77}$$

Аналогічна формула для нижньої границі має вигляд:

$$a_0 = \begin{cases} \max\limits_{\tilde{\beta}_i > 0} \left\{ -\dfrac{\tilde{b}_i}{\tilde{\beta}_i} \right\}, & \text{якщо існують } \tilde{\beta}_i > 0, \\ -\infty, & \text{якщо всі } \tilde{\beta}_i \leq 0. \end{cases} \tag{3.78}$$

За найменшого виходу величини t за межі визначеного інтервалу $[a_0;\ b_0]$ значення нового оптимального плану X'^* буде від'ємним (порушуватимуться умови системи нерівностей (3.74)).

Тобто (3.74) визначає вектор, який необхідно вивести з базису. Припустимо, що за деякого $t = b_0 + \Delta t$, де $\Delta t > 0$, мінімальне значення в (3.77), яке визначає верхню границю інтервалу $[a_0; b_0]$, досягається для $i = k$. Отже, порушується k-та нерівність із (3.74), і з базису необхідно виводити вектор, що відповідає змінній x_k. Тому при $t = b_0$ необхідно здійснити зміну базису, для чого виконують один крок двоїстого симплекс-методу, розглянутого в §3.6., і визначають нове значення X''^*.

Далі розглядають знову систему нерівностей (3.74). Для $t > b_0 = b_1$ за формулою (3.77) визначають верхню границю b_1 тих значень *t,* для яких відшуканий план X''^* буде оптимальним. Таку процедуру повторюють доти, поки не отримають значення верхньої границі чергового інтервалу, що дорівнює або перевищує верхню границю заданого інтервалу $[a;b]$ можливих значень *t,* тобто

$$b_s = b_{s+1} \geq b\ . \tag{3.79}$$

Співвідношення (3.79) і є ознакою того, що задачу розв’язано.

Отже, заданий проміжок [a; b] поділяють на ряд інтервалів [a; b_0], [b_1; b_2], … [b_{s-1}; b], для кожного з яких максимум цільової функції досягається за відповідного йому одного оптимального плану.

3.7.2.Параметричні зміни вектора коефіцієнтів цільової функції

Розглянемо випадок лінійної залежності коефіцієнтів цільової функції від параметра, можливі значення якого задані неперервним числовим інтервалом, тобто в задачі лінійного програмування

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3.80}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.81}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) \tag{3.82}$$

допустимо, що

$$c'_j = c_j + tp_j, \ t \in [a;b], \ j = \overline{1,n} . \tag{3.83}$$

Усі ж інші коефіцієнти і вільні члени залишаються сталими величинами.

Запишемо параметричну задачу такого виду в загальній формі:

$$\max \ F = (c_1 + tp_1)x_1 + (c_2 + tp_2)x_2 + ... + (c_n + tp_n)x_n \tag{3.84}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.85}$$

$$t \in [a;b]$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}) . \tag{3.86}$$

За деякого фіксованого значення $t = t_0$ задача (3.84)—(3.86) перетворюється в звичайну задачу лінійного програмування. Зміни коефіцієнтів цільової функції в процесі реалізації симплексного методу впливатимуть на значення оцінкового ряду ($\Delta_j = F_j - c_j$).

Для оптимального плану задачі лінійного програмування в постановці (3.36)—(3.38), як відомо з §2.7.4, оцінки векторів розраховують так:

$$\Delta_j = F_j - c_j = F(X) - c_j = CX - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, j = 1,2,...,n$$
.

Якщо цільова функція має вигляд (3.84), то оцінки векторів розраховуватимуться за формулою:

$$\Delta'_j = F'_j - c'_j = \left(c_j + t_0 p_j\right)X - (c_j + t_0 p_j) = \Delta_j + t_0 p_j, j = \overline{1,n}.$$

Позначимо перетворені методом повних виключень Жордана—Гаусса в процесі перерахунку початкової симплексної таблиці $\Delta'_j\ (j = \overline{1,n})$ через $\hat{\Delta}_j\ (j = \overline{1,n})$, аналогічно $p_j\ (j = \overline{1,n})$ — як $\hat{p}_j\ (j = \overline{1,n})$. Остання симплексна таблиця набуде такого вигляду:

Таблиця 3.6

i	Базис	$C_{баз}$	План	$c_1 + t_0 p_1$	...	$c_m + t_0 p_m$	...	$c_n + t_0 p_n$
				x_1	...	x_m	...	x_n
1	x_1	$c_1 + t_0 p_1$	x_1^*	a_{11}	...	a_{1m}	...	$a_{1,n}$
2	x_2	$c_2 + t_0 p_2$	x_2^*	a_{21}	...	a_{2m}	...	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	x_m	$c_m + t_0 p_m$	x_m^*	a_{m1}	...	a_{mm}	...	a_{mn}
$m + 1$	$\hat{\Delta}_j$		$\hat{\Delta}$	$\hat{\Delta}_1$		$\hat{\Delta}_m$		$\hat{\Delta}_n$
$m + 2$	$\hat{p}_i$		$\hat{p}$	$\hat{p}_1$	...	$\hat{p}_m$	...	$\hat{p}_n$
$m + 3$	$F_j - c_j \geq 0$		X'^*	$\Delta_1 + t_0 \hat{p}_1$	...	$\Delta_m + t_0 \hat{p}_m$	...	$\Delta_n + t_0 \hat{p}_n$

Таблиця (аналогічно випадку параметричної зміни вектора обмежень —табл.3.5) містить два додаткових рядки, що дає змогу стежити за перетвореннями величин $\tilde{\Delta}_j, \tilde{p}_j \ (j=\overline{1,n})$ після кожної ітерації.

Очевидно, що задача параметричної зміни вектора обмежень є двоїстою до параметричної зміни вектора коефіцієнтів цільової функції, тому можна скористатись ***алгоритмом розв'язування параметричної задачі***, що наведено в попередньому параграфі.

1. Слід зафіксувати деяке значення $t=t_0 \in [a;b]$ і розв'язати задачу (3.84)—(3.86) як звичайну задачу лінійного програмування симплексним методом.

2. Оптимальний план з останньої симплексної таблиці 3.6 є сумою двох доданків, значення яких знаходяться в рядках $\tilde{\Delta}$ та $\tilde{p}$, причому має виконуватися умова невід'ємності всіх компонент вектора, що є оцінками параметрів останньої симплексної таблиці, тобто

$$\tilde{\Delta}_j + t_0 \tilde{p}_j \geq 0, \ j=\overline{1,n}.$$

3. Встановлюємо границі значень параметра *t*, для яких вектор X'^* залишатиметься оптимальним планом. Для цього з останньої симплексної таблиці складаємо систему нерівностей

$$\tilde{\Delta}_j + t\tilde{p}_j \geq 0, \ j=\overline{1,n}. \qquad (3.87)$$

а) Якщо існують такі значення *j*, для яких $\tilde{p}_j > 0$, тоді розв'язками відповідних нерівностей будуть:

$$t=t_0 \geq \frac{-\tilde{\Delta}_j}{\tilde{p}_j} \Rightarrow a_0 = \max_{\tilde{p}_j>0}\left\{-\frac{\tilde{\Delta}_j}{\tilde{p}_j}\right\}. \qquad (3.88)$$

У такий спосіб визначають нижню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати *a* або бути меншою за неї: $a_0 \le a$.

Якщо немає $\tilde{\beta}_i > 0$, тобто всі $\tilde{\beta}_i \le 0$, то значення t, для яких знайдений X'^* буде оптимальним, знизу не обмежені, тобто $a_0 \to -\infty$.

б) Якщо існують такі значення *i*, для яких $\tilde{\beta}_i < 0$, то розв’язками відповідних нерівностей будуть:

$$t = t_0 \ge \frac{-\tilde{\Delta}_j}{\tilde{\beta}_j} \Rightarrow b_0 = \min_{\tilde{\beta}_j < 0} \left\{ -\frac{\tilde{\Delta}_j}{\tilde{\beta}_j} \right\}. \tag{3.89}$$

З цих розв’язків визначають верхню границю шуканого інтервалу, яка може дорівнювати або бути більшою за *a* ($b_0 \ge a$). Якщо немає $\tilde{\beta}_i < 0$, тобто всі $\tilde{\beta}_i \ge 0$, то сукупність значень *t*, для яких знайдений план X'^* буде оптимальним, зверху необмежена ($b_0 \to +\infty$) і в цьому останньому випадку задача розв’язана повністю, оскільки

$$a < b < b_0 \to +\infty .$$

4. Система (3.74) визначає вектор, який необхідно вивести з базису. Припустимо, що за деякого $t = b_0 + \Delta t$, де $\Delta t > 0$, мінімальне значення в (3.89), яке визначає верхню границю інтервалу $[a_0; b_0]$, досягається для $i = k$. Отже, порушується *k*-та нерівність із (3.87), і з базису необхідно виводити вектор, що відповідає змінній x_k. Тому при $t = b_0$ необхідно провести заміну базису, для

чого виконують один крок двоїстого симплекс-методу, розглянутого в §3.6, і визначають нове значення X''^*.

5. Розглядаємо знову систему нерівностей (3.87). Для $t > b_0 = b_1$ за формулою (3.77) визначаємо верхню границю b_1 тих значень *t*, для яких відшуканий план X''^* буде оптимальним.

6. Процедуру повторюємо доти, поки не отримаємо значення верхньої границі чергового інтервалу, що дорівнює або перевищує верхню границю заданого інтервалу $[a;b]$ можливих значень *t*, тобто

$$b_s = b_{s+1} \geq b . \tag{3.90}$$

Співвідношення (3.90) і є ознакою того, що задачу розв'язано.

Отже, заданий проміжок $[a;b]$ поділяють на ряд інтервалів $[a;b_0],[b_1;b_2],...,[b_{s-1};b]$, для кожного з яких максимум цільової функції досягається за відповідного йому одного оптимального плану.

Приклад 3.7. Розв'язати параметричну задачу

$$\max F = (-3+2t)x_1 + (2-t)x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ x_1 + x_2 \geq 2; \\ -2x_1 + x_2 \leq 3; \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$1 \leq t \leq 10.$$

Нехай $t = 1$. Розв'яжемо задачу модифікованим симплексним методом, використовуючи таблицю з двома додатковими рядками.

Базис	$C_{баз}$	План	–1	1	0	0	0	0

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	0	10	3	2	1	0	0	0
x_4	0	–2	–1	–1	0	1	0	0
x_5	0	3	–2	1	0	0	1	0
x_6	0	5	3	–2	0	0	0	1
Δ_j		0	3	–2	0	0	0	0
p_j		0	–2	1	0	0	0	0
$F_j - c_j \geq 0$		0	1	–1	0	0	0	0
x_3	0	4	7	0	1	0	–2	0
x_4	0	1	–3	0	0	1	1	0
x_2	1	3	–2	1	0	0	1	0
x_6	0	11	–1	0	0	0	2	1
Δ_j		6	–1	0	0	0	2	0
p_j		–3	0	0	0	0	–1	0
$F_j - c_j \geq 0$		3	–1	0	0	0	1	0
x_1	–1	4/7	1	0	1/7	0	–2/7	0
x_4	0	19/7	0	0	3/7	1	1/7	0
x_2	1	29/7	0	1	2/7	0	3/7	0
x_6	0	81/7	0	0	1/7	0	12/7	1
Δ_j		46/7	0	0	1/7	0	12/7	0
p_j		–3	0	0	0	0	–1	0
$F_j - c_j \geq 0$		25/7	0	0	1/7	0	5/7	0

Остання симплексна таблиця містить перший оптимальний план задачі $X^* = \left(x_1^* = \frac{4}{7}; x_2^* = \frac{29}{7} \right),\ Z_{t=1}^* = \frac{25}{7}.$

Верхня границя першого проміжку згідно з (3.89) дорівнює $b_0 = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$. Отже, на інтервалі $\left[1; \frac{12}{7}\right]$ план $X^*\left(\frac{4}{7}; \frac{29}{7}\right)$ буде оптимальним, причому оптимальне значення цільової функції буде такою лінійною функцією параметра t:

$$Z(X^*) = \max Z\left(1; \frac{12}{7}\right) = \frac{1}{7}(46 - 21t)$$

і при $t = \frac{12}{7}$ $\max Z_{t=\frac{12}{7}} = \frac{10}{7}$.

Оскільки при $t = \frac{12}{7} = b_0$ елемент $m + 2$ рядка та п'ятої колонки буде нульовим, беремо п'яту колонку за розв'язувальну і, відкинувши $m + 2$ рядок, здійснюємо одну ітерацію. Отримаємо таку таблицю:

Базис	$C_{баз.}$	План	–1	1	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	–1	5/2	1	0	1/6	0	0	1/6
x_4	0	7/4	0	0	5/12	1	0	–1/12
x_2	1	5/4	0	1	1/4	0	0	–1/4
x_5	0	81/12	0	0	1/12	0	1	7/12
Δ_j		–5	0	0	0	0	0	–1
p_j		15/4	0	0	1/12	0	0	7/12

В $m + 3$ рядку цієї таблиці немає від'ємних елементів, а тому згідно з формулою (3.89) знайдений план $X'^*\left(x_1' = \frac{5}{2}; x_2' = \frac{5}{4}\right)$ буде оптимальним для всіх значень t, що лежать на інтервалі $\left[\frac{12}{7};+\infty\right]$. Оптимальне значення цільової функції є такою лінійною функцією параметра t:

$$Z(X'^*) = \max Z\left[\frac{12}{7};+\infty\right] = -5 + \frac{15}{4}t.$$

При $t = 10$ $Z(X'^*) = 32,5$.

Отже, задача розв'язана повністю.

Заключні зауваження

Поняття двоїстості задач лінійного програмування має велике значення не лише в теоретичному плані, але й широко застосовується для обґрунтування та прийняття практичних рішень. Двоїстість у лінійному програмуванні була розроблена академіком Л.В. Канторовичем ще 1933 року. 1975 року Л. В. Канторович і американський математик Г. Купманс за відкриття теорії двоїстості та її застосування в економічних дослідженнях одержали Нобелівську премію. Значні теоретичні досягнення в цій галузі мали В.В. Новожилов, В.С. Нємчинов, А.І. Лур'є, В.С. Михалевич, Ю.М. Єрмолєв та інші вчені.

Двоїсті задачі мають чітку геометричну та економічну інтерпретацію. Теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях. У 70-х роках у Радянському Союзі велась дискусія з приводу застосування двоїстих оцінок в економіці. Економісти того часу недооцінювали цю важливу економічну категорію. Проблема полягала ще й у тому, що ціни в Радянському Союзі були необґрунтованими. При визначенні рівня цін, що здебільшого встановлювалось адміністративно, не враховувались реальні витрати живої та уречевленої праці, попит на продукцію та її пропозиція на ринку. Радянські економісти також не розуміли, чому недефіцитні ресурси мають нульову оцінку.

Контрольні запитання

1. У чому сутність теорії двоїстості у лінійному програмуванні?

2. Побудуйте просту економіко-математичну модель. Запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.

3. Які взаємоспряжені задачі називаються симетричними, а які — несиметричними? Чим вони відрізняються?

4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?

5. Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

6. Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

7. Сформулюйте третю теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

8. *Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.*
9. *Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?*
10. *Запишіть усі можливі види прямих і двоїстих задач.*

Приклади та завдання для самостійної роботи

До наведених нижче задач записати двоїсті задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач симплекс-методом і визначити оптимальний план другої задачі, застосовуючи співвідношення першої теореми двоїстості.

Задача 3.1. $\max z = -30x_1 + 10x_2$;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

Задача 3.2. $\min z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$;

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

Задача 3.3. $\max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50; \\ 3x_1 + x_3 \geq 15, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

«Цифри не керують світом,
але вони показують, як світом керують»

Й. В. Гете

РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Теорія двоїстості є потужним математичним апаратом обґрунтування структури виробництва. Вона дає змогу насамперед визначати статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів. За умов ринкової економіки ціни на ресурси можуть змінюватися в доволі широких межах. Крім цього, постачальники через об'єктивні обставини можуть не виконати попередніх домовленостей. Тому аналіз ринку ресурсів у передплановому періоді має чимале значення. Важливою є проблема заміни одного дефіцитного ресурсу іншим.

Використання двоїстих оцінок уможливлює визначення рентабельності кожного виду продукції, яка виробляється підприємством. Водночас можна оцінити інтервали можливої зміни цін одиниці кожного виду продукції, що дуже важливо за ринкових умов.

Отже, аналіз лінійної економіко-математичної моделі на чутливість дає широкий спектр динамічної інформації про визначений оптимальний план і змогу дослідити вплив можливих змін на результати господарської діяльності.

Побудована економіко-математична модель може бути використана для імітації процесу виробництва. Це дає змогу перевірити:

1) за яких умов оптимальний план є стійким;

2) чи є вигідним додаткове залучення ресурсів;

3) як зміниться ефективність виробництва в разі загострення конкуренції на ринку збуту (оцінити виправданість у цій ситуації зниження цін на продукцію);

4) доцільність виробництва нової продукції;

5) як вплине на ефективність діяльності підприємства порушення споживачами продукції попередніх угод, наприклад, їх відмова від частини або всієї продукції. Як має виробник за цих обставин змінити план виробництвом продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції.

Зауважимо, що дослідження планів, отриманих за економіко-математичними моделями, на стійкість, а також оцінювання ситуацій мають виконуватися в передплановому періоді.

4.1. Приклад економічної інтерпретації пари спряжених задач

Економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач і проведення післяоптимізаційного аналізу розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва *n* видів продукції використовується *m* видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $b_i \left(i = \overline{1,\ m}\right)$. Норми витрат кожного ресурсу на виробництво одиниці продукції становлять $a_{ij} \left(i = \overline{1,\ m};\ \ j = \overline{1,\ n}\right)$. Ціна реалізації одиниці продукції *j*-го виду дорівнює $c_j \left(j = \overline{1,\ n}\right)$. Математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\ ; \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ \ i = \overline{1,\ m}\ ; \tag{4.2}$$

$$x_j \ge 0,\ \ \ j = \overline{1,\ n}\ . \tag{4.3}$$

Сутність прямої задачі полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва різних видів продукції $X^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)$, який дав би змогу одержати найбільшу виручку від її реалізації.

Двоїста задача до сформульованої у такий спосіб прямої буде такою:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i\ ; \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ \ \ j = \overline{1,\ n}\ ; \tag{4.5}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}. \qquad (4.6)$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає у визначенні такої оптимальної системи оцінок ресурсів y_i, що використовуються для виробництва продукції, за якої загальна вартість усіх ресурсів була б найменшою. Змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу.

Згідно з теоретичними положеннями §3.5 розглянемо використання двоїстих оцінок на прикладі аналізу економіко-математичних моделей виду (4.1)—(4.3) та (4.4)—(4.6).

Приклад 4.1. Деяке підприємство виробляє чотири види продукції A, B, C, і D, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції (в умовних одиницях) наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

НОРМИ ВИТРАТ РЕСУРСІВ НА ВИРОБНИЦТВО ПРОДУКЦІЇ, ум. од.

Ресурс	Норма витрат ресурсу на одиницю продукції виду				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	5	2	4	250
2	1	6	2	4	280
3	3	2	1	1	80

Відомі також ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: для продукції A — 2 ум. од., для продукції B і D — по 4 ум. од., для продукції C — 3 ум. од.

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду за умов обмеженості запасів ресурсів, який дав би змогу підприємству отримати найбільшу виручку від реалізації продукції.

Розв’язання. Математичні моделі прямої (4.7) та двоїстої (4.8) задач мають такий вигляд:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 250; \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 280; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 80, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}, \qquad (4.7)$$

де x_j — обсяг виробництва продукції j-го виду $\left(j = \overline{1,\ 4}\right)$;

$$\min F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 2; \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 4; \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3; \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0,\ j = \overline{1,3}, \qquad (4.8)$$

де y_i — оцінка одиниці i-го виду ресурсу $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$.

Симплексна таблиця, що відповідає оптимальному плану сформульованої вище задачі має вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	4	45	–2	1/2	0	1	1/2	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	3/2	1	0	–1/2	0	2
$Z_j - c_j \ge 0$		285	5	5/2	0	0	1/2	0	2

4.2. Аналіз розв'язків спряжених економіко-математичних задач

Наведена симплекс-таблиця містить оптимальні плани прямої та двоїстої задач. Оптимальний план прямої задачі позначимо через X^*, а оптимальний план двоїстої — Y^*.

$$X^* = (0;\ 0;\ 35;\ 45;\ 0;\ 30;\ 0),\ \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4;\ 0;\ 3) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2;\ 0;\ 2);$$

$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$

Основні змінні прямої задачі	Додаткові змінні прямої задачі
$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 35$; $x_4 = 45$	$x_5 = 0$; $x_6 = 30$; $x_7 = 0$

Основні змінні оптимального плану ***прямої задачі*** означають обсяги виробництва відповідних видів продукції. Отже, випуск продукції видів A та B не передбачається ($x_1 = x_2 = 0$), а C і D — планується у кількості відповідно 35 та 45 од.

Додаткові змінні оптимального плану ***прямої задачі*** x_5, x_6, x_7 характеризують залишки (невикористані обсяги) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки $x_6 = 30$, то це означає, що другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю. Перший та третій ресурси за оптимального плану виробництва будуть використані повністю, бо $x_5 = x_7 = 0$.

За такого плану виробництва продукції підприємство отримало б найбільшу виручку обсягом 285 ум. од.

З розділу III відомо, що між змінними прямої та двоїстої задач існує відповідність виду:

Основні змінні прямої задачі				Додаткові змінні прямої задачі		
$x_1 = 0$	$x_2 = 0$	$x_3 = 35$	$x_4 = 45$	$x_5 = 0$	$x_6 = 30$	$x_7 = 0$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_4 = 5$	$y_5 = 5/2$	$y_6 = 0$	$y_7 = 0$	$y_1 = 1/2$	$y_2 = 0$	$y_3 = 2$

Додаткові змінні двоїстої задачі	Основні змінні двоїстої задачі

Оптимальний план двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві.

Основні змінні двоїстої задачі за наведеною схемою відповідають додатковим змінним прямої, що характеризують обсяги невикористаних ресурсів. Отже, отримані значення змінних y_1, y_2 та y_3 можна використати для відносної кількісної оцінки важливості відповідних видів ресурсів. Так, $y_1 = 1/2$ та $y_3 = 2$ відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 (за значеннями додаткових змінних прямої задачі) використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується за оптимального плану виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Крім того, за третьою теоремою двоїстості відомо: якщо деяка основна змінна оптимального плану двоїстої задачі $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягу відповідного i-го ресурсу приводить до зміни значення цільової функції на величину y_i. Якщо $y_i = 0$, то значення цільової функції залишається незмінним.

Отже, $y_1 = 1/2$ означає, що коли запас першого ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то значення цільової функції max Z збільшиться за інших однакових обставин на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме max $Z = 285 + 1/2 = 285{,}5$ ум. од.

Аналогічно збільшення на одну умовну одиницю третього ресурсу ($b_3 = 80 + 1 = 81$) приведе за інших однакових умов до збільшення цільової функції на $y_3 = 2$ ум. од., що становитиме $\max Z = 285 + 2 = 287$ ум. од. Лише незначні зміни обсягу другого ресурсу ніяк не впливатимуть на значення цільової функції, оскільки $y_2 = 0$.

Додаткові змінні оптимального плану ***двоїстої задачі*** відповідають основним змінним прямої задачі і, оскільки останні означають обсяги виробництва кожного виду продукції, відповідні їм y_4, y_5, y_6 та y_7 також у певний спосіб мають характеризувати виробництво відповідних видів продукції. За правилами побудови двоїстої задачі очевидно, що додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Отже, вони відносно характеризують збитковість виробництва відповідних видів продукції.

Додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оцінковому рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках «x_1» — «x_4». Їх оптимальні значення: $y_4 = 5$; $y_5 = 5/2$; $y_6 = 0$; $y_7 = 0$. Тому витрати на виробництво продукції видів A і B перевищують їх ціну відповідно на 5 та 5/2 ум. од., а для продукції C і D такого перевищення немає. Це підтверджується також попереднім аналізом основних змінних оптимального плану прямої задачі, оскільки за оптимальним планом доцільно виготовляти саме продукцію видів C і D.

Розрахована оптимальна система оцінок забезпечує найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: min F = 285 ум. од.

4.3.Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції

Оцінку рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, можна здійснювати за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю відповідних ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), то виготовляти таку продукцію невигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна їй змінна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Підставимо значення оптимального плану двоїстої задачі Y^* у її систему обмежень. Якщо вартість ресурсів на виробництво одиниці продукції (ліва частина обмеження) перевищує ціну цієї продукції (права частина обмеження), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 > 2 \ \ \text{(продукція А нерентабельна);} \\ 5 \cdot 1/2 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13/2 > 4 \ \ \text{(продукція В нерентабельна);} \\ 2 \cdot 1/2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 3 = 3 \ \ \text{(продукція С рентабельна);} \\ 4 \cdot 1/2 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 = 4 \ \ \text{(продукція D рентабельна).} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши додаткові змінні оптимального плану двоїстої задачі (§4.2). Як з'ясовано вище, значення додаткових змінних показують, наскільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i > 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Оптимальні значення $y_4 = 5 > 0$; $y_5 = 5/2 > 0$, тому продукція A і B нерентабельна, а $y_6 = 0$; $y_7 = 0$, тобто продукція C і D — рентабельна.

Дослідимо питання про доцільність введення нового $(n + 1)$-го виду продукції, якщо відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці такої продукції — $a_{i,n+1}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ і ціна її реалізації — c_{n+1}. За умови введення у виробництво нового виду продукції в економіко-математичну модель (4.7) необхідно ввести відповідну змінну (x_{n+1}). Отже, модель прямої задачі набуде вигляду:

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n + c_{n+1} x_{n+1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} \le b_m. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1; n+1}$$

Відповідна математична модель двоїстої задачі міститиме не *n*, а (*n* + 1) нерівність і відрізнятиметься від (4.8) наявністю обмеження, що описує витрати на виробництво нового виду продукції:

$$a_{1,n+1}y_1 + a_{2,n+1}y_2 + ... + a_{m,n+1}y_m \ge c_{n+1} \qquad (4.9)$$

Оскільки значення $a_{i,n+1}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ і c_{n+1} за умовою задачі відомі, розраховані також значення y_i $i = \overline{1,m}$, то можна перевірити виконання нерівності (4.9). Як зазначено вище, рентабельною є продукція, для якої відповідне обмеження виконується як рівняння, а нерентабельною, якщо ліва частина нерівності (витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції) перевищує праву (ціну реалізації одиниці продукції).

Допустимо, що за умов прикладу 4.1 запропоновано включити у виробництво один з двох видів нової продукції: Е чи G. Відомі витрати кожного ресурсу на виготовлення одиниці цих видів продукції, що становлять для продукції виду Е відповідно 4, 7, 2 ум. од. та для продукції виду G — 4, 8, 1 ум. од. Ціна реалізації одиниці продукції обох нових видів однакова і дорівнює 4,5 ум. од.

Складемо відповідне обмеження двоїстої задачі. Наступний вид продукції буде позначатися через x_5, тому маємо:

$$a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 \geq c_5$$

$Y^* = (y_1 = 1/2; y_2 = 0; y_3 = 2)$.

Перевіримо виконання обмеження спочатку для продукції виду Е:

$$4 \cdot 1/2 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \geq 4{,}5\,;$$

$$6 > 4{,}5\,.$$

Обмеження виконується як строга нерівність, отже, за умов даного підприємства виробництво продукції Е є недоцільним.

Зауважимо, що остання нерівність визначає мінімальне значення ціни реалізації одиниці продукції, за якої її випуск є рентабельним. Отже, ціна одиниці продукції Е за даних умов має становити не менше 6 ум. од.

Визначимо співвідношення між витратами на виробництво та ціною для продукції G:

$$4 \cdot 1/2 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 2 < 4{,}5$$

$$4 < 4{,}5\,.$$

З останньої нерівності маємо, що витрати на виробництво одиниці продукції G менші, ніж ціна реалізації. Така продукція є рентабельною за умов виробництва, на даному підприємстві і її доцільно включити в план випуску.

Для визначення оптимального плану виробництва із введеним додатково видом продукції обов’язково необхідно розв’язати нову задачу лінійного програмування. Двоїсті оцінки лише показують, доцільне чи ні розв’язання такої задачі.

4.4.Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів

За допомогою двоїстих оцінок можна також визначити статус кожного ресурсу.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо деяке значення двоїстої оцінки y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***. Відомо (третя теорема двоїстості), що величина двоїстої оцінки показує, наскільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Статус ресурсів можна визначати трьома способами. Перший — підстановкою значень вектора X^* (оптимального плану виробництва) у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у іншому разі — недефіцитний:

$$\begin{cases} 2\cdot 0+5\cdot 0+2\cdot 35+4\cdot 45=250 & (\text{ресурс 1 дефіцитний}); \\ 1\cdot 0+6\cdot 0+2\cdot 35+4\cdot 45=250<280 & (\text{ресурс 2 недефіцитний}); \\ 3\cdot 0+2\cdot 0+1\cdot 35+1\cdot 45=80 & (\text{ресурс 3 дефіцитний}). \end{cases}$$

Другий спосіб — через додаткові змінні прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо більша від нуля — недефіцитний.

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i > 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо ж $y_i = 0$, то i-й ресурс недефіцитний. Так, у нашому прикладі:

$y_1 = ½ > 0$ (ресурс 1 дефіцитний);
$y_2 = 0$ (ресурс 2 недефіцитний);
$y_3 = 2 > 0$ (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_1 = 250 + 1 = 251$), то цільова функція max Z збільшиться за інших однакових умов на $y_1 = 1/2$ ум. од. і становитиме max $Z = 285{,}5$ ум. од.

Цікавим є запитання: «За рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства?» Як відомо з §3.5.1, інформацію про це дають елементи стовпчика «x_5» останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці даного ресурсу — $y_1 = 1/2$.

Якщо в початковій задачі значення першого ресурсу зросте на одиницю, то згідно з табл. 3.3. отримаємо:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250 + 1	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280 + 0	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80 + 0	3	2	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \ge 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	$62{,}5 + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	30 – 1	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	$17{,}5 - \frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1

$Z_j - c_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	$45 + \frac{1}{2}$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30 – 1	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	$35 - \frac{1}{2}$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geq 0$		$285 + \frac{1}{2}$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_4^* збільшиться на 1/2, а змінних x_6^* та x_3^* — зменшиться відповідно на одиницю та 1/2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення будуть такими:

$$X^* = (0;\ 0;\ 34{,}5;\ 45{,}5;\ 0;\ 29;\ 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов уможливлює зростання випуску продукції D за рахунок зменшення виробництва продукції C. За таких умов обсяг використання недефіцитного другого ресурсу також збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства $\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 34{,}5 + 4 \cdot 45{,}5 = 285{,}5$, тобто зросте на $y_1 = 1/2$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 3 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 80 + 1 = 81$). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці, що відповісти дає двоїстій оцінці $y_3 = 2$, можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0).$$
$$\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, виручка підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції С на дві одиниці та зменшення випуску продукції D на одну одиницю. За таких обставин обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: Оскільки збільшення третього ресурсу на одиницю приводить до найбільшого підвищення значення функціонала, то чи можна збільшити третій дефіцитний ресурс на 50, 100 і т.д. ум. од., тим самим значно збільшуючи виручку підприємства?

Із §3.5.1 відомо, що для однозначної відповіді на це запитання, необхідно розрахувати **інтервали** можливої ***зміни обсягів дефіцитних ресурсів***, у межах яких двоїсті оцінки y_i залишаються на рівні оптимальних значень, тобто розв’язати систему нерівностей (3.43).

Якщо приріст (зміну) запасу першого ресурсу позначимо через Δb_1, тоді симплексні таблиці даної задачі набудуть вигляду:

Базис	Сб	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	$250 + 1\,\Delta b_1$	2	5	2	4	1	0	0

x_6 x_7	0 0	$280 + 0\Delta b_1$ $80 + 0\Delta b_1$	1 3	6 2	2 1	4 1	0 0	1 0	0 1
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	$62{,}5 + \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	$30 - 1\Delta b_1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	$17{,}5 - \frac{1}{4}\Delta b_1$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	$45 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	$30 - 1\Delta b_1$	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	$35 - \frac{1}{2}\Delta b_1$	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geq 0$		$285 + \frac{1}{2}\Delta b_1$	5	5/2	0	0	1/2	0	2

Новий оптимальний план можна записати у такий спосіб:

$$X^* = (0;\ 0;\ 35 - 1/2\Delta b_1;\ \ 45 + 1/2\Delta b_1;\ \ 0;\ \ 30 - \Delta b_1;\ 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, — це умова невід'ємності змінних, тобто:

$$\begin{cases} 35 - 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 45 + 1/2\Delta b_1 \geq 0; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70; \\ \Delta b_1 \geq -90; \\ \Delta b_1 \leq 30. \end{cases}$$

Отже,

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30 .$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то на цьому інтервалі його оптимальна двоїста оцінка залишиться такою ж: $y_1 = 1/2$. Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах:

$$250 - 90 \leq b_1 \leq 250 + 30,$$

$$160 \leq b_1 \leq 280 .$$

Згідно з цим максимально можливі зміни обсягів виручки підприємства залежно від змін у постачанні ресурсу 1 на такому інтервалі будуть у межах:

$$285 - 90 \cdot 1/2 \le Z_{\max} \le 285 + 30 \cdot 1/2 \,,$$

$$240 \le Z_{\max} \le 300 \,,$$

а відповідні критичним значенням діапазону виручки оптимальні плани виробництва продукції будуть такими:

(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) = X^* = (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0).

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $y_3 = 2$ для дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \ge 0; \\ 45 - \Delta b_3 \ge 0; \\ 30 + 0\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \ge -17{,}5; \\ \Delta b_3 \le 45; \end{cases}$$

$$-17{,}5 \le \Delta b_3 \le 45 \,,$$

$$62{,}5 \le b_3 \le 125 \,.$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка $y_3 = 2$ цього ресурсу залишиться такою ж. Згідно із цим можлива виручка підприємства та оптимальний план виробництва продукції будуть знаходитися у межах:

$$250 \le \max Z \le 375 \,;$$

(0; 0; 0; 62,5; 0; 30; 0) = X^* = (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).

Для розрахунку інтервалу зміни недефіцитного ресурсу досить розв’язати одну нерівність (3.45) (нагадаємо, що вона має вигляд: $-x^*_{n+k} \le \Delta b_k \le \infty$).

У нашому прикладі недефіцитним є другий ресурс. Відомо, що за оптимального плану виробництва буде залишок цього ресурсу в обсязі $x_6 = 30$ ум. од. Отже, зменшення даного ресурсу в обсязі до 30 ум. од. не змінить структуру оптимального плану. Якщо зміну загального запасу другого ресурсу позначити через Δb_2, то інтервал можливої зміни його обсягів можна записати так:

$$-30 \le \Delta b_2 < \infty .$$

Отже, інтервалом зміни запасів недефіцитного ресурсу, в межах якого структура оптимального плану залишиться постійною, буде:

$$250 \le b_2 \le \infty .$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише тих випадків, коли змінюється обсяг тільки одного ресурсу, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів для визначення інтервалів допустимих змін необхідно розв'язати систему нерівностей виду (3.47) (що має вигляд $x_i^* + \sum_{k=1}^{m} a_{i,n+k} \Delta b_k \ge 0$, $i = \overline{1,m}$).

Простішою для дослідження є ситуація, коли зміни ресурсів відомі і необхідно визначити лише новий оптимальний план. Нехай додатковою умовою прикладу 4.1 є зміна обсягів усіх трьох ресурсів, що змінюються відповідно так: $\Delta b_1 = +10$, $\Delta b_2 = -10$, $\Delta b_3 = +20$. Для визначення компонент нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу. З першої теореми двоїстості відомо, що:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B} .$$

З останньої симплекс-таблиці отримуємо обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B}=\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ b_3+\Delta b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 250+10 \\ 280-10 \\ 80+20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів

$$X^*=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{pmatrix},$$

тобто X^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0).

Усі $x_j \geq 0$, і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається Y^* = (1/2; 0; 2). Загальна максимальна виручка підприємства зміниться на $\Delta F_{\max}=\Delta b_1 y_1+\Delta b_2 y_2+\Delta b_3 y_3=10\cdot 1/2-10\cdot 0+20\cdot 2=+45$ум.од. і становитиме:

max F=285+45=330ум.од.

Використовуючи (3.48), проведемо дослідження можливого ***взаємозамінювання ресурсів***. Використаємо теоретичні положення § 3.5.1 пункту **D**.

Якщо у виробничій системі існує два чи більше дефіцитних ресурсів, то певний обсяг одного з них може бути замінений деяким обсягом іншого, причому значення цільової функції залишиться незмінним.

Для умов прикладу 4.1 попередній аналіз двоїстих оцінок показав, що дефіцитними є перший та третій ресурси. Припустимо, що забезпечення виробництва необхідним обсягом третього ресурсу можливе не завжди. У такому разі доцільним є визначення того, яким обсягом першого ресурсу можна замінити третій, щоб водночас не зменшилась оптимальна сума виручки.

Оскільки $\Delta b_r=\frac{y_s^*}{y_r^*}\Delta b_s$, де Δb_r Δb_s — величини змін дефіцитних ресурсів, а y_s^* y_r^* — двоїсті оцінки відповідних ресурсів, то зміна обсягу третього ресурсу на одиницю $(\Delta b_3 = 1)$ потребує додаткового використання

$$\Delta b_1 = \frac{y_3^*}{y_1^*} \Delta b_3 = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot 1 = 4$$

ум. од. першого ресурсу.

Отже, якщо перший ресурс збільшити на 4 ум. од. і використовувати в обсязі 284 ум. од., а третій зменшити на 1 ум. од. і залишити у виробництві 79 ум. од., то обсяг виручки від реалізації продукції залишиться незмінним у порівнянні з початковими умовами прикладу 4.1 — 285 ум. од.

4.5.Аналіз коефіцієнтів цільової функції

Під впливом різних обставин ціна виробленої на підприємстві одиниці продукції може змінюватися (збільшуватися чи зменшуватися). І тому завжди цікаво і важливо знати, у межах яких змін цін на продукцію кожного виду структура оптимального плану виробництва ще може залишатися такою самою, тобто оптимальною (найкращою) навіть за цих певних змін.

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємось розглянутими в §3.5.2 положеннями. Як було з'ясовано, перетворення симплексної таблиці за змін коефіцієнтів цільової функції стосуються лише елементів оцінкового рядка. Дослідимо питання зміни коефіцієнтів цільової функції для прикладу 4.1. Нехай змінюється ціна на одиницю продукції виду *C*, тобто початкове значення 3 ум. од. подамо як $3+\Delta c_3$, де Δc_3 — величина зміни ціни одиниці продукції виду *C*. Тоді симплексні перетворення матимуть вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	$3+\Delta c_3$	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80	3	2	1	1	0	0	1
$Z_j-c_j\geq 0$		0	–2	–4	– 3	–4	0	0	0
x_4	4	62,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	17,5	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j-c_j\geq 0$		69	0	6	–1	0	1	0	0
x_4	4	45	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	$3+\Delta c_3$	35	5	3/2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j-c_j\geq 0$		$285+35\Delta c_3$	$5+5\Delta c_3$	$5/2+3/2\Delta c_3$	0	0	$1/2-1/2\Delta c_3$	0	$2+2\Delta c_3$

Симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів стовпчика «$C_{баз}$» що, у свою чергу, впливає на значення всіх ненульових оцінок ($Z_j - c_j$). ***Для базисної змінної*** x_3 зміна коефіцієнта цільової функції на Δc_3 приведе до таких оцінок:

$(F_1–c_1) = 4 \cdot (–2) + 0 \cdot (–1) +(3 + \Delta c_3)\cdot 5 – 2 = 5 + 5\Delta c_3;$

$(F_2–c_2) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1 + (3 + \Delta c_3)\cdot 3/2 – 4 = 5/2 + 3/2\Delta c_3;$

$(F_5–c_5) = 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot (–1)+ (3 + \Delta c_3) \cdot (– 1/2)– 0 = 1/2 – 1/2\Delta c_3;$

$(F_7–c_7) = 4 \cdot (–1) + 0 \cdot 0 + (3 + \Delta c_3) \cdot 2– 0 = 2 + 2\Delta c_3.$

Враховуючи систему нерівностей (3.50), нові значення оцінок мають задовольняти умову оптимальності, тобто $Z_j - c_j \geq 0$. Тому інтервал для Δc_3 визначається з такої системи нерівностей:

$$\begin{cases} 5+5\Delta C_3 \geq 0; \\ 5/2+3/2\Delta C_3 \geq 0; \\ 1/2-1/2\Delta C_3 \geq 0; \\ 2+2\Delta C_3 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta C_3 \geq -1; \\ \Delta C_3 \geq -5/3; \\ \Delta C_3 \leq 1; \\ \Delta C_3 \geq -1; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_3 \leq 1;$$

$$2 \leq C_3 \leq 4.$$

Отже, ціна одиниці продукції виду С може збільшуватися чи зменшуватися на 1 ум. од. і бути в межах від 2 до 4 ум. од., але оптимальним планом виробництва продукції залишається $X^* = (0; 0; 35; 45)$.

Для базисної невідомої x_4 інтервал зміни коефіцієнта c_4 розраховується аналогічно:

$$\begin{cases} 5-2\Delta C_4 \geq 0; \\ 5/2+1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 1/2+1/2\Delta C_4 \geq 0; \\ 2-1\Delta C_4 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta C_4 \leq 5/2; \\ \Delta C_4 \geq -5; \\ \Delta C_4 \geq -1; \\ \Delta C_4 \leq 2; \end{cases}$$

$$-1 \leq \Delta C_4 \leq 2;$$

$$3 \leq C_4 \leq 6.$$

Якщо за інших однакових умов ціна одиниці продукції D зменшиться до 3 ум. од. або збільшиться до 6 ум. од., то визначений оптимальний план виробництва продукції на підприємстві ($X^* = (0; 0; 35; 45)$) немає необхідності змінювати.

Розрахунок інтервалів зміни значень коефіцієнтів цільової функції ***для небазисних змінних*** виконується згідно із співвідношенням (3.52):

Симплекс-таблиця, яка відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком ненульових значень оцінкового рядка $(Z_j - c_j)$. Нові оцінки $(Z_j - c_j)$ мають задовольняти умову оптимальності задачі максимізації цільової функції, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта c_1 позначимо через Δc_1. Оскільки x_1 — небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна їй оцінка $Z_1 - c_1$:

$$(Z_1 - c_1) = 4 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 - (2 + \Delta c_1) = 5 - \Delta c_1.$$

За умови $Z_1 - c_1 \geq 0$ дістанемо нерівність $5 - \Delta c_1 \geq 0$, тобто $\Delta c_1 \leq 5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції виду A за інших однакових умов зросте не більш як на 5 ум. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві все одно залишиться $X^* = (0; 0; 35; 45)$. Лише максимальна виручка зміниться на max $\Delta Z = \Delta c_1 x_1$.

Аналогічно розраховується інтервал зміни коефіцієнта Δc_2:

$$(Z_2 - c_2) = 5/2 - \Delta c_2 \geq 0; \quad \Delta c_2 \leq 5/2.$$

Зі зростанням ціни одиниці продукції виду B не більш як на 5/2 ум. од. за інших однакових умов оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а max $Z = \Delta c_2 x_2$.

Якщо ж коливання ціни продукції вийдуть за визначені межі, то план $X = (0; 0; 35; 45)$ вже не буде оптимальним, і його необхідно буде поліпшити згідно з алгоритмом симплекс-методу, тобто продовжити розв'язання задачі.

4.6.Аналіз коефіцієнтів матриці обмежень

Як зазначалося здебільшого коефіцієнти $a_{ij}\ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ матриці системи обмежень задачі лінійного програмування є технологічними коефіцієнтами (нормами витрат ресурсів на одиницю виготовлення кожного виду продукції) і не залежать від впливу випадкових чинників у такій мірі, як рівень цін чи обсяги ресурсів.

Розглянемо тільки можливі зміни тих коефіцієнтів, що відповідають небазисним змінним, оскільки зміна значень коефіцієнтів матриці обмежень, що відповідають базисним змінним, приводить до зміни базисної матриці D, і здійснити такий аналіз досить складно.

Допустимо, що за умов прикладу 4.1 додатково відомо, що витрати ресурсів на виготовлення продукції видів A та B коливаються залежно від використання різних видів устаткування в процесі виробництва продукції. За оптимальним планом виготовлення цих обох видів продукції є нерентабельним, оскільки вартість витрат ресурсів на виробництво їх одиниці продукції перевищує ціну реалізації. Проведений аналіз двоїстих оцінок, що відповідають змінним x_1, x_2, свідчить, що для виготовлення одиниці продукції виду A витрати перевищують ціну на 5 ум. од., а для виду B — у два рази менше (на 2,5 ум. од.). Отже, очевидно, що за деяких змін норм витрат ресурсів виробництво продукції виду B може стати рентабельним. З попереднього аналізу дефіцитних ресурсів відомо, що найціннішим для виробництва є третій ресурс.

Позначимо через Δa_{32} величину зміни норми використання третього ресурсу на виготовлення одиниці продукції другого виду. Тоді симплексні перетворення будуть такими:

Базис	$C_{баз}$	План	2	4	3	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	250	2	5	2	4	1	0	0
x_6	0	280	1	6	2	4	0	1	0
x_7	0	80	3	$2+\Delta a_{32}$	1	1	0	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		0	–2	–4	–3	–4	0	0	0
x_4	4	62,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_7	0	17,5	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}+\Delta a_{32}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1
$Z_j - c_j \geq 0$		69	0	1	–1	0	1	0	0
x_4	4	45	–2	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	–1
x_6	0	30	–1	1	0	0	–1	1	0
x_3	3	35	5	$3/2+2\Delta a_{32}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$Z_j - c_j \geq 0$		285	5	$5/2+6\Delta a_{32}$	0	0	1/2	0	2

Для оптимальності плану необхідне виконання в останній симплексній таблиці умови невід'ємності всіх оцінок, тому має виконуватися нерівність:

$$5/2+6\Delta a_{32} \geq 0,$$

звідки $\Delta a_{32} \geq -\frac{5}{12}$. Тоді $1\frac{7}{12} \leq a_{32} \leq \infty$

Отже, лише у разі, якщо тільки до $1\frac{7}{12}$ ум. од. третього ресурсу буде використовуватися для виробництва одиниці продукції *B*, структура оптимального плану зміниться і, можливо, цей вид продукції стане рентабельним. За всіх інших змін коефіцієнта a_{32} в межах $1\frac{7}{12} \le a_{32} \le \infty$ структура оптимального плану буде постійною, а отже, продукція виду *B* буде нерентабельною.

При дослідженні зміни коефіцієнта, що відповідає базисній змінній чи одночасній зміні кількох коефіцієнтів матриці обмежень, раціональнішим буде розв'язання нової задачі лінійного програмування.

4.7.Приклад практичного використання двоїстих оцінок у аналізі економічної задачі

Приклад 4.2. Фірма виготовляє продукцію трьох видів: *A*, *B* і *C*. Потрібний певний час для обробки одиниці кожного виду продукції на різному обладнанні (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

ТРИВАЛІСТЬ ОБРОБКИ ПРОДУКЦІЇ, год

Тип обладнання	Тривалість обробки одиниці продукції виду			Тривалість роботи обладнання на місяць
	A	B	C	
I	1	2	4	360
II	2	4	2	520
III	1	1	2	220

Ціна одиниці продукції видів *A*, *B* і *C* дорівнює 90 дол., 110 дол. та 150 дол. відповідно. Визначити, яку продукцію і в якому обсязі слід виготовляти, щоб фірма отримувала найбільший дохід.

Розв'язавши цю задачу симплекс-методом, отримаємо таку останню симплексну таблицю:

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$F_j - c_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70

Керівництво фірми цікавить відповідь на таке запитання: «Чи зміниться оптимальний план виробництва продукції і якщо зміниться, то яким буде новий оптимальний план у кожній з наведених нижче ситуацій?»

1.Фірма може збільшити тривалість роботи обладнання типів 2 та 3 відповідно на 100 і 80 год на місяць, орендуючи для цього додаткове обладнання, але орендна плата становитиме 5000 дол. Чи вигідно це? Якщо вигідно, то яким має бути новий оптимальний план виробництва продукції?

2.Фінансовий відділ фірми вважає, що загострення конкуренції на ринку збуту може призвести до зниження ціни на продукцію В на 25 дол. Як це позначиться на оптимальному плані виробництва продукції фірми?

3.Відділ досліджень і розробок фірми пропонує виготовляти дешевшу модифікацію продукції *C*. Тривалість обробки одиниці цієї нової продукції на обладнанні типів 1, 2 та 3 становить відповідно 4, 3 і 1 год. Орієнтовна ціна одиниці нової продукції дорівнює 120 дол. Керівництво фірми цікавить, чи буде за таких умов виробництво нової продукції вигідним.

4.Споживач продукції виду *A* за певних обставин порушив попередню домовленість і відмовився прийняти більш як 100 од. продукції. Визначити, як слід змінити план виробництва своєї продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом цього виду продукції.

Розв'язання. Із наведеної в умові задачі симплекс-таблиці маємо: $X^* = (180; 40; 0; 100; 0; 0)$, $\max F = 20600$, $Y^* = (0; 10; 70)$. Оптимальним планом виробництва продукції на фірмі є випуск 180 од. продукції виду *A* та 40 од. продукції виду *B*. Виготовлення продукції виду *C* не передбачається. При цьому фірма отримає максимальну виручку обсягом 20600 дол. на місяць.

1.Збільшення тривалості роботи обладнання дасть змогу збільшити випуск продукції, тобто змінити оптимальний план і дохід фірми. Оскільки $\Delta b_1=0$, $\Delta b_2=100$, $\Delta b_3=80$, то новий оптимальний план визначається так:

$$X^* = D^{-1}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 360+0 \\ 520+100 \\ 220+80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 290 \end{pmatrix}.$$

Новий план допустимий (всі $x_j \geq 0$), і тому оптимальні значення двоїстих оцінок зберігаються: $Y^* = (0; 10; 70)$. Приріст доходу фірми в результаті зміни оптимального плану виробництва продукції розраховується так:

$$\max \Delta Z = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 100\cdot 10 + 80\cdot 70 = 6600 \text{ дол.}$$

Оскільки дохід фірми від додаткового використання обладнання груп 2 і 3 перевищує витрати на його оренду (6600>5000), то природно, що така тактика фірми буде вигідною. При цьому оптимальним планом виробництва стане випуск 290 од. продукції виду *A* і 10 од. продукції виду *B*. Невикористаний час роботи обладнання типу I зменшиться до 50 год на місяць, а дохід фірми за відрахуванням витрат на оренду обладнання дорівнюватиме 20600+(6600–5000)=22200дол. на місяць.

2.Зниження ціни одиниці продукції В на Δc_2 (–25 дол.) стосується всього оцінкового рядка симплекс-таблиці, оскільки x_2 є базисною змінною. Нові $F_j–c_j$ матимуть такі значення:

$$F_3–c_3 = 10 – 1\Delta c_2 = 10 + 25 = 35;$$
$$F_5–c_5 = 10 + 1/2\Delta c_2 = 10 – 12,5 = –2,5;$$
$$F_6–c_6 = 70 – 1\Delta c_2 = 70 + 25 = 95.$$

Якби всі здобуті оцінки задовольняли умову $Z_j–C_j \geq 0$, то це означало б, що попри зниження ціни план виробництва продукції на фірмі не зміниться. Але оцінка $F_5–c_5$ не задовольняє умову оптимальності задачі на максимум, і тому можна висновувати, що істотне зниження ціни одиниці продукції виду *B* порушує визначений раніше оптимальний план виробництва продукції, оскільки випуск цієї продукції стає для фірми невигідним, нерентабельним.

Новий оптимальний план визначається у процесі подальшого розв'язання задачі симплекс-методом:

Базис	$C_{баз}$	План	90	85	150	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0
x_2	85	40	0	1	–1	0	1/2	–1
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2
$F_j – c_j \geq 0$		19 600	0	0	35	0	–2,5	95
x_4	0	140	0	1	2	1	0	–1
x_5	0	80	0	2	–2	0	1	–2
x_1	90	220	1	1	2	0	0	1
$F_j – c_j \geq 0$		19 800	0	5	30	0	0	90

Отже, у розглянутій ситуації зниження ціни одиниці продукції виду *B* на 25 дол. різко змінить структуру та обсяги виробництва продукції на фірмі. Вигідним стане випуск лише продукції виду *A* обсягом 220 од.: при цьому можливий час роботи обладнання типів 1 та 2 використовуватиметься не повністю. Усе це призведе до зменшення виручки фірми до 19 800 дол. на місяць.

3.Обсяг виробництва нової продукції в оптимальному плані позначимо через x_7. Тоді математична модель прямої задачі матиме такий вигляд:

$$\max Z = 90x_1 + 10x_2 + 150x_3 + 120x_7;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_7 \le 360; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_7 \le 520; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 \le 220; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

У математичній моделі двоїстої задачі змінній x_7 відповідатиме таке обмеження: $4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 120$. Оцінимо рентабельність виробництва нової продукції за допомогою двоїстих оцінок: 4 · 0 +3· 10 + 1 · 70 = 100, що є меншим за 120. Отже, загальна вартість усіх ресурсів, що витрачаються на випуск одиниці нової продукції, не перевищує орієнтовної ціни цієї продукції, і тому її виробництво для фірми є вигідним, рентабельним. Завдяки цьому визначений раніше оптимальний план виробництва продукції можна поліпшити за рахунок уведення в нього x_7.

Для цього за допомогою оберненої матриці необхідно визначити елементи стовпчика «x_7» останньої симплекс-таблиці:

$$D^{-1} \times \begin{pmatrix} a_{17} \\ a_{27} \\ a_{37} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Результати однієї ітерації симплекс-методу, що приводить до нового оптимального плану задачі, наведено нижче.

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	120	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	5/2	40
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	1/2	80
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	1/2	360
$F_j - c_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	–20	
x_7	120	40	0	0	6/5	2/5	–1/5	0	1	
x_2	110	20	0	1	–8/5	–1/5	3/5	–1	0	
x_1	90	160	1	0	12/5	–1/5	–2/5	2	0	
$F_j - c_j \geq 0$		21 400	0	0	34	8	6	70	0	

Отже, оптимальним планом є $X^* = (160; 20; 0; 0; 0; 0; 40)$, а $\max Z = 21\ 400$. Керівництво фірми має підтримати пропозицію відділу досліджень та розробок і налагодити виробництво нової продукції, яка є рентабельною. Виготовляючи її обсягом 40 од., а також продукцію видів А та В обсягом 160 і 20 од. відповідно, фірма зможе збільшити обсяг виручки до 21400 дол. на місяць згідно з новим оптимальним планом виробництва продукції.

4.Четверта запропонована ситуація математично пов'язана із введенням в умову задачі додаткового обмеження, що може привести до таких наслідків:

а) нове обмеження для визначеного оптимального плану виконується. Тоді воно є надлишковим, зайвим і його включення до моделі не змінює визначеного плану;

б) нове обмеження для визначеного оптимального плану не виконується, і тоді за допомогою двоїстого симплекс-методу необхідно знайти новий оптимальний план.

За умовою задачі додатковим є обмеження $x_1 < 100$. Але воно суперечить оптимальному обсягу продукції виду А, що дорівнює 180 од. Тому необхідно приєднати це додаткове обмеження до симплекс-таблиці та продовжити розв'язання задачі, але вже за допомогою двоїстого симплекс-методу. Для цього спочатку зведемо додаткове обмеження до канонічного вигляду:

$$x_1 + x_7 = 100.$$

Оскільки в оптимальному плані змінна x_1 є базисною, то її необхідно записати через небазисні невідомі. Це робиться так. У симплекс-таблиці, яку наведено в умові задачі, рядок змінної «x_1» подається рівнянням:

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1/2 \cdot x_5 + 2 \cdot x_6 = 180.$$

З нього запишемо вираз для x_1:

$$x_1 = 180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6.$$

Підставивши цей вираз в додаткове обмеження, отримаємо:

$$180 - 3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = 100$$

Або

$$-3x_3 + 1/2x_5 - 2x_6 + x_7 = -80.$$

У такому вигляді додаткове обмеження допишемо в симплекс-таблицю. Застосування двоїстого симплекс-методу приведе до нового оптимального плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	90	110	150	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	0	100	0	0	3	1	–1/2	0	0
x_2	110	40	0	1	–1	0	1/2	–1	0
x_1	90	180	1	0	3	0	–1/2	2	0
x_7	0	– 80	0	0	–3	0	1/2	–2	1
$F_j - c_j \geq 0$		20 600	0	0	10	0	10	70	0
x_4	0	20	0	0	0	1	0	–2	1
x_2	110	200/3	0	1	0	0	1/3	–1/3	–1/3
x_1	90	100	1	0	0	0	0	0	1
x_3	150	80/3	0	0	1	0	–1/6	2/3	–1/3
$F_j - c_j \geq 0$		61 000/3	0	0	0	0	35/3	190/3	10/3

В останній таблиці маємо: $X^* = (100; 200/3; 80/3; 20; 0;0)$, а $\max Z = 61000/3 \approx 20333$.

Проаналізуємо цей план. Прийнявши до уваги ситуацію, що склалася, керівництво фірми змушене змінити структуру виробництва продукції. Тепер з урахуванням вимог споживача фірма виготовлятиме 100 од. продукції виду *A*, 200/3 од. продукції виду В і 80/3 од. продукції виду *C*. У результаті такого плану випуску продукції виручка фірми дещо зменшиться (до 20 333 дол. на місяць).

Заключні зауваження

Для фахівця з економіки отримання оптимального плану задачі не може слугувати кінцевою метою. Важливішим є аналіз отриманого розв'язку. Оскільки зовнішні та внутрішні умови будь-якої економічної системи досить мінливі, то фахівця, який формулює задачу, як правило, цікавить також стійкість оптимального плану, що пов'язана з певними діапазонами змін коефіцієнтів, які містяться у векторах C, B та матриці A. Врахування змін обсягів ресурсів, цін на продукцію, технологічних коефіцієнтів дає змогу визначати, в яких межах зміни умов функціонування економічної системи призводитимуть до несуттєвих змін оптимального плану, а коли такий план стає навіть недопустимим.

Крім того, за результатами аналізу лінійних моделей можна визначити напрямки розвитку системи, що досліджується (виявити ті ресурси, збільшення обсягу яких приведе до покращання значення цільової функції, можливості певної зміни рівня цін на продукцію, що виготовляється тощо), в рамках яких структура оптимального плану не зміниться.

Лінійне програмування забезпечує широкі можливості також при аналізі моделей на чутливість і проведенні параметричних досліджень.

Контрольні запитання

1. Дайте економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач лінійного програмування.

2. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?

3. Як визначити, що виробництво продукції є рентабельним (нерентабельним)?

4. Як впливає на оптимальний план введення додаткового обмеження?

5. Як впливає на оптимальний план введення нової змінної?

6. Як визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно змін запасів дефіцитних ресурсів?

7. Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?

8. Як визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві?
9. Як розрахувати інтервали можливих змін цін на одиницю кожного виду продукції?
10. Як виробник має змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції?

Приклади та завдання для самостійної роботи

У наведених нижче задачах виконати такі дії:
1) записати математичні моделі прямої та двоїстої задач;
2) записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач, дати їх економічну інтерпретацію;
3) визначити статус ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, та рентабельність кожного виду продукції;
4)обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів;
5) розрахувати інтервали можливих змін цін на одиницю рентабельної продукції.

Задача 4.1. Підприємство виготовляє три види продукції: А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат усіх ресурсів на виробництво одиниці продукції та запаси ресурсів наведені в таблиці:

Ресурс	Норма витрат ресурсу на виробництво одиниці продукції виду			Запас ресурсу
	А	В	С	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відомі ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: А — 9 ум. од., В — 10 ум. од. і С — 16 ум. од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший обсяг виручки.
Остання симплекс-таблиця даної задачі має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	9	10	16	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
x_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
x_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
$Z_j - c_j \geq 0$		400	5	0	0	2/9	5/3	0

Задача 4.2. Підприємство виготовляє продукцію видів A, B і C, для чого використовує три види ресурсів. Норми витрат цих ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції та обсяги ресурсів, наявних на підприємстві, наведені в таблиці:

Ресурс	Норма витрат ресурсу на виробництво одиниці продукції виду			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відомі ціни реалізації одиниці продукції кожного виду: A — 10 ум. од., B — 14 ум. од. і C — 12 ум. од. Визначити план виробництва, що забезпечує підприємству найбільшу виручку від реалізації продукції.

Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план задачі, має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	10	14	12	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	–1/8
x_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	–5/8
x_3	12	16	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4
$Z_j - c_j \geq 0$		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

«Во всех частях земного шара имеются свои, даже иногда очень любопытные другие части»

Сочинения Козьмы Пруткова

РОЗДІЛ 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв'язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукання оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, що переважно зовсім не пов'язано із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо. Деякі з таких задач розглянемо в цьому розділі.

5.1. Економічна і математична постановка транспортної задачі

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву ***транспортної задачі за критерієм вартості перевезень***.

Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Тоді умови задачі зручно подати у вигляді такої таблиці:

Таблиця 5.1

Споживачі Постачальники		$B1$	$B2$	...	Bn
		b_1	b_2	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

		x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}

Мають виконуватися такі умови:

1) сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i-го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2; \\ .... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m; \end{cases}$$

2) сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j-му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2; \\ .... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_n; \end{cases}$$

3) сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\begin{aligned} \min F = & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{2n}x_{2n} + \\ & .... \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn}. \end{aligned}$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5.1}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right). \tag{5.4}$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.5}$$

Транспортну задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***, якщо виконується умова (5.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Домовимося ***планом*** транспортної задачі називати будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (5.2)—(5.4), який позначають матрицею $X = x_{ij} \left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right)$. Значення невідомих величин x_{ij} — обсяги продукції, що мають бути перевезені від *i*-х постачальників до *j*-х споживачів, називатимемо ***перевезеннями***.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = x_{ij}^* \left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі, і для якої цільова функція (5.1) набирає найменшого значення.

Теорема ***(умова існування розв'язку транспортної задачі):*** необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі (5.1)—(5.4) є її збалансованість: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Доведення. ***Необхідність***. Нехай задача (5.1)—(5.4) має розв'язок $X^*(x_{11}^*, x_{12}^*, ..., x_{mn}^*)$, тоді для нього виконуються рівняння-обмеження (5.2) і (5.3). Підсумуємо відповідно ліві та праві частини систем рівнянь (5.2) і (5.3). Матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{5.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.7}$$

Оскільки ліві частини рівнянь (5.6) та (5.7) збігаються, то праві також рівні одна одній, отже, виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.8}$$

Достатність. Потрібно показати, що за заданої умови (5.8) існує хоча б один план задачі, і цільова функція на множині планів обмежена.

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = W > 0$. Розглянемо величини $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{W}$ ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$). Підставивши значення x_{ij} в систему обмежень задачі (5.1)—(5.4), матимемо:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{W} = \frac{a_i}{W} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{W} W = a_i;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{W} = \frac{b_j}{W} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{W} W = b_j.$$

Оскільки умови (5.2) та (5.3) виконуються, то $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{W}$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ є планом наведеної транспортної задачі.

Виберемо з елементів c_{ij} $\left(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}\right)$ найбільше значення і позначимо його через $\overline{c} = \max\ c_{ij}$. Якщо замінити в цільовій функції (5.1) всі коефіцієнти на $\overline{c}$, то, враховуючи (5.2), матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le \overline{c}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \overline{c}\sum_{i=1}^{m} a_i = \overline{c}\,W.$$

Виберемо з елементів c_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ найменше значення і позначимо його через $\underline{c} = \min\ c_{ij}$. Якщо замінити в цільовій функції (5.1) всі коефіцієнти на $\underline{c}$, то, враховуючи (5.2), матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ge \underline{c}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \underline{c}\sum_{i=1}^{m} a_i = \underline{c}W.$$

Тобто цільова функція на множині допустимих планів транспортної задачі є обмеженою:

$$\underline{c}W \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \le \overline{c}\,W.$$

Теорему доведено.

Якщо при перевірці збалансованості (5.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із ресурсом обсягом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$. Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Як згадувалося вище, транспортна задача (5.1)—(5.4) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв’язана симплексним методом, однак особливості побудови математичної моделі транспортної задачі дають змогу розв’язати її простіше. Легко помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (5.2), (5.3) дорівнюють одиниці, а сама система обмежень (5.2), (5.3) задана в канонічній формі. Крім того, система обмежень (5.2), (5.3) складається з mn невідомих та $m + n$ рівнянь, які пов'язані між собою співвідношенням (5.8). Якщо додати відповідно праві та ліві частини систем рівнянь (5.2) та (5.3), то отримаємо два однакових рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \;;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \;.$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m + n - 1$ лінійно незалежне рівняння, отже, їх можна розв'язати відносно $m + n - 1$ базисних змінних. Назвемо ***опорним планом*** транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m + n - 1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є невиродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m + n - 1$, то маємо вироджений опорний план.

5.2.Властивості опорних планів транспортної задачі

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді табл.5.1, то клітини, в яких $x_{ij} > 0$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші — пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого плану їх кількість дорівнює $m + n - 1$.

Назвемо ***циклом*** таку послідовність заповнених клітин таблиці 5.1, яка задовольняє умову, що лише дві сусідні клітини містяться або в одному рядку, або в одному стовпці таблиці, причому перша клітина циклу є і його останньою клітиною. Якщо для певного набору заповнених клітин неможливо побудувати цикл, то така послідовність клітин є ациклічною.

Лема. Кількість клітин, які утворюють будь-який цикл транспортної задачі, завжди парна.

Доведення. Якщо позначити кожну клітину циклу двома індексами (i,j), то довільний цикл, що складається з n клітин, можна записати одним із двох способів:

$$(i_1, j_1);(i_2, j_1);(i_2, j_2);...;(i_l, j_l);(i_1, j_l);(i_1, j_1)\,, \tag{5.9}$$

або

$$(i_1, j_1);(i_1, j_2);(i_2, j_2);...;(i_l, j_l);(i_l, j_1);(i_1, j_1)\,. \tag{5.10}$$

Оскільки перша та остання клітини циклу є однією клітиною, то виключимо з розгляду останній елемент (i_1, j_1) наведених послідовностей. Кількість клітин, що залишилась, парна, бо кожній клітині виду (i_k, j_k) в (5.9) та (5.10) відповідає наступна (i_p, j_k) або $(i_k, j_p)(p \neq k)$. Саме такими клітинами закінчуються наведені послідовності. Передостанньою клітиною є клітина виду (i_k, j_k), де $k = l$. Отже, цикл утворюється клітинами, які містяться в l рядках та l стовпцях, тобто загальна їх кількість $n = 2l$. Лему доведено.

> **Теорема 5.1.** Щоб деякий план транспортної задачі був опорним, необхідно і достатньо його ациклічності.

Доведення. ***Необхідність***. Нехай у таблиці 5.1 міститься опорний план транспортної задачі, тобто не більше ніж $m+n-1$ клітин будуть заповненими. Якщо заповнених клітин менше, ніж $m+n-1$, то решта базисних клітин знаходиться серед незаповнених.

Довести необхідність умови теореми означає довести ациклічність опорного плану.

Вектори, що відповідають базисним клітинам, тобто базисним змінним, є лінійно незалежними, і потрібно довести ациклічність набору клітин, що відповідає будь-якій системі лінійно незалежних векторів. Допустимо протилежне. Нехай деяка підсистема з даної системи базисних векторів утворює цикл, а саме:

$$(i_1, j_1);(i_1, j_2);(i_2, j_2);\ldots;(i_k, j_k);(i_k, j_1)\,. \qquad (5.11)$$

Складемо лінійну комбінацію таких векторів, що дорівнює нулю. Оскільки кожна змінна входить у систему обмежень лише двічі, то базисні вектори матимуть вид:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ — i \\ \\ \\ \\ — m + j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Лінійною комбінацією базисних векторів буде:

$$1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ — i_1 \\ \\ \\ \\ — m + j_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} - 1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ — i_1 \\ \\ \\ \\ — m + j_2 \\ \\ \\ \\ \end{array} + \ldots - 1 \times \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ — i_k \\ \\ \\ \\ — m + j_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Або

$$1 \cdot a_{i_1 j_1} - 1 \cdot a_{i_1 j_2} + 1 \cdot a_{i_2 j_2} - \ldots - 1 \cdot a_{i_k j_1} = 0\,. \qquad (5.12)$$

Проте рівність (5.12) суперечить умові лінійної незалежності базисних векторів, отже, послідовність (5.11) є ациклічною.

Достатність. Нехай деякий план транспортної задачі є ациклічним. Потрібно показати, що він є опорним планом, тобто довести лінійну незалежність векторів, що відповідають ненульовим компонентам плану.

Всякий план не може містити від'ємних компонент, а кількість лінійно незалежних між собою векторів у обмеженнях транспортної задачі завжди дорівнює $m+n-1$, так що кількість відмінних від нуля компонент плану, якщо він опорний, не перевищує цієї величини.

Позначимо множину всіх заповнених клітин через H, а відповідні вектори — a_{ij}^*. Доведемо достатність, міркуючи від супротивного. Нехай вектори a_{ij}^* лінійно залежні. Розглянемо нульову лінійну комбінацію цих векторів:

$$\sum_{(i,j)\in H} \lambda_{ij} a_{ij}^* = 0 . \qquad (5.13)$$

Деякі з коефіцієнтів λ_{ij} можуть відрізнятися від нуля. Нехай один з таких коефіцієнтів відповідає індексам i_1, j_1, тобто $\lambda_{i_1 j_1} \neq 0$. Тоді відповідний доданок у рівності (5.13) можна перенести в ліву частину рівняння:

$$-\lambda_{i_1 j_1} a_{i_1 j_1}^* = \sum_{(i,j)\in H_1} \lambda_{ij} a_{ij}^* , \qquad (5.14)$$

де $H_1 = H - (i_1, j_1)$.

Оскільки i_1-ша компонента в лівій частині (5.14) відмінна від нуля, то в правій частині також має бути хоча б один доданок з i-ою компонентою, що відмінна від нуля. Припустимо, що $\lambda_{i_1 j_2} \neq 0$. Відповідний доданок також можна перенести в ліву частину (5.14):

$$-\lambda_{i_1 j_1} a^*_{i_1 j_1} - \lambda_{i_1 j_2} a^*_{i_1 j_2} = \sum_{(i,j)\in H_2} \lambda_{ij} a^*_{ij}, \tag{5.15}$$

де $H_2 = H_1 - (i_1, j_2)$.

Оскільки $j_2 \neq j_1$ (інакше клітина (i_1, j_1) входила б у суму (5.13) двічі) і компонента $m + j_2$ лівої частини (5.15) відмінна від нуля, то серед доданків правої частини знайдеться хоча б один, для якого $\lambda_{i_2 j_2} \neq 0$. Перенесемо його також в ліву частину рівняння. Отримаємо:

$$-\lambda_{i_1 j_1} a^*_{i_1 j_1} - \lambda_{i_1 j_2} a^*_{i_1 j_2} - \lambda_{i_2 j_2} a^*_{i_2 j_2} = \sum_{(i,j)\in H_3} \lambda_{ij} a^*_{ij}, \tag{5.16}$$

де $H_3 = H_2 - (i_2, j_2)$.

Оскільки кількість заповнених клітин, що входять у множину H, а отже, і кількість векторів a^*_{ij} скінченна і не перевищує числа $m \cdot n = N$, то через N кроків описаний процес перенесень обов'язково закінчиться.

Після деякої непарної кількості кроків $2k-1$ дістанемо рівність:

$$-\sum_{p=1}^{k} \lambda_{i_p j_p} a^*_{i_p j_p} - \sum_{p=1}^{k-1} \lambda_{i_p j_{p+1}} a^*_{i_p j_{p+1}} = \sum_{(i,j)\in H_{2k-1}} \lambda_{ij} a^*_{ij}, \tag{5.17}$$

де $H_{2k-1} = H_{2k-2} - (i_k, j_k)$.

Якщо кількість кроків була парною, матимемо:

$$-\sum_{p=1}^{k}\lambda_{i_p j_p}a^*_{i_p j_p} - \sum_{p=1}^{k}\lambda_{i_p j_{p+1}}a^*_{i_p j_{p+1}} = \sum_{(i,j)\in H_{2k}}\lambda_{ij}a^*_{ij}, \qquad (5.18)$$

де $H_{2k} = H_{2k-1} - (i_k, j_k)$.

Розглянемо співвідношення (5.17). При деякому значенні $k\left(2 \le k \le \frac{N}{2}\right)$ серед доданків другої суми лівої частини знайдеться такий, що має індекс $i_w = i_k, 1 \le w \le k-1$. Тоді всі клітини, що були перенесені в ліву частину після $(2w-1)$-го кроку, утворюють цикл.

Аналогічні міркування стосуються також (5.18).

Покажемо, що до закінчення процесу, виходячи з рівності (5.17), обов'язково матимемо цикл. Для цього припустимо, що $i_k \ne i_w$. Тоді, згідно з попередніми міркуваннями, в правій частині (5.17) обов'язково знайдеться доданок з індексами (i_k, j_{k+1}), для якого $\lambda_{i_k j_{k+1}} \ne 0$, бо інакше б рівність (5.17) не справджувалась. Отже, процес перенесення у разі, якщо $i_k \ne i_w$, буде продовжуватись. Проте, внаслідок згаданої скінченності процесу перенесень ($N \le m \cdot n$) умова виконання рівностей (5.17) та (5.18) рівносильна тому, що випадок $i_k = i_w$ обов'язково матиме місце, що означатиме побудову циклу.

Отже, припущення лінійної залежності векторів $a_{ij}^*, (i, j) \in H$, що описується рівнянням (5.13), означає, що серед відповідних клітин існує цикл, але це суперечить умові теореми. Значить, достатність згаданої умови, а разом з тим і всю теорему доведено.

Отже, базисні клітини опорного плану завжди утворюють ациклічну послідовність клітин.

> **Теорема 5.2.** (Наслідок теореми 5.1.) Будь-яка сукупність з $m+n$ клітин матриці транспортної задачі утворює цикл.

Доведення. Як зазначалось, сукупність лінійно незалежних векторів задачі не перевищує $m+n-1$. Отже, всяка сукупність з $m+n$ векторів буде лінійно залежною. Як випливає з доведення попередньої теореми, відповідні клітини завжди утворюють цикл.

Отже, сукупність усіх базисних клітин та однієї вільної клітини таблиці транспортної задачі завжди утворює цикл.

> **Теорема 5.3.** Якщо всі запаси $a_i \ (i = \overline{1, m})$ і всі потреби $b_j, (j = \overline{1, n})$ є невід'ємними цілими числами, то будь-який опорний план складається із значень, що є цілими числами.

Доведення. Компоненти кожної системи із $m+n-1$ лінійно незалежних (базисних) векторів можуть бути подані у вигляді трикутної матриці. Нехай розглядається задача (5.1)—(5.4). Матриця з перших $m+n-1$ компонент базисних векторів системи (5.2), (5.3) матиме вигляд:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} & A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n-1} \end{array} \\
\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]}_{m \qquad\qquad n-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c} A_0 \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_m \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \end{array}
\tag{5.19}$$

Розв'язування системи, що визначається (5.19), включатиме лише дії додавання та віднімання, і, оскільки $a_i \; (i=\overline{1,m})$ та $b_j \; (j=\overline{1,n})$ у постановці транспортної задачі є цілими числами, то значення змінних також будуть цілими числами.

5.3. Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Як і в звичайному симплексному методі, розв'язування транспортної задачі полягає в цілеспрямованому переборі та перевірці на оптимальність опорних планів. Початком такого ітераційного процесу є побудова першого опорного плану.

Перший опорний план транспортної задачі, як і будь-якої задачі лінійного програмування можна побудувати методом, який було розглянуто в розділі 2, що призведе до необхідності надто складних розрахунків. Завдяки вищезгаданим особливостям будови математичної моделі транспортної задачі існують кілька простих методів побудови опорного плану. Розглянемо методи північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції відповідають рядкам, а споживачі — стовпчикам.

Нехай умови конкретної транспортної задачі подані в табл. 5.2.

Ідея ***методу північно-західного кута*** полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т.д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Розглянемо цей процес детальніше на прикладі.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1, використовуючи запаси першого постачальника A_1. У нашому прикладі (табл. 5.2) потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника — $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку A_1B_1 записуємо менше із значень a_1, b_1, тобто 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, і переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2. Обсяг його потреб $b_2 = 50$. Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить 150 – 110 =

40. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітину A_1B_2 записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Його запаси a_2=60, а незадоволені потреби другого споживача 50–40=10, тому в клітинку A_2B_2 записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції. Переходимо до задоволення потреб наступного споживача B_3. У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить 60–10=50. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка A_2B_3 міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника A_2 будуть повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника A_3. Залишились незадоволеними потреби третього споживача в обсязі 60–50=10. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника A_3. У клітинку A_3B_3 записуємо число 10, і потреби споживача B_3 також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами b_4=80, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: 90–10=80.

Таблиця 5.2

Постачальники	Запаси	Споживачі

		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Отже, в таблиці 5.2 у заповнених клітинках знаходяться числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) по рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел по стовпцях — обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна отримати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок з лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним. Процес відшукання оптимального плану після початкового опорного, визначеного методом північно-західного кута, пов'язаний зі значним обсягом обчислювальних робіт, тому його реалізують на ЕОМ.

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 ум. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітини), отже, це коштуватиме $110 \cdot 4 = 440$ ум. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 ум. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880 \text{ (ум. од.).}$$

Теорема 5.4. Опорний план транспортної задачі, знайдений методом північно-західного кута, завжди ациклічний.

Доведення. Скористаємося методом індукції числа $p = m + n$. Для $p = 2$ теорема очевидна: план $x_{11} = a_1 = b_1$ ациклічний, оскільки складається з $m + n - 1 = 1$ елемента. Так само ациклічним є план для $p = 3$, оскільки він складається лише з двох клітин.

Нехай теорема справедлива для деякого довільного $p = m + n \geq 3$. Доведемо її справедливість для числа $p' = p + 1 = m + n + 1 = m' + n'$.

Допустимо для визначеності, що в транспортній задачі (5.1)—(5.4) $a_1 < b_1$, тобто після першого кроку за методом північно-західного кута отримаємо $x_{11} = \min(a_1, b_1) = a_1$, всі інші $x_{12} = x_{13} = ... = x_{1n} = 0$. Дальші кроки методу пов'язані із його застосуванням до таблиці розмірністю $m \times n$, де $m = m' - 1$, а $n = n'$, причому всі запаси і потреби нової таблиці збігаються з запасами і потребами попередньої, крім $b_1' = b_1 - x_{11} = b_1 - a_1$. За припущенням індукції план, знайдений методом північно-західного кута для $p = m + n$, тобто в новій таблиці, ациклічний. Очевидно, що приєднання до цього плану першого рядка з єдиним ненульовим елементом не утворить циклу, але відшуканий у такий спосіб план буде планом початкової задачі для p', чим і доводиться теорема.

Наведені властивості опорних планів стосуються і тих планів, що отримані розглянутими нижче іншими способами, які певною мірою є модифікаціями методу північно-західного кута.

Очевидно, якщо за побудови опорного плану враховувати вартості перевезень, то сумарна вартість всіх постачань може бути зменшена, і отриманий опорний план буде ближчим до оптимального.

Ідея ***методу мінімальної вартості*** полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Складемо за допомогою цього методу план розглянутої задачі (табл. 5.3).

Найменшу вартість мають перевезення, які здійснюються від A_2 до B_3 та від A_3 до B_2 (ціна перевезення одиниці продукції — 1 ум. од.). Заповнимо будь-яку з них, наприклад, A_2B_3. Оскільки постачальник має 60 одиниць продукції, а споживач потребує саме такої її кількості, то в клітину A_2B_3 ставимо значення 60. У такий спосіб запаси другого постачальника повністю вичерпані, а потреби третього споживача повністю задоволені. Також мінімальною є вартість перевезень від третього постачальника до другого споживача, тому заповнимо також клітину A_3B_2.

З клітинок таблиці, що залишились незаповненими, вибираємо наступне мінімальне значення вартості перевезень, яке дорівнює 2 ум. од. — для клітин A_1B_3, A_2B_4, A_3B_1 та A_3B_4. Заповнення клітин A_2B_4 та A_1B_3 неможливе, оскільки постачальник A_2 вже повністю вичерпав власний обсяг запасів, задовольняючи потреби споживача B_3, а споживач B_3 повністю задовольнив свої потреби. Отже, можна заповнити тільки клітину A_3B_1 чи A_3B_4. Заповнимо A_3B_1. Обсяг запасів $a_3 = 90$, причому 50 одиниць продукції вже надано другому споживачеві. Отже, маємо залишок 90–50=40, а потреби b_1=110, тому від третього постачальника до першого споживача плануємо перевезти 40 одиниць продукції. Тепер у клітину A_3B_4 не можна записати будь-який обсяг постачання, оскільки запаси третього постачальника вже повністю вичерпані.

Знову вибираємо найменшу вартість для клітин таблиці, що залишилися пустими, і продовжуємо процес доти, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби — задоволені.

Таблиця 5.3

a_i \ b_j	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 70	4	2	5 80
$a_2 = 60$	5	3	1 60	2
$a_3 = 90$	2 40	1 50	4	2

В результаті таких міркувань отримали початковий опорний план, загальна вартість перевезень для якого становить:

$$F = 70 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 870 \text{ (ум. од.)}.$$

Значення цільової функції менше за попередній варіант, значить цей план ближчий до оптимального.

Метод подвійної переваги. Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної переваги.

Згідно з процедурою цього методу перед початком заповнення таблиці необхідно позначити будь-якими символами клітинки, які містять найменшу вартість у рядках, а потім — у стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (які містять вартості, що є мінімальними і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (що містять мінімальні вартості або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Таблиця 5.4

a_i \ b_j	$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
$a_1 = 150$	4 110	4	V 2	5 40
$a_2 = 60$	5	3	VV 1 60	V 2
$a_3 = 90$	V 2	VV 1 50	4	V 2 40

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 60 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 40 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Застосування для побудови опорного плану даного методу уможливлює отримання найменшого у зіставленні з розглянутими вище значення цільової функції. Отже, такий план є найближчим до оптимального.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці — знизу та справа у кілька рядків та стовпчиків, що відповідають крокам заповнення таблиці. З-поміж усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, але й співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується наскільки, може збільшитися вартість постачання на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці постачання в клітину з мінімальною вартістю.

Метод апроксимації Фогеля дає змогу особливо для задач великих розмірностей скласти найкращий опорний план.

Таблиця 5.5

<table>
<tr><td>b_j
a_i</td><td>$b_1 = 110$</td><td>$b_2 = 50$</td><td>$b_3 = 60$</td><td>$b_4 = 80$</td><td colspan="3">Різниці по рядках</td></tr>
<tr><td>$a_1 = 150$</td><td>4
110</td><td>4
40</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$a_2 = 60$</td><td>5</td><td>3</td><td>1
60</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$a_3 = 90$</td><td>2</td><td>1
10</td><td>4</td><td>2
80</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Різниці по стовпцях</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

У таблиці 5.5. навпроти кожного рядка і стовпчика записані величини, які знайдені як різниці між мінімальним значенням вартості та наступним за ним по рівню. Максимальне значення такої різниці на першому кроці відповідає четвертому стовпчику і означає, що у разі, коли не буде задоволена потреба четвертого споживача перевезенням продукції від третього постачальника за ціною 2 ум. од. за одиницю, то на наступних кроках вартість перевезення може бути на 3 ум. од. більшою. Тобто інакше може статися, що потребу четвертого споживача необхідно буде задовольняти перевезенням продукції від першого постачальника, що призведе до збільшення вартості цього перевезення в 2,5 рази. Водночас для всіх інших споживачів та постачальників такі різниці є меншими. Отже, найдоцільніше на першому кроці заповнити клітину A_3B_4. Після цього потреби B_4 повністю задоволені, і всі клітини четвертого стовпчика виключаються з наступного розрахунку різниць по рядках і стовпцях.

На другому кроці максимальна різниця дорівнює 2 і відповідає першому і другому рядкам та першому і другому стовпчикам, тому можна заповнювати будь-яку їх клітину з мінімальною вартістю, наприклад, A_2B_3. Після цього з розгляду виключаються одразу всі клітини другого рядка та третього стовпця, оскільки потреби третього споживача повністю задоволені, а запаси другого постачальника вичерпані.

Останній розрахунок різниць (найбільше значення 3 відповідає другому стовпчику) свідчить про доцільність введення поставки від третього постачальника до другого споживача. Решту клітин заповнимо методом мінімальної вартості та визначимо загальну вартість перевезень:

$$F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 80 \cdot 2 = 830 \text{ (ум. од.)}.$$

Результат збігся із значенням цільової функції для опорного плану, що складений за попереднім методом. Ефективність методу апроксимації Фогеля, як вже згадувалось, є очевидною для задач більшої розмірності.

Зазначимо, що ефективність наведених методів можна оцінювати лише в середньому, оскільки можлива ситуація, що методом мінімальної вартості отримано опорний план транспортної задачі кращий, ніж методом подвійної переваги.

5.4. Випадок виродження опорного плану транспортної задачі

Опорний план транспортної задачі, як зазначалося раніше, має містити не більше ніж (m+n–1) відмінних від нуля компонент. Якщо їх кількість дорівнює (m+n–1), то такий опорний план називають *невиродженим*. Якщо ж кількість додатних компонент менша ніж (m+n–1), то опорний план є *виродженим*. Вироджений план може виникати не лише за побудови опорного плану, але і при його перетвореннях у процесі знаходження оптимального плану.

Найчастіше, щоб позбутися виродженості опорного плану, в деякі клітини таблиці транспортної задачі в необхідній кількості вводять нульові постачання. Обсяги запасів постачальників і потреби споживачів після цього не змінюються, однак клітини зі значенням «нуль» вважаються заповненими.

Головною умовою при введенні нульової поставки є збереження необхідної і достатньої умови опорності плану транспортної задачі — його ациклічності. Клітина має вибиратись у такий спосіб, щоб неможливо було побудувати замкнений цикл.

Нехай маємо такі умови транспортної задачі та початковий опорний план, що подані в табл. 5.6.

Таблиця 5.6

a_i \ b_j	b_1=7	b_2=10	b_3=6
a_1=8	0 7	5 1	2
a_2=7	2	3 7	4
a_3=6	1	2	0 6
a_4=2	0	0 2	0

Перевіримо, чи є отриманий опорний план виродженим. Кількість постачальників $m=4$, а кількість споживачів $n=3$. Для невиродженого опорного плану кількість заповнених клітин таблиці 5.6 має дорівнювати $m+n-1=4+3-1=6$. У наведеному опорному плані кількість заповнених клітин на одну менше (п'ять), отже, він вироджений. Позбудемося виродженості опорного плану введенням нульової поставки в одну з пустих клітин. Враховуючи необхідність збереження ациклічності опорного плану, не можна заповнювати клітини A_2B_1 та A_4B_1, оскільки це призведе до утворення циклів, які зображені в табл. 5.7. та 5.8.

Таблиця 5.7

a_i \ b_j	b_1=7	b_2=10	b_3=6

a_1=8	0 7	5 1	2
a_2=7	2 0	3 7	4
a_3=6	1	2	0 6
a_4=2	0	0 2	0

Таблиця 5.8

a_i \ b_j	b_1=7	b_2=10	b_3=6
a_1=8	0 7	5 1	2
a_2=7	2	3 7	4
a_3=6	1	2	0 6
a_4=2	0 0	0 2	0

Очевидно введення нульової поставки в будь-яку іншу пусту клітинку не дає змоги утворити цикл. Отже, можна заповнити нулем одну з клітин A_1B_3, A_2B_3, A_3B_1, A_3B_2, A_4B_3. Наприклад, виберемо клітину A_3B_2.

Таблиця 5.9

a_i \ b_j	b_1=7	b_2=10	b_3=6
a_1=8	0 7	5 1	2
a_2=7	2	3 7	4
a_3=6	1	2 0	0 6
a_4=2	0	0 2	0

Зазначимо, що необхідність введення нульової поставки є очевиднішою на наступних етапах розв'язування транспортної задачі.

5.5. Методи розв'язування транспортної задачі

5.5.1.Задача, двоїста до транспортної

Один із способів розв'язування транспортної задачі ґрунтується на розгляді двоїстої задачі.
Розглянемо транспортну задачу (5.1)—(5.4).
Позначимо змінні двоїстої задачі, які відповідають рівнянням (5.2), через , а для рівнянь (5.3) — через . Оскільки всі обмеження транспортної задачі є рівняннями, то пара спряжених задач є несиметричною і ніякі обмеження на знаки змінних двоїстої задачі та не накладаються.
Для побудови двоїстої задачі поставимо у відповідність обмеженням початкової задачі змінні двоїстої:

(5.20)

(5.21)

.

Згідно з загальними правилами побудови двоїстих задач маємо:

(5.22)

за умов:

, (5.23)

.

Змінні u_i та v_j задачі (5.22), (5.23) двоїстої до транспортної мають назву потенціалів.

5.5.2.Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі

Сформулюємо другу теорему двоїстості для задач (5.1)—(5.4) та (5.22)—(5.23).
Для того, щоб плани відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої не жорсткості:

1) ; (5.24)

2) (5.25)

Зауважимо, що друга група умов для транспортної задачі виконується автоматично, оскільки всі обмеження задачі є рівняннями.
Перша умова виконується у двох випадках:
a) якщо . Другий співмножник , бо за умовою (5.23) ();
b) якщо , то за умовою транспортної задачі , тоді ().
Необхідність і достатність виконання таких умов для оптимальності планів прямої та двоїстої задач було доведено в розділі 3. Отже, як наслідок другої теореми двоїстості для транспортної задачі отримали необхідні та достатні умови оптимальності плану.

> **Теорема** (***умова оптимальності*** опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}{}^*)$ існують числа u_i та v_j, для яких виконуються умови:
> 1) $u_i + v_j = c_{ij}$, $x_{ij} > 0$,
> 2) $u_i + v_j$ £ c_{ij}, $x_{ij} = 0$
> для всіх та , то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Використовуючи наведені умови існування розв'язку транспортної задачі, методи побудови опорних планів та умову оптимальності опорного плану транспортної задачі, сформулюємо алгоритм методу потенціалів, який по суті повторює кроки алгоритму симплексного методу.
Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:
1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита). За необхідності слід звести задачу до закритого типу.
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.
3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.
4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4.1.Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх запов кількість яких дорівнює , а кількість невідомих — . Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

4.2.Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j £ c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

4.3.Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці. Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто .

4.4.Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить , отже, з цих клітин обов’язково утвориться цикл (теореми та наслідок §5.2). У межах даного циклу здійснюють перерахування, які приводять до перерозподілу постачань продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «–» та «+». У клітинках зі знаком «–» вибирають значення q і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «–». Якщо значенню q відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невиродженість опорного плану.

Внаслідок наведеного правила вибору q дістаємо новий опорний план, який не містить від’ємних перевезень і задовольняє умови транспортної задачі. Оскільки кількість всіх клітин таблиці, що входять у цикл, є парною і до половини з них те саме число q додається, а від половини віднімається, то загальна сума перевезень по всіх колонках і рядках залишається незмінною.

Доведемо ациклічність нового плану. Вектор умов, який відповідає приєднаній клітині, є лінійною комбінацією векторів базису, які утворюють разом з ним цикл, бо ці вектори входять у згадану лінійну комбінацію з відмінними від нуля коефіцієнтами (доведення теореми §5.2). Виключення з циклу одного з базисних векторів приводить до нової системи з лінійно незалежними векторами, бо інакше введений у новий базис вектор мав би два різних розклади через вектори попереднього базису, що неможливо. А системі лінійно незалежних векторів відповідає ациклічна сукупність клітин таблиці транспортної задачі, що й потрібно було довести.

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповід порожньою. У результаті такого перерозподілу перевезень продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5.Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану. Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план транспортної задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану (тобто повернутися до пункту 3 даного алгоритму).

Зауважимо, що аналогічно з розв’язуванням загальної задачі лінійного програмування симплексним методом, якщо за перевірки оптимального плану транспортної задачі для деяких клітин виконується рівність , то це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани. Отримати їх можна, якщо побудувати цикли перерозподілу обсягів перевезень для відповідних клітин.

5.5.3.Монотонність і скінченність методу потенціалів

Кожний новий опорний план надає меншого у зіставленні з попереднім планом значення цільової функції Z, тобто за невироджених опорних планів метод потенціалів уможливлює строго монотонне зменшення значення цільової функції транспортної задачі. Доведемо, що це положення справджується в загальному випадку.

Нехай план знайдено з плану однією ітерацією методом потенціалів; при цьому було використано цикл (позначимо такий набір клітин через К), утворений клітинами з такими індексами:

та приєднаною клітиною , для якої спостерігалось найбільше порушення умови оптимальності плану транспортної задачі .

З першої теореми двоїстості для транспортної задачі маємо:

.

Враховуючи останнє рівняння, встановимо зв’язок між послідовними значеннями цільової функції і , що відповідають опорним планам та :

.

Перша сума правої частини — перевезення, які не були включені в цикл K, друга сума поширюється на ті значення перевезень, де віднімалась вибрана величина q, третя сума і останній доданок охоплюють клітини, де початкове значення було збільшене на величину q. Тобто:

(5.26)

Враховуючи додатність величини q у разі невиродженості плану і від'ємне значення виразу в дужках (), висновуємо, що . Цим і доведена строга монотонність алгоритму, яка у разі виродженості плану не є строгою, оскільки величина q може дорівнювати нулю.

Співвідношення (5.18) є також обґрунтуванням способу вибору клітини, яка вводиться в базис, за максимумом абсолютної величини , оскільки це дасть найбільше зменшення цільової функції.

Скінченність алгоритму випливає з його монотонності і скінченності кількості опорних планів задачі; однак це є обґрунтованим лише для невироджених задач, а у разі виродження, коли строга монотонність не є безумовною, теоретично можливе зациклення алгоритму так само, як це може мати місце у разі застосування симплексного методу.

5.5.4.Приклади розв'язування транспортних задач методом потенціалів

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти відповідно 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Вона уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня доставляти відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведена в табл. 5.10.

Таблиця 5.10

ВАРТІСТЬ ТРАНСПОРТУВАННЯ ПРОДУКЦІЇ

Фабрика	Вартість транспортування 1000 од. продукції замовнику			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити оптимальний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продук

. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою , то математична модель задачі матиме вигляд:

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що може надходити до споживача від трьох фабрик, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

Загальні витрати, пов'язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування 1000 од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

min $Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} +4x_{33} +2x_{34}$.

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

min $Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} +2x_{34}$

за умов:

Розв'язання. Запишемо умови задачі у вигляді транспортної таблиці (табл. 5.11) та складемо її перший опорний план у цій таблиці методом мінімальної вартості.

Таблиця 5.11

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4	2 2	5 40	$u_1 = 5$

$a_2 = 60$	5	3	1 60	2 0	$u_2 = 2$
$a_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = –1$	$v_2 = –1$	$v_3 = –1$	$v_4 = 0$	

Загальна вартість перевезень продукції згідно з першим опорним планом визначається у такий спосіб:

$$Z_1 = 4 \times 110 + 5 \times 40 + 1 \times 60 + 1 \times 40 + 2 \times 40 = 820 \text{ (ум. од.)}.$$

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п’яти, а $(m + n – 1) = 3 + 4 – 1 = 6$.

Для дальшого розв’язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку пусту клітинку, яка не утворює замкненого циклу із заповненими клітинами. Наприклад, заповнимо нулем клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність методом потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь (для заповнених клітин таблиці) для визначення потенціалів першого опорного плану:

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв’язків дістанемо, узявши, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються з цієї системи рівнянь: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = – 1$, $v_2 = – 1$, $v_3 = – 1$. Ці значення потенціалів першого опорного плану записуємо у транспортну таблицю.

Потім згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 5 + (–1) = 4 = 4;$

$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 5 + (–1) = 4 > 2;$

$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + (–1) = 1 < 5;$

$A_2B_2 : u_2 + v_2 = 2 + (–1) = 1 < 3;$

$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + (–1) = 1 < 2;$

$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + (–1) = 1 < 4.$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $D_{13} = (u_1 + v_3) – c_{13} = 4 – 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі неоптимальний. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у порожню клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщені в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщені в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщені в клітинках, позначених знаком «–».

У даному разі , тобто . Виконавши перерозподіл перевезень продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: для клітинки A_1B_3 — 40 од. продукції, а для A_2B_3 – (60 – 40) = 20 од., а для A_2B_4 – (0 + 40) = 40 од. Клітинка A_1B_4 звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості плану, тобто дорівнювати $(n + m – 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд (табл. 5.12):

Таблиця 5.12

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 110	4	2 40	5	$u_1 = 0$
$a_2 = 60$	5	3	1 20	2 40	$u_2 = –1$

$a_3 = 80$	2 1	1 40	4	2 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Розрахуємо значення цільової функції відповідно до другого опорного плану задачі:

$$Z_2 = 4 \times 110 + 2 \times 40 + 1 \times 20 + 2 \times 40 + 1 \times 40 + 2 \times 40 = 740 \text{ (ум. од.)}.$$

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий опорний план транспортної задачі також неоптимальний (має місце порушення для клітинки A_3B_1). За допомогою побудованого циклу, виконавши перехід до третього опорного плану транспортної задачі, отримуємо табл.5.13:

Таблиця 5.13

A_i	B_j				u_i
	$b_1 = 110$	$b_2 = 40$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$	
$a_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$a_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$a_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Визначимо загальну вартість витрат на транспортування продукції згідно з третім опорним планом:

$$Z_3 = 4 \times 90 + 2 \times 60 + 2 \times 60 + 2 \times 20 + 1 \times 40 + 2 \times 20 = 720 \text{ (ум. од.)}.$$

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому:

.

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т.д. При цьому загальна вартість перевезень всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

5.5.5.Угорський метод розв'язування транспортної задачі

Ідея цього методу розв'язання транспортної задачі вперше була запропонована угорським математиком Є. Егерварі 1931 року, тобто ще до розроблення загальної теорії лінійного програмування. Спочатку цей метод був розроблений для розв'язування специфічного виду транспортної задачі, а згодом узагальнений. Нині угорський метод є одним з найпоширеніших методів розв'язання транспортних задач.

Він досить простий з погляду обчислень і може застосовуватися без упереджень навіть у разі виродженості плану.

Ідея методу полягає у здійсненні послідовного переходу від деякого недопустимого плану (не всі потреби задоволені і не вся продукція вивезена) до допустимого, що є розв'язком задачі. Цей перехід здійснюється за скінченну кількість ітерацій (але невідому до кінця обчислень), що пов'язані з перетвореннями матриці вартостей і поточного плану .

Назвемо умовно-оптимальним планом (псевдопланом) транспортної задачі (5.1)—(5.4) таку сукупність невід'ємних чисел , яка задовольняє задану систему нерівностей:

(5.27)

(5.28)

і такі наступні умови для змінних двоїстої задачі — потенціалів:

, якщо ;

, якщо .

Мірою недопустимості (умовою неоптимальності) умовно-оптимального плану може бути наявність різниці між сумою всіх запасів (чи потреб, що те саме) і сумою всіх перевезень умовно-оптимального плану, тобто:

(5.29)

Зрозуміло, що чим менша нев'язка D, тим ближче умовно-оптимальний план до найкращого плану транспортної задачі, а у разі, коли D = 0, він збігається з оптимальним планом.

Звідси легко збагнути ідею розглядуваного методу розв'язування транспортної задачі: починаючи з деякого початкового плану задачі, подвійної до транспортної , можна знайти послідовність оптимальних планів ряду допоміжних задач на мінімізацію (5.29) за обмежень (5.27) і (5.28), кожний наступний план якої надає нев'язці (5.29) меншого значення у зіставленні з попереднім, а останній план цієї послідовності надає нев'язці нульового значення, збігаючись у такий спосіб з оптимальним планом транспортної задачі.

Отже, кожна ітерація методу означатиме розв'язування допоміжної задачі (5.27)—(5.28) і зменшення при цьому значення цільової функції (5.29) порівняно з попереднім розв'язком цієї задачі.

Щоб сформулювати допоміжну задачу, треба, крім використання величин і , що їх містить задана транспортна задача, побудувати ще деякий план двоїстої задачі , . Для початку першої ітерації це легко зробити, узявши, наприклад:

, (5.30)

причому даний план задовольняє умову:

+, (5.31)

а також у кожному рядку матриці перевезень унаслідок такого вибору потенціалів виконуватиметься хоча б одна рівність виду (5.31). Справді, взявши для -го рядка в правій частині (5.31) , дістанемо:

.

У наступних ітераціях утворену систему потенціалів змінюємо, але так, що вона завжди залишається планом подвійної задачі.

Наведені вище обмеження для змінних двоїстої задачі:

, якщо ;

, якщо

означають, що клітини, в яких для визначеної на *k*-му кроці системи потенціалів виконується строга нерівність , не заповнюють. Отже, розв'язуючи задачу, будемо використовувати лише ті клітини, для яких .

Зауважимо, що мінімізація цільової функції (5.29) рівнозначна максимізації другого її доданка

(5.32)

при тій самій системі обмежень. Зрозуміло, що , а при матимемо: .

Виходячи з наведених теоретичних засад, розглянемо алгоритм угорського методу:

1. Побудова допоміжної задачі з цільовою функцією (5.32) та умовами (5.27), (5.28).

2. Побудова початкового опорного плану допоміжної задачі, що отримана на попередньому кроці алгоритму, одним з відомих методів.

3. Відшукання оптимального плану допоміжної задачі.

3.1. Збільшення значення . Визначають рядки, де сума перевезень по рядку менша від запасів, а за допомогою них — стовпці, які мають у вибраному рядку не заборонені для перевезень клітини. Вибрані рядки і стовпці позначають так:

, , (5.33)

та . (5.34)

Потім , . (5.35)

3.2. Визначення клітин, значення перевезень в яких необхідно змінити. Послідовність цих клітин повинна утворювати деякий ланцюг, елементи якого є в позначених рядках та колонках і за яким можна перенести лишок запасу деякого -го рядка, що був позначений першим, у -ту колонку, позначену останньою.

У загальному випадку послідовність має вигляд:

.

У знайденому ланцюзі позначаємо першу його клітину з кінця знаком «плюс», а інші за чергою знаками «плюс» і «мінус». Знайдемо величину:

. (5.36)

Як видно з алгоритму, дорівнює меншій з двох величин: найменшого елемента ланцюга, що позначений знаком «мінус», і невикористаного запасу в позначеному першим пунктом відправленні. Величина є незадоволеною потребою в позначеному наприкінці пункті доставки. Зсуву по ланцюгу підлягає менша з цих величин, що й приводить до наведеної формули розрахунку q (5.36).

4. Перехід до наступної допоміжної задачі, оптимальний план якої буде ближчим до оптимального плану початкової транспортної задачі.

У кінцевій таблиці розв'язаної допоміжної задачі позначені колонки мають баланс суми перевезень по колонці і потреб у відповідних пунктах. Можна легко помітити, що заборону на перевезення слід знімати з тих клітин, які не належать до позначених колонок. Водночас у тій самій кінцевій таблиці попередньої допоміжної задачі з-поміж позначених є рядки, в яких немає балансу суми перевезень і запасів, так що шукана клітина міститиметься серед позначених рядків в остаточній таблиці.

Позначимо множину позначених рядків через , а множину позначених колонок — через J (у кінцевій таблиці, що містить розв’язок допоміжної задачі). Знайдемо величину:

, (5.37)

тобто найменше значення різниці, що стоїть у дужках серед заборонених клітин, які містяться в позначених рядках і непозначених колонках; строго більше від нуля, оскільки в іншому разі відповідна клітина не була б забороненою для перевезень, і її колонку можна було б позначити за допомогою того позначеного рядка, якому належить ця клітина, що суперечить умові . Зрозуміло, що, збільшивши, наприклад, потенціал , який входить у формулу (5.37), на величину , тим самим перетворюють відповідну клітину (в якій) у вільну для перевезень. Звичайно, таких клітин, що задовольняють умову (5.26), може бути більше, ніж одна. Тому в усіх позначених рядках збільшуємо потенціали на , а щоб зберегти попередню множину клітин вільних для перевезень, величину віднімаємо від потенціалів позначених колонок . Решту потенціалів залишаємо незмінною. Тут слід підкреслити, що згідно з алгоритмом розв’язання допоміжної задачі всі вільні для перевезень клітини, які є в позначених рядках, обов’язково містяться і в позначених колонках. Отже, нову систему потенціалів знаходимо, змінюючи попередню за формулами:

(5.38)

Нова система потенціалів визначає нову множину клітин, заборонених для перевезень .

, .

Визначивши , знову формулюємо і розв’язуємо допоміжну задачу.

5. Повторення кроків 2—4 до відшукання оптимального плану початкової транспортної задачі.

Сформулюємо правила розв’язування допоміжної задачі, одночасно демонструючи їх на відповідному прикладі, і даючи в разі потреби відповідні пояснення.

Розв’яжемо угорським методом транспортну задачу, наведену в табл. 5.14:

Таблиця 5.14

A_i	B_j			
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$
$a_1 = 110$	7	2	4	2
$a_2 = 40$	1	2	4	1
$a_3 = 80$	5	3	2	4
$a_4 = 70$	7	3	3	9

Розв’язання. Визначаємо початкову систему потенціалів для побудови першої допоміжної задачі, використовуючи (5.23):

, .

Маємо:

,

,

,

.

,

,

,

.

Розраховуємо величини і записуємо їх у вигляді таблиці:

5	0	2	0
0	1	3	0

3	1	0	2
4	0	0	6

Клітини побудованої таблиці з елементами (різницями), відмінними від нуля, будуть забороненими для перевезень, чим гарантується виконання умов стосовно потенціалів, а клітини з нулями можна використати для знаходження плану допоміжної задачі.

Побудуємо початковий план допоміжної задачі, наприклад, методом північно-західного кута, враховуючи обмеження, накладені забороною зазначених перевезень (відповідні клітини табл.5.15 виділені сірим кольором).

Таблиця 5.15

A_i	B_j				a_i	l_i
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$		
$a_1 = 110$		2 110		2 0		
$a_2 = 40$	1 40			1 0		
$a_3 = 80$			2 80			
$a_4 = 70$		3 20	3 0		50	0
b_j		50	50			
m_j		4	4			

Загальний обсяг перевезень за початковим планом менший на 50 одиниць від обсягу всіх запасів (потреб): .

Спробуємо змінити визначений план для збільшення значення . Це можна зробити лише за рахунок тих рядків, де запас залишився невикористаним. Отже, позначимо ті рядки, де сума перевезень по рядку згідно з початковим планом менша від відповідного запасу: . Позначаємо їх двома числами. Одне з них відповідає значенню і позначається символом , а друге є нулем і позначається символом , де i — номер вибраного рядка. У нашому прикладі таким буде лише один — четвертий рядок. Отже, і, оскільки нуль відповідатиме четвертому рядку, то маємо: .

Взагалі таких рядків може бути кілька. За допомогою кожного позначеного рядка (в нашому прикладі четвертого) позначаємо колонки, які мають у позначеному рядку не заборонені для перевезень клітини, двома символами (5.31): та .

У четвертому рядку не заборонені для перевезень клітини належать другій та третій колонкам, які позначаємо відповідними символами: , ; та , . Позначені колонки (друга і третя) використовуються для позначення ще не позначених рядків, які мають у даній позначеній колонці клітини з відмінними від нуля перевезеннями ().

Позначення відповідають умові (5.35): , .

У такий спосіб далі позначаємо перший рядок числами:

, ,

а третій , .

Таблиця 5.16

A_i	B_j				a_i	l_i
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$		
$a_1 = 110$		2 110		2 0	50	2
$a_2 = 40$	1 40			1 0		
$a_3 = 80$			2 80		50	3
$a_4 = 70$		3 20	3 0		50	0
b_j		50	50	50		
m_j		4	4	1		

Знову позначені рядки використовуємо для позначення за формулами (5.36) нових, ще не позначених колонок, поки або не знайдеться колонка, сума перевезень якої менша від потреби відповідного пункту доставки, або процес позначень не можна буде продовжити. Другий випадок означає, що план змінити не можна, тобто він оптимальний. У першому разі продовжуємо алгоритм.

У нашому прикладі знайдено колонку, сума перевезень якої менша від потреби відповідного пункту. Це четверта колонка, яку і позначаємо числами:

, .

Визначаємо послідовність клітин, значення перевезень в яких слід змінити. Ця послідовність має утворювати деякий ланцюг, елементи якого мусять бути в позначених рядках та колонках, і за яким можна перенести лишок запасу деякого -го рядка, що був позначений першим, у -ту колонку, позначену останньою.

У нашому прикладі такою послідовністю клітин є: A_4B_2, A_1B_2, A_1B_4,

а .

Далі використовуємо формулу:

Отже, до перевезень x_{42} і x_{14} додаємо q = 40, а від перевезення x_{12} віднімаємо цю саму величину. Матимемо табл. 5.17:

Таблиця 5.17

A_i	B_j				a_i	l_i
	b_1 = 50	b_2 = 130	b_3 = 80	b_4 = 40		
a_1 = 110		2 70		2 40	10	2
a_2 = 40	1 40			1 0	40	
a_3 = 80			2 80		10	3
a_4 = 70		3 60	3 0		10	0
b_j		10	10	10		
m_j		4	4	1		

Повторюючи процес позначень, починаючи з четвертого рядка, легко помітити, що він закінчується знову на четвертій колонці, де досягнута рівність суми перевезень колонки потребам. Отже, план допоміжної задачі оптимальний.

Зауважимо, що оптимальне значення лінійної функції задачі на 40 одиниць більше від початкового; збільшення лінійної функції забезпечується ациклічністю ланцюга і більшою на одиницю кількістю додатних (позначених знаком «плюс») клітин у ньому.

Перейдемо до нової допоміжної задачі, оптимальний план якої буде ближчим до оптимального плану заданої транспортної задачі; цільова функція допоміжної задачі , яка визначає загальний обсяг перевезених вантажів, при цьому збільшується. Для нашого прикладу цілком зрозуміло, що рівності (тобто повного перевезення вантажу) можна було б досягти, якби, наприклад, зняти з A_4B_1 або з якоїсь іншої клітини першої колонки заборону на перевезення і здійснити перевезення (i = 1, 3, 4). Оскільки згадана заборона накладена попередньою системою потенціалів , то зняти її можна, лише замінивши попередню систему потенціалів новою, але такою, щоб зберігалася сукупність незаборонених для перевезень клітин, знайдена на попередньому етапі.

Для наведеного прикладу множина клітин (i, j), для яких , , така: A_1B_1, A_3B_1, A_4B_1, причому досягається в клітині A_3B_1.

Знайдемо нову систему потенціалів:

,

,

,

,

,

,

,

.

Отже, тепер забороненими для перевезень клітинами будуть ті, де , що запишемо в таблицю:

2	0	2	0
0	4	6	3
0	1	0	2
1	0	0	6

Визначаємо початковий план і розв'язуємо нову допоміжну задачу (табл. 5.18):

Таблиця 5.18

A_i	B_j				a_i	l_i
	$b_1 = 50$	$b_2 = 130$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$		
$a_1 = 110$		2 110		2 0	40	2
$a_2 = 40$	1 40					
$a_3 = 80$	5 10		2 70		40	3
$a_4 = 70$		3 20	3 10		40	0
b_j		40	40			
m_j		4	4			

Зробивши зсув на 40 одиниць по ланцюгу A_4B_2, A_1B_2, A_1B_4, матимемо такий план:

.

Цей план оптимальний, оскільки , тобто .

Зауважимо, що даний алгоритм застосовується і для розв'язування відкритих транспортних задач без введення фіктивних пунктів. Для цього досить задовольнити ту групу обмежень, яка має виконуватись у вигляді строгих рівностей, і так підібрати систему потенціалів на останньому кроці, щоб тим обмеженням, які за знайденого плану є строгими нерівностями, відповідали нульові потенціали.

5.6.**Транспортна задача з додатковими умовами**

На практиці в задачах, що пов'язані з перевезеннями, часто доводиться враховувати додаткові умови: неможливість здійснення перевезень за окремими маршрутами; необхідність перевезень неоднорідної продукції тощо. Такі умови ускладнюють математичну постановку транспортної задачі та вимагають особливих підходів до її розв'язання.

Розглянемо кілька особливостей відкритих транспортних задач з додатковими умовами.

1. Додаткова умова заборони перевезень від певного постачальника до певного споживача. В такому разі в оптимальному плані відповідні клітини обов'язково мають бути вільними ().

Розв'язуючи транспортну задачу з додатковою умовою на заборону окремих постачань, необхідно у відповідних клітинах замінити значення вартостей перевезень одиниці продукції на деяке велике число (ставиться досить велике число *M*). Оскільки розглянуті вище методи розв'язання транспортних задач уможливлюють організацію перевезень у такий спосіб, що мінімізується загальна вартість витрат на транспортування, то це зумовить виключення з розгляду перевезень з надто великими вартостями, що і забезпечить виконання такої додаткової умови.

2. Додаткова умова перевезення за окремими маршрутами строго визначеного обсягу продукції, тобто виконання обов'язкових постачань. В оптимальному плані відкритої транспортної задачі з такою додатковою умовою клітини відповідних фіктивно введених постачальників чи споживачів мають бути вільними.

Розв'язуючи такого типу транспортну задачу, необхідно у відповідних клітинах також збільшити значення вартостей перевезень (ставиться досить велике число *M*).

3. Додаткова умова необхідності перевезення від i-го постачальника j-му споживачеві не менше k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження виду: .

Розв'язуючи транспортну задачу з такою додатковою умовою, необхідно змінити початкові умови: обсяг постачання k_{ij} відняти від обсягу запасу i-го постачальника () та від потреби j-го споживача . Знайдений оптимальний план транспортної задачі зі зміненими умовами (де використані значення) коригується, враховуючи обмеження .

4. Додаткова умова необхідності перевезення від i-го постачальника j-му споживачеві не більше k_{ij} одиниць продукції, тобто вводиться додаткове обмеження виду: .

Для виконання такої додаткової умови необхідно в транспортну таблицю j-го споживача записати двічі. Один раз його потреби визначатимуться величиною k_{ij}, а другий раз — різницею . Витрати на перевезення одиниці продукції в обох стовпцях повинні бути однаковими за винятком клітини на перетині i-го постачальника і j-го споживача з потребою . У цій клітині ставиться досить велике число M. В такій постановці задача розв'язується відомими методами.

5. На практиці часто потрібно визначити оптимальний план перевезень неоднорідної продукції, тобто розв'язати багатопродуктову задачу. Її математична модель має такий вигляд:

де k — індекс виду продукції, що необхідно перевезти.

Розв'язуючи багатопродуктову транспортну задачу, потрібно заблокувати ті клітини, які зв'язують постачальників і споживачів щодо постачань різної продукції. Таке блокування здійснюється введенням досить високих вартостей перевезень одиниці продукції (великого числа M), але слід зауважити, що наявність заблокованих клітин може призвести до неможливості розв'язання задачі. Тому в такому разі необхідно перевіряти, чи є достатня кількість незаблокованих перевезень для побудови опорного плану задачі, який повинен містити додатну змінну.

Три нафтопереробних заводи A_1, A_2 та A_3 із максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20 і 15 тис. т бензину забезпечують чотири бензосховища B_1, B_2, B_3, B_4, щоденна потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 та 20 тис. т. бензину. Бензин постачається до бензосховищ трубопроводами. Вартості перекачування 1000 т бензину від заводів до сховищ (в умовних одиницях) наведені в табл. 5.19.

Таблиця 5.19

Завод	Вартість перекачування 1000 т бензину до сховища, ум. од.			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	1	3	9	8

Сформулювати та розв'язати відповідну транспорту задачу з неодмінним виконанням таких умов:

1) повністю задовольнити потребу бензосховища B_4;

2) за недопостачання бензину до сховища B_2 згідно з договором передбачені штрафні санкції: 5 ум. од. за кожні 1000 т бензину;

3) у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі постачання бензину із заводу A_1 до сховища B_1 тимчасово неможливе.

Розв'язання. Визначимо, до якого типу належить транспортна задача:

, .

За умовою ця транспортна задача є відкритою, незбалансованою. Зведення її до закритого типу потребує введення додаткового фіктивного постачальника A_4 з продуктивністю a_4 = 75 – 65 = 10 (тисяч тонн). Кількість бензину, що «відправляється» фіктивним заводом до бензосховищ, в оптимальному плані означатиме обсяг незадоволеного попиту в цьому пункті призначення. Тому для виконання першої додаткової вимоги задачі необхідно заблокувати клітинку фіктивного постачальника A_4 та споживача B_4, записавши в ній досить високу вартість перевезення M. Тоді можна бути впевненим, що в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що в рядку фіктивного постачальника у стовпчику B_2 вартість транспортування 1000 т бензину дорівнюватиме 5 ум. од. замість нуля.

Оскільки неможливо транспортувати бензин від заводу A_1 до сховища B_1, то необхідно також заблокувати маршрут A_1B_1. Для цього в зазначеній клітинці замість C_{11} = 4 записуємо величину M.

З огляду на викладене табл. 5.20 з першим планом транспортної задачі має такий вигляд (початковий опорний план побудовано методом апроксимації Фогеля):

Таблиця 5.20

A_i	B_j					Різниці для рядків
	b_1 = 10	b_2 = 20	b_3 = 25	b_4 = 20	u_i	

$a_1 = 30$	M	5 15	3 5	7 10	$u_1 = 0$	2	2	2
$a_2 = 20$	7	6	2 20	5 1	$u_2 = –1$	3	3	3
$a_3 = 15$	1 10	3 5	9	8	$u_3 = –2$	2	5	
$a_4 = 10$	0 $M – 4$	5 $M – 7$	0 $M – 4$	M 10	$u_4 = M – 7$			
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$				
Різниці для стовпчиків	6	2 2 1	1 1 1	2 2 2				

Отже, перший опорний план задачі неоптимальний. Найбільше порушення умови оптимальності відповідає порожнім клітинкам A_4B_1 та A_4B_3 таблиці. Оскільки обидві вони мають однакові коефіцієнти $C_{41} = C_{43} = 0$, то для заповнення можна вибрати будь-яку з них, наприклад, A_4B_1. Перехід до другого плану виконується за таким циклом:

Після цього кроку заблокована клітинка A_4B_4 стає порожньою.

Дальше розв'язування задачі подано у вигляді табл. 5.21 та табл. 5.22.

Таблиця 5.21

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	M	5 5	3 5	7 20	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	2 20	5	$u_2 = –1$
$A_3 = 15$	1 0	3 15	9	8	$u_3 = –2$
$A_4 = 10$	0 10	5	0		$u_4 = –3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$	

Таблиця 5.22

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 10$	$B_2 = 20$	$B_3 = 25$	$B_4 = 20$	
$A_1 = 30$	M	5 5	3 25	7	$u_1 = 0$
$A_2 = 20$	7	6	2 0	5 20	$u_2 = –1$
$A_3 = 15$	1 0	3 15	9	8	$u_3 = –2$
$A_4 = 10$	0 10	5	0	M	$u_4 = –3$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 6$	

В табл. 5.22 маємо оптимальний план транспортної задачі, де:

.

$Z_{min} = 5 \times 5 + 3 \times 25 + 5 \times 20 + 3 \times 15 = 245$ ум. од.

Через незбалансованість цієї транспортної задачі спостерігатиметься недопостачання бензину до першого бензосховища в обсязі 10000 т. Загальні витрати на транспортування за такого плану будуть найменшими і становитимуть 245 ум. од.

Альтернативний оптимальний план дістанемо, заповнивши клітинку A_4B_3 (для неї $u_4 + v_3 = c_{43}$) згідно з таким циклом:

Тоді можна записати:

.

$Z_{min} = 5 \times 15 + 3 \times 15 + 5 \times 20 + 1 \times 10 + 3 \times 5 = 245$ ум. од.

Мінімальні загальні витрати на транспортування обсягом 245 ум. од. відповідають і третьому оптимальному плану задачі, згідно з яким третє бензосховище отримає на 10000 т бензину менше, ніж потребує.

Існування двох альтернативних оптимальних планів розглянутої транспортної задачі розширює можливості стосовно остаточного прийняття рішення.

5.7.Двохетапна транспортна задача

У класичній постановці транспортної задачі допускається, що вантаж перевозиться безпосередньо від постачальників до споживачів. Але на практиці досить часто зустрічається випадок, коли певна частина продукції спочатку перевозиться до посередницьких фірм (сховищ), а потім споживачам. У такому разі розв'язання задачі поділяють на два етапи: спочатку знаходять оптимальний план перевезень від постачальників до посередників, а потім — від посередників до споживачів. Така задача має назву двохетапної транспортної задачі.

Нехай в m пунктах постачання $A_1, A_2, \ldots, A_m$ є відповідно одиниць продукції, яку необхідно перевезти до l посередницьких фірм , місткості сховищ яких становлять , а потім доставити її споживачам , потреби яких становлять . Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до посередницьких фірм — та від посередників до споживачів — . Потрібно визначити оптимальну схему перевезень продукції з мінімальними сумарними витратами. Якщо обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника до k-ої фірми, позначити через , а обсяг вантажу, що перевозиться від k-ої фірми j-му споживачеві — через , то математична модель задачі матиме вигляд:

за умов:

;

;

;

;

.

Зазначимо, що коли загальний обсяг вантажу дорівнює місткості всіх складів і баз , а також сумарній потребі всіх споживачів , тобто ==, то така двохетапна транспортна задача може бути розв'язана як дві одноетапні. В іншому разі окремі оптимальні плани двох задач не збігатимуться з оптимальним планом загальної задачі.

Метод розв'язування двохетапної транспортної задачі, розроблений Орденом-Маршем, полягає у врахуванні місткостей посередників двічі — як постачальників і як споживачів. Умови задачі подаються у вигляді таблиці, в рядках якої записують дані про постачальників, а також про посередницькі фірми, а в стовпцях — знову дані про посередників та споживачів. У клітинах, які розміщені на перетині рядків-постачальників та стовпців-споживачів, фіксують реальні затрати на перевезення одиниці продукції. В діагональних клітинах на перетині рядків і стовпців, які відповідають посередницьким фірмам, ставлять нульові величини затрат. Решту клітин таблиці блокують, тобто вартості перевезень прирівнюють до деякого досить великого числа M. У процесі розв'язування задачі в цих клітинах не будуть передбачатися перевезення продукції, що відповідає умовам двохетапної транспортної задачі.

Виробниче об'єднання складається з трьох філіалів: A_1, A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в обсягах відповідно 1000, 1500 та 1200 одиниць на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D_1 і D_2 місткістю відповідно 2500 та 1200 од., а потім — до п'яти споживачів B_1, B_2, …, B_5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартості перевезень одиниці продукції (в умовних одиницях) від виробників на склади, а потім — зі складів до споживачів наведені в табл.5.23 і табл. 5.24.

Таблиця 5.23

Виробник	Вартість перевезення 1000 т бензину від виробника на склад, ум. од.	
	D_1	D_2
A_1	2	8
A_2	3	5

A_3	1	4

Таблиця 5.24

Склад	Вартість перевезення 1000 т бензину до споживачів, ум. од.				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1	3	8	5	4
D_2	2	4	5	3	1

Крім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першого філіалу до другого споживача, а також з третього філіалу — до четвертого споживача. Вартість транспортування одиниці продукції та транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 ум. од., а за маршрутом A_3B_4 — 4 ум. од. Перевезення продукції зі складу на склад недопустимі.

Сформулювати поставлену задачу як транспортну з проміжними пунктами (двохетапну) та визначити її оптимальний план.

Розв'язання. У поставленій задачі кожний склад можна подати як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому в транспортній таблиці вони гратимуть роль і постачальника продукції, і її споживача.

Перевезення продукції безпосередньо від філіалів до споживачів (крім випадків, визначених в умові задачі), а також зі складу на склад блокується введенням у відповідні клітини досить великих вартостей перевезення одиниці продукції — M.

Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю двохетапної задачі наведено нижче (табл. 5.25).

Таблиця 5.25

A_i, D_k	D_K, B_J							u_i
	d_1 = 2500	d_2 = 1200	b_1 = 900	b_2 = 700	b_3 = 1000	b_4 = 500	b_5 = 600	
a_1 = 1000	2 1000	8	M	3 0	M	M	M	u_1 = 0
a_2 = 1500	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	u_2 = 1
a_3 = 1200	1 1200	4	M	M	M	4 1	M	u_3 = –1
d_1 = 2500	0 2	M	1 900	3 700	8 900	5 1	4	u_4 = 0
d_2 = 1200	M	0 1	2	4	5 100	3 500	1 600	u_5 = –3
v_j	v_1 = 2	v_2 = 4	v_3 = 1	v_4 = 3	v_5 = 8	v_6 = 6	v_7 = 4	

Зауважимо, що в клітинках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це допускає неповне використання ємностей сховищ у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням продукції.

Ця транспортна задача є збалансованою, бо:

од.,

а також од.,

тому немає потреби вводити в транспорту таблицю фіктивного постачальника або споживача.

Перший опорний план транспортної задачі побудовано методом мінімальної вартості. Розрахуємо загальну вартість перевезень, що відповідає цьому плану:

$$Z_1 = 2 \times 1000 + 3 \times 300 + 5 \times 1200 + 1 \times 1200 + 1 \times 900 + 3 \times 700 +$$
$$8 \times 900 + 5 \times 100 + 3 \times 500 + 1 \times 600 = 22900 \text{ (ум. од.)}.$$

Цей опорний план задачі неоптимальний. Перехід від нього до другого плану виконуємо, заповнюючи порожню клітинку D_1D_1 згідно з побудованим циклом (табл. 5.26).

Таблиця 5.26

A_i, D_k	D_k, B_j							u_i
	d_1 = 2500	d_2 = 1200	b_1 = 900	b_2 = 700	b_3 = 1000	b_4 = 500	b_5 = 600	

$a_1 = 1000$	2 300	8	M	3 700	M	M	M	$u_1 = 0$
$a_2 = 1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$a_3 = 1200$	1 1200	4	M	M	M	4 1	M	$u_3 = –1$
$d_1 = 2500$	0 700	M	1 900	3	8 900	5 1	4	$u_4 = 0$
$d_2 = 1200$	M	0	2	4	5 100	3 500	1 600	$u_5 = –3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

Визначимо вартість перевезень згідно з другим опорним планом:

$$Z_2 = 2 \times 300 + 3 \times 700 + 3 \times 300 + 5 \times 1200 + 1 \times 1200 +$$
$$+ 1 \times 900 + 8 \times 900 + 5 \times 100 + 3 \times 500 + 1 \times 600 = 21500 \text{ (ум. од.).}$$

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, має такий вигляд:

Таблиця 5.27

A_i, D_k	D_k, B_j							u_i
	$d_1 = 2500$	$d_2 = 1200$	$b_1 = 900$	$b_2 = 700$	$b_3 = 1000$	$b_4 = 500$	$b_5 = 600$	
$a_1 = 1000$	2 300	8	M	3 700	M	M	M	$u_1 = 0$
$a_2 = 1500$	3 300	5 1200	M	M	M	M	M	$u_2 = 1$
$a_3 = 1200$	1 700	4	M	M	M	4 500	M	$u_3 = –1$
$d_1 = 2500$	0 1200	M	1 900	3	8 400	5	4	$u_4 = 0$
$d_2 = 1200$	М	0	2	4	5 600	3	1 600	$u_5 = –3$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 3$	$v_5 = 8$	$v_6 = 6$	$v_7 = 4$	

В табл. 5.27 маємо оптимальний план транспортної задачі:

$$Z_{\min} = 2 \times 300 + 3 \times 700 + 3 \times 300 + 5 \times 1200 + 1 \times 700 + 4 \times 500 + 1 \times 900 + 8 \times 400 + 5 \times 600 + 1 \times 600 = 20000 \text{ (ум. од.).}$$

Для більшої наочності оптимальний план перевезень продукції двохетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми (рис. 5.1):

Рис. 5.1.Оптимальний план перевезень продукції

На схемі показано, що на перший склад надходить лише 300 + 300 + 700 = 1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не повністю (D_1D_1 = 1200 од.). Це зумовлено прямими поставками продукції за маршрутами A_1B_2 у обсязі 700 од. і A_3B_4 — у обсязі 500 од.

Розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план, який відрізняється від першого лише перевезеннями продукції зі складів до третього та п’ятого споживачів.

Крім розглянутої у транспортних задачах із проміжними пунктами можуть зустрічатися і такі ситуації:

1.Незбалансованість транспортної задачі (). У цьому разі необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача, звівши у такий спосіб задачу до закритого типу.

2. Місткість проміжних пунктів не дорівнює загальному обсягу продукції постачальників: а) коли (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що «перевозитиметься» до нього, має дорівнювати невивезеній частині продукції відповідного постачальника, або дозволити транзитні перевезення за обсягом не менш як (од.)); б) коли (у цьому разі немає потреби вводити фіктивного постачальника і, зрозуміло, що місткість проміжних пунктів повністю не використовуватиметься).

3.Місткість проміжних пунктів не відповідає загальній потребі споживачів: а) (у цьому разі потрібно або ввести фіктивний проміжний пункт, і обсяг продукції, що «перевозитиметься» від нього до споживача B_j, має означати незадоволений попит відповідного споживача, або дозволити пряме перевезення продукції від постачальників до споживачів за обсягом не менш як (од.)); б) (аналогічно п.2б).

5.8. Транспортна задача за критерієм часу

За деяких умов, наприклад, при перевезенні продукції, що швидко псується; матеріалів для аварійних та рятівних робіт тощо вартість перевезень має другорядне значення, а на перше місце виходить завдання мінімізації того часу, протягом якого здійснюються всі перевезення. Так виникає транспортна задача за критерієм часу.

Нехай задано m пунктів постачання $A_1, A_2,\dots, A_m$ з відповідними запасами одиниць продукції та n споживачів , потреби яких становлять відповідно , причому .

Позначимо через — обсяг продукції, що перевозиться від i-го постачальника j-му споживачеві.

Задано також витрати часу на здійснення перевезень від кожного постачальника до кожного споживача , і допускається, що вони не залежать від обсягів перевезень .

Необхідно знайти оптимальний план перевезень , що задовольняє умови:

; (5.39)

. (5.40)

Крім того, час T, який витрачатиметься на всі перевезення, був би мінімальним.

Так як всі перевезення закінчуються в той момент, коли закінчується найдовше з них, то T є максимальною величиною з усіх можливих значень , що відповідають ненульовим перевезенням (): .

Отже, критерієм оптимальності плану є мінімальна тривалість здійснення всіх перевезень, що формально записують так:

. (5.41)

Зауважимо, що ця задача не є задачею лінійного програмування, оскільки її цільова функція (5.41) не є лінійною функцією від змінних . Однак для розв’язування транспортної задачі за критерієм часу можна застосовувати ті самі методи розв’язання, що були розглянуті для транспортної задачі лінійного програмування.

Розглянемо алгоритм розв’язання сформульованої задачі, що ґрунтується на послідовному розв’язуванні ряду допоміжних задач, розглянутих в угорському методі.

1. Знаходять мінімальний елемент матриці тривалостей перевезень T. Позначимо мінімальний елемент, знайдений на першому кроці, через . Клітини транспортної таблиці, які відповідають мінімальному елементу, тобто де =, вважаються відкритими для перевезень, тоді як усі інші, де >, вважаються для них забороненими.

2. Розв’язують додаткову задачу з визначеною множиною заборонених для перевезень клітин . Якщо після цього кроку задовольняються умови задачі (5.39), (5.40), то оптимальний план знайдено і , а якщо ні, то переходять до третього кроку.

3. Аналогічно першому кроку знову знаходять мінімальний елемент серед тих елементів матриці тривалостей перевезень T, які відповідають клітинам, забороненим для перевезень. Нехай ним буде елемент величиною . Тоді всі ті клітини, для яких =, приєднують до клітин, відкритих для перевезень.

4. Аналогічно другому кроку розв’язують нову допоміжну задачу з іншою множиною клітин, заборонених для перевезень і перевіряють, чи виконуються умови (5.39), (5.40). Якщо вони задовольняються, то знайдений план оптимальний і . Якщо ж ні, то дії, аналогічні до описаних, повторюють, поки не буде знайдено оптимальний план.

Алгоритм скінченний, оскільки за умови балансу таблиця перевезень без заборонених клітин завжди може бути заповнена, а алгоритм забезпечує в разі потреби звільнення всіх клітин від заборони на перевезення.

Нехай умови транспортної задачі задано таблицею (табл. 5.28):

Таблиця 5.28

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1	3
$a_3 = 20$	3	2	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2

1. Знаходимо мінімальний елемент з . В даному разі це 1, позначимо його через .
2. Розв’язуємо допоміжну задачу, де забороненими для перевезень є всі клітини, для яких > (у табл. 5.29 сірим кольором виділені заборонені клітини).

Таблиця 5.29

	B_j

A_i				
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 16	3
$a_3 = 20$	3	2	8	4
$a_4 = 9$	1 —	4	3	2

Задача розв’язана, проте план не оптимальний.
3. Знаходимо мінімальний елемент серед клітин, що є забороненими для перевезень. Наступний мінімальний елемент дорівнює двом. Отже, .
4. Приєднуємо до відкритих для перевезень клітин ті, для яких , і знову розв’язуємо допоміжну задачу.

Таблиця 5.30

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 12	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2 9

Отриманий розв’язок (табл. 5.30) також не оптимальний.
5. Вибираємо наступний мінімальний елемент: .
6. Розв’язуємо наступну допоміжну задачу:

Таблиця 5.31

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3 2	4	5
$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 10	8	4
$a_4 = 9$	1	4	3	2 9

Це також не дає оптимального розв’язку (табл. 5.31).
7. Вибираємо мінімальний елемент .
8. Розв’язуємо задачу:

Таблиця 5.32

A_i	B_j			
	$b_1 = 8$	$b_2 = 12$	$b_3 = 16$	$b_4 = 14$
$a_1 = 10$	1 8	3 2	4	5

$a_2 = 11$	2	5	1 11	3
$a_3 = 20$	3	2 10	8	4 10
$a_4 = 9$	1	4	3 5	2 4

Умови оптимальності в табл. 5.32 виконуються, отже, цей план оптимальний. Звідси min $T = 4$.

5.9. **Розв'язування транспортної задачі на мережі**

Серед сучасних методів оптимізації і керування виробничими процесами значна роль належить мережевим методам. Широке коло задач математичного програмування можна подати в мережевому вигляді. Особливо це стосується транспортних задач, які мають цілком природну інтерпретацію як мережеві задачі, бо вони пов'язані з певною мережею транспортних маршрутів (доріг, залізничних, водяних шляхів, маршрутів повітряних трас, трубопроводів тощо). У цьому параграфі буде розглянуто кілька типових мережевих задач математичного програмування.

Назвемо ***графом*** будь-яку систему відрізків (прямолінійних чи криволінійних), у певний спосіб з'єднаних між собою (рис.5.2).

Названі відрізки, якщо їм приписано напрям, називаються ***дугами графа***; надалі позначатимемо їх , наприклад: — відрізок, що з'єднує точку 1 з точкою 2 (рис. 5.2).

Точки, що є кінцями або початками дуг графів, в яких можуть з'єднуватись дві дуги або більше, називаються ***вершинами*** графа: кожна з вершин позначається певним номером (натуральним числом: 1, 2, 3, 4, ...), наприклад, точки 1, 2, 3, — вершини (рис. 5.2).

Отже, кожній дузі відповідає впорядкована пара вершин , де перший індекс i означає початок дуги (вхід), другий індекс j — кінець дуги (вихід); тим самим задано орієнтацію (напрям) дуги, що геометрично зображається стрілкою в напрямі від початку до кінця дуги.

Дуги та ***називаються симетричними, або взаємними***, наприклад: (2, 4) і (4, 2).

Ребром (або ***ланкою***) графа називається ненапрямлений відрізок, що зображає дугу. Позначимо ребра символами , наприклад [5, 7] — ребро; тоді як для відповідних дуг ця рівність не справджується: .

Мережею **(*або сіттю*)** називається граф, елементам якого (дугам, вершинам, деяким їх сукупностям) поставлені у відповідність деякі параметри, що визначають їх властивості.

Такими параметрами можуть бути, наприклад, пропускні здатності шляхів, величини запасів чи потреб у певних пунктах — вершинах графа тощо.

Шляхом у графі називається послідовність дуг , кінець кожної з яких збігається з початком наступної, крім останньої (або початок кожної з яких збігається з кінцем попередньої, крім першої), тобто ..., .

Шлях зручно позначати послідовністю вершин, через які він проходить, тобто . Прикладом шляху є послідовність таких дуг (1, 2), (2, 3), (3, 5) або (1,2, 3, 5).

Контуром називається шлях, початкова вершина якого збігається з кінцевою, наприклад (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 1) = (1, 2, 3, 5, 1).

Граф називається сильно (чи міцно) зв'язаним, якщо будь-які його вершини i і j можна з'єднати шляхом, що йде з i в j.

Якщо в означеннях шляху, контуру і сильної зв'язаності графа поняття дуги замінити поняттям ребра, то дістанемо означення ланцюга, циклу і зв'язаності графа.

Легко збагнути, що ребра дуг, які утворюють шлях і контур, завжди утворюють відповідно ланцюг і цикл, проте зворотне твердження не справджується. Це саме стосується і зв'язаності: зв'язаний граф не обов'язково буде міцно зв'язаним.

Ланцюг і цикл позначають аналогічно до шляху і контуру, проте замість круглих використовують квадратні дужки, наприклад, ланцюг [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 6], або [1, 2, 3, 4, 6]; цикл [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 6], [6, 1], або [1, 2, 3, 4, 6, 1]; відповідні послідовності дуг не завжди є шляхами чи контурами.

Деревом називається граф, який не має циклів і в якому кожна вершина зв'язана з будь-якою іншою деяким ланцюгом ребер.

5.9.1. Транспортна задача у мережевій формі

Нехай задано граф із скінченною кількістю вершин і ребер. Поставимо у відповідність кожній вершині деяке число (i = 1, 2, ..., m), яке назвемо інтенсивністю i-ої вершини, а кожній дузі (ij) — число — пропускну здатність (ij)-ої дуги, відносячи ці величини до певного відрізка часу t (0 < t <), наприклад, до певної одиниці часу. За цих умов скінченний граф перетворюється в мережу (сіть). Позначимо через невідому величину, що означає обсяг деякої продукції, яку переміщають по (ij)-й дузі за деякий відрізок часу. Тоді для цього самого відрізка часу для кожної k-ої вершини графа можна записати таку балансову рівність:

. (5.42)

Справді, перша сума означає сумарний обсяг певної продукції, що протягом означеного часу прибуває в k-ту вершину по дугах, а друга сума означає сумарний обсяг цієї продукції, що вибуває по дугах з k-ої вершини за той самий час. Отже, є обсягом розглядуваної продукції, який споживається (акумулюється) в k-ій вершині, а є обсягом цієї продукції, який виділяється (продукується) вершиною за згаданий відрізок часу. Вершину, для якої , називатимемо ***стоком***, а вершину, для якої — ***джерелом***. Вершини, в яких , назвемо ***нейтральними***.

Природно вважати змінні і невід'ємними і обмеженими зверху числами і , так що:

. (5.43)

У свою чергу, можна вважати, що величини і можуть змінюватися в таких межах:

. (5.44)

Рівняння (5.42) можна трактувати як рівняння безперервності потоку розглядуваної продукції по певній мережі (доріг, трубопроводів і т. п.) в деякому околі k-ої вершини (пункту). Прикладом може бути рівняння збереження кількості рідини, що проходить по трубопровідній мережі.

Можна поставити вимогу, щоб за заданих величин інтенсивностей джерел та стоків і величин пропускних здатностей дуг знайдені значення невідомих задовольняли деякий критерій оптимальності, наприклад, надавали мінімального значення лінійній функції:

. (5.45)

Легко помітити, що сформульована сітьова транспортна задача (5.42)—(5.45) є узагальненням звичайної транспортної задачі (5.1)—(5.4) за умови наявності проміжних пунктів перевезень і обмежених пропускних здатностей шляхів сполучення.

5.9.2. Метод потенціалів на мережі

Розглянемо без доведення розв'язування транспортної задачі на мережі методом потенціалів. Зобразимо задачу у вигляді мережі (рис. 5.2.), де на кожній дузі цифрами у кружечках позначені вартості перевезень одиниці продукції; для спрощення вважатимемо ці вартості однаковими в обох напрямках ребра, а пропускні здатності ребер необмеженими зверху. Зауважимо, що .

Пункти відправлення і запаси в них позначимо відповідними цифрами (що дорівнюють запасам) із знаком «плюс», а пункти доставки — цифрами, що дорівнюють потребам, із знаком «мінус» (стоять у дужках).

На першому етапі складаємо початковий план перевезень: напрям вантажопотоків показуємо стрілками, а кількість вантажів — цифрою над (під) відповідною стрілкою.

Рис. 5.3

Як видно з рис. 5.3, початковий план утворюють змінні:

,

.

Якщо сіть містить m вершин, то система (5.42) складається з m рівнянь, а її ранг має дорівнювати . У нашому прикладі план містить рівно відмінних від нуля базисних змінних, отже, він невироджений.

Скористаємося без доведення теоремою [28]: для того, щоб деяка частина графа відповідала базисним змінним задачі (5.42)—(5.44), необхідно і достатньо, щоб вона була деревом.

У нашому прикладі початковий план не утворює контурів, тобто відповідає множині базисних змінних, отже, є опорним планом задачі.

На другому етапі для кожної вершини визначаємо потенціал. Перший потенціал вибираємо довільно, найчастіше з певних міркувань зручності в дальших обчисленнях пов'язуємо його з довільною вершиною, наприклад, першою. Потенціали інших вершин визначаємо, виходячи з першого потенціалу, а саме: потен з першою, прирівнюємо до різниці першого потенціалу і вартості перевезення від першої вершини до заданої, якщо вантаж іде в цьому напрямі, і, відповідно, сумі потенціалу першої вершини і вартості перевезення з сусідньої вершини в першу, якщо саме в цьому напрямі перевозиться вантаж. Отже, потенціали всіх вершин розглядуваної мережі визначаться такими цифрами:

;
;
;
.

Третій етап полягає в перевірці плану на оптимальність, причому використовується звичайна ознака оптимальності плану транспортної задачі, яка формулюється в термінах і позначеннях транспортної задачі на мережі. Для ребер мережі, вільних від перевезень, тобто для , невід'ємна різниця потенціалів вершин, які їх обмежують (стоять на їх кінцях), має бути меншою від відповідної вартості перевезення або дорівнювати їй. Складаємо відповідні співвідношення:

;
;
;
;
.

Для базисних ребер відповідні різниці точно дорівнюють вартостям перевезень, що є однією з умов оптимальності плану транспортної задачі. Отже, умова оптимальності порушена лише один раз на ребрі (4; 3). Якщо таких порушень більше ніж одне, то вибираємо ребро з найбільшим порушенням. Утворимо цикл з базисних ребер і небазисного ребра (4; 3), що проходить через вершини (4, 3, 1, 5, 6, 2, 4). Напрям обходу збігається з напрямом потоку, який планується вести по ланці (4; 3) — від вершини 4 до вершини 3, оскільки маємо нерівність . Отже, обходимо цикл проти руху стрілки годинника. Обмеження (5.42) не будуть порушені, якщо ми, вибравши в цьому циклі найменший зустрічний потік у ланці (2; 6), відніматимемо його величину від зустрічних потоків у ланках циклу і додаватимемо до потоків, напрями яких збігаються з напрямом обходу. Тоді ланка (2; 6) стає вільною від потоку, а ланка (4; 3) — базисною (рис 5.4).

Рис. 5.4

Перевіримо план на оптимальність. Для цього визначимо нову систему потенціалів, виправивши попередню:

.

Перевірку слід зробити лише для тих вільних ребер, для яких хоча б в одній з вершин змінилося значення потенціалу, а саме – для (1, 2), (2, 6):

;
.

Отже, всі умови оптимальності задовольняються і оптимальний план знайдено:

.

Зауважимо, що при розв'язуванні наведеної сітьової задачі методом потенціалів можуть траплятися випадки виродження. Ознакою виродження є план, що складається з двох або більше окремих дерев базисних ребер, не з'єднаних між собою. Для усунення цього треба ввести в базис вільну ланку, яка з'єднувала б означені дерева базисних ланок між собою.

Отже, методом потенціалів розв'язано сітьову транспортну задачу з проміжними пунктами і заборонами на перевезення між деякими пунктами, тобто відсутністю в мережі відповідних ребер (шляхів). Ми вважали, що пропускні здатності ребер необмежені зверху, тому, зазначений алгоритм придатний лише в тому разі, коли знайдені за оптимальним планом перевезення не перевищують пропускних здатностей реальних ланок транспортної мережі, але вони завжди обмежені зверху.

У літературі [28] можна знайти детальніший опис розв'язання сітьових транспортних задач.

5.10. **Приклади економічних задач**, **що зводяться до транспортних моделей**

Транспортна задача часто використовується для розв'язання економічних задач, які за умовою не мають нічого спільного з транспортуваннями вантажів, і величини можуть залежно від конкретної задачі означати відстань, час, продуктивність тощо. Наведемо постановку найтиповіших економічних задач, що зводяться до транспортної моделі.

Оптимальний розподіл обладнання. Домовимося для спрощення, що розглядається модель закритої транспортної задачі (будь-яка відкрита задача зводиться до закритої перетвореннями, розглянутими в §5.5).

Обладнання m різних видів необхідно розподілити між n виробничими дільницями. Продуктивність одиниці обладнання i-го виду на j-ій виробничій дільниці дорівнює , . Відомі потреби кожної j-ої дільниці в обладнанні, що становлять , а також запаси обладнання кожного i-го виду — . Необхідно знайти оптимальний розподіл обладнання за виробничими дільницями, за якого сумарна продуктивність виробництва буде максимальною.

Ця задача зводиться до транспортної за умови, що продуктивність лінійно залежить від кількості застосовуваного обладнання. «Постачальниками» в задачі є види обладнання, а «споживачами» — виробничі дільниці. Запаси постачальників — це наявна кількість обладнання кожного виду, а потреби споживачів — вимоги на необхідну кількість обладнання для кожної виробничої дільниці.

Нехай — кількість одиниць обладнання i-го виду, яку буде виділено j-ій виробничій дільниці . Сумарна продуктивність виробництва визначатиметься за формулою: . Оскільки запаси кожного типу обладнання обмежені, то маємо: , . З другого боку, потреби кожної дільниці в обладнанні є також фіксованими, тому: , . Отже, загалом ми маємо таку математичну модель транспортної задачі:

max

У даній задачі необхідно максимізувати значення цільової функції F. Для переходу до стандартної моделі транспортної задачі слід замінити функцію F на протилежну функцію , яку необхідно мінімізувати:

.

Розв'язуючи цю задачу, будемо використовувати взяті з протилежними знаками значення продуктивностей . Розв'язок можна відшукати одним з відомих методів.

Розглянемо приклад задачі про оптимальний розподіл обладнання.

Машинно-тракторний парк, який обслуговує кілька фермерських господарств, налічує 23 трактори, з них:

«Бєларусь», МТЗ-80 — 8 одиниць,
ЮМЗ-6АЛК — 10 одиниць,
MEZZO 6100 — 5 одиниць.

Одночасно надійшли замовлення від трьох фермерських господарств з такими потребами: 10, 5 і 5 одиниць техніки. Залежно від виконуваних технологічних операцій та особливостей ґрунтів господарств продуктивність виконання робіт зазначеними тракторами в кожному з господарств є різною і подається в табл. 5.33.

Таблиця 5.33

Трактор	Продуктивність трактора в господарстві, еталонних гектарів на добу		
	I господарство	II господарство	III господарство
«Бєларусь», МТЗ-80	50	63	59
ЮМЗ-6АЛК	49	56	50
MEZZO 6100	61	58	62

Визначити оптимальний розподіл техніки по господарствах.

Для розв'язування задачі скористаємось методом потенціалів. Задача належить до відкритого типу транспортних задач, бо кількість наявної техніки дорівнює 23 одиницям, а потреби — 20 одиницям, тому необхідно ввести фіктивного споживача (четверте господарство) з потребою, що дорівнює 3 одиницям техніки.

Всі значення продуктивностей техніки з наведеної таблиці використовуватимемо, розв'язуючи задачу, з протилежним знаком.

Застосовуючи метод потенціалів, отримаємо оптимальний план розподілу техніки, що наведений у табл. 5.34.

Таблиця 5.34

Трактор	Продуктивність трактора в господарстві, етал. га на добу			
	I господарство (10 один.)	II господарство (5 один.)	III господарство (5 один.)	IV господарство (фіктивне) (3 один.)
«Бєларусь», МТЗ-80 (8 один.)	–50	–63 3	–59 5	0
ЮМЗ-6АЛК (10 один.)	–49 5	–56 2	–50	0 3
MEZZO 6100 (5 один.)	–61 5	–58	–62	0

За оптимальним планом кожне господарство отримує потрібну кількість тракторів. Однак, оскільки задача належить до відкритого типу, значення відповідає фіктивно введеному споживачеві. Це означає, що трактори ЮМЗ-6АЛК будуть розподілені не повністю. З десяти їх одиниць розподілено тільки 7.

Загальне значення продуктивності тракторів становить 1146 еталонних гектарів на добу.

Задача про призначення. Потрібно виконати n видів робіт, на які претендують n кандидатів. Витрати на оплату праці i-го кандидата за виконання j-ої роботи дорівнюють . Кожен кандидат може бути призначений лише на одну роботу, і кожна робота має виконуватися лише одним кандидатом. Потрібно знайти оптимальне призначення кандидатів на виконання робіт, за якого сумарні витрати на виконання всіх робіт будуть мінімальними.

Нехай дорівнює одиниці, якщо i-ий кандидат виконує j-ту роботу, та дорівнює нулю в протилежному разі. Тоді умову, що кожен кандидат має виконувати лише одну роботу, запишемо у вигляді: . Умова виконання кожної роботи лише одним кандидатом має вигляд: . Цільова функція має такий вираз: . Отже, маємо математичну модель транспортної задачі:

min

Найзручнішим методом розв'язання задачі про призначення є угорський метод.

Розглянемо приклад економічної постановки задачі про призначення.

Науково-дослідний інститут отримав замовлення на виконання чотирьох дослідних проектів. Кінцеві результати першого проекту є початковими даними для другого проекту, а кінцеві результати другого проекту — початковими для третього і, нарешті, результати третього проекту є початковими значеннями для четвертого. Виконавцями проектів можуть бути чотири відділи інституту. Кожен відділ визначив кількість часу, яка необхідна для виконання ним науково-дослідних робіт. Матриця витрат часу має вигляд:

.

Кожен елемент a_{ij} матриці Т означає тривалість виконання i-им відділом j-го проекту. Витрати часу наведені в тижнях. Необхідно так вибрати відділи, які будуть працювати над проектами, щоб тривалість виконання всіх проектів була мінімальною.

Для розв'язування задачі вводимо змінні: , якщо i-ий відділ призначено для виконання j-го проекту; та в протилежному разі.

Розв'язуючи задачу угорським методом, матимемо два альтернативні оптимальні плани. Перший оптимальний план:

,

тобто перший відділ слід призначити для виконання першого проекту ();
другий відділ — для виконання другого проекту ();
третій відділ — для виконання третього проекту ();
а четвертий відділ — для виконання четвертого проекту ().
За такого розподілу виконавців загальна тривалість виконання чотирьох проектів дорівнюватиме:

.

Другий оптимальний план:.
В такому разі тривалість виконання всіх проектів також дорівнюватиме 17 тижням:

.

Заключні зауваження

Практичне застосування класичної економіко-математичної моделі транспортної задачі наштовхується на певні труднощі. Насамперед, як правило, необхідно перевозити неоднорідні продукти. Тоді транспортна задача ускладнюється. Економіко-математичну модель для багатопродуктової транспортної задачі запишемо так:

за умов: ,

;

,

;

,

де k — вид продукції, яку треба перевезти.

Часто господарські зв'язки між постачальниками і споживачами вимагають відповідних обмежень:

;

,

де M_1, M_2 — відповідні множини індексів i, j, за якими вводяться обмеження на обсяги перевезень i-ї продукції до j-го споживача. Обмеженнями гарантується, що відповідний j-й споживач отримає i-ї продукції не менше від заданого обсягу. Обмеженнями виду описують транспортні можливості.

У класичній транспортній задачі, як правило, критерієм оптимальності є мінімізація транспортних витрат, тобто розв'язується задача на мінімум. Проте на практиці бувають випадки, коли необхідно знайти максимум цільової функції. Наприклад, необхідно розподілити робітників (верстати) між окремими видами робіт, щоб отримати максимальну сумарну продуктивність праці. Подібна ситуація має місце за оптимізації розміщення сільськогосподарських культур на ділянках землі різної якості. У такому разі критерієм оптимальності є максимізація вартості вирощеної (валової) продукції.

У класичній транспортній задачі допускається, що витрати на транспортування лінійно залежать від обсягів перевезень. Але на практиці ця умова порушується, тобто такі зв'язки, як правило, є нелінійними, стохастичними тощо. Особливої уваги заслуговує така постановка транспортної задачі, в якій необхідно мінімізувати тривалість виконання заданих обсягів робіт, наприклад, перевезення сировини та продукції, яка швидко псується. Цей критерій часто використовується для оптимізації військових операцій, виконання сільськогосподарських робіт (наприклад, збору урожаю) тощо.

Транспортна задача значно ускладнюється за моделювання виробничо-транспортних економічних систем, які виробляють продукцію в широкому асортименті, а для перевезення її застосовують різні види транспорту.

Контрольні запитання

1. *Опишіть економічну і математичну постановку класичної транспортної задачі.*
2. *Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?*
3. *Сформулюйте необхідну і достатню умови існування розв'язку транспортної задачі.*
4. *Які ви знаєте властивості опорних планів транспортної задачі?*
5. *Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?*
6. *Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?*
7. *Які ви знаєте методи побудови опорного плану?*
8. *Побудуйте невироджений опорний план методом північно-західного кута: для задачі:* $a_i = 50, 70, 90;$ $b_j = 70, 65, 70, 75.$
9. *Що означає «виродження» опорного плану? Як його позбутися?*
10. *Назвіть етапи алгоритму методу потенціалів.*
11. *Як обчислюють потенціали?*
12. *Назвіть умови оптимальності транспортної задачі.*
13. *Опишіть економічну і математичну постановку двохетапної транспортної задачі.*
14. *Назвіть особливості розв'язування транспортних задач з обмеженнями виду .*

Приклади та завдання для самостійної роботи

Розв'язати наведені нижче транспортні задачі:

Задача 5.1.

$a_i = (8; 10; 5);$
$b_j = (5; 5; 10);$.

Задача 5.2.

$a_i = (8; 7; 6);$
$b_j = (7; 10; 6);$.

Задача 5.3.

$a_i = (15; 10; 5; 20);$
$b_j = (10; 20; 15);$.

Задача 5.4.

a_i = (10; 20; 40);
b_j = (30; 10; 60).

«До табунника прийшли три козаки купувати коней.«Добре, я вам продам коней, — сказав табунник, — першому я продам півтабуна і ще півконя, другому — половину коней, що залишаться,і ще півконя, третій також здобуде половину коней, що залишаться, з півконем. Собі ж я залишу тільки 5 коней». Здивувалися козаки, як це табунник буде розділяти коней на частини. Але після деяких роздумів вони заспокоїлися, і угода відбулася»

(Задача з книги, виданої у XVIII столітті).

РОЗДІЛ 6. ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

6.1.Економічна і математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування

Існує доволі широке коло задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах тощо.

Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як вибір послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею ***цілочислового програмування***. У тому разі, коли цілочислових значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається ***частково цілочисловою***.

До цілочислового програмування належать також ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

Умова цілочисловості є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. У даному розділі розглянемо задачі математичного програмування, в яких крім умови цілочисловості всі обмеження та цільова функція є лінійними, що мають назву ***цілочислових задач лінійного програмування***.

Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{6.2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{6.3}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{6.4}$$

Слід зазначити, що у розглянутих в попередньому розділі класичній транспортній задачі та інших задачах транспортного типу (в задачах про призначення, про найкоротший шлях тощо) з цілочисловими параметрами початкових умов забезпечується цілочисловий розв’язок без застосування спеціальних методів, однак у загальному випадку вимога цілочисловості змінних значно ускладнює розв’язування задач математичного програмування.

6.2. Геометрична інтерпретація розв’язків цілочислових задач лінійного програмування на площині

Для знаходження оптимального розв’язку цілочислових задач застосовують спеціальні методи. Найпростішим з них є знаходження оптимального розв’язку задачі як такої, що має лише неперервні змінні, з дальшим їх округленням. Такий підхід є виправданим тоді, коли змінні в оптимальному плані набувають досить великих значень у зіставленні їх з одиницями вимірювання. Нехай, наприклад, у результаті розв’язування задачі про поєднання галузей у сільськогосподарському підприємстві отримали оптимальне поголів’я корів — 1235,6. Округливши це значення до 1236, не припустимося значної похибки. Проте за деяких умов такі спрощення призводять до істотних неточностей. Скажімо, множина допустимих розв'язків деякої нецілочислової задачі лінійного програмування має вигляд, зображений на рис. 6.1:

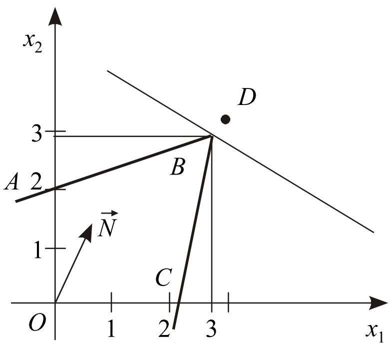


Рис. 6.1

Максимальне значення функціонала для даної задачі знаходиться в точці ***B***. Округлення дасть таке значення оптимального плану $x_1 = 3;\ x_2 = 3$ (точка ***D*** на рис. 6.1). Очевидно, що точка ***D*** не може бути розв'язком задачі, оскільки вона навіть не належить множині допустимих розв'язків (чотирикутник ***OABC***), тобто відповідні значення змінних не задовольнятимуть систему обмежень задачі.

Зауважимо, що геометрично множина допустимих планів будь-якої лінійної цілочислової задачі являє собою систему точок з цілочисловими координатами, що знаходяться всередині опуклого багатокутника допустимих розв'язків відповідної нецілочислової задачі. Отже, для розглянутого на рис. 6.1 випадку множина допустимих планів складається з дев'яти точок (рис. 6.2), які утворені перетинами сім'ї прямих, що паралельні осям Ox_1 та Ox_2 і проходять через точки з цілими координатами 0, 1, 2. Для знаходження цілочислового оптимального розв'язку пряму, що відповідає цільовій фу-

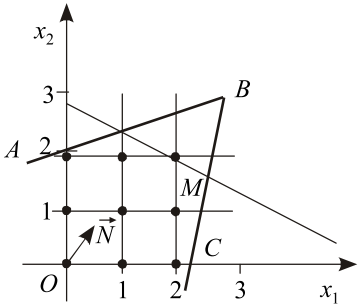


Рис. 6.2

нкції, пересуваємо у напрямку вектора нормалі $\vec{N}$ до перетину з кутовою точкою утвореної цілочислової сітки. Координати цієї точки і є оптимальним цілочисловим розв'язком задачі. У нашому прикладі оптимальний цілочисловий розв'язок відповідає точці ***M*** ($x_1 = 2$; $x_2 = 2$).

Очевидно, особливість геометричної інтерпретації цілочислової задачі у зіставленні зі звичайною задачею лінійного програмування полягає лише у визначенні множини допустимих розв'язків. Областю допустимих розв'язків загальної задачі лінійного програмування є опуклий багатогранник, а вимога цілочисловості розв'язку приводить до такої множини допустимих розв'язків, яка є дискретною і утворюється тільки з окремих точок. Якщо у разі двох змінних розв'язок задачі можна відшукати графічним методом, тобто, використовуючи цілочислову сітку, можна досить просто знайти оптимальний план, то в іншому разі необхідно застосовувати спеціальні методи.

6.3.Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:
- методи відтинання;
- комбінаторні методи;

2) наближені методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочичислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатогранник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв’язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв’язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв’язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв’язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв’язків.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв’язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв’язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв’язків.

Для розв’язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв’язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв’язок за прийнятний час або для розв’язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв’язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Головними показниками для зіставлення ефективності застосування конкретних наближених алгоритмів на практиці є такі: абсолютна Δ_1 та відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв'язків.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1), \quad \Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F — цільова функція (в даному разі для визначеності допускаємо вимогу відшукання максимального її значення); X_1— наближений розв'язок, знайдений деяким наближеним методом; X^* — оптимальний план задачі.

6.4.Методи відтинання. Метод Гоморі

В основу методів цілочислового програмування покладено ідею Данціга. Допустимо, що необхідно розв'язувати задачу лінійного програмування, всі або частина змінних якої мають бути цілочисловими. Можливо, якщо розв'язувати задачу, не враховуючи умову цілочисловості, випадково одразу буде отримано потрібний розв'язок. Однак така ситуація малоймовірна. Переважно розв'язок не задовольнятиме умову цілочисловості. Тоді накладають додаткове обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок. Таке додаткове обмеження називають ***правильним відтинанням***. Система лінійних обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв'язується отримана задача лінійного програмування. Якщо її розв'язок знову не задовольняє умови цілочисловості, то будується нове лінійне обмеження, що відтинає отриманий розв'язок, не зачіпаючи цілочислових планів. Процес приєднання додаткових обмежень повторюють доти, доки не буде знайдено цілочислового оптимального плану, або доведено, що його не існує.

Геометрично введення додаткового лінійного обмеження означає проведення гіперплощини (прямої), що відтинає від багатогранника (багатокутника) допустимих розв'язків задачі ту його частину, яка містить точки з нецілочисловими координатами, однак не торкається жодної цілочислової точки даної множини. Отриманий новий багатогранник розв'язків містить всі цілі точки, які були в початковому, і розв'язок, що буде отримано на ньому, буде цілочисловим (рис. 6.3).

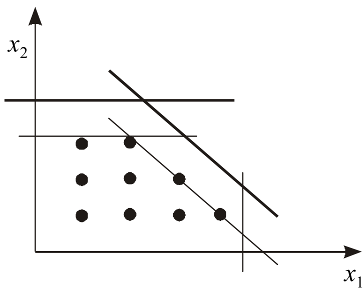


Рис. 6.3

Слід відмітити, що визначення правила для реалізації ідеї Данціга стосовно формування додаткового обмеження виявилось досить складним завданням і першим, кому вдалось успішно реалізувати цю ідею, був Гоморі.

Розглянемо алгоритм, запропонований Гоморі, для розв'язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування, що ґрунтується на використанні симплексного методу і передбачає застосування досить простого способу побудови правильного відтинання.

Нехай маємо задачу цілочислового програмування:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.5}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{6.6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{6.7}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{6.8}$$

Допустимо, що параметри a_{ij}, b_i, c_j $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ — цілі числа.

Не враховуючи умови цілочисловості, знаходимо розв'язок задачі (6.5)—(6.7) симплексним методом. Нехай розв'язок існує і міститься в такій симплексній таблиці:

Таблиця 6.1

Базис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n

			x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n
x_1	c_1	β_1	1	0	...	0	α_{1m+1}	...	α_{1n}
x_2	c_2	β_2	0	1	...	0	α_{2m+1}	...	α_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	c_m	β_m	0	0	...	1	α_{mm+1}	...	α_{mn}

Змінні $x_1, x_2, ..., x_m$ — базисні, а $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ — вільні. Оптимальний план задачі: $X^* = (в_1, в_2, ..., в_m, 0, 0, ..., 0)$. Якщо $в_j (j = \overline{1, n})$ — цілі числа, то отриманий розв'язок є цілочисловим оптимальним планом задачі (6.5)—(6.8). Інакше існує хоча б одне з чисел, наприклад, $в_i$ — дробове. Отже, необхідно побудувати правильне обмеження, що відтинає нецілу частину значення $в_i$.

Розглянемо довільний оптимальний план X^* задачі (6.5)—(6.7). Виразимо в цьому плані базисну змінну x_i через вільні змінні:

$$x_i = \beta_i - \alpha_{im+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{in} x_n = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j . \quad (6.9)$$

Виразимо коефіцієнти при змінних даного рівняння у вигляді суми їх цілої та дробової частин. Введемо позначення: $[в]$ — ціла частина числа β, $\{в\}$ — дробова частина числа β. Отримаємо:

$$x_i = [в_i] + \{в_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} [б_{ij}] x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{б_{ij}\} x_j , \quad (6.10)$$

або

$$x_i - [в_i] + \sum_{j=m+1}^{n} [б_{ij}] x_j = \{в_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{б_{ij}\} x_j . \quad (6.11)$$

Отже, рівняння (6.11) виконується для будь-якого допустимого плану задачі (6.5)—(6.7). Допустимо тепер, що розглянутий план X^* є цілочисловим оптимальним планом задачі. Тоді ліва частина рівняння (6.11) складається лише з цілих чисел і є цілочисловим виразом. Отже, права його частина також є цілим числом і справджується рівність:

$$\sum_{j=m+1}^{n}\{б_{ij}\}x_j=\{в_i\}+N, \qquad (6.12)$$

де N — деяке ціле число.

Величина N не може бути від'ємною. Якщо б $N \le -1$, то з рівняння (6.12) приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n}\{б_{ij}\}x_j=\{в_i\}+N\le\{в_i\}-1.$$

Звідки $\sum_{j=m+1}^{n}\{б_{ij}\}x_j+1\le\{в_i\}$. Тобто це означало б, що дробова частина $\{в_i\}$ перевищує одиницю, що неможливо. У такий спосіб доведено, що число N є невід'ємним.

Якщо від лівої частини рівняння (6.12) відняти деяке невід'ємне число, то приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n}\{б_{ij}\}x_j\ge\{в_i\}, \qquad (6.13)$$

яка виконується за допущенням для будь-якого цілочислового плану задачі (6.5)—(6.7). У такий спосіб виявилося, що нерівність (6.13) є шуканим правильним відтинанням.

Отже, для розв'язування цілочислових задач лінійного програмування (6.1)—(6.4) методом Гоморі застосовують такий алгоритм:

1.Симплексним методом розв'язується задача без вимог цілочисловості змінних — (6.1)—(6.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є розв'язком задачі цілочислового програмування (6.1)—(6.4).

Якщо задача (6.1)—(6.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (6.1) — (6.4) також не має розв'язку.

2.Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{б_{ij}\} x_j \geq \{в_i\}.$$

3.Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Отриману розширену задачу розв'язують і перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п.2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків на множині цілих чисел.

У літературі [12, 27] доведено, що за певних умов алгоритм Гоморі є скінченним, але процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Слід також мати на увазі, що і кількість ітерацій суттєво залежить від сформованого правильного відтинання. Наведене правило (6.13) щодо формування правильного відтинання не єдине. Існують ефективніші відтинання, які використовуються у другому та третьому алгоритмах Гоморі [12, 27], однак наявний практичний досвід ще не дає змоги виділити з них найкращий.

Загалом, алгоритм Гоморі в обчислювальному аспекті є мало вивченим. Якщо в лінійному програмуванні спостерігається відносно жорстка залежність між кількістю обмежень задачі та кількістю ітерацій, що необхідна для її розв'язування, то для цілочислових задач такої залежності не існує. Кількість змінних також мало впливає на трудомісткість обчислень. Очевидно, процес розв'язання цілочислової задачі визначається не лише її розмірністю, а також особливостями багатогранника допустимих розв'язків, що являє собою набір ізольованих точок.

Як правило, розв'язування задач цілочислового програмування потребує великого обсягу обчислень. Тому при створенні програм для ЕОМ особливу увагу слід приділяти засобам, що дають змогу зменшити помилки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

Розглянемо приклад розв'язування цілочислової задачі лінійного програмування методом Гоморі.

Приклад 6.1. Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн і можливість придбати устаткування двох типів: A і B. Техніко-економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл. 6.2:

Таблиця 6.2

Показник	Устаткування		Ресурс
	A	B	
Вартість, тис. грн	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн/рік	350	150	—

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 —кількість комплектів устаткування відповідно типу A і B.

Запишемо економіко-математичну модель задачі:

$$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$$

$$25x_1 + 10x_2 \le 100;$$

$$40x_1 + 20x_2 \le 190;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

x_1 і x_2 — цілі числа.

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набуде вигляду:

Таблиця 6.3

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - c_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду $\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{ij}\}x_j \geq \{b_j\}$:

$$\{0\}x_1 + \{1\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \geq \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набуває вигляду:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \geq \frac{1}{2}.$$

Приєднавши отримане обмеження до симплексної таблиці (табл. 6.3) з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

Таблиця 6.4

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	–M	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	–1	1
$Z_j - c_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв'язавши наведену задачу, знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$.

6.5.Комбінаторні методи. Метод гілок та меж

В основі комбінаторних методів є перебір можливих варіантів розв'язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певною послідовністю перебору варіантів та правилами виключення, що дають змогу ще в процесі розв'язування задачі виявити неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки. Відносна ефективність різних методів залежить від того, наскільки кожен з них уможливлює скорочення необхідного процесу перебору варіантів у результаті застосування правила виключення.

Розглянемо один із комбінаторних методів. Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача. Потім вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти x_j — цілочислову змінну, значення якої $x_j = x'_j$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок можна виключити з множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x'_j цілочисловими значеннями. Можна стверджувати, що на інтервалі $\left]\lfloor x'_j \rfloor; \lfloor x'_j \rfloor + 1\right[$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо x'_j=2,7 дістаємо інтервал $]2;3[$, де, очевидно, немає x_j, яке набуває цілого значення і оптимальний розв’язок буде знаходитися або в інтервалі $x_j \le 2$, або $x_j \ge 3$. Виключення проміжку $]2;3[$ з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей. Тобто допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей виду:

$$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor \text{ або } x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1 .$$

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві, не пов’язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочислового програмування (6.1)—(6.4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв’язуватимемо дві такі задачі:

перша задача:

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.14}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{6.15}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{6.16}$$

$$x_j \text{ — цілі числа, } j = \overline{1,n}; \tag{6.17}$$

$$x_j \le \lfloor x'_j \rfloor, \tag{6.18}$$

друга задача

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.19}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{6.20}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{6.21}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{6.22}$$

$$x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1, \tag{6.23}$$

де x'_j — дробова компонента розв'язку задачі (6.1)—(6.4).

Наведені задачі (6.14)—(6.18) і (6.19)—(6.23) спочатку послаблюємо, тобто розв'язуємо з відкиданням обмежень (6.17) і (6.22). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (6.1)—(6.4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для дальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з меншим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий останній план — оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують в процесі розв'язування відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв'язування задач немає сенсу розв'язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде почергово приєднати нові обмеження виду (6.18) і (6.23) до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (в разі необхідності) непотрібні «старі» обмеження.

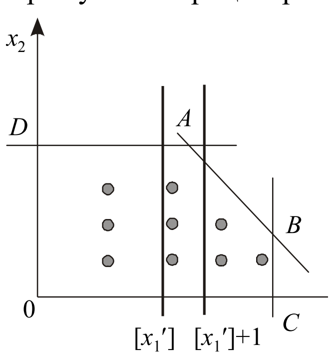


Рис. 6.4

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень виду (6.18) та

(6.23) в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлюється включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника (рис. 6.4). Допустимо, що *A* — точка максимуму, тоді за методом гілок та меж багатокутник допустимих планів задачі *ABCOD* поділяється на дві частини прямими $x_1 = [x_1']$ та $x_1 = [x_1'] + 1$, що виключає з розгляду точку А, координата якої x_1' є не цілим числом.

Опишемо алгоритм методу гілок та меж:

1. Симплексним методом розв’язують задачу (6.1)—(6.3) (без вимог цілочисловості змінних).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей розв’язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (6.1)—(6.4).

Якщо задача (6.1)—(6.3) не має розв’язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (6.1)—(6.4) також не має розв’язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних x_i і визначають її цілу частину $[x_i']$.

3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв’язки:

$$x_i \le [x_i'],$$
$$x_i \ge [x_i'] + 1.$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

Приклад 6.2. Розв'яжемо методом гілок і меж задачу з прикладу 6.1.

Розв'язання. Відкинувши умову цілочисловості, дістанемо розв'язок: x_1=1, x_2=$7\frac{1}{2}$. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[7\frac{1}{2}\right] = 7,$ або $x_2 \ge \left[7\frac{1}{2}\right] + 1 = 8$.

Приєднуємо до початкової задачі окремо кожне з обмежень, нехтуючи умовою цілочисловості, і розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі:

Задача I	Задача II
$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$	$\max Z = 350x_1 + 150x_2,$

$$25x_1+10x_2\le 100;\qquad\qquad 25x_1+10x_2\le 100;$$
$$40x_1+20x_2\le 190;\qquad\qquad 40x_1+20x_2\le 190;$$
$$x_2\le 7;\qquad\qquad x_2\ge 8;$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0;\qquad\qquad x_1\ge 0, x_2\ge 0;$$
x_1 і x_2 — цілі числа. x_1 і x_2 — цілі числа.

Для задачі I (з обмеженням $x_2\le 7$) оптимальним буде розв'язок $X'=(x_1=1{,}2;\ x_2=7)$, $Z'_{\max}=1470$, а для задачі II (з обмеженням $x_2\ge 8$) — розв'язок $X''=(x_1=0{,}75;\ x_2=8)$, $Z''_{\max}=1462{,}5$. Оскільки цілочислового плану не знайдено, процес необхідно продовжити, узявши для дальшого розгалуження першу задачу, оптимальний план якої дає більше значення функціонала. Розв'язуємо задачуI, окремо приєднуючи до неї обмеження: $x_1\le 1$ і $x_1\ge 2$. Отримуємо такі дві задачі:

Задача III

$$\max Z=350x_1+150x_2,$$
$$25x_1+10x_2\le 100;$$
$$40x_1+20x_2\le 190;$$
$$x_2\le 7;$$
$$x_1\le 1;$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0;$$
x_1 і x_2 — цілі числа.

Задача IV

$$\max Z=350x_1+150x_2,$$
$$25x_1+10x_2\le 100;$$
$$40x_1+20x_2\le 190;$$
$$x_2\le 7;$$
$$x_1\ge 2;$$
$$x_1\ge 0, x_2\ge 0;$$
x_1 і x_2 — цілі числа.

Розв’язком задачі III є план $X''' = (x_1 = 1; x_2 = 7)$, $Z'''_{\max} = 1400$, а задачі IV план $X'''' = (x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z''''_{\max} = 1450$. Обидва розв’язки є цілочисловими, проте краще значення цільової функції забезпечує розв’язок задачі IV. Тому оптимальним планом початкової цілочислової задачі буде $X^* = (x_1 = 2; x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$, що збігається з розв’язком, отриманим за методом Гоморі.

Схема процесу розв’язування задачі з прикладу 6.1 (рис. 6.5) досить наочно пояснює назву методу гілок та меж. Початкова задача розділяється (гілкується) на дві простіші, і, якщо серед них не існує задачі з цілочисловим оптимальним розв’язком, то процес гілкування продовжується. Отже, всі розглянуті дії можна зобразити у вигляді «дерева»:

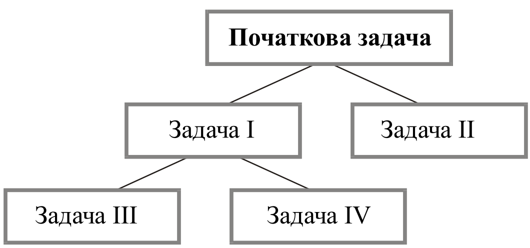


Рис. 6.5

Кожен елемент такого «дерева» — це певна задача, що має відповідний оптимальний план. Після одержання нецілочислового розв’язку послабленої (тобто без умови цілочисловості) початкової задачі ми перетворили її на дві інші з додатковими умовами. З них кращим виявився розв’язок задачі I, однак оскільки він був не цілочисловим, то ми продовжили процес гілкування. Задачу I введенням додаткових обмежень перетворили в задачу III та задачу IV. Оптимальні плани обох цих задач цілoчислові, але план задачі IV дає більше значення функціонала, тому цілочисловим оптимальним планом початкової задачі є розв'язок задачі IV.

Коротко розглянемо без наведення прикладів ще один цікавий метод, який можна віднести до типу комбінаторних (його детальний опис є в літературі [12]) — метод послідовного аналізу варіантів. Загальна схема цього методу розроблена українським вченим В. С. Михалевичем, який працював у київському Інституті кібернетики. Ідея цього методу полягає в послідовному повторенні таких процедур:

1) розбиття множини варіантів розв'язків задачі на кілька підмножин, кожна з яких має специфічні властивості;

2) використання вищезазначених властивостей для пошуку логічних суперечностей в опису окремих підмножин;

3) виключення із дальшого розгляду тих підмножин варіантів розв'язків, в описах яких є логічні суперечності.

Отже, методика послідовного аналізу варіантів базується на відсіві неперспективних варіантів ще до їх побудови. Оскільки у разі відсіву неперспективних початкових частин варіантів відсівається і вся процедура продовжень їх розрахунків, то досягається значна економія часу через скорочення обчислювальних операцій. Відсів неперспективних елементів відбувається як за обмеженнями, так і за цільовою функцією. Основа методу послідовного аналізу варіантів полягає у визначенні правила, за яким буде здійснюватися відсів безперспективних значень змінних, у результаті чого постійно звужуватиметься множина значень, для якої відшукують оптимум.

Зрозуміло, що для кожного типу задач цілочислового програмування формулюються специфічні правила для відсіву варіантів.

Метод послідовного аналізу варіантів успішно застосовувався для розв'язування різноманітних задач оптимального планування та проектування. Наприклад, для розрахунку транспортних мереж, розміщення на мережі типу дерева, проектування розподільних електричних мереж, вибору оптимальних параметрів магістральних газопроводів тощо.

6.6.Наближені методи. Метод вектора спаду

Розроблення та дослідження наближених алгоритмів є досить перспективним напрямком цілочислової оптимізації. Наближені методи заслуговують на увагу більше з практичного погляду, оскільки, як зазначалося вище, застосування точних методів потребує невиправдано значних витрат часу, тоді як пошук наближеного розв’язку дає змогу суттєво скоротити процес знаходження оптимального плану задачі.

Особливо вдалою в літературі, присвяченій проблемам наближених методів, є така ідея формування наближених алгоритмів розв’язування цілочислових задач. Вибирається початковий допустимий план задачі. З таким можливим варіантом розв’язку пов’язується певна (не дуже широка) множина варіантів, які утворюють окіл початкового варіанта. Перебираючи елементи околу, здійснюється перехід до кращого плану або фіксується локальна оптимальність певного варіанта. В першому випадку процес локального покращання плану продовжується, а в другому здійснюється випадковий вибір наступного плану, який беруть за початок пошуку нового оптимального плану. Отже, подібні методи мають вказувати спосіб визначення околу та механізм випадкового пошуку. Крім того, необхідно також ввести правило, за допомогою якого визначається момент закінчення процесу пошуку наближеного розв’язку.

Розглянемо без детальних доведень один з наближених методів, що дає назву методу вектора спаду [27]. Його розробив І.В. Сергієнко в середині 60-х років. У загальному випадку цей метод дає змогу знаходити локальний мінімум цільової функції, проте, якщо вона має відповідні властивості опуклості, то він приводить до визначення глобального мінімуму.

Допустимо, що розглядається задача цілочислового програмування виду:

$$\min F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \tag{6.24}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{6.25}$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{6.26}$$

$$x_j \text{ — цілі числа } \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{6.27}$$

Перш ніж описувати алгоритм методу, введемо деякі необхідні поняття.

Нехай M — деякий дискретний точковий простір. $\Omega \subset M$ — множина допустимих планів деякої цілочислової задачі виду (6.24)—(6.27). Введемо метрику в простір M, тобто функцію, що визначає відстань між довільними точками цього простору X та Y. Позначимо її через $\rho(X,Y)$. Метрика $\rho(X,Y)$ має задовольняти три аксіоми:

1) аксіому тотожності: $\rho(X,Y)=0,$ за умови, що $X = Y$;

2) аксіому симетрії: $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$;

3) аксіому нерівності трикутника: $\rho(X,Y)+\rho(Y,Z)\geq \rho(X,Z)$.

З аналітичної геометрії відомо, що відстань між точками (функцію $\rho(X,Y)$) можна визначати по-різному. Зокрема, у прямокутній декартовій системі координат це може бути довжина вектора $\overrightarrow{XY}$, тобто $\rho(X,Y)=\left|\overrightarrow{XY}\right|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, де x_i, y_i — відповідно координати точок X та Y у просторі M.

Нехай X' деякий допустимий план задачі дискретного програмування. Якщо взяти деяке число $r>0,$ то множина всіх точок $Y \in M_r,$ для яких виконується нерівність $\rho(X',Y)<r,$ називається *відкритим околом* з центром у точці X' і радіусом r, а множина

всіх точок $Y \in M_r$, для яких виконується нерівність $\rho(X', Y) \le r$, називається *закритим околом*.

Визначимо деякий окіл M_{r_1} точки X' з радіусом r_1, такий, щоб крім плану X' він містив би і інші плани задачі, для чого r_1 має бути не меншим від деякої величини R. Далі розглядатимемо лише зазначені околи планів задачі. Визначимо функцію $\Delta(X, Y)$ у такий спосіб: $\Delta(X, Y) = F(Y) - F(X)$.

Назвемо *вектором спаду* $\vec{V}$ функції $F(X)$ у деякому околі M_R довільної точки X' (що є одним з допустимих розв'язків задачі цілочислового програмування $X' \in \Omega$ такий вектор, компонентами якого є величини $\Delta_i = \Delta(X; X_i)$, де $X_i \left(i = \overline{1, I}\right)$ — плани задачі, що належать околу M_R.

Очевидно, що при невід'ємності всіх компонент вектора спаду $(\Delta_i \ge 0)$ в околі точки X' матимемо для будь-якого значення $X_i \in M_R$:

$$\Delta_i = \Delta(X', X_i) = F(X_i) - F(X') \ge 0.$$

Остання нерівність означає, що точка X' є точкою локального мінімуму функції $F(X)$ відносно виділеного околу M_R, тобто:

$$F(X') = \min_{X_i \in M_r \cap \Omega} F(X_i).$$

Якщо ж деякі компоненти вектора спаду будуть від'ємними, то це означає, що X' не є точкою мінімуму в зазначеному околі, оскільки в деяких точках цього околу функція $F(X)$ набуває менших значень. Причому та точка $\widetilde{X}$ виділеного околу, для якої різниця $\Delta_i = \Delta\left(X', \widetilde{X}\right) = F\left(\widetilde{X}\right) - F(X') < 0$ буде найменшою, визначає напрям найшвидшого спаду (зменшення) цільової функції $F(X)$, оскільки $F\left(\widetilde{X}\right) - F(X') < 0 \Rightarrow F\left(\widetilde{X}\right) < F(X')$. Цей очевидний факт і лежить в основі обчислювальної схеми застосування методу вектора спаду.

Ідея методу полягає у визначенні компонент вектора спаду для деякої початкової точки. Якщо всі вони невід'ємні, то точку локального мінімуму знайдено, інакше знаходимо центр нового околу і перевіряємо його компоненти на невід'ємність. Процес пошуку розв'язку є послідовним перебором точок, що зменшують значення цільової функції.

Як правило, на кожному кроці алгоритму (тобто для кожного нового околу) не потрібно обчислювати всі компоненти вектора спаду, а лише частину з них, що дає істотний виграш в обсязі і тривалості обчислень.

Наведемо один з можливих алгоритмів реалізації методу вектора спаду.

1.Вибрати початкову точку X_0 і радіус околу R так, щоб точка X_0 була допустимим планом відповідної задачі цілочислового програмування $(X_0 \in \Omega)$, а окіл був таким, що містить також інші допустимі плани задачі. Цей вибір може здійснюватись випадково з податковою перевіркою виконання зазначених умов.

2.Визначаються компоненти вектора спаду в вибраному околі. Якщо всі його компоненти невід'ємні, то точку локального мінімуму знайдено (тобто задача розв'язана і оптимальним цілочисловим планом є $X^* = X_0$).

3.Якщо не всі компоненти вектора спаду невід'ємні, то вибираємо компоненту Δ_i, яка має найменше значення і визначає точку $\widetilde{X}$, що зменшує значення цільової функції і є центром нового околу.

4.Повертаємось до пункту 2. Процес продовжуємо, поки для деякого $\widetilde{X}_k$ всі компоненти відповідного вектора спаду не будуть невід'ємними.

Приклад 6.3. Розв'яжемо цілочислову задачу, використовуючи зміст прикладу 6.1.

Розв'язання. Нехай $X_0(x_1 = 0; x_2 = 0), R = 15.$ Вибрана точка є допустимим планом задачі, оскільки задовольняє всі обмеження і умову цілочисловості, а окіл вибраного радіуса містить інші плани задачі, наприклад, точку $(x_1 = 0; x_2 = 1)$.

Визначаємо точки, які належать означеному околу (рис. 6.6). Це такі три точки:

$$X1_0(x_1 = 0; x_2 = 1);$$

$$X2_0(x_1 = 1; x_2 = 0);$$

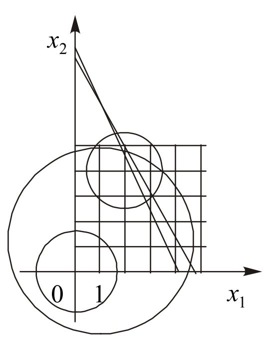


Рис. 6.6.

$X3_0(x_1 = 1; x_2 = 1)$.

Визначимо компоненти вектора спаду, ввівши такі позначення:

$$F = -Z = -350x_1 - 150x_2,$$
$$\Delta_1 = \Delta(X_0, X1_0) = F(X1_0) - F(X_0) =$$
$$= (-350 \cdot 0 - 150 \cdot 1) - (-350 \cdot 0 - 150 \cdot 0) = -150,$$
$$\Delta_2 = \Delta(X_0, X2_0) = F(X2_0) - F(X_0) =$$
$$= (-350 \cdot 1 - 150 \cdot 0) - (-350 \cdot 0 - 150 \cdot 0) = -350,$$
$$\Delta_3 = \Delta(X_0, X3_0) = F(X3_0) - F(X_0) =$$
$$= (-350 \cdot 1 - 150 \cdot 1) - (-350 \cdot 0 - 150 \cdot 0) = -500.$$

Найменшою є третя компонента вектора спаду, отже, відповідна їй точка стає центром наступного околу $\widetilde{X}_1(x_1 = 0, x_2 = 1)$. Радіус $R = 3{,}5$.

У новий окіл будуть входити точки з координатами:

$(x_1 = 0, x_2 = 0)$

$(x_1 = 0, x_2 = 1), (x_1 = 0, x_2 = 2), (x_1 = 0, x_2 = 3), (x_1 = 0, x_2 = 4),$

$(x_1 = 1, x_2 = 0), (x_1 = 2, x_2 = 0), (x_1 = 3, x_2 = 0), (x_1 = 4, x_2 = 0),$

$(x_1 = 1, x_2 = 1), (x_1 = 1, x_2 = 2), (x_1 = 1, x_2 = 3), (x_1 = 1, x_2 = 4),$

$(x_1 = 2, x_2 = 1), (x_1 = 3, x_2 = 1), (x_1 = 4, x_2 = 1),$

$(x_1 = 2, x_2 = 2), (x_1 = 2, x_2 = 3), (x_1 = 2, x_2 = 4),$

$(x_1 = 3, x_2 = 2), (x_1 = 4, x_2 = 2), (x_1 = 3, x_2 = 3), (x_1 = 3, x_2 = 4), (x_1 = 4, x_2 = 3).$

Необхідно обчислити значення компонент вектора спаду для зазначених точок. Однак для трьох точок потрібні величини були розраховані на попередньому кроці, і залишається обчислити компоненти вектора для нових точок.

Після проведення обчислень маємо, що найменшого значення набуває компонента вектора, яка відповідає точці $(x_1 = 2, x_2 = 4)$, тому наступний цент околу переміщається в нову точку $\widetilde{X}_2(x_1 = 2, x_2 = 4)$. Нехай $R = 1{,}5$.

Обчислюємо компоненти вектора спаду лише в двох точках околу:

$$\left(x_1 = 1, x_2 = 5\right), \left(x_1 = 2, x_2 = 5\right),$$
$$\Delta_1\left(x_1 = 1, x_2 = 5\right) = +200,$$
$$\Delta_2\left(x_1 = 2, x_2 = 5\right) = -150.$$

Зіставивши ці значення, визначаємо точку нового центру околу $\widetilde{X}_3\left(x_1 = 2, x_2 = 4\right)$ з радіусом $R = 1$. Компоненти вектора спаду в цьому околі набувають тільки додатних значень. Отже, процедуру наближення завершено, і ця точка є оптимальним планом цілочислової задачі: $X^*\left(x_1 = 2, x_2 = 5\right) F_{\max} = 1450.$

Зауважимо, що метод вектора спаду, як видно з опису реалізації алгоритму, придатний для знаходження цілочислового розв'язку також і нелінійних задач.

6.7.Приклади застосування цілочислових задач лінійного програмування у плануванні та управлінні виробництвом

Задача про рюкзак. Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме задачею лише з одним обмеженням, є задача про рюкзак (або ранець). Така задача має багато прикладів практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов'язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови гіпотетичної проблеми туриста щодо вибору для походу оптимальної кількості речей.

Турист може вибирати потрібні речі із списку з n предметів. Відома вага кожного j-го предмета $m_j (j = \overline{1, n})$. Визначена також цінність кожного виду предметів w_j. Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати зазначеного обсягу *M*. Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб загальна цінність спорядження була максимальною за умови виконання обмеження на вагу рюкзака.

Позначимо через x_j – кількість предметів *j*-го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \le M;$$

$$x_j \ge 0, \ x_j \text{ — цілі числа, } (j = \overline{1,n}).$$

Приклад 6.4. Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

Розв'язання. Позначимо кількість упаковок вагою 35 кг та вагою 24 кг відповідно змінними x_1 та x_2. Маємо модель цієї задачі:

$$\min F = 14x_1 + 12x_2$$

$$35x_1 + 24x_2 \ge 107;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ x_1, x_2 \text{ — цілі числа.}$$

У результаті розв'язування задачі будь-яким з вищенаведених методів отримаємо оптимальний план: $X^*(x_1 = 1, x_2 = 3)$, $F_{\min} = 50$.

Отже, за оптимальним планом найменші витрати, що дорівнюють 50 ум. од., можливі у разі закупівлі однієї упаковки добрив вагою 35 кг та трьох вагою по 24 кг.

Задача оптимального розкрою матеріалів. На підприємстві здійснюється розкрій m різних партій матеріалів у обсягах $b_i (i = \overline{1, m})$ одиниць однакового розміру в кожній партії. Із матеріалів усіх партій потрібно виготовити максимальну кількість комплектів Z, у кожен з яких входить p різних видів окремих частин в кількості $k_r (r = \overline{1, p})$ одиниць, враховуючи, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на окремі частини n різними способами, причому у разі розкрою одиниці i-ої партії j-им способом отримуємо a_{ijr} деталей r-го виду.

Запишемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} — кількість одиниць матеріалу i-ої партії, що будуть розкроєні j-им способом. Тоді з i-ої партії за j-го способу розкрою отримаємо $a_{ijr}\ x_{ij}$ деталей r-го виду. З усієї ж i-ої партії у разі застосування до неї всіх n способів розкрою отримаємо $\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$ деталей r-го виду, а з усіх m партій їх буде отримано $Z_r = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$. У кожен комплект має входити $k_r (r = \overline{1, p})$ деталей, тому відношення $Z_r / k_r (r = \overline{1, p})$ визначає кількість комплектів, які можна виготовити з деталей r-го виду. Кількість повних комплектів для всіх видів деталей визначається найменшим з цих відношень.

У разі повного комплекту має виконуватися рівність відношень:

$$Z_1 / k_1 = Z_2 / k_2 = ... = Z_r / k_r = ... = Z_p / k_p \, ,$$

звідки p–1 відношення можна виразити через будь-яке з них, наприклад, через перше:

$$Z_r / k_r = Z_1 / k_1 \quad (r = \overline{2, p}) \text{ або } Z_r = k_r Z_1 / k_1 \quad (r = \overline{2, p}) \, .$$

Замінивши Z_r та Z_1 їх значеннями, отримаємо p–1 обмеження стосовно комплектів:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij} = \frac{k_r}{k_1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij1} x_{ij} \, ;$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1} a_{ij1} \right) x_{ij} = 0, \; r = \overline{2, p}.$$

Враховуючи наявну кількість одиниць матеріалу в партіях, запишемо m обмежень щодо ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \;\; (i = \overline{1,m})$$.

(Обмеження щодо використання ресурсів можуть бути рівняннями чи нерівностями залежно від того, повністю чи не повністю необхідно використати наявний обсяг ресурсів).

Всі x_{ij} мають задовольняти умову невід'ємності: $x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ та цілочисловості.

Отже, необхідно знайти найбільше значення функції:

$$\max Z = \min_{1 \leq r \leq p} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1} a_{ij1} \right) x_{ij} = 0, (r = \overline{2,p}); \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \; (i = \overline{1,m}); \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \;\; (i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}),$$

x_{ij} — цілі числа $(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n})$.

Розглянемо приклад задачі оптимального розкрою матеріалів.

Приклад 6.5. У цеху розрізують прути завдовжки 6 м на заготівки довжиною 1,4, 2 і 2,5 м. Цех обслуговує двох замовників, для кожного з яких окремо необхідно знайти:

1) як розрізати 200 прутів, щоб отримати не менше як 40, 60 і 50 заготівок завдовжки відповідно 1,4; 2 і 2,5 м. Критерій оптимізації — мінімум відходів;

2) як розрізати 200 прутів для формування з отриманих заготівок комплектів, що складаються з двох заготівок довжиною 1,4

м, та по одній довжиною 2 і 2,5 м. Критерій оптимізації – максимальна кількість комплектів.

Розв'язання.

1) розв'яжемо задачу за умовами першого замовника. Маємо партію прутів у кількості $b = 200$ штук. Відома нижня межа кількості заготівок кожного виду. Введемо такі позначення:

$r(r = 1,2,3)$ — вид заготівки;

$j(j = \overline{1,n})$ — спосіб розрізання прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута j-им способом заготівок r-го виду;

c_j — відходи в разі розрізування прута j-им способом;

b — кількість наявних прутів;

D_r — нижня межа потреби в r-ій заготівці;

x_j — кількість прутів, які розрізані за j-им способом.

Запишемо математичну модель для розв'язування першого пункту задачі оптимального розкрою.

Критерієм оптимальності є мінімальна кількість відходів: $\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Кількість отриманих заготівок кожного виду має бути не меншою від зазначених потреб:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jr} x_j \geq D_r \ (r = \overline{1, p}).$$

Сумарна кількість прутів, які розрізані різними способами не може бути більшою від кількості наявних прутів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq b.$$

Змінні задачі x_j — невід'ємні і цілі числа. Отже, маємо математичну модель:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq D_r, \ (r = \overline{1, p}); \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \leq b; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n}),$$

x_j — цілі числа $(j = \overline{1, n})$.

Побудуємо числову економіко-математичну модель розрізування прутів, розглянувши можливі варіанти їх розрізування:

Таблиця 6.5

Довжина заготівки, м	Варіант розрізування прутів						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

1,4	4	—	—	1	1	2	2
2	—	3	—	1	2	1	—
2,5	—	—	2	1	—	—	1
Довжина відходів, м	0,4	0	1	0,1	0,6	1,2	0,7

Бажано, щоб у множину ввійшли всі можливі варіанти, навіть такі, які на перший погляд здаються неефективними, наприклад, X_6.

Запишемо числову економіко-математичну модель розрізування прутів:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$$

за умов:

а) кількість заготівок завдовжки 1,4 м:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40\,;$$

б) кількість заготівок завдовжки 2 м:

$$3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60\,;$$

в) кількість заготівок завдовжки 2,5 м:

$$2x_3 + x_4 + x_7 \geq 50\,;$$

г) кількість наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200\,;$$

д) невід'ємність змінних:

$$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,3,4,5,6,7)\,;$$

є) цілочисловість змінних:

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7)\,.$$

Отже, загалом маємо математичну модель виду:

$$\min Z = 0{,}4x_1 + 0x_2 + x_3 + 0{,}1x_4 + 0{,}6x_5 + 1{,}2x_6 + 0{,}7x_7$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 40; \\ 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 60; \\ 2x_3 + x_4 + x_7 \geq 50; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 200, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,3,4,5,6,7),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7).$$

Розв'язуючи задачу одним із методів цілочислового програмування, отримуємо набір альтернативних оптимальних планів (загальною кількістю 146). Наприклад, такий план забезпечує виготовлення всіх видів заготівок у мінімально можливій кількості за найменшого загального обсягу відходів, причому для цього використовуються лише 54 прути: $X_1^* = (x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 50,$ $x_5 = x_6 = x_7 = 0)$, $Z_{\min} = 5$, тобто 4 прути необхідно розрізати другим способом (по три заготівки довжиною 2 м) та 50 прутів четвертим способом (по одній заготівці кожного виду). Сумарна довжина залишків дорівнює п'яти метрам. Аналогічне значення цільової функції ($Z_{\min} = 5$) дає оптимальний план, за яким виготовляється більша кількість кінцевої продукції та витрачається весь наявний матеріал:

$$X_2^* = (x_1 = 0, x_2 = 150, x_3 = 0, x_4 = 50, x_5 = x_6 = x_7 = 0).$$

Отримані оптимальні плани дають набір альтернативних варіантів для прийняття управлінських рішень за конкретних виробничих умов.

Ускладнимо розглянутий приклад задачі оптимального розкрою матеріалів, що передбачає тільки один тип матеріалу та відсутність формування комплектів кінцевої продукції.

2) розв’яжемо задачу за умовами другого замовника. Оскільки в другому пункті задачі відсутні обмеження щодо кількості заготівок, проте вимагається формування комплектів, необхідно дещо змінити позначення:

$r(r = 1,2,3)$ — вид заготівки;

$j(j = \overline{1,n})$ — спосіб розрізування прута;

a_{jr} — вихід у разі розрізування прута j-им способом заготівок r-го виду;

b — кількість наявних прутів;

x_j — кількість прутів, які розрізані за j-им варіантом;

k_r — кількість r-го виду заготівок у комплекті;

Z_r — кількість всіх заготівок r-го виду.

Математична модель у цьому разі суттєво відрізняється від моделі, що розглянута вище.

З усього матеріалу може бути отримано $Z_r = \sum_{j=1}^{n} a_{jr} x_j$ заготівок r-го виду. У кожен комплект має входити дві заготівки першого типу $k_1 = 2$, тому відношення Z_1/k_1 визначає кількість комплектів, які можна скласти з заготівок першого виду. Аналогічно можна визначити кількість комплектів для інших видів заготівок Z_2/k_2 та Z_3/k_3. Кількість можливих повних комплектів визначається найменшим з цих відношень: $\min(Z_1/k_1; Z_2/k_2; Z_3/k_3)$. До того ж у разі повного комплекту має виконуватися рівність відношень: $Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = Z_3/k_3$, звідки два з відношень можна виразити, наприклад, через перше:

$Z_2/k_2 = Z_1/k_1$; $Z_3/k_3 = Z_1/k_1$, звідки $Z_2 = k_2 Z_1/k_1$, $Z_3 = k_3 Z_1/k_1$.

Замінимо Z_2, Z_3 та Z_1 їх значеннями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j2} x_j = \frac{k_2}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j \quad \text{або} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j2} - \frac{k_2}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j3} x_j = \frac{k_3}{k_1} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} x_j \quad \text{або} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(a_{j3} - \frac{k_3}{k_1} a_{j1} \right) x_j = 0.$$

Враховуючи наявну кількість одиниць матеріалу, запишемо обмеження щодо використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b .$$

Всі x_{ij} мають задовольняти умову невід'ємності: $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,n})$ та цілочисловості.

Отже, необхідно знайти найбільше значення функції:

$$\max Z = \left(\min\left[\frac{1}{k_1}\sum_{j=1}^{n} a_{j1}x_j;\ \frac{1}{k_2}\sum_{j=1}^{n} a_{j2}x_j;\ \frac{1}{k_3}\sum_{j=1}^{n} a_{j3}x_j \right]\right)$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\left(a_{j2} - \frac{k_2}{k_1}a_{j1}\right)x_j = 0; \\ \sum_{j=1}^{n}\left(a_{j3} - \frac{k_3}{k_1}a_{j1}\right)x_j = 0; \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le b, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}),$$

x_j — цілі числа $(j = \overline{1,n})$.

Запишемо числову математичну модель, скориставшись попередніми даними розрахунків можливих варіантів розрізування прутів (табл. 6.5).

Із умов формування комплектів маємо: $\frac{Z_1}{2} = \frac{Z_2}{1} = \frac{Z_3}{1} \Rightarrow Z_1 = = 2Z_2 = 2Z_3$, тобто заготівок першого виду має бути вдвічі більше, ніж заготівок другого та третього виду. Звідси випливає, що за мінімальну кількість комплектів може бути прийняте одне з двох відношень: $\frac{Z_2}{1}$ чи $\frac{Z_3}{1}$. Виберемо, наприклад, $\min_{1\le r\le 3}\left(Z_r / k_r\right) = Z_2$.

Використовуючи дані таблиці, запишемо вираз для цільової функції:

$$Z = Z_2 = 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 .$$

Обмеження щодо формування комплектів матимуть вигляд: $Z_1 = 2Z_2$, або

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 2(3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6),$$

звідси

$$4x_1 - 6x_2 - x_4 - 3x_5 + 2x_7 = 0,$$

аналогічно для $Z_1 = 2Z_3$:

$$4x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 2(2x_3 + x_4 + x_7), \text{ або}$$

$$4x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0 .$$

Обмеження щодо використання наявних прутів:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \le 200 .$$

Обмеження стосовно невід'ємності та цілочисловості змінних:

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6,7);$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7) .$$

Отже, загалом маємо таку математичну модель:

$$\max Z = Z_2 = 3x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 - x_4 - 3x_5 + 2x_7 = 0; \\ 4x_1 - 4x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6,7),$$

$$x_j \text{ — цілі числа } (j = 1,2,3,4,5,6,7) .$$

Розв'язавши задачу будь-яким з вищеописаних методів, отримаємо оптимальний план: $X^* = (x_1 = 40;\ x_2 = x_3 = 0;\ x_4 = 160;$ $x_5 = x_6 = x_7 = 0)$,

$Z_{\max} = 160$ комплектів.

Задача комівояжера. Розглядається n міст A_1, A_2,..., A_n, що пов'язані між собою транспортною мережею. Відома матриця відстаней від кожного міста до усіх інших:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \ldots & c_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots.. \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

причому в загальному випадку не завжди $c_{ij} = c_{ji}$. Комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися в те місто, з якого почав рухатися. Необхідно відшукати такий замкнений маршрут, що проходить через кожне місто лише один раз і довжина якого мінімальна.

Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} може набувати лише двох значень: одиниці або нуля. Такі змінні мають назву бульових змінних. Очевидно, що вони є цілочисловими. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

де c_{ij} — відстань між містами i та j.

Обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(j = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = \overline{1,n}; i \neq j\right).$$

Зазначені обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо невід'ємні цілочислові змінні $u_i(u_j)$ $\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ i \neq j\right)$, які в процесі розв'язування задачі набуватимуть значень порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом прямування комівояжера. Запишемо обмеження, які усувають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \ \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Доведемо, що для довільного маршруту, який починається в пункті A_1, можна знайти такі $u_i(u_j)$, що задовольняють наведену нерівність. Нехай комівояжер переїжджає з міста A_i до міста A_j на p-му кроці і допустимо також, що $u_i = p$, тоді з міста A_j комівояжер вирушить на наступному, $(p + 1)$-му кроці і $u_j = p+1$. Звідси випливає, що:

$$u_i - u_j + nx_{ij} = p-(p+1)+nx_{ij} = -1+nx_{ij} \leq n-1.$$

Така нерівність виконується для будь-яких значень i та j у разі, коли $x_{ij}=0$, а при $x_{ij}=1$ нерівність виконується як строге рівняння. Отже, якщо вибрано маршрут пересування з i-го міста до j-го, то згадана нерівність фіксує два підряд порядкових номери цих міст.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = \overline{1,n};\ i \neq j); \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = \overline{1,n};\ i \neq j); \\ u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j), \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\} \ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}).$$

Приклад 6.6. В економічному регіоні розміщено 6 пунктів (міст). Комівояжер, який виїжджає з міста 1, має побувати в кожному місті один раз і повернутися до вихідного пункту. Знайти найкоротший маршрут, якщо відстані між містами відомі (наведені в км на рис.6.7).

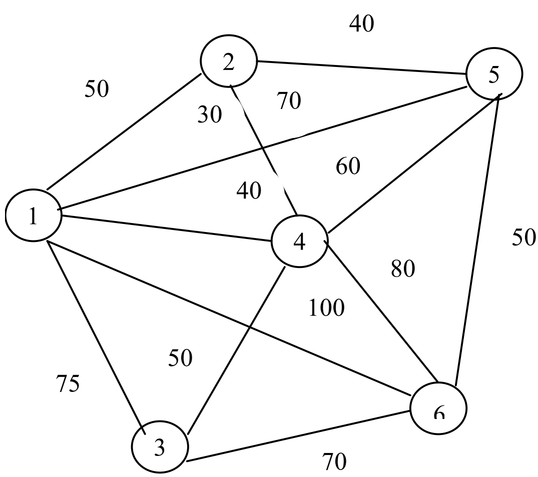


Рис. 6.7

Розв’язання. Маємо 6 пунктів, де має побувати комівояжер. Позначимо:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} — бульові (цілочислові) змінні. Запишемо числову економіко-математичну модель задачі комівояжера за даних умов.

Виходячи з рис. 6.5, висновуємо, що всіх можливих маршрутів є 12. З першого міста можна потрапити до кожного з інших п’яти, відповідні маршрути позначимо змінними x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}. Друге місто пов’язане лише з трьома іншими, а саме, з першим, четвертим та п’ятим, отже, маємо такі три змінні: x_{21}, x_{24}, x_{25}. Аналогічно позначаємо змінні, що відповідають можливим маршрутам пересувань з третього, четвертого, п’ятого та шостого міст:

з третього — x_{31}, x_{34}, x_{36},

з четвертого — x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{45}, x_{46},

з п’ятого — x_{51}, x_{52}, x_{54}, x_{56},

з шостого — x_{61}, x_{63}, x_{64}, x_{65}.

Загалом отримали 24 змінні. Однак деякі змінні, наприклад, x_{12} та x_{21}, x_{13} та x_{31} описують один маршрут, довжина якого за умовою задачі не змінюється залежно від напрямку пересування (у разі переїзду з першого міста до другого чи з другого до першого необхідно подолати 50 км). Отже, коефіцієнт у цільовій функції при таких змінних буде однаковим.

Критерій оптимальності — мінімізація довжини всього маршруту комівояжера:

$$\min Z = 50x_{12} + 75x_{13} + 40x_{14} + 70x_{15} + 100x_{16} + 30x_{24} + 40x_{25} + 50x_{34} + \\ +70x_{36} + 60x_{45} + 80x_{46} + 50x_{56};$$

а) обмеження щодо одноразового в’їзду в кожне місто:

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1;$$
$$x_{12} + x_{42} + x_{52} = 1;$$
$$x_{13} + x_{43} + x_{63} = 1;$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{64} = 1;$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{45} + x_{65} = 1;$$
$$x_{16} + x_{36} + x_{46} + x_{56} = 1;$$

б) обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1;$$
$$x_{21} + x_{24} + x_{25} = 1;$$
$$x_{31} + x_{34} + x_{36} = 1;$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{46} = 1;$$
$$x_{51} + x_{52} + x_{54} + x_{56} = 1;$$
$$x_{61} + x_{63} + x_{64} + x_{65} = 1;$$

в) обмеження щодо усунення підмаршрутів:

$$u_2 - u_4 + 6x_{24} \le 5;$$
$$u_2 - u_5 + 6x_{25} \le 5;$$
$$u_3 - u_4 + 6x_{34} \le 5;$$

$$u_3 - u_6 + 6x_{36} \le 5;$$
$$u_4 - u_2 + 6x_{42} \le 5;$$
$$u_4 - u_3 + 6x_{43} \le 5;$$
$$u_4 - u_5 + 6x_{45} \le 5;$$
$$u_4 - u_6 + 6x_{46} \le 5;$$
$$u_5 - u_2 + 6x_{52} \le 5;$$
$$u_5 - u_4 + 6x_{54} \le 5;$$
$$u_5 - u_6 + 6x_{56} \le 5;$$
$$u_6 - u_3 + 6x_{63} \le 5;$$
$$u_6 - u_4 + 6x_{64} \le 5;$$
$$u_6 - u_5 + 6x_{65} \le 5;$$
$$x_{ij} \in \{0;1\}\ (i = \overline{1,6};\ j = \overline{1,6});$$

$u_i(u_j)$ — цілі числа $\left(i = \overline{2,6};\ j = \overline{2,6};\ i \ne j\right)$.

Такі задачі розв'язуються спеціальними методами.

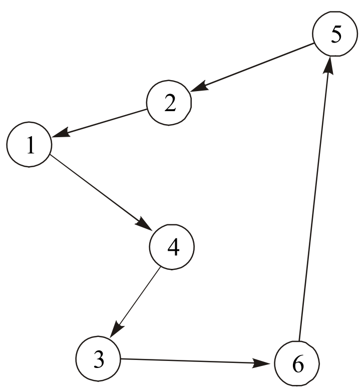


Рис. 6.8

У результаті отримуємо оптимальний варіант пересування таким маршрутом (рис. 6.8).

Тобто з першого міста за оптимальним планом необхідно переїжджати до четвертого, з четвертого — до третього, з третього — до шостого, з шостого — до п'ятого, з п'ятого — до другого, а з другого — до першого. Довжина цього маршруту, яка є мінімальною, дорівнює 300 км.

Зауважимо, що аналогічні задачі нерідко виникають на практиці, особливо у дрібному бізнесі. Типовим може бути, наприклад, таке завдання: «Фірма у місті має 25 кіосків, які торгують безалкогольними напоями. Щоденно з бази автомобілем розвозять до них товар. Як оптимально організувати розвезення певного обсягу товару?».

Задача з постійними елементами витрат. Відомо, що витрати на виготовлення будь-якої продукції складаються з двох частин: постійних та змінних витрат.

Нехай розглядається процес виробництва продукції за умов використання *m* видів ресурсів. Відомі обсяги кожного виду ресурсів $b_1, b_2, ..., b_m$, а також норми використання *i*-го $(i = \overline{1,m})$ виду ресурсів на одиницю виготовлення *j*-го $(j = \overline{1,n})$ виду продукції a_{ij}.

Умови використання ресурсів на виготовлення продукції можна записати у вигляді таких обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \, (i = \overline{1,m}).$$

Витрати на виготовлення продукції поділяють на два види: постійні витрати — k_j, які не залежать від обсягу виробництва, і змінні — c_j, що розраховуються на одиницю виготовленої продукції, де *j* — вид продукції. Необхідно визначити оптимальні обсяги виробництва продукції $x_j \, (j = \overline{1,n})$, за яких загальні витрати були б мінімальними.

Зауважимо, що виготовлення будь-якої кількості продукції $(x_j > 0)$ потребує певних фіксованих k_j та змінних $c_j x_j$ витрат, тобто загальна сума витрат на виготовлення продукції обсягом x_j визначається за формулою: $D_j = k_j + c_j x_j$. Однак у разі, якщо $x_j = 0$ (продукція не випускається), то розрахунок витрат за формулою $D_j = k_j + c_j x_j = k_j + c_j \cdot 0 = k_j$ призводить до додатного значення, що неправильно. Для адекватного відображення функціональної залежності загальних витрат від обсягу виробленої продукції *j*-го виду можна скористатися такою нелінійною функцією:

$$z_j = k_j y_j + c_j x_j,$$

де y_j є бульовими змінними виду: $y_j = \begin{cases} 0, \text{якщо } x_j = 0; \\ 1, \text{якщо } x_j > 0. \end{cases}$

Таку умову можна записати у вигляді лінійної нерівності. Допустимо, що існує таке досить велике число *M*, для якого умова $x_j \le M$ виконуватиметься для всіх допустимих значень x_j. Тоді обмеження виду:

$$x_j \le M y_j$$

завжди виконується при $y_j = 1$, і, крім того, якщо y_j – ціле число, то мінімізація цільової функції забезпечує найменше значення $y_j = 1$. Якщо $y_j = 0$, то нерівність $x_j \le M y_j = 0$ забезпечить $x_j = 0$.

Отже, маємо таку математичну модель:

цільова функція, що описує мінімальні загальні витрати на виробництво всіх видів продукції, набуває вигляду:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n}(k_j y_j + c_j x_j)$$

за умов:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ \ (i=\overline{1,m}); \\ x_j \le My_j \ \ (j=\overline{1,n}); \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,n});$$

$$y_j \ge 0 \ (j=\overline{1,n});$$

y_j — цілі числа $(j=\overline{1,n})$.

Приклад 6.7. Фермер планує виробляти три види продукції: озиму пшеницю, цукрові буряки та молоко. Загальні витрати складаються з двох частин: постійних та змінних. Відповідні дані наведені в табл. 6.6:

Таблиця 6.6

Показник	Вид продукції		
	озима пшениця	цукрові буряки	молоко
Постійні витрати, тис. грн	40	70	20
Змінні витрати на одиницю продукції, грн/т	400	150	500
Норма потреби в ріллі, га/т	0,2	0,02	0,25
Ціна одиниці продукції, грн/т	800	300	1000

Необхідно визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду за умови, що фермер має 100 га ріллі.

*Розв'язання***.** Нехай x_j — обсяг виробництва j-го виду продукції m, $j=\overline{1,3}$.

Функція загальних витрат на виробництво j-го виду продукції має вигляд:

$$Z_j = k_j y_j + c_j x_j.$$

Цільовою функцією в цьому прикладі може бути максимізація прибутку:

$$\max F = \sum_{j=1}^{3}(p_j x_j - Z_j) = \sum_{j=1}^{3}\left((p_j - c_j)x_j - k_j y_j\right),$$

де p_j — ціна одиниці j-ї продукції.

Обмеження щодо використання ріллі запишемо так:

$$\sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le A,$$

де a_j — норма потреби у ріллі на виробництво одиниці j-ї продукції; A — площа ріллі.

Загалом маємо таку математичну модель:

$$\max F = \sum_{j=1}^{3}\left((p_j - c_j)x_j - k_j y_j\right)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} a_j x_j \le A; \\ x_j \le M y_j \ (j = \overline{1,3}); \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3});$$

$$y_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3});$$

y_j — цілі числа $(j = \overline{1,3})$.

Запишемо числову економіко-математичну модель цієї задачі.

Очевидно, що максимально можливий обсяг виробництва пшениці становить $\frac{100}{0,2}$ =500 т, цукрових буряків — $\frac{100}{0,02}$ =5000 т, молока — $\frac{100}{0,25}$ =400 т. Отже, M може дорівнювати 5000. Звідси маємо:

$$\max F = 400x_1 + 150x_2 + 500x_3 - 40000y_1 - 70000y_2 - 20000y_3$$

за умов:

$$0{,}2x_1 + 0{,}02x_2 + 0{,}25x_3 \le 100;$$

$$0 \le x_1 \le 5000y_1;$$

$$0 \le x_2 \le 5000y_2;$$

$$0 \le x_3 \le 5000y_3;$$

$$y_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3});$$

$$y_j \text{ — цілі числа } (j = \overline{1,3}).$$

Розв'язавши задачу, отримаємо оптимальний план:

$$X^* = (x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 5000).\ F_{\max} = 680\,000.$$

Можна висновувати, що фермеру за цих умов найвигідніше зайнятися вирощуванням на всій площі ріллі тільки цукрових буряків.

Звичайно, у реальній ситуації існує більший набір можливих видів продукції, а також більше обмежень щодо використання ресурсів.

Задача планування виробничої лінії. Розглядається процес функціонування виробничої лінії. Відома схема, яка зображає послідовність робіт для виготовлення k видів продукції $(k = \overline{1,K})$. Відомі також: a_j — тривалість виконання j-ї операції $\left(j = \overline{1,n}\right)$; $d_j^{(k)}$ — термін для k-го виробу, до якого необхідно завершити операцію j; x_j — момент початку j-ї операції; t — тривалість виконання всіх операцій. Допускається, що в будь-який момент на верстаті виконується тільки одна операція.

Необхідно визначити оптимальні моменти початку кожної операції.

Економіко-математична модель виробничої лінії міститиме такі групи обмежень:

1.Послідовність виконання j-ї операції записується для всіх пар операцій так: $x_j + a_j \le x_i \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right)$, якщо j-та операція передує i-й операції.

2.Обмеження щодо нерозгалуженості виробничого процесу для операцій i та j, які не виконуються одночасно ($i \neq j$), має вигляд:

або $x_i - x_j = a_j$, якщо операція j передує операції i;

або $x_j - x_i = a_i$, якщо операція i передує операції j.

Зауважимо, що логічні обмеження виду «або-або» не можуть входити до економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування, оскільки вони породжують неопуклу множину допустимих розв'язків. Тому необхідно ввести допоміжні змінні, які уможливлюють запис наведених вище логічних умов у вигляді лінійних обмежень. Це такі бульові змінні:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо операція } j \text{ передує } i; \\ 1, & \text{якщо операція } i \text{ передує } j. \end{cases}$$

Скориставшись прийомом з попереднього прикладу6.6. (введення досить великого числа M), запишемо обмеження:

$$My_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \ge a_j \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right);$$

$$M\left(1 - y_{ij}\right) + \left(x_j - x_i\right) \ge a_i \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right),$$

де M — досить велике число.

3.Обмеження щодо термінів виготовлення кожного виробу:

$$x_j + a_j \le d_j^{(k)} \ \ (k = \overline{1,K}),$$

де j — остання операція для k-го виробу.

4.Усі операції мають бути виконані до моменту t:

$$x_j + a_j \le t, \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Критерій оптимальності:

$$\min Z = t,$$

тобто ставиться завдання, щоб тривалість виготовлення всіх видів виробів була мінімальною.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = t$$

$$\begin{cases} x_j + a_j \le x_i \ (i, j = \overline{1,n};\ i \ne j); \\ My_{ij} + (x_i - x_j) \ge a_j \ \ (i, j = \overline{1,n};\ i \ne j); \\ M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \ge a_i \ (i, j = \overline{1,n};\ i \ne j); \\ x_j + a_j \le d_j^{(k)} \ (i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,K}); \\ x_j + a_j \le t \ (j = \overline{1,n}); \end{cases}$$

$$x_i, (x_j) \ge 0 \ t \ge 0;$$

$$y_{ij} \ge 0, \ y_{ij} \text{ — цілі числа } \left(i, j = \overline{1,n}\right).$$

Приклад 6.8. Потрібно оптимізувати функціонування виробничої лінії, яка охоплює 11 операцій з виготовлення двох виробів. Лінію обладнано одним багатоопераційним верстатом. Послідовність і тривалість (у хвилинах) виконання операцій відображені на рис.6.9.

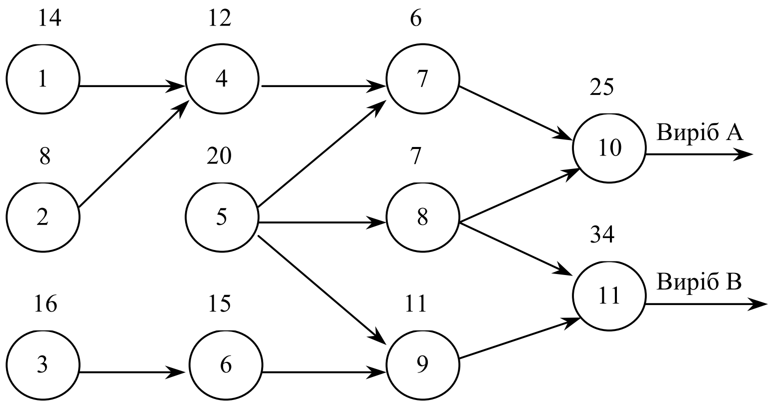


Рис. 6.9

Визначені тривалості виготовлення виробів А та В відповідно дорівнюють 120 і 150 хв. Передбачається, що в кожний момент часу на верстаті може виконуватися тільки одна операція. Визначити оптимальні моменти початку кожної операції.

Розв'язання. Позначивши через x_j момент початку j-ої операції, запишемо числову економіко-математичну модель функціонування виробничої лінії:

$$\min Z = t$$

за наведених нижче умов.

1. Обмеження стосовно послідовності виконання операцій:

$$x_1 + 14 \le x_4;$$

$$x_2 + 8 \le x_4;$$

$$x_3 + 16 \le x_6;$$

$$x_4 + 12 \le x_7;$$

$$x_5 + 20 \le x_7;$$

$$x_5 + 20 \le x_8;$$

$$x_5 + 20 \le x_9;$$

$$x_6 + 15 \le x_9;$$

$$x_7 + 6 \le x_{10};$$

$$x_8 + 7 \le x_{10};$$

$$x_8 + 7 \le x_{11};$$

$$x_9 + 11 \le x_{11}.$$

2. Обмеження щодо нерозгалуженості виробничого процесу:

$$My_{12} + (x_1 - x_2) \ge 8;$$

$$M(1 - y_{12}) + (x_2 - x_1) \ge 14;$$

$$My_{13} + (x_1 - x_3) \ge 16;$$

$$M(1 - y_{13}) + (x_3 - x_1) \ge 14;$$

....

$$My_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \ge a_j;$$

$$M\left(1 - y_{ij}\right) + \left(x_j - x_i\right) \ge a_i;$$

....

$$My_{10,11} + (x_{10} - x_{11}) \ge 34;$$

$$M(1 - y_{10,11}) + (x_{11} - x_{10}) \ge 25.$$

3. Обмеження щодо тривалостей виготовлення виробів:

$$x_{10} + 25 \le 120;$$

$$x_{11} + 34 \le 150.$$

4. Усі операції мають бути виконані до моменту *t*:

$$x_1 + 14 \le t;$$

$$x_2 + 8 \le t;$$

$$x_3 + 16 \le t;$$

....

$$x_j + a_j \le t;$$

....

$$x_{11} + 34 \le t.$$

5. Обмеження щодо невід'ємності змінних:

$$x_i(x_j) \ge 0,\ t \ge 0;$$

$$y_{ij} \ge 0,\ y_{ij} \text{ — цілі } \left(i, j = \overline{1,11}\right).$$

Отже, маємо частково цілочислову задачу з бульовими змінними.

Задача про призначення. Ця задача була розглянута в розділі 5 як така, що зводиться до транспортної і може бути розв'язана одним з відомих методів знаходження оптимального плану транспортної задачі. Проте такий вид задач належить до задач цілочислового програмування, оскільки їх змінні є бульовими і оптимальний план може бути знайденим також методами цілочислового програмування. Не повертаючись до загальної постановки задачі та побудови її математичної моделі (див. §5.10), наведемо ще один приклад задачі про призначення.

Приклад 6.9. Необхідно розподілити чотирьох робітників за чотирма видами устаткування так, щоб їх загальна продуктивність праці була максимальною. Дані стосовно продуктивності праці кожного робітника на устаткуванні кожному виду наведено в табл. 6.7:

Таблиця 6.7

Робітник	Продуктивність праці на устаткуванні, грн/год			
	1	*2*	*3*	*4*
1	12	9	8	7
2	10	7	6	5
3	9	6	4	4
4	8	5	3	2

Розв'язання. Зазначимо, що дану задачу можна розглядати як транспортну, в якій робітники ототожнюються з постачальниками вантажів, а види устаткування — зі споживачами цих вантажів. Обсяги пропозиції та попиту в кожному разі дорівнюють одиниці. Отже, змінні будуть бульовими:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{ - й робітник виконує роботу на } j\text{ - му устаткуванні;} \\ 0, & \text{у іншому разі.} \end{cases}$$

Якщо відома продуктивність праці i-го робітника на j-му устаткуванні, то числова модель про призначення набуває вигляду:

$$\max Z = 12x_{11} + 9x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 10x_{21} + 7x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} +$$
$$+9x_{31} + 6x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} + 8x_{41} + 5x_{42} + 3x_{43} + 2x_{44}$$

за умов:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1;$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1;$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1;$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1;$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1;$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1;$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1.$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i, j = \overline{1, n}\right);$$
$$x_{ij} \text{ — цілі числа } \left(i, j = \overline{1, n}\right).$$

З огляду на особливу структуру цієї задачі, зокрема на її «транспортний» характер та рівність правих частин обмежень, для її розв’язування можна застосувати ефективніший алгоритм, ніж для звичайної задачі цілочислового програмування з бульовими змінними. Пропонуємо читачеві ознайомитися з такими алгоритмами, які детально описані в літературі [12].

Заключні зауваження

Поява вимоги цілочисловості в економічних задачах є досить очевидною і пов’язана з наявністю у моделях параметрів, які можуть набувати тільки цілих значень. Нелінійність, яка випливає з вимог цілочисловості змінних, є незначною. Тому цілочислове програмування часто розглядають як розділ математичної оптимізації лінійних моделей, в яких на деякі чи всі змінні накладено умову цілочисловості.

Зауважимо, що задачі цілочислового програмування є частковим випадком загальнішого типу задач — дискретної оптимізації. Вимоги дискретності змінних, якщо не в явному вигляді, то в прихованій формі властиві багатьом практичним типам задач, що забезпечує дуже широке коло застосування дискретного програмування в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. Задачі проектування, планування, розміщення, класифікації і управління добре формалізуються за допомогою різних моделей дискретного програмування.

Особливої актуальності нині набувають проблеми вивчення ефективності методів і відповідних програмних засобів, оцінки точності розв'язків, які отримано за допомогою наближених методів, дослідження стійкості математичних моделей, побудови діалогових пакетів прикладних програм, що уможливлюють проведення досліджень в інтерактивному режимі.

Контрольні запитання

1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?
2. Наведіть приклади економічних задач, що належать до цілочислових.
3. Як геометрично можна інтерпретувати розв'язок задачі цілочислового програмування?
4. Охарактеризуйте головні групи методів розв'язування задач цілочислового програмування.
5. Опишіть алгоритм методу Гоморі.
6. Що означає «правильне відтинання»?
7. Опишіть алгоритм методу гілок та меж.

Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 6.1. Розв'яжіть задачі цілочислового програмування методом Гоморі.

1) $Z = x_1 \to \max$ 2) $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Задача 6.2. На основі умовно-оптимального плану задачі цілочислового програмування побудуйте допоміжне обмеження Гоморі і приєднайте його до останньої симплексної таблиці, знайдіть цілочислові розв'язки задачі або покажіть, що вони не існують.

Таблиця 6.8

Базис	$C_{баз}$	A_0	–3	–4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	0	7/11	5/11	9/11	0	0	1
x_3	0	10/11	2/11	3/11	1	0	0
x_4	0	3/11	15/11	–4/11	0	1	0
$Z_j - C_j \geq 0$		0	3	4	0	0	0

Задача 6.3. Розв'яжіть задачу цілочислового програмування методом «гілок та меж»:

1) $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 16; \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

«У давнину математичні задачі ставили боги, як ось, наприклад, задача подвоєння куба— з нагоди вимірювань розмірів Дельфійського жертовника. Потім настав другий період, коли задачі ставили напівбоги: Ньютон, Ейлер, Лагранж. Тепер третій період, коли задачі ставить практика.»

П. Л. Чебишов

РОЗДІЛ 7. ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

7.1.Економічна і математична постановка задачі дробово–лінійного програмування

Розв'язуючи економічні задачі, часто як критерії оптимальності беруть рівень рентабельності, продуктивність праці тощо. Ці показники математично виражаються дробово-лінійними функціями. Загальну економіко-математичну модель у цьому разі записують так (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо через c_j прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції, тоді загальний прибуток можна виразити формулою: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$; якщо d_j — витрати на виробництво одиниці j-го виду продукції, то $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j$ — загальні витрати на виробництво. У разі максимізації рівня рентабельності виробництва цільова функція має вигляд:

$$\max Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \tag{7.1}$$

за умов виконання обмежень щодо використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \{\leq, =, \geq\}\ b_i \ (i = \overline{1, m}); \tag{7.2}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{7.3}$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Очевидно, що задача (7.1)—(7.3) відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише цільовою функцією, що дає змогу застосовувати для її розв'язування за певного модифікування вже відомі методи розв'язання задач лінійного програмування.

7.2. Геометрична інтерпретація задачі дробово-лінійного програмування

У разі, коли задача дробово-лінійного програмування містить лише дві змінні, для її розв'язування зручно скористатися графічним методом.

Нехай маємо таку задачу:

$$\max Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{7.4}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{7.5}$$

$$x_j \ge 0\,,\ (j = 1, 2) \tag{7.6}$$

Спочатку, як і для звичайної задачі лінійного програмування будуємо геометричне місце точок системи нерівностей (7.5), що визначає деякий багатокутник допустимих розв'язків.

Допустимо, що $d_1x_1 + d_2x_2 > 0$, і цільова функція набуває деякого значення:

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = Z\,.$$

Після елементарних перетворень дістанемо:

$$(c_1 - Zd_1)x_1 + (c_2 - Zd_2)x_2 = 0$$

або

$$x_2 = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}x_1\,. \tag{7.7}$$

Останнє рівняння описує пряму, що обертається навколо початку системи координат залежно від зміни значень x_1 та x_2.

Розглянемо кутовий коефіцієнт нахилу прямої (7.7), що виражає цільову функцію:

$$k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}\,. \tag{7.8}$$

Отже, кутовий коефіцієнт являє собою функцію від Z. Для визначення умов зростання (спадання) функції (7.8) дослідимо зміну знака її похідної:

$$k'(Z) = -\frac{(c_1 - Zd_1)'(c_2 - Zd_2) - (c_2 - Zd_2)'(c_1 - Zd_1)}{(c_2 - Zd_2)^2} - =$$

$$= -\frac{-d_1(c_2 - Zd_2) + d_2(c_1 - Zd_1)}{(c_2 - Zd_2)^2} = -\frac{-d_1c_2 + Zd_1d_2 + d_2c_1 - Zd_1d_2}{(c_2 - Zd_2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2}. \tag{7.9}$$

Використовуючи формулу (7.9), можна встановити правила пошуку максимального (мінімального) значення цільової функції:

1) якщо $k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2} > 0 \Rightarrow (d_1c_2 - d_2c_1) > 0$, то функція (7.8) є зростаючою, і за збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (7.7) також збільшується. Тобто у разі, якщо $(d_1c_2 - d_2c_1) > 0$, для відшукання точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку проти годинникової стрілки;

2) якщо $k'(Z) = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2} < 0 \Rightarrow (d_1c_2 - d_2c_1) < 0$, то функція (7.8) є спадною і за збільшення значення Z (значення цільової функції) кутовий коефіцієнт нахилу прямої (7.7) буде зменшуватись. Тому у разі, якщо $(d_1c_2 - d_2c_1) < 0$, для відшукання точки максимуму не-

обхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку за годинниковою стрілкою.

При розв'язуванні задачі дробово-лінійного програмування графічним методом можливі такі випадки:

— багатокутник розв'язків задачі обмежений і максимальне та мінімальне значення досягаються у його кутових точках;

— багатокутник розв'язків задачі необмежений, однак існують кутові точки, в яких досягаються максимальне та мінімальне значення цільової функції;

— багатокутник розв'язків задачі необмежений і досягається лише один із екстремумів;

— багатокутник розв'язків задачі необмежений, точки екстремумів визначити неможливо.

Приклад 7.1. Розв'яжіть графічно задачу дробово-лінійного програмування:

$$\max(\min)Z=\frac{5x_1-2x_2}{2x_1+x_2}$$

за умов:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2\ge 12;\\ -x_1+2x_2\le 6;\\ 2x_1-2x_2\le 8;\end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 .$$

Розв'язання. Побудуємо на площині область допустимих розв'язків задачі. Маємо трикутник *ABC*.

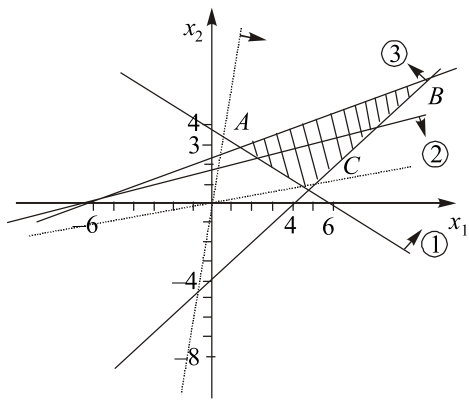


Рис. 7.1

Цільова функція задачі являє собою пряму, що обертається навколо початку системи координат (на рис. 7.1 позначена пунктиром). Отже, залежно від напрямку обертання точками максимуму та мінімуму будуть *A* і *C*.

Скористаємося правилами визначення максимального та мінімального значень цільової функції. Перевіримо умову

$$\left(d_1c_2 - d_2c_1\right) = (2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5) = -9 < 0,$$

тобто для будь-якого значення *Z* функція $k'(Z)$ є спадною, отже, зі зростанням *Z* кутовий коефіцієнт нахилу прямої, що виражає цільову функцію, зменшуватиметься, а тому відповідну пряму потрібно обертати навколо початку координат за годинниковою стрілкою.

Виконуючи зазначений порядок дій, маємо: *C* — точка максимуму, а точка *A* є точкою мінімуму цієї задачі.

7.3. Розв'язування дробово-лінійної задачі зведенням до задачі лінійного програмування

Нехай потрібно розв'язати задачу (7.1)—(7.3).
Позначимо

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = y_0$$

і введемо заміну змінних $y_j = y_0 x_j \ (j = \overline{1,n})$. Тоді цільова функція (7.1) матиме вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \quad .$$

Отримали цільову функцію, що виражена лінійною залежністю.

Оскільки $y_j = y_0 x_j \quad (j = \overline{1,n})$, то звідси маємо: $x_j = \dfrac{y_j}{y_0}$. Підставимо виражені через нові змінні значення x_j в систему обмежень (7.2):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \ (i = \overline{1,m}).$$

Крім того, з початкової умови

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = y_0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}{1} = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_0 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1 \quad .$$

Умова (7.3) стосовно невід'ємності змінних набуває вигляду:

$$y_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}), \ y_0 \geq 0 \ .$$

Виконані перетворення приводять до такої моделі задачі:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \ (i = \overline{1,m}); \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1. \end{cases}$$

$$y_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}), y_0 \geq 0.$$

Отримали звичайну задачу лінійного програмування, яку можна розв'язувати симплексним методом.

Допустимо, що оптимальний розв'язок останньої задачі існує і позначається:

$$Y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \ .$$

Оптимальні значення початкової задачі (7.1)—(7.3) визначають за формулою: $x_j^* = \dfrac{y_j^*}{y_0^*} \quad (j = \overline{1,n})$.

Приклад 7.2. Сільськогосподарське акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю, яке розміщене у Лісостепу України, бажає оптимізувати структуру виробництва. Критерієм оптимальності вибрали максимізацію рівня рентабельності як відношення прибутку до собівартості. У табл. 7.1 маємо дані про види діяльності, якими керівництво товариства передбачає займатися.

Таблиця 7.1

ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНІ ПОКАЗНИКИ ГОЛОВНИХ НАПРЯМІВ ВИРОБНИЦТВА

Показник	Напрям виробництва							
	Озима пшениця	цукрові буряки	корови (продуктивність, кг)				кормові культури	ресурс
			5000	4500	4000	3500		

Урожайність, т/га	4	35	—	—	—	—	6	—
Собівартість, грн/т	600	250	600	700	800	900	200	—
Ціна, грн/т	800	300	1000	1000	1000	1000	—	—
Вихід кормів, т кор. од./га	4,8	2,0	—	—	—	—	6	—
Затрати трудових ресурсів, людино-днів/га (гол.)	4	25	6	6	6	6	3	26 000
Затрати механізованої праці, людино-днів/га (гол.)	2	8	3	3	3	3	2	11 000
Частка корів	—	—	0,1	0,2	0,3	0,4	—	—
Потреба у кормах, т кор. од./гол.	—	—	5	4,7	4,4	4,1	—	—

Акціонерне товариство має 2500 га ріллі. Для виготовлення кормів передбачається використовувати 20 % урожаю озимої пшениці та 30 % — цукрових буряків.

Знайти оптимальну структуру виробництва.

Розв'язання. Введемо позначення:

x_1 — площа посіву озимої пшениці, га;

x_2 — площа посіву цукрових буряків, га;

x_3 — площа посіву кормових культур, га;

x_4 — кількість корів продуктивністю 5000 кг/рік;

x_5 — кількість корів продуктивністю 4500 кг/рік;

x_6 — кількість корів продуктивністю 4000 кг/рік;

x_7 — кількість корів продуктивністю 3500 кг/рік.

Запишемо критерій оптимальності:

$$\max Z = \frac{0{,}8 \cdot 800x_1 + 0{,}7 \cdot 1750x_2 + 2000x_4 + 1350x_5 + 800x_6 + 350x_7}{2400x_1 + 8750x_2 + 1200x_3 + 3000x_4 + 3150x_5 + 3200x_6 + 3150x_7}$$

за умов дотримання таких обмежень:

1. Обмеження щодо використання ресурсів:

а) використання ріллі:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 2500;$$

б) використання живої праці:

$$4x_1 + 25x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 6x_6 + 6x_7 \le 26000;$$

в) використання механізованої праці:

$$2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 3x_7 \le 11000.$$

2. Обмеження стосовно дотримання сівозмін:

а) посівна площа кормових культур має бути більшою або дорівнювати площі під озимою пшеницею:

$$x_3 \ge x_1;$$

б) посівна площа озимої пшениці має бути більша або дорівнювати площі під цукровими буряками:

$$x_1 \ge x_2.$$

3. Структура корів за продуктивністю:

а) балансове рівняння щодо поголів'я корів:

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = x_8,$$

де x_8 — загальне поголів'я корів;

б) частка корів продуктивністю 5000 кг/рік:

$$x_4 \le 0{,}1x_8;$$

в) частка корів продуктивністю 4500 кг/рік:

$$x_5 \le 0{,}2x_8;$$

г) частка корів продуктивністю 4000 кг/рік:

$$x_6 \le 0{,}3x_8;$$

д) частка корів продуктивністю 3500 кг/рік:

$$x_7 \le 0{,}4x_8.$$

4. Забезпеченість корів кормами:

$$4{,}8\cdot 0{,}2x_1+2\cdot 0{,}3x_2+6x_3-5x_4-4{,}7x_5-4{,}4x_6-4{,}1x_7\geq 0.$$

Невід'ємність змінних:

$$x_j\geq 0\quad (j=\overline{1,8}).$$

Щоб знайти розв'язок за цією моделлю, необхідно зробити відповідну заміну змінних. Нехай:

$$\frac{1}{2400x_1+8750x_2+1200x_3+3000x_4+3150x_5+3200x_6+3150x_7}=y_0$$

і $y_j=y_0\,x_j$.

Тоді маємо таку лінійну економіко-математичну модель:

$$\max f=640y_1+1225y_2+2000y_4+1350y_5+800y_6+350y_7$$

за умов:

1. $y_1+y_2+y_3-2500y_0\leq 0$;

   $4y_1+25y_2+3y_3+6y_4+6y_5+6y_6+6y_7-26000y_0\leq 0$;

   $2y_1+8y_2+2y_3+3y_4+3y_5+3y_6+3y_7-11000y_0\leq 0$.

2. $y_3-y_1\geq 0$;

   $y_1-y_2\geq 0.$

3. $y_4+y_5+y_6+y_7-y_8=0$;

   $y_4-0{,}1y_8\leq 0$;

   $y_5-0{,}2y_8\leq 0$;

   $y_6-0{,}3y_8\leq 0$;

   $y_7-0{,}4y_8\leq 0.$

4. $4{,}8\cdot 0{,}2y_1+2\cdot 0{,}3y_2+6y_3-5y_4-4{,}7y_5-4{,}4y_6-4{,}1y_7\geq 0$.

5. $2400y_1+8750y_2+1200y_3+3000y_4+3150y_5+3200y_6+3150y_7=1$.

6. $y_j\geq 0\ \left(j=\overline{0,8}\right)$.

Розв'язавши задачу симплексним методом, отримаємо такий оптимальний план: $Y^*=(y_j^*,\ \ j=\overline{0,8})$. Враховуючи, що $x_j^*=\dfrac{y_j^*}{y_0^*}$, $j=\overline{1,8}$ оптимальним планом початкової задачі буде:

$$X^*\left(x_1^* = 1250;\ x_3^* = 1250; x_4^* = 198;\ x_5^* = 395; x_6^* = 593; x_7^* = 791\right),$$

причому значення цільової функції (рівень рентабельності виробництва) становить $Z = 0{,}23$, тобто 23 %.

Заключні зауваження

Як зазначалося в епіграфі цього розділу, більшість задач, що досліджуються в математичному програмуванні, зумовлені практичними потребами. Головними показниками економічної ефективності діяльності виробничих систем поряд з абсолютними величинами, такими як прибуток, валова, товарна продукція, є і відносні, наприклад, рівень рентабельності, як відношення прибутку до собівартості застосованих ресурсів чи виробничих фондів тощо.

Отже, якщо як цільову функцію задачі математичного програмування вибрати максимізацію одного з показників рентабельності, то завжди одержуємо задачу дробово-лінійного програмування. Аналогічні задачі виникають і в інших випадках, коли цільову функцію подають у вигляді відношення величини, яка і в чисельнику, і в знаменнику містить змінні задачі.

Вищенаведений прийом розв'язування задачі дробово-лінійного програмування не є оригінальним. Здебільшого, коли розв'язати задачу складно, то її зводять до простішої, для якої існують методи знаходження оптимального плану. Подібний прийом було використано і в задачах цілочислового програмування, і, як ви зможете переконатися, в інших специфічних задачах математичного програмування.

Контрольні запитання

1. Яка задача математичного програмування називається дробово-лінійною?
2. Як можна дослідити цільову функцію дробово-лінійної задачі, щоб знайти графічно її екстремальні значення?
3. Як можна розв'язувати дробово-лінійну задачу, коли вона має тільки дві змінні?

4. Як розв'язується дробово-лінійна задача, коли вона має три і більше невідомих?

Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 7.1. Розв'яжіть графічно задачі дробово-лінійного програмування.

1) $$Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max, \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2; \end{cases}$$

2) $$Z = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \max, \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12; \\ -x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 10; \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$$

Задача 7.2. Розв'яжіть задачу дробово-лінійного програмування симплексним методом.

$$Z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

«Математика схожа на чарівний млин, який перемелює все, що завгодно, і до будь-якої дрібності. Однак те, що ви дістаєте, залежить від того, що ви засиплете, і як найчудовіший у світі млин не видасть вам пшеничної крупчатки з лободи, так і сторінки формул не видадуть вам певного результату за сумнівними даними».

Т. Гекслі

РОЗДІЛ 8. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

У попередніх розділах було розглянуто методи розв'язування задач лінійного програмування та деякі типи задач, що певними нескладними перетвореннями зводяться до лінійних. Ці методи найкраще розроблені, легко реалізуються на ПЕОМ, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відображають лише певну й вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси переважно не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства народного господарства функціонують і розвиваються за умов невизначеності, а тому адекватно їх можна описати нелінійними, стохастичними, динамічними моделями. Отже, для ефективного управління народним господарством в цілому, його галузями і окремими об'єктами господарювання потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей та методів.

Зауважимо, що сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для застосування нелінійних методів, а це може суттєво підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність рішень, які приймаються.

8.1. Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на допущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Але такі зв'язки насправді є нелінійними, тому точніші математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції за умови найкращого способу використання її ресурсів. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, норми витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціни реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різними, наприклад, максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та цін на одиницю продукції.

Однак, загальновідомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту продукції визначається передусім її ціною, отже, як цільову функцію доцільно брати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Необхідно визначати також і оптимальний рівень ціни на одиницю продукції, за якої обсяг збуту був би максимальним. Для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, а обмеження задачі мають враховувати зв’язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція в такому разі буде виражена добутком двох невідомих величин: оптимальної ціни одиниці продукції на оптимальний обсяг відповідного виду продукції, тобто буде нелінійною. Отже, маємо задачу нелінійного програмування.

Також добре відома транспортна задача стає нелінійною, якщо вартість перевезення одиниці товару залежить від загального обсягу перевезеного за маршрутом товару. Тобто коефіцієнти при невідомих у цільовій функції, що в лінійній моделі були сталими величинами, залежатимуть від значень невідомих (отже, самі стають невідомими), що знову приводить до нелінійності у функціоналі.

І нарешті, будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик. Як показник ризику часто використовують дисперсію, тому для врахування обмеженості ризику потрібно вводити нелінійну функцію в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається дослідженням математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Загальна задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення:

$$\max(\min)F = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (8.1)$$

за умов:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\{\le, =, \ge\}b_i \quad (i = \overline{1, m}); \qquad (8.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (8.3)$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = \overline{1, m}$ є лінійними, то це задача лінійного програмування, інакше (якщо хоча б одна з функцій є нелінійною) маємо ***задачу нелінійного програмування***.

8.2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (8.1) визначає деяку поверхню, а обмеження (8.2)—(8.3) — допустиму підмножину n-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, непуста і обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень та нелінійну цільову функцію. В цьому разі область допустимих розв'язків є опуклою, непустою, замкненою, тобто обмеженою.

Розглянемо приклад геометричного способу розв'язування задачі нелінійного програмування.

Приклад 8.1. Знайти мінімальне і максимальне значення функції:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

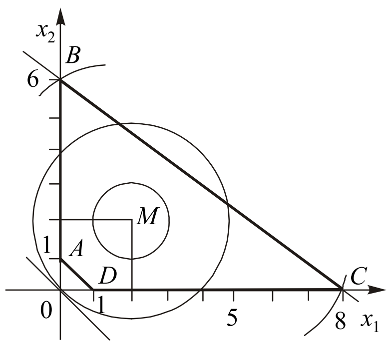


Рис. 8.1

Розв'язання. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник *ABCD* (рис. 8.1). Геометрично цільова функція являє собою коло з центром у точці *M* (2; 2), квадрат радіуса якого $R^2 = Z$. Це означає, що її значення буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіуса кола. Проведемо з точки *M* кола різних радіусів. Функція *Z* має два локальних максимуми: точки *B* (0; 6) і *C* (8; 0). Обчислимо значення функціонала в цих точках:

$$Z(B) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (0-2)^2 + (6-2)^2 = 4 + 16 = 20,$$

$$Z(C) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (8-2)^2 + (0-2)^2 = 36 + 4 = 40.$$

Оскільки $Z(C) > Z(B)$, то точка *C* (8; 0) є точкою глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R = 0$, тоді:

$R^2 = 0 = Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 2$. Тобто точка *M* є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції.

Зазначимо, що в даному разі точка, яка відповідає оптимальному плану задачі (мінімальному значенню функціонала), знаходиться всередині багатокутника допустимих розв'язків, що в задачах лінійного програмування неможливо.

Приклад 8.2. Знайти мінімальне значення функції:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8; \\ x_1 + x_2 \ge 12. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 .$$

Розв'язування. У даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин, необмежених зверху (рис. 8.2). Цільова функція аналогічно попередньому випадку є колом з центром у точці M (4; 4). Функція Z має два локальних мінімуми: в точці A ($x_1 \approx 11{,}29; x_2 \approx 0{,}71$), і в точці B ($x_1 \approx 0{,}71; x_2 \approx 11{,}29$).

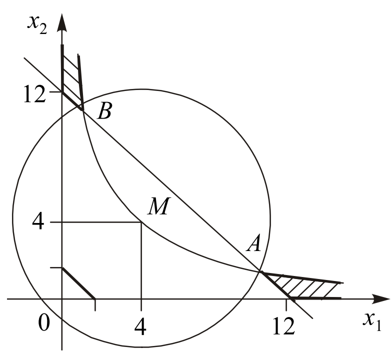


Рис. 8.2.

Значення функціонала в цих точках однакове і дорівнює:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64 .$$

Отже, маємо два альтернативні оптимальні плани.

Даний приклад ілюструє ще одну особливість задач нелінійного програмування: на відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною.

Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що зумовлюють необхідність застосування відповідних методів їх розв'язання.

8.3. Основні труднощі розв’язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило, собівартість продукції y визначають за формулою: $y = a + \frac{b}{x},$ де x — обсяг виробництва. Ввівши заміну: $z = \frac{1}{x}$, маємо: $y = a + bz,$ тобто приходимо до лінійної функції. За такої заміни похибок не допускають. Однак, якщо функцією собівартості буде $y = -ax^2 + bx + c,$ то використання замість неї деякої лінійної функції $y = d + kx$ невиправдане, що видно з рис. 8.3.

У точках x_1 і x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 у значній мірі, тобто на величину:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b-k)x_2 + (c-d).$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею. Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв’язок, близький до розв’язку початкової нелінійної задачі. Однак з вище розглянутого прикладу бачимо, що при побудові наближених лінійних задач можна отримати надто неточний розв’язок, який непридатний для використання.

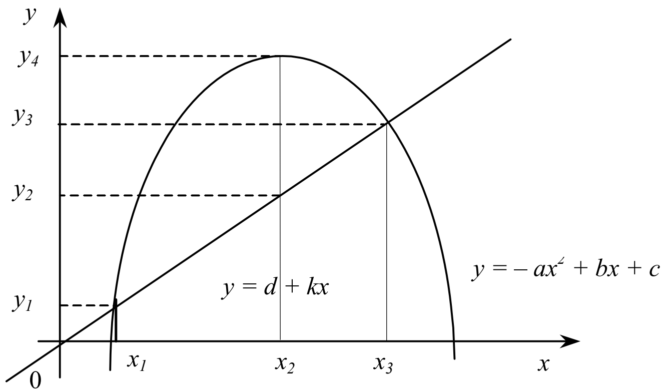


Рис. 8.3

Навіть питання щодо існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом — симплексним. При цьому не існує проблеми стосовно доведення існування такого розв'язку, тобто в результаті застосування алгоритму симплексного методу завжди отримують один з таких варіантів відповіді:

а) отримали оптимальний розв'язок;

б) умови задачі суперечливі, тобто розв'язку не існує;

в) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування ***не існує універсального методу*** розв'язання, що зумовило розроблення значної кількості різних методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв'язку задачі та його єдиність, що також є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але в такому разі існують труднощі обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому здебільшого для розв'язування нелінійних задач виправданим є застосування наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв'язків задачі. Однак у задачах нелінійного програмування існують ***кі-***

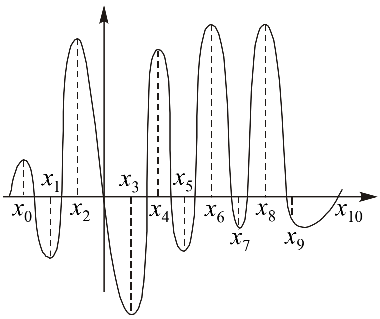


Рис. 8.4.

На рис.8.4 маємо на відрізку, що зображений, локальні оптимуми у точках $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9,$ глобальний — у точках x_3 та x_6.

Більшість наближених методів уможливлюють, як правило, знаходження локального оптимуму. Можна, звичайно, користуючись простим способом, визначити всі локальні оптимуми, а потім їх зіставленням знайти глобальний. Однак для практичних розрахунків такий метод є неефективним. Часто глобальний оптимум наближені методи «не уловлюють». Наприклад, у разі, коли глобальний оптимум знаходиться досить близько біля локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ поділити на десять підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 8.4), а зліва від x_i та справа від x_{i+1} крива $y = f(x)$ буде зростати, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає ***оптимальний план***, може бути як граничною, так і знаходитися ***всередині до-***

пустимої області розв'язків (планів), що було проілюстровано в прикладі8.1.

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати ***множину допустимих розв'язків як неопуклу***, або навіть складатися з довільних, не зв'язаних між собою частин (приклад 8.2).

Одним з найпоширеніших прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування (розглянуті в розділі 6). Нагадаємо, що вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків, утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення відшукання розв'язків такого типу задач.

Кожна із зазначених особливостей задач вимагає застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найскладнішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких поєднується кілька або всі згадані особливості.

8.4. Класичний метод оптимізації. Метод множників Лагранжа

Як уже згадувалось, для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи розв’язування задач нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найкраще розробленими є методи розв’язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв’язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

8.4.1. Умовний та безумовний екстремуми функції

У теорії дослідження функцій задача на відшукання екстремальних значень не містить ніяких додаткових умов щодо змінних і такі задачі належать до задач відшукання ***безумовного екстремуму*** функції. Локальний та глобальний екстремуми тоді визначаються з необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції.

Нагадаємо, що необхідна умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб точка (x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, необхідно, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була неперервною і диференційовною в околі цієї точки і перші частинні похідні за змінними x_1 та x_2 у цій точці дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = 0 .$$

Точка (x_1^0, x_2^0) називається критичною.

Достатня умова існування локального екстремуму функції двох змінних формулюється так: для того, щоб критична точка

(x_1^0, x_2^0) була точкою локального екстремуму, достатньо, щоб функція $f(x_1, x_2)$ була визначена в околі критичної точки (x_1^0, x_2^0) та мала в цій точці неперервні частинні похідні другого порядку.

Тоді, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ має екстремум, причому, якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} < 0,$$

тоді (x_1^0, x_2^0) — точка локального максимуму функції $f(x_1, x_2)$, а якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2} > 0,$$

тоді (x_1^0, x_2^0) — точка локального мінімуму функції $f(x_1, x_2)$.

У разі, якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 < 0,$$

то в точці (x_1^0, x_2^0) функція $f(x_1, x_2)$ екстремуму не має.

Якщо

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2^2}\right]-\left[\frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 = 0,$$

то питання про існування екстремуму залишається відкритим.

Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку

умовного екстремуму функції. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Розглянемо таку задачу для випадку двох змінних:

знайти $\max(\min) f(x_1, x_2)$ (8.4)

за умови, що $q(x_1, x_2) = b$. (8.5)

Найпростіший спосіб розв'язання задачі такого виду полягає в тому, що спочатку з обмеження (8.5) знаходять вираз однієї змінної через іншу. Приміром, визначають x_2 через x_1. Отриманий вираз виду $x_2 = g(x_1)$ підставляють у функцію (8.4), що після цього стає функцією однієї змінної $f(x_1, g(x_1))$, і далі знаходять її безумовний екстремум.

Якщо деяка точка x_1^* є точкою екстремуму функції $f(x_1, g(x_1))$, то точка $X^*(x_1^*, x_2^* = g(x_1^*))$ є точкою умовного екстремуму функції (8.4) за умови (8.5).

Однак не завжди вдається відшукати аналітичний вираз однієї змінної через іншу в умові (8.5). Часто це досить важко здійснити або неможливо. Також іноді складно узагальнити даний спосіб для функції *n* змінних, на які накладено *m* обмежень. Тому описана досить проста ідея зведення задачі відшукання умовного екстремуму функції кількох змінних до задачі на безумовний екстремум функції однієї змінної не може бути використана як основа універсального методу розв'язування задач на умовний екстремум. Цікавий метод розв'язування задач типу (8.4), (8.5) запропонував Лагранж.

8.4.2. Метод множників Лагранжа

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення дальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

У попередньому параграфі наведена необхідна умова існування локального екстремуму неперервної та диференційовної функції двох змінних.

Узагальнення необхідної умови існування локального екстремуму функції n змінних має аналогічний вигляд. Отже, для розв'язування задачі необхідно знайти вирази частинних похідних нової цільової функції за кожною змінною і прирівняти їх до нуля. В результаті отримаємо систему рівнянь. Її розв'язок визначає так звані стаціонарні точки, серед яких є і шукані екстремальні значення функції.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min) Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \tag{8.6}$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{8.7}$$

де функції $f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ мають бути диференційовними.

Задача (8.6), (8.7) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень $q_i, (i = \overline{1,m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. В літературі [13, 28] теоретично доведено, що постановки та розв'язання таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (8.6) на складнішу. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і має такий вигляд:

$$L(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n; \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_m) =$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{8.8}$$

де λ_i — деякі невідомі величини, що називаються ***множниками Лагранжа.***

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1, n}\right); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1, n}\right); \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, & \left(i = \overline{1, m}\right). \end{cases} \tag{8.9}$$

Друга група рівнянь системи (8.9) забезпечує виконання умов (8.7) початкової задачі нелінійного програмування.

Система (8.9), як правило, нелінійна.

Розв'язками її є $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ — стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (8.6), (8.7) або можуть бути точками перегину (сідловими точками).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n), q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції n змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (8.8) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n)\times(m+n)$:

$$H=\left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P' & Q \end{array}\right),$$

де O — матриця розмірністю $(m\times m)$, що складається з нульових елементів,

P — матриця розмірністю $(m\times n)$, елементи якої визначаються так:

$$P=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots & \cdots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

P' — транспонована матриця до P розмірністю $(n\times m)$,
Q — матриця розмірністю $(n\times n)$ виду:

$$Q=\left\| \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \text{ де } i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи (8.9). Нехай стаціонарна точка має координати $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ і $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), знак наступних (n – m) головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

Розглянемо задачу, розв'язок якої знайдемо методом множників Лагранжа.

Приклад 8.3. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю виділило 1200 га ріллі під основні сільськогосподарські культури — озиму пшеницю і цукрові буряки.

У табл. 8.1 маємо техніко-економічні показники вирощування цих культур:

Таблиця 8.1

Показник	Озима пшениця x_1, сотні га	Цукрові буряки x_2, сотні га
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Необхідно знайти оптимальні площі посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай: x_1 — площа ріллі під озимою пшеницею, сотні га;

x_2 — площа ріллі під цукровими буряками, сотні га.

Звернемо увагу на те, що собівартість тонни пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель цієї задачі. Критерієм оптимальності візьмемо максимізацію чистого доходу:

$$\max f = 4(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200)x_1 100 +$$
$$+ 35(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650)x_2 100 =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2) +$$
$$+ \lambda_1(12 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_1 - 350\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівняння знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, маємо:

$$400(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400) = 3500(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350) \qquad (8.10)$$

або, скоротивши на 100 обидві частини і розкривши дужки, отримаємо:

$$150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = 1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\,. \qquad (8.11)$$

Із останнього рівняння системи маємо: $x_1 = 12 - x_2$.

Підставимо вираз для x_1 у рівність (8.11). Отримаємо:

$$-150(12 - x_2)^2 + 1600(12 - x_2) - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250$$

Або

$$-150\left(144 - 24x_2 + x_2^2\right) + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 =$$
$$= -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\,;$$

$$21\,600 + 3600x_2 - 150x_2^2 + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 +$$
$$+ 1312{,}5x_2^2 - 10\,500x_2 + 12\,250 = 0.$$

Отже, $1162x_2^2 - 8500x_2 + 11\,450 = 0$;

$D = 72\,250\,000 - 53\,219\,600 = 19\,030\,400$

$\sqrt{D} \approx 4362$.

$$x_2^{(1)} = \frac{8500 + 4362}{2324} \approx 5{,}53 \quad (553 \text{ га});$$

$$x_2^{(2)} = \frac{8500 - 4362}{2324} \approx 1{,}78 \quad (178 \text{ га}).$$

Відповідно дістаємо:

$x_1^{(1)} \approx 6{,}47(647$ га);

$x_1^{(2)} \approx 10{,}22(1022$ га).

Тобто отримали дві сідлові точки:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 6{,}47; \\ x_2^{(1)} = 5{,}53. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 10{,}22; \\ x_2^{(2)} = 1{,}78. \end{cases}$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку сідлову точку $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$.

Матриця Гессе має такий вигляд:

$$H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{array}\right).$$

За вищезазначеним правилом визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку ($m+1 = 1+1 = 2$):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -34100 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{vmatrix} = 435725.$$

Отже, головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Обчислимо значення цільової функції в цій точці:

$$f(x_1 = 6{,}47;\, x_2 = 5{,}53) = 4(800 - 532{,}26 + 1294 - 1200)647 +$$
$$+ 35(300 - 382{,}26 + 829{,}5 - 650)553 = 4625863.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_1^*(x_1^{(2)} = 10{,}22;\, x_2^{(2)} = 1{,}78)$ показують, що вона не є екстремальною.

Отже, цільова функція набуде максимального значення, якщо озима пшениця вирощуватиметься на площі 647 га, а цукрові буряки — на площі 553 га.

Метод множників Лагранжа може застосовуватися також у разі наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей.

Розглянемо таку задачу в загальному вигляді:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ (i = 1, 2, ..., k); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \ (i = k+1, ..., l); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i \ (i = l+1, 2, ..., m), \end{cases}$$

причому всі функції, що входять у задачу, мають бути диференційовними хоча б один раз.

Очевидно, що введення в ліві частини нерівностей системи обмежень задачі додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \ge 0 \ (i = k+1, ..., m)$ перетворює початкову задачу в таку, що містить лише обмеження-рівності, тобто яка за формою та методом розв'язування збігатиметься з задачею (8.6), (8.7).Особливості розв'язання такого типу задач розглянуто в літературі: [19], [28].

8.5.Необхідні умови існування сідлової точки

Для розроблення методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування важливе значення має поняття сідлової точки, а також визначення необхідних і достатніх умов існування сідлових точок функції Лагранжа $L(X,\Lambda)$ у (n + m)-вимірному просторі змінних $(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ за довільних умов, які можуть накладатися на їх знаки (необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа за відсутності обмежень на знаки змінних розглянуто в §8.4).

Розглянемо нелінійну задачу:

$$\max F = f(x_1, x_1, ..., x_n),$$

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ (i = \overline{1,m}).$$

Причому на компоненти векторів X, Λ накладено обмеження на знаки. Позначимо множину точок, що задовольняють такі обмеження, через Ω.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд:

$$L(X,\Lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)). \qquad (8.12)$$

Точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ називається ***сідловою точкою*** функції Лагранжа (8.12), якщо для всіх $X \in \Omega,\ \Lambda \in \Omega$ виконується співвідношення:

$$L(X,\Lambda^*) \le L(X^*,\Lambda^*) \le L(X^*,\Lambda). \qquad (8.13)$$

Для диференційовних функцій $f(X)$ та $q_i(X)$ знайдемо необхідні умови існування сідлової точки.

Сідлова точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ функції $L(X,\Lambda)$ виду (8.12) за означенням задовольняє умову:

$$L(X,\Lambda^*) \le L(X^*,\Lambda^*).$$

Нерівність виконується для всіх точок X, тобто також і для тих, у яких лише одна координата відрізняється від X^*. Допустимо, що це x_k, а всі інші збігаються з координатами сідлової точки $x_j = x_j^* \ (j = 1,2,...,k-1,k+1,...,n)$.

Оскільки права частина нерівності є фіксованою, а в лівій частині змінюється лише одна координата x_k, то приходимо до функції однієї змінної $L(X, \Lambda^*) = L(x_k)$, яку можна зобразити графічно на координатній площині.

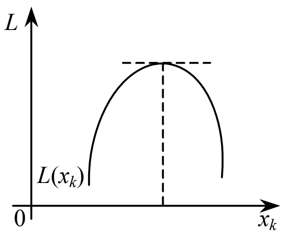


Рис. 8.5

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_k \geq 0$, тобто лише частину координатної площини, для якої $x_k \geq 0$.

Можливі такі випадки:

1) коли всі $x_j^* > 0$, то максимальне значення функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці, для якої $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 8.5).

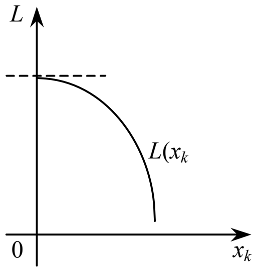


Рис. 8.6

2) коли максимум функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці $x_k = 0$ і розглядувана частинна похідна також дорівнюватиме нулю: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 8.6).

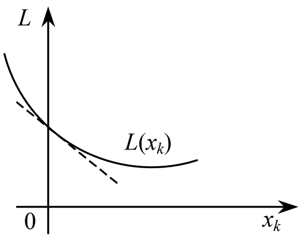


Рис. 8.7

3) коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься також у точці $x_k = 0$, а частинна похідна $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_k} \le 0$ (рис. 8.7).

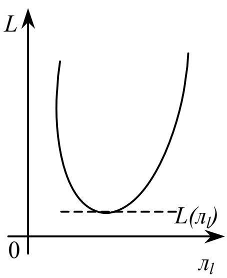


Рис. 8.8

Узагальнюючи всі три ситуації, маємо:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \quad \text{для} \quad x_j \ge 0$$

та $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j}(x_j^*) = 0.$$

Розглядаючи другу частину нерівності (8.13):

$$L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda)$$

аналогічними міркуваннями, що проілюстровані рис. 8.8.—8.10, встановлюються необхідні умови для похідних по λ_l функції Лагранжа в сідловій точці.

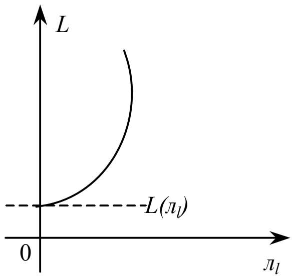


Рис. 8.9

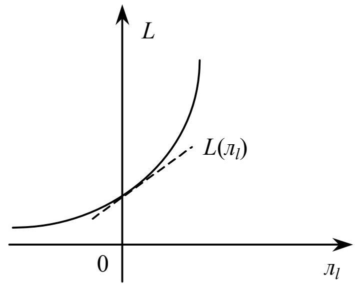


Рис. 8.10

Об'єднуючи всі три випадки для невід'ємних координат, маємо необхідні умови сідлової точки:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \quad \text{для тих індексів } j\text{, де } x_j \ge 0. \qquad (8.14)$$

Зауважимо, що для $x_k \le 0$ маємо ті самі випадки, які зображено на рис. 8.1—8.6, причому графіки будуть симетрично відображені відносно осі Oy, тобто для недодатних координат необхідна умова має вигляд:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \ge 0 \quad \text{для тих індексів } j\text{, де } x_j \le 0. \qquad (8.15)$$

І нарешті, як відомо з попереднього параграфа, якщо на знак x_j умови не накладаються, то необхідною умовою є:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j \text{ — довільного знака.} \qquad (8.16)$$

Узагальнення всіх випадків приводить до рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0. \qquad (8.17)$$

Розглядаючи другу частину нерівності (8.13), за допомогою аналогічних міркувань встановлюємо необхідні умови для похідних по λ_i функції Лагранжа в сідловій точці:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \ge 0 \quad \text{для тих індексів } i\text{, де } \lambda_i \ge 0, \qquad (8.18)$$

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \le 0 \quad \text{для тих індексів } i\text{, де } \lambda_i \le 0, \qquad (8.19)$$

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$$ для тих індексів *i*, де λ_i має довільний знак. (8.20)

Отже, справджується рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0 \quad . \tag{8.21}$$

Сукупність співвідношень (8.14)—(8.21) становить необхідні умови, які має задовольняти сідлова точка (X^*, Λ^*) функції Лагранжа для точок, що належать множині Ω. При цьому $L(X^*, \Lambda^*)$ повинна мати частинні похідні по всіх компонентах векторів X, Λ.

8.6.Теорема Куна—Таккера

Розглянутий метод множників Лагранжа уможливлює знаходження лише локальних сідлових точок функції Лагранжа.

Теорема Куна—Таккера дає змогу встановити типи задач, для яких на множині допустимих розв'язків існує лише один глобальний екстремум зумовленого типу. Вона тісно пов'язана з необхідними та достатніми умовами існування сідлової точки.

Розглянемо задачу нелінійного програмування, яку, не зменшуючи загальності, подамо у вигляді:

$$\max F = f(X) \, , \tag{8.22}$$

$$q_i(X) \le b_i \;\; (i = \overline{1, m}) \, , \tag{8.23}$$

$$x_j \ge 0 \, (j = \overline{1, n}) \, . \tag{8.24}$$

(Очевидно, що знак нерівності можна змінити на протилежний множенням лівої і правої частин обмеження на (– 1)).

Теорема 8.1. (Теорема Куна—Таккера). Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі (8.22)—(8.24) тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор Λ^*, що при $X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0$ для всіх $X \geq 0, \Lambda \geq 0$ точка (X^*, Λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X)),$$

і функція мети $f(X)$ для всіх $X \geq 0$ угнута, а функції $q_i(X)\ (i = \overline{1,m})$ — опуклі.

Доведення. ***Необхідність***. Нехай X^* — оптимальний план задачі (8.22)—(8.24), тобто є точкою глобального максимуму задачі. Отже, для всіх інших планів задачі X з множини допустимих розв'язків виконуватиметься співвідношення:

$$f(X^*) \geq f(X).$$

Розглянемо тепер вектор $\Lambda^* \geq 0$, що відповідає точці глобального максимуму X^*, і значення функції Лагранжа в точках (X^*, Λ^*), (X^*, Λ), (X, Λ^*), де $X \geq 0$ — довільний план задачі з множини допустимих розв'язків, $\Lambda \geq 0$ — вектор множників Лагранжа, що відповідає X.

З умови (8.21) маємо: $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = (b_i - q_i(X)) \cdot \lambda_i^* = 0$, тоді

$$L(X^*, \Lambda^*) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = f(X^*). \qquad (8.25)$$

Для точки з координатами (X^*, Λ) деякі доданки виду $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*))$ можуть бути відмінними від нуля. Оскільки за умовою задачі $b_i - q_i(X^*) \geq 0$, то лише за умови, що $\Lambda \geq 0$, матимемо нерівність:

$$f(X^*) = L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)).$$

Функція $L(X^*, \Lambda)$ — лінійна відносно Λ, тобто остання нерівність виконується для будь-якого $\Lambda \geq 0$. Отже, точка (X^*, Λ^*) — точка глобального мінімуму по Λ функції Лагранжа.

Для встановлення нерівності, що відповідає лівій частині умови (8.13), а саме: $L(X, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda^*)$, скористаємося також рівнянням (8.21), підсумувавши його по *i*: $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0$. За умовою теореми $f(X), q_i(X)$ — угнуті функції і $\Lambda \geq 0$, тому виконується таке рівняння:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \right) \left(\Lambda - \Lambda^* \right) = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \Lambda^* \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} =$$

$$= \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_l^* = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i}.$$

Отже, у точці X^* функція Лагранжа має глобальний максимум по X, що повністю доводить необхідність теореми.

Достатність. Для доведення достатності умов теореми потрібно виходити з того, що $X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0$, (X^*, Λ^*) — сідлова точка функції $L(X, \Lambda)$ (тобто для (X^*, Λ^*) виконується нерівність

(8.13)), і необхідно довести, що тоді X^* є оптимальним планом задачі опуклого програмування.

Підставимо у нерівність (8.13) вираз функції Лагранжа (8.12) для задачі (8.22)—(8.23):

$$f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X))\le f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X^*))\le$$

$$\le f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-q_i(X^*)) \tag{8.26}$$

при всіх значеннях $X\ge 0,\ \Lambda\ge 0$.

Розглянемо праву частину подвійної нерівності (8.26).

$$f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X^*))\le f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-q_i(X^*))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X^*)-f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X^*))\le\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-q_i(X^*))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X^*))\le\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(b_i-q_i(X^*)).$$

Остання нерівність має виконуватися для всіх $\Lambda\ge 0$. Крім того, $(b_i-q_i(X))\ge 0$, тобто нерівність справджується лише у разі, коли

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X^*))=0.$$

Тоді з лівої частини нерівності (8.26) маємо:

$$f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X))\le f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X^*))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i-q_i(X))\le f(X^*).$$

Через те що $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*(b_i - q_i(X)) \geq 0$, приходимо до нерівності $f(X) \leq f(X^*)$, яка справджується для всіх значень $X \geq 0$.

Отже, точка X^* задовольняє обмеження і надає максимального значення цільовій функції задачі, тому що для всіх інших $X \geq 0$ функція $f(X)$ набуває менших значень, ніж у точці X^*, тобто вона є оптимальним планом задачі нелінійного програмування. Достатність умов тереми доведено.

Умови теореми Куна — Таккера виконуються лише для задач, що містять опуклі функції.

8.6.1. Опуклі й угнуті функції

Наведемо основні означення та теореми. Нехай задано *n*-вимірний лінійний простір R^n. Функція $f(X)$, що задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***опуклою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини X і будь-яких значень $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується співвідношення:

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right) \leq \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right). \qquad (8.27)$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго опуклою.

Функція $f(X)$, яка задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***угнутою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини X і будь-якого $0 \leq \lambda \leq 1$ справджується співвідношення:

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1\right) \geq \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right). \quad (8.28)$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго угнутою.

Слід зазначити, що опуклість та угнутість функції визначаються лише відносно опуклих множин у R^n, оскільки за наведеними означеннями разом з двома будь-якими точками X_1 та X_2 множині X належать також точки їх лінійної комбінації: $\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1$ для всіх значень $0 \leq \lambda \leq 1$, що можливо лише у разі, коли множина X є опуклою.

Теорема 8.2. Нехай $f(X)$ — опукла функція, що задана на замкненій опуклій множині X, тоді будь-який локальний мінімум $f(X)$ на цій множині є і глобальним.

Доведення. Допустимо, що в точці X' функція $f(X)$ має локальний мінімум, тоді як глобальний мінімум досягається в точці X^*, отже, виконуватиметься нерівність $f(X') > f(X^*)$. Через те що $f(X)$ — опукла функція, для будь-яких значень $0 \leq \lambda \leq 1$ справджується співвідношення:

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda) X'\right) \leq \lambda f\left(X^*\right) + (1-\lambda) f\left(X'\right). \quad (8.29)$$

Множина X опукла, тому точка $\lambda X^* + (1-\lambda)X'$ при $0 < \lambda < 1$ також належить цій множині. Враховуючи, що $f(X') > f(X^*)$, нерівність (8.29) матиме вигляд:

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) \le \lambda f\left(X^*\right) + (1-\lambda) f\left(X'\right) < \lambda f(X') + (1-\lambda) f(X');$$

$$f\left(\lambda X^* + (1-\lambda)X'\right) < f(X').$$

Значення λ можна вибрати так, щоб точка $\lambda X^* + (1-\lambda)X'$ була розташована як завгодно близько до X'. Тоді отримана остання нерівність суперечить тому, що X' — точка локального мінімуму, оскільки існує як завгодно близька до неї точка, в якій функція набуває меншого значення, ніж у точці X'. Тому попереднє допущення неправильне. Теорему доведено.

> **Теорема 8.3.** Нехай $f(X)$ — опукла функція, що визначена на опуклій множині X, і крім того, вона неперервна разом з частинними похідними першого порядку в усіх внутрішніх точках X. Нехай X^* — точка, в якій $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = 0,\ (i = \overline{1,n})$. Тоді в точці X^* досягається локальний мінімум, що збігається з глобальним.

*Доведення***.** З рівності (8.12) для $0 < \lambda < 1$ знаходимо:

$$f\left(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1\right) \le \lambda f\left(X_2\right) + (1-\lambda) f\left(X_1\right) = f(X_1) + \lambda(f(X_2) - f(X_1));$$

$$f\left(\lambda X_2 + X_1 - \lambda X_1\right) = f(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) \le f(X_1) + \lambda(f(X_2) - f(X_1));$$

$$\frac{f(X_1+\lambda(X_2-X_1))-f(X_1)}{\lambda}\le f(X_2)-f(X_1).$$

Через те що існують частинні похідні першого порядку, функцію $f(X_1+\lambda(X_2-X_1))$ можна розкласти в ряд Тейлора:

$$f(X_1+\lambda(X_2-X_1))=f(X_1)+\nabla f\big(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\big)\lambda(X_2-X_1),$$

де $\nabla f\big(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\big)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градієнт функції f, обчислений у точці $X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)$, $0\le\theta\le 1$. Тоді:

$$\frac{f(X_1+\lambda(X_2-X_1))-f(X_1)}{\lambda}=\nabla f\big(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\big)(X_2-X_1)\le$$
$$\le f(X_2)-f(X_1).$$

Переходимо до границі при $\lambda\to 0$, отримаємо:

$$\nabla f(X_1)(X_2-X_1)\le f(X_2)-f(X_1). \qquad (8.30)$$

Ця умова виконується для будь-яких внутрішніх точок X_1 та X_2 і є необхідною і достатньою умовою опуклості $f(X)$.

Якщо функція $f(X)$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку і угнута на множині X, то аналогічно попередньому результату маємо:

$$\nabla f(X_1)(X_2-X_1)\ge f(X_2)-f(X_1).$$

Припустимо, що X^0 — довільна точка множини X, тоді, взявши $X_1=X^*$, $X_2=X^0$, а також за умовою теореми $\nabla f(X)=0$, в нерівності (8.30) маємо:

$$\nabla f(X^*)(X^0-X^*)=0\le f(X^0)-f(X^*)\Rightarrow f(X^0)\ge f(X^*).$$

Отже, опукла функція $f(X)$ досягає свого глобального мінімуму на множині X у кожній точці, де $\nabla f(X)=0$. Теорему доведено.

Як наслідок теореми можна показати, що коли X замкнена, обмежена знизу, опукла множина, то глобального максимуму опукла функція $f(X)$ досягає на ній у одній чи кількох точках (при цьому допускається, що в точці X значення функції скінченне). Застосовуючи за розв'язування таких задач процедуру перебору крайніх точок, можна отримати точку локального максимуму, однак не можна встановити, чи є вона точкою глобального максимуму.

Для угнутих функцій отримані результати формулюють так. Нехай $f(X)$ — угнута функція, що задана на замкненій опуклій множині $X \subset R^n$. Тоді будь-який локальний максимум $f(X)$ на множині X є глобальним. Якщо глобальний максимум досягається в двох різних точках множини, то він досягається і на нескінченній множині точок, що лежать на відрізку, який сполучає ці точки. Для строго угнутої функції існує єдина точка, в якій вона досягає глобального максимуму.

Градієнт угнутої функції $f(X)$ у точках максимуму дорівнює нулю, якщо $f(X)$ — диференційовна функція. Глобальний мінімум угнутої функції, якщо він скінченний на замкненій обмеженій зверху множині, має досягатися в одній чи кількох її крайніх точках за умови скінченності функції $f(X)$ у кожній точці цієї множини.

8.7.Опукле програмування

Опукле програмування розглядає методи розв'язування задач нелінійного програмування, математичні моделі яких містять опуклі або угнуті функції.

Загальний вигляд задачі опуклого програмування такий:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{8.31}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \; (i = \overline{1,m}); \tag{8.32}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}), \tag{8.33}$$

де $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — угнуті функції.

Аналогічний вигляд має задача для опуклих функцій.

Позначимо: $F'(X) = -F(X); \; g_i'(X) = -g_i(X)$, тоді $\max F(X) \approx \min F'(X)$, і маємо:

$$\min F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{8.34}$$

$$g_i'(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0 \quad (i = \overline{1,m}); \tag{8.35}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}), \tag{8.36}$$

де $F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i'(x_1, x_2, ..., x_n)$ — опуклі функції.

Оскільки ці задачі еквівалентні, то нижче розглянемо задачу (8.31)—(8.33).

Множина допустимих планів задачі, що визначається системою (8.32), є опуклою.

Як наслідок теорем8.2 та 8.3 справджується таке твердження: точка локального максимуму (мінімуму) задачі опуклого програмування (8.31)—(8.33) є одночасно її глобальним максимумом (мінімумом).

Отже, якщо визначено точку локального екстремуму задачі опуклого програмування, то це означає, що знайдено точку глобального максимуму (мінімуму).

У разі обмежень-нерівностей задачу опуклого програмування розв'язують, застосовуючи метод множників Лагранжа.

Функція Лагранжа для задачі (8.31)—(8.33) має вид:

$$L(X, \Lambda) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{8.37}$$

де $\lambda_i (i = \overline{1,m})$ — множники Лагранжа.

Використовуючи теорему Куна — Таккера, маємо необхідні та достатні умови існування оптимального плану задачі опуклого програмування.

Теорема 8.4. Якщо задано задачу нелінійного програмування виду (8.31)—(8.33), де функції $f(X), g_i(X) \quad (i=\overline{1,m})$ диференційовні і вгнуті по *X*, то для того, щоб вектор $X^* \geq 0$ був розв'язком цієї задачі, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор $\Lambda^* \geq 0$, що пара (X^*, Λ^*) була б сідловою точкою функції Лагранжа, тобто щоб виконувалися умови:

(I) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0, \left(j=\overline{1,n}\right); \qquad (8.38)$$

(II) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0, \left(j=\overline{1,n}\right); \qquad (8.39)$$

(III) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \left(i=\overline{1,m}\right); \qquad (8.40)$$

(IV) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0, \left(i=\overline{1,m}\right). \qquad (8.41)$$

Для задачі мінімізації (8.34)—(8.36), де всі функції $f(X), g_i(X)$ $(i=\overline{1,m})$ диференційовні і опуклі по *X,* маємо умови, аналогічні вищенаведеним, але зі знаком «≥» в нерівностях (8.39) та (8.41).

Сформульована теорема доводиться з допомогою використання вищенаведених теорем цього та попередніх параграфів.

8.8.Квадратичне програмування

Окремою частиною задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування. До них належать задачі, які мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2 +$$
$$+ 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + \ldots + 2c_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = \overline{1,m});$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

8.8.1. Квадратична форма та її властивості

Квадратична функція n змінних називається ***квадратичною формою*** і може бути подана у вигляді:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = X^TCX,$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$,

причому матриця C завжди симетрична, тобто $c_{ij} = c_{ji}$ для всіх $i, j = \overline{1,n}$.

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***від'ємно означеною***, якщо для всіх X, крім X=0, значення $Z(X)<0$ (якщо $Z(X) \leq 0$, то маємо від'ємно напівозначену квадратичну форму), у протилежному разі $Z(X)$ є ***додатно означеною*** (якщо $Z(X) \geq 0$, то маємо додатно напівозначену квадратичну форму).

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***неозначеною***, якщо вона додатна для одних значень X і від'ємна для інших.

Вид квадратичної форми можна визначити, використовуючи $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ — вектор характеристичних коренів (власних значень) матриці C.

Вектор характеристичних коренів матриці C є вектором, кожна компонента якого задовольняє систему рівнянь виду $\left(C - E\lambda_i\right) X = 0 \ (i = \overline{1,n})$. Система має ненульовий розв'язок, якщо $\left|C - E\lambda\right| = 0$. Таке рівняння називається характеристичним рівнянням матриці C і має $\lambda_i \ (i = \overline{1,n})$ коренів, які утворюють вектор Λ:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \cdots & c_{2n} \\ .. & .. & . & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Наведемо без доведення теорему (доведення можна знайти в літературі [19]).

Теорема 8.5. Для того, щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) означеною, необхідно і достатньо, щоб усі компоненти вектора характеристичних коренів

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ були додатними (від'ємними) значеннями.

Якщо хоча б один із характеристичних коренів дорівнює нулю, то квадратична форма є напівдодатною (напів-від'ємною). Якщо корені мають різні знаки, то квадратична форма є неозначеною.

Приклад 8.4. Визначити вид квадратичної форми:

$$F = -4x_1x_2 - 4x_1^2 - x_2^2.$$

Матриця C має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$.
Звідси маємо:

$$(-4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(-2) = 0 \to 4 + \lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \to \lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Коренями отриманого квадратного рівняння є: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -5 < 0$, тоді $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Отже, квадратична форма $F = -2x_1x_2 - 4x_1^2 - x_x^2$ за теоремою 8.5 є напіввід'ємною.

8.8.2. Метод розв'язування задач квадратичного програмування

Зазначимо, що відомим з теорії аналізу функцій є таке твердження: від'ємно означена квадратична форма є угнутою, а додатно означена — опуклою.

Розглянемо випадок від'ємно означеної квадратичної форми, що входить у цільову функцію задачі квадратичного програмування.

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \tag{8.42}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}); \tag{8.43}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}). \tag{8.44}$$

Оскільки цільова функція задачі є опуклою, а обмеження — лінійні, тобто визначають опуклу множину допустимих розв'язків, то ця задача належить до задач опуклого програмування, для яких справджується твердження, що будь-який локальний максимум є і глобальним. Отже, використовуючи умови теореми Куна — Таккера для задачі (8.42)—(8.44), отримаємо необхідні та достатні умови оптимальності плану у вигляді такої теореми.

Теорема 8.6. Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування тоді, і тільки тоді, коли існують такі m-вимірні вектори $\Lambda^* \geq 0, W \geq 0$ і n-вимірний вектор $V \geq 0$, що виконуються умови:

(I) $$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{8.45}$$

(II) $$v_j \cdot x_j^* = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{8.46}$$

(III) $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$; (8.47)

(IV) $w_i \lambda_i^* = 0$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$. (8.48)

Доведення. Запишемо функцію Лагранжа для задачі квадратичного програмування (8.42)—(8.44):

$$L(X,\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right). \quad (8.49)$$

Нехай (X^*,Λ^*) — сідлова точка функції Лагранжа, тобто яка визначає оптимальний план задачі квадратичного програмування. Застосуємо теорему 8.4 до виразу (8.49). За теоремою для того, щоб точка (X^*,Λ^*) визначала оптимальний план, необхідно і достатньо виконання умов (8.38)—(8.41):

для $x_j^* \geq 0$ має виконуватись умова:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i^* - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* a_{ij} \leq 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (8.50)$$

а також $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0$, (8.51)

а для $\lambda_j^* \geq 0$ має виконуватись умова:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \geq 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (8.52)$$

а також $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0$. (8.53)

Візьмемо два вектори $V(v_1, v_2, ...v_n) \geq 0$ та $W(w_1, w_2, ...w_m) \geq 0$, компоненти яких будуть введені як додаткові змінні в рівняння (8.50) та (8.52). Для цього виберемо $v_j > 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} < 0$ і $v_j = 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = 0$. Аналогічно виберемо $w_i > 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} > 0$ і $w_i = 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$. Тепер додамо компоненти вектора $V(v_1, v_2, ...v_n) \geq 0$ у (8.50) і віднімемо компоненти вектора $W(w_1, w_2, ...w_m) \geq 0$ від (8.52). Враховуючи правила вибору компонент векторів, матимемо для (8.50):

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Звідси: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} = -v_j$, тому для (8.51) маємо:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = -v_j x_j^* = v_j x_j^* = 0.$$

Аналогічно для другої групи обмежень:

$$\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \quad \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Звідки $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = w_i$, тому $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = w_i \lambda_i^* = 0$.
Теорему доведено.

Наведену теорему можна використати для побудови ефективного методу розв'язування задач квадратичного програмування на основі алгоритму симплексного методу.

Умови (8.45)—(8.49) утворюють стосовно змінних X^*, Λ^*, V, W систему (n+m) рівнянь з 2(n+m) невідомими.

Умови (8.47) та (8.48) означають, що змінні x_j^*, v_j не можуть одночасно мати додатні значення, тобто входити в базис разом. Якщо деякі k компонент вектора X^* додатні, то відповідні їм компоненти вектора V дорівнюють нулю і лише (n–k) компонент відмінні від нуля (додатні). Отже, разом x_j^*, v_j будуть мати не більш ніж n додатних компонент. З аналогічних міркувань щодо рівності (8.48) випливає, що разом з λ_i^*, w_i буде n+m відмінних від нуля компонент, тобто це може бути базисний розв'язок системи, що утворена умовами (8.45) та (8.47). Для знаходження такого розв'язку можна застосувати симплексний метод.

Якщо зазначена система рівнянь має допустимий план (він буде єдиним), то оптимальний план відповідної задачі квадратичного програмування також існує.

Розв'язуємо систему рівнянь (8.45) і (8.47) симплексним методом. Як відомо, спочатку необхідно привести систему обмежень до канонічного виду введенням потрібної кількості додаткових та штучних змінних. Для зведення системи до канонічної форми та визначення початкового опорного плану вводимо штучні змінні $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ у рівняння виду (8.45), які будуть базисними для першого опорного плану, а змінні $\beta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ — у групу рівнянь (8.47), які також дають базисні змінні для початкового плану. Потім для знаходження базисного розв'язку системи (8.45), (8.47) розв'язуємо симплексним методом таку задачу лінійного програмування:

$$\max F' = -M\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i\right) \tag{8.54}$$

за умов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j + \alpha_j = 0, \ (j = \overline{1, n}); \\ \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} - w_i + \beta_i = 0 \ (i = \overline{1, m}); \end{cases} \tag{8.55}$$

$$X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \tag{8.56}$$

Якщо в процесі розв'язування задачі (8.54)—(8.56) всі штучні змінні будуть виведені з базису $(\alpha = 0, \beta = 0)$ і разом з цим для знайдених значень змінних X^*, Λ^*, V, W виконуються умови (8.46), (8.48), то знайдений розв'язок є оптимальним планом задачі квадратичного програмування (8.42)—(8.44).

Приклад 8.5. Розв'язати задачу квадратичного програмування:

$$\max F = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

*Розв'язання***.** Оскільки цільова функція виражена сумою лінійної функції $F_1 = 9x_1 + 5x_2$ та квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - {}$ $-2x_1x_2$, а система обмежень є лінійною, то маємо задачу квадратичного програмування.

Визначимо вид квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$, для чого відшукаємо корені характеристичного рівняння, що відповідає матриці, складеній з коефіцієнтів при змінних даної функції:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням для матриці *C* буде:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = -1.$$

Оскільки обидва корені характеристичного рівняння від'ємні, то квадратична форма $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$ є від'ємно означеною, а отже, опуклою.

Запишемо функцію Лагранжа для цієї задачі:

$$L(X, \Lambda) = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + \lambda(6 - 2x_1 - 3x_2).$$

Скористаємося теоремою 8.4. Необхідні умови існування екстремуму матимуть вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 9 - 4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \le 0, \text{ причому } \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 5 - 4x_2 - 2x_1 - 3\lambda \le 0, \text{ причому } \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0, \text{ причому } \frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = 0,$$

де $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ — координати сідлової точки.

Обмеження, що відповідають нерівностям, запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \le -9; \\ -2x_1 - 4x_2 - 3\lambda \le -5; \\ -2x_1 - 3x_2 \ge -6. \end{cases}$$

Вводимо додаткові змінні для зведення нерівностей до рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda + v_1 = -9; \\ -2x_1 - 4x_2 - 3\lambda + v_2 = -5; \\ -2x_1 - 3x_2 - w_1 = -6. \end{cases}$$

Для зведення задачі до канонічної форми помножимо кожне рівняння на (–1):

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 = 9; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3\lambda - v_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6. \end{cases}$$

Очевидно, що в даному разі штучні змінні необхідно вводити в перші два рівняння. У третьому рівнянні базисною змінною буде w_1. Маємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max F' = -M\alpha_1 - M\alpha_2,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 + \alpha_1 = 9; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3\lambda - v_2 + \alpha_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6. \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$.

Розв'язавши її симплексним методом, отримаємо:

$$x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6},\ \lambda^* = 0,\ v_1 = v_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ w_1 = 1\frac{1}{6}.$$

Необхідно перевірити виконання умов:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = x_1^* v_1 = 2\frac{1}{6} \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = x_2^* v_2 = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = \lambda^* w_1 = 0 \cdot 1\frac{1}{6} = 0.$$

Всі умови виконуються, отже, $(X^*, \Lambda^*) = \left(x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6},\ \lambda^* = 0 \right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для задачі квадратичного програмування, а $X^*\left(x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6} \right)$ — оптимальним планом задачі, для якого значення функціонала дорівнює:

$$F = 9 \cdot 2\frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 2\left(\frac{13}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{97}{9}.$$

8.9. Економічна інтерпретація множників Лагранжа

Теорему 8.4 можна розглядати як узагальнення другої теореми двоїстості задач лінійного програмування для задач нелінійного програмування. Умови (8.39)—(8.41) є умовами доповнюючої нежорсткості.

Для з'ясування питання стосовно економічного змісту множників Лагранжа розглянемо застосування методу множників Лагранжа до задачі лінійного програмування як частинного випадку нелінійних задач. Нехай задача має вигляд:

$$\max \qquad F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{8.57}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{8.58}$$

Функція Лагранжа для даної задачі має вигляд:

$$L(X, \Lambda) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + \lambda_1(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n) +$$
$$+\lambda_2(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - ... - a_{2n}x_n) + ... + \lambda_m(b_m - a_{m1}x_1 -$$
$$- a_{m2}x_2 - ... - a_{mn}x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j.$$

Якщо деякий змінний вектор $X'(x_1', x_2', ..., x_n')$ є допустимим розв'язком задачі (8.57)—(8.58), то функція Лагранжа ідентична функції мети (8.57). Через те що виконуються умови $a_{i1}x' + a_{i2}x_2' + ... + a_{in}x_n' = b_i (i = \overline{1, m})$, доданки виду $\lambda_i(b_i - a_{i1}x_1 - - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n)$ у функції Лагранжа перетворюються в нуль і $L(X', \Lambda) = F(X')$.

З необхідних умов існування екстремуму для функції Лагранжа можна помітити, що істотною для розгляду є лише умова рівності нулю частинних похідних $L(X, \Lambda)$ по множниках Лагранжа. Отже, маємо задачу, що еквівалентна (8.57), (8.58):

$$\max \ L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \tag{8.59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n = 0 \ (i = \overline{1,m}). \tag{8.60}$$

Розглянемо другу групу умов існування екстремальних точок функції Лагранжа, коли частинні похідні по $x_j \ (j = \overline{1,n})$ дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = c_j - \lambda_1 a_{1j} - \lambda_2 a_{2j} - \ldots - \lambda_m a_{mj} = c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \ . \tag{8.61}$$

Допустимо, що деякий вектор $\Lambda'(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m)$ задовольняє умови (8.61), тоді для нього функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L(X, \Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i b_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda'_i a_{ij} x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i b_i + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \lambda'_1 a_{1j} - \lambda'_2 a_{2j} - \ldots - \lambda'_m a_{mj}) x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i b_i \ .$$

Причому для того, щоб задовольнити умову (8.59), необхідно знайти такі значення вектора, що $\sum_{i=1}^{m} \lambda'_i b_i \to \min$, тобто приходимо до такої задачі:

$$\min L(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i b_i \ , \tag{8.62}$$

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{8.63}$$

Очевидно (див. розділ 3), що пара задач (8.57), (8.58) та (8.62), (8.63) є парою спряжених задач (початковою та двоїстою), а множники Лагранжа — змінними двоїстої з цієї пари задач $\left(\lambda_i = y_i, (i = \overline{1,m})\right)$.

Отже, $\lambda_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ — це двоїсті оцінки ресурсів, «тіньові» ціни відповідних ресурсів виробництва.

Якщо поширити ці висновки на загальну задачу нелінійного програмування, додавши до задачі (8.57), (8.58) умову $x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$, то розв'язування можна здійснювати узагальненням методу Лагранжа (§8.4).

В результаті отримаємо двоїсту задачу, що має вигляд:

$$\min L(X, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' b_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{ij} \geq c_j \quad (j = \overline{1,n}),$$

$$\lambda_i \lesseqgtr 0.$$

Звідси отримуємо економічну інтерпретацію змінних параметрів початкової задачі, а також множників Лагранжа.

Очевидно, що залежно від економічної постановки задачі, функція Лагранжа та умови існування сідлової точки можуть мати різну економічну інтерпретацію. Розглянемо задачу нелінійного програмування стосовно визначення оптимального плану виробництва продукції за умов використання обмежених ресурсів:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Головна мета виробничої системи — максимізація прибутку від реалізованої продукції. Отже, цільова функція $F = f(X)$ — це прибуток від реалізації продукції в обсягах $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, причому $f(X)$ — нелінійна. Крім того, для виробництва продукції необхідне використання m видів сировини, обсяги кожного виду якої відомі і становлять b_i $(i = \overline{1, m})$. Система рівнянь $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$ $(i = \overline{1, m})$ може бути подана у вигляді: $g_i(X) = b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ $(i = \overline{1, m})$. Тобто, $q_i(X)$ — обсяг *i*-го виду сировини, що використовується для виробництва продукції в обсязі *X*, тоді $g_i(X)$ — лишок *i*-го ресурсу після виробництва продукції. Якщо $g_i(X) > 0$, то це означає, що на виробництво продукції використано не весь запас ресурсу, а якщо $g_i(X) = 0$ — ресурс вичерпано і якщо $g_i(X) < 0$, то це значить, що наявної (початкової) кількості сировини недостатньо для виробництва продукції на рівні *X*.

Виробнича система здебільшого функціонує в конкурентному середовищі, що характеризується антагоністичними інтересами.

Як було показано вище, λ_i — це змінні двоїстої до поставленої певної задачі. Вони можуть являти собою ціну, за якою на конкурентному ринку продається чи купується одиниця *i*-го виду сировини. Якщо $\lambda_i \geq 0$ і $g_i(X) > 0$, то така виробнича система може продати лишки сировини і отримати додатковий прибуток у розмірі $\lambda_i g_i(X)$. Якщо $g_i(X) < 0$, то підприємство може закупити потрібну кількість сировини, витративши суму грошей, що дорівнює $\lambda_i g_i(X)$. Така закупівля дасть змогу забезпечити виробництво продукції на рівні *X*. Отже, функція Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

являє собою загальний прибуток від виробництва, який включає прибуток від реалізації виготовленої продукції $f(X)$ та прибуток від продажу лишків сировини (чи витрати на придбання потрібної кількості сировини) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$.

За цін λ_i, що встановлюються на ринку, виробнича система прагне максимізувати прибуток шляхом визначення оптимального обсягу виробництва продукції $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Отже, знаходиться значення функції Лагранжа при X^*:

$$L(X^*, \Lambda) = \max_X L(X, \Lambda).$$

Оскільки прибуток формується на конкурентному ринку, слід розраховувати на встановлення цін на ресурси на мінімально можливому рівні, тобто слід відшукати

$$L(X,\Lambda^*)=\min_{\Lambda} L(X,\Lambda).$$

Якщо для розглянутої задачі нелінійного програмування існує сідлова точка (X^*,Λ^*), то це означає, що існує такий рівень виробництва X^* та цін на ресурси Λ^*, за яких має місце конкурентна рівновага:

$$L(X^*,\Lambda^*)=\max_{X} L(X,\Lambda)=\min_{\Lambda} L(X,\Lambda).$$

Оскільки за теоремою Куна — Таккера для сідлової точки за будь-яких значень X,Λ виконується нерівність:

$$L(X,\Lambda^*)\le L(X^*,\Lambda^*)\le L(X^*,\Lambda),$$

то очевидно, що ніяка зміна рівня виробництва X^* виробничою системою не збільшить прибутку $L(X,\Lambda^*)\le L(X^*,\Lambda^*)$ і також ніяка зміна цін на ресурси в ринковому середовищі не зможе зменшити прибутку $L(X^*,\Lambda^*)\le L(X^*,\Lambda)$. Отже, сідлова точка функції Лагранжа є точкою ринкової рівноваги.

Розглянемо інтерпретацію множників Лагранжа. Позначимо через $B(b_1,b_2,...,b_m)$ вектор з компонентами, що означають обсяг *i*-го ресурсу у виробничій системі. Нехай $X^*(B)$ означає, що оптимальний план задачі є функцією від значень наявних ресурсів

B. Для спрощення допустимо, що функції $X^*(B)$ та $f(X)$, $q_i(X)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ мають властивості неперервності та диференційовності. І нарешті, допустимо також, що коли для *i*-го ресурсу $g_i(X(B))>0$, то за невеликих змін значення вектора *B* (що позначимо через B'), які є досить близькими до *B*, також виконується нерівність $g_i(X(B'))>0$.

За теоремою Куна — Таккера в задачах нелінійного програмування з обмеженнями — нерівностями для оптимального плану задачі має місце рівність ([3]):

$$\frac{\partial f(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}.$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, можна написати таку рівність:

$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k}.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial f(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}$, маємо:

$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}\right)\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial b_k}\right).$$

Тепер допустимо, що деяке *i*-те обмеження активне в точці *B*, тобто $g_i(X^*(B))=\widetilde{b}$. Тоді згідно з початковим допущенням це обмеження активне також і в деякому невеликому околі цієї точки. Враховуючи це, матимемо:

$$\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k} = \gamma_{ik}, \text{ де } \gamma_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Отже,
$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k} \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k} \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik} = \lambda_i .$$

Тому λ_i є маргінальними змінами оптимального значення цільової функції за зміни b_i. Аналогічно, як і в задачах лінійного програмування, можна вважати, що λ_i приблизно відповідає приросту цільової функції за збільшення обсягу відповідного *i*-го ресурсу на одиницю. Виходячи з цього, можна оцінити, як зміниться оптимальне значення цільової функції за змін обсягів ресурсів, не розв'язуючи нову задачу.

8.10.Градієнтний метод

Градієнтні методи належать до наближених методів розв'язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, де цільова функція і обмеження є диференційовними хоча б один раз. Зрозуміло, що градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму тільки для задач опуклого програмування, де локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційовної функції — визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Розглянемо метод Франка — Вульфа, процедура якого передбачає визначення оптимального плану задачі шляхом перебору розв'язків, які є допустимими планами задачі.

Нехай необхідно відшукати

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,n}).$$

Допустимо, що X_0 — початкова точка, що належить множині допустимих планів даної задачі. В деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють лінійною і потім розв'язують задачу лінійного програмування. Нехай розв'язок лінійної задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 в напрямку F_0 необхідно рухатись доти, поки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у зазначеному напрямку вибирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну, і знову розв'язується задача лінійного програмування.

Розглянемо детальніше перехід від k-ої ітерації методу до (k + 1)-ої ітерації.

Припустимо, що відома точка X_k, яка належить області допустимих розв'язків. У даній точці обчислюємо градієнт цільової функції:

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right).$$

Значення градієнта функції задає в даній точці напрям найшвидшого її зростання.

Замінюємо цільову функцію задачі лінійною функцією виду:

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n.$$

Потім розв’язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями початкової задачі і новою цільовою функцією:

$$\max F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + \ldots + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Нехай розв’язком такої задачі є точка $\widetilde{X}_k$.

З початкової точки X_k в напрямку $\widetilde{X}_k$ рухаємося з деяким довільним кроком $0 \le \lambda \le 1$, визначаючи координати нової точки X_{k+1} у такий спосіб:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k).$$

Зауважимо, що значення параметра $0 \le \lambda \le 1$ доцільно вибирати таким, що дає найбільше значення цільової функції початкової задачі $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для точки X_{k+1} повторюємо розглянутий процес, для чого знову розраховуємо значення градієнта і т. д.

У такий спосіб знаходимо послідовність точок $X_0, X_1, ...$, які поступово наближаються до оптимального плану початкової задачі. Ітераційний процес повторюється до того моменту, поки значення градієнта цільової функції не стане рівним нулю або виконуватиметься умова $|f(X_{k+1}) - f(X_k)| < \varepsilon$, де ε — досить мале число, яке означає потрібну точність обчислень.

Приклад 8.6. Підприємство виробляє два види продукції (А і В) і використовує на виробництво три види ресурсів: І, ІІ, ІІІ. Витрати ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції подано в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Вид ресурсу	Вид продукції		Загальний обсяг ресурсу
	A	B	
I	1	3	30
II	1	1	15
III	5	2	60

Ціна реалізації одиниці продукції виду A становить 20 ум. од., проте прибуток залежить від витрат на виробництво, які пропорційні квадрату кількості виготовленої продукції. Аналогічно визначається прибуток для продукції виду B, ціна реалізації якої дорівнює 18 ум. од.

Розв'язання. Позначимо через x_1 кількість продукції виду A, x_2 — кількість продукції виду B, тоді загальний прибуток матиме вигляд: $F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2$.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\max F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ x_1 + x_2 \leq 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 60. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо задачу методом Франка Вульфа.

I ітерація

Вибираємо точку, що належить множині допустимих планів задачі. Розглянемо, наприклад, точку $X_0(x_1 = 2; x_2 = 3)$.

Визначимо градієнт цільової функції:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \left(20 - 2x_1; 18 - 2x_2 \right).$$

В точці $X_0(x_1 = 2; x_2 = 3)$ обчислюємо значення градієнта:

$$\nabla f(X_0) = (20 - 2 \cdot 2; 18 - 2 \cdot 3) = (16;12).$$

Використовуючи розраховане значення градієнта, записуємо і вводимо нову цільову функцію: $F_1 = 16x_1 + 12x_2$. Маємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 16x_1 + 12x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо її оптимальний план: $\widetilde{X}_0(x_1 = 10; x_2 = 5)$.

Знайдемо новий допустимий план задачі, використовуючи формулу $X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k)$ для визначення координат наступної точки.

Визначаємо координати точки X_1:

$$X_1 = X_0 + \lambda_1(\widetilde{X}_0 - X_0), \quad 0 \le \lambda_1 \le 1,$$

$$x_1 = 2 + \lambda_1(10 - 2) = 2 + 8\lambda_1; \; x_2 = 3 + \lambda_1(5 - 3) = 3 + 2\lambda_1.$$

Знайдемо крок λ_1 такий, за якого досягається максимальне значення цільової функції. Для цього підставимо розраховані значення для x_1, x_2, які виражені через λ_1, у цільову функцію $F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2$:

$$F = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 20 \cdot (2 + 8\lambda_1) + 18 \cdot (3 + 2\lambda_1) - (2 + 8\lambda_1)^2 -$$
$$-(3 + 2\lambda_1)^2 = 40 + 160\lambda_1 + 54 + 36\lambda_1 - (4 + 32\lambda_1 + 64\lambda_1^2) - (9 + 12\lambda_1 + 4\lambda_1^2) =$$
$$= 40 + 54 + 160\lambda_1 + 36\lambda - 4 - 32\lambda_1 - 64\lambda_1^2 - 9 - 12\lambda_1 - 4\lambda_1^2 =$$
$$= 81 + 152\lambda_1 - 68\lambda_1^2.$$

Отримали функцію, що залежить від λ_1. Знайдемо значення λ_1, за якого функція досягає максимуму, тобто коли її похідна дорівнює нулю:

$F' = 152 - 136\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 152/136.$ Оскільки $0 \le \lambda_1 \le 1$, то беремо $\lambda_1 = 1$. Тоді наступна точка X_1 має координати:

$$x_1 = 2 + 8 \cdot 1 = 10;\ x_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Для знайденої точки $X_1(x_1 = 10;\ x_2 = 5)$ обчислюємо значення цільової функції: $F = 165$.

II ітерація

Узявши точку $X_1(x_1 = 10;\ x_2 = 5)$, обчислюємо значення градієнта в ній:

$$\nabla f(X_1) = (20 - 2x_1; 18 - 2x_2) = (20 - 2 \cdot 10; 18 - 2 \cdot 5) = (0; 8).$$

Використовуючи розраховане значення градієнта, вводимо нову цільову функцію: $F_1 = 8x_2$. Отримуємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max F_1 = 8x_2,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв’язавши її симплексним методом, отримуємо оптимальний план: $\widetilde{X}_1(x_1 = 0; x_2 = 10)$.

За формулою $X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k)$ визначаємо координати наступної точки наближення.

Визначаємо координати точки X_2:

$$X_2 = X_1 + \lambda_2(\widetilde{X}_1 - X_1),\ \ 0 \le \lambda_2 \le 1,$$

$$x_1 = 10 + \lambda_2(0-10) = 10 - 10\lambda_2;\ x_2 = 5 + \lambda_2(10-5) = 5 + 5\lambda_2.$$

Знайдемо такий крок λ_2, за якого досягається максимальне значення цільової функції:

$$F = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 20\cdot(10-10\lambda_2) +$$
$$+ 18\cdot(5+5\lambda_2) - (10-10\lambda_2)^2 - (5+5\lambda_2)^2.$$

Матимемо $F' = 40 - 250\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0{,}16$.

Обчислимо координати наступної точки X_2:

$$x_1 = 10 - 10\lambda_2 = 10 - 10\cdot 0{,}16 = 8{,}4;$$
$$x_2 = 5 + 5\lambda_2 = 5 + 5\cdot 0{,}16 = 5{,}8.$$

Для знайденої точки $X_2(x_1 = 8{,}4;\ x_2 = 5{,}8)$ значення цільової функції дорівнює: $F = 166{,}2$.

Продовжуючи процес у аналогічний спосіб, на *III ітерації* визначаємо точку $X_3(x_1 = 7{,}5;\ x_2 = 7{,}5)$ і переконуємося, що значення цільової функції знову зростає: $F = 172{,}5$.

На *IV ітерації* розраховуються координати точки $X_4(x_1 = 8;\ x_2 = 7)$, для якої $F = 173$.

V ітерація

Узявши точку $X_4(x_1 = 8;\ x_2 = 7)$, обчислюємо значення градієнта в ній:

$$\nabla f(X_4) = (20 - 2x_1; 18 - 2x_2) = (20 - 2\cdot 8; 18 - 2\cdot 7) = (4;4).$$

Використовуючи значення цього вектора (градієнта), вводимо нову цільову функцію: $F_4 = 4x_1 + 4x_2$ і маємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max F_4 = 4x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

Розв'язавши цю задачу, отримаємо значення оптимального плану $\widetilde{X}_4(8;7)$, тобто повертаємося до попереднього значення. Отже, точку з координатами $X^*(8;7)$ вважаємо оптимальним планом, оскільки маємо нульовий градієнт функції, тобто цей план поліпшити вже не можна.

Заключні зауваження

Задачі нелінійного програмування часто виникають як в теорії управління, так і в інших науках, і їх систематичне дослідження, що почалося в кінці 40-х років, привело до виникнення самостійної наукової дисципліни — нелінійного програмування.

У рамках вищеописаного розділу сформульовані лише основні теоретичні засади та найбільш вивчені методи розв'язування задач нелінійного програмування.

Оскільки для задач нелінійного програмування не існує універсального методу їх розв'язання, то не всі наведені методи однаково зручні для розв'язування певної практичної задачі. В кожному конкретному випадку необхідно вибирати кращий метод. Не можна в рамках даного посібника викласти всі відомі нині методи нелінійного програмування, тому залишилися поза увагою деякі цікаві методи. Бажаючим детальніше вивчити нелінійне програмування, доцільно ознайомитися з літературою [13, 19, 20, 28].

Головною метою розгляду даної теми було звернення уваги майбутніх фахівців-економістів на практичне значення використання моделей нелінійного програмування. У більш узагальнених постановках економічних задач визначення точного виду функцій у математичній моделі може видатися неможливим, однак за конкретних умов точний вигляд функцій часто визначається безпосередньо. Тоді розв'язок на основі побудованої моделі дає оптимальний план, адаптований до реальних умов.

Контрольні запитання

1. Як записується в загальному вигляді задача нелінійного програмування?
2. Труднощі розв'язування задач нелінійного програмування.
3. Функція Лагранжа.
4. Метод Лагранжа.
5. Яка функція називається опуклою (угнутою)?
6. Сформулюйте необхідні та достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційовної функції.
7. Теорема Куна—Таккера.
8. Сформулюйте задачу квадратичного програмування.
9. Назвіть етапи розв'язування задачі нелінійного програмування методом кусково-лінійної апроксимації.

Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 8.1. Використовуючи метод Лагранжа, знайдіть точку умовного екстремуму.

1) $Z = 2x_1^2 + x_2^2$, $2x_1 + 3x_2 = 5$.

2) $Z = 2x_1x_2 + x_2^2$, $2x_1 + 4x_2 = 8$.

Задача 8.2. На виробництво трьох видів продукції (А; В; С) використовують матеріальні, трудові та фінансові ресурси. Норми витрат цих ресурсів на одиницю продукції, їх запаси, а також формули визначення прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежать від обсягів виробництва, наведено в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Вид ресурсу, показник	Продукція	Запас ресурсу

	A	B	C	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2+2x_2$	$3x_3^2+6$	—
Обсяг виробництва	x_1	x_2	x_3	—

Передбачаючи, що попит на продукцію видів B і C відомий і становить 12 і 8 од., а ресурси необхідно використати повністю, визначте оптимальний план виробництва продукції кожного виду. Розрахуйте оцінки ресурсів і здійсніть економічний аналіз оптимального плану.

«Математик може вважати свою проблему розв'язаною, лише коли збагне суть оптимального підходу до розв'язання».

Р. Белман

РОЗДІЛ 9. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

9.1.Економічна сутність задач динамічного програмування

Всі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки вони функціонують і розвиваються не тільки у просторі, але й у часі. Для народного господарства в цілому, його галузей, регіонів чи окремих підприємств з метою їх стабільного функціонування та розвитку необхідно розробляти стратегічні та тактичні плани. Стратегічні плани містять параметри діяльності об'єктів, які характеризують їх віддалене майбутнє. Отже, вони мають розроблятися на основі динамічних моделей, для знаходження розв'язків яких застосовуються методи динамічного програмування.

Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дає змогу здійснювати планування багатокрокових керованих процесів, а також процесів, які розвиваються у часі.

Отже, динамічне програмування не є окремим методом розв'язування задач, а являє собою теорію, що поєднує ряд однотипних ідей та прийомів, які застосовуються для розв'язування досить різних за змістом задач.

До задач динамічного програмування належать такі, що пов'язані з оптимальним розподілом капіталовкладень, розподілом продукції між різними регіонами, визначенням найкоротшого шляху завезення товарів споживачам, задачі щодо заміни устаткування, оптимального управління запасами тощо.

Економічні процеси можна уявити складеними з кількох етапів (кроків). На кожному з них здійснюється вплив на розвиток всього процесу. Тому у разі планування багатоетапних процесів прийняття рішень на кожному етапі має враховувати попередні зміни та бути підпорядкованим кінцевому результату. Динамічне програмування дає змогу прийняти ряд послідовних рішень, що забезпечує оптимальність розвитку процесу в цілому.

Слід зазначити, що оптимальні плани стосовно окремих відрізків планового періоду не завжди є оптимальними для всього інтервалу планування. Наприклад, недостатньо визначити оптимальний план виробництва на один місяць і орієнтуватися на нього протягом тривалого часу. Досить ймовірно, що в наступні місяці виробництво за тим самим планом може стати неоптимальним, оскільки за його розроблення можливості дальшого розвитку не враховувались. Доцільніше визначати оптимальні плани на кожен місяць з урахуванням змін у попередніх періодах. Лише тоді річний оптимальний план виробництва буде сумарним результатом оптимальних рішень, що приймалися для кожного місяця.

Поставимо задачу динамічного програмування в загальному вигляді.

Нехай аналізується деякий керований процес, подання якого допускає декомпозицію на послідовні етапи (кроки), кількість яких n задана. Ефективність всього процесу Z може бути подана як сума ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків, тобто:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} Z_j ,$$

що має назву адитивного критерію (або як добуток ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків у вигляді: $Z=\prod_{j=1}^{n} Z_j$, що має назву мультиплікативного критерію).

З кожним етапом (кроком) задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всього процесу в цілому.

Розв'язування задачі динамічного програмування полягає в знаходженні такого управління $X = (x_1, x_2, ... x_n)$ процесом у цілому, яке максимізує загальну ефективність: $\max Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j$, (max $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$).

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається з сукупності оптимальних покрокових управлінь:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ... x_n^*)$$

і уможливлює досягнення максимальної ефективності:

$$Z^* = \max_{x \in X} \{Z(x)\}.$$

9.2.Задача про розподіл капіталовкладень між двома підприємствами на *n* років

Розглянемо задачу динамічного програмування на прикладі задачі про розподіл капіталовкладень.

Допустимо, що розглядається виробнича система, яка складається з двох підприємств. Нехай плановий період складається з n інтервалів-частин (наприклад, років), і протягом даного періоду слід використати суму коштів b, що має бути розподілена між двома підприємствами. Відомі прибутки, які приносять вкладення коштів: вкладення у перше підприємство обсягом x

приносить прибуток $g(x)$, а друге підприємство дає з такої ж суми прибутку $h(x)$.

Необхідно розподілити кошти на період у *n* років так, щоб досягти максимального прибутку за весь плановий період.

Можна легко сформулювати задачу, коли плановий період складається з одного року (однокрокова задача).

Якщо в перше підприємство здійснили вкладення обсягом *x*, тоді сума вкладених у друге підприємство коштів становить $b - x = y$ і дає прибуток $h(y)$.

У такому разі маємо однокрокову задачу:

$$\max Z = g(x) + h(y)$$

за умов:

$$x + y = b,$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Введемо позначення:

$Z = Z_1$, $b = b_1$, $x = x_1$, $y = b_1 - x_1$, тоді задача матиме вигляд:

$$\max Z_1 = g(x_1) + h(b_1 - x_1); \tag{9.1}$$

$$0 \leq x_1 \leq b_1. \tag{9.2}$$

Тепер розглянемо цю задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, якщо вона складається з двох періодів (етапів).

Оскільки прибуток утворюється в результаті випуску та реалізації продукції, що пов’язано з певними виробничими витратами, то на початок другого періоду початкова сума x_1 зменшиться до величини $x_2 = \alpha x_1$, де $0 \leq \alpha \leq 1$, а сума $(b_1 - x_1)$ — до величини $\beta(b_1 - x_1)$, де $0 \le \beta \le 1$. Щоб визначити найбільший прибуток, який можна отримати від сумарного залишку $b_2 = \alpha x_1 + \beta(b_1 - x_1)$ протягом другого етапу, необхідно розв'язати задачу математичного програмування, аналогічну до задачі (9.1)—(9.2), тобто:

$$\max Z_2 = g(x_2) + h(b_2 - x_2), \tag{9.3}$$

$$0 \le x_2 \le b_2. \tag{9.4}$$

Поставимо тепер задачу оптимального поточного планування розподілу капіталовкладень по всіх n інтервалах періоду, причому принцип розподілу вкладень у кожному з періодів полягає у відшуканні оптимального використання тієї суми коштів, що залишається на кінець попереднього періоду. Критерій оптимальності не змінюється і полягає в максимізації прибутку за весь період. Тоді для k-го етапу (періоду) залишок коштів після використання в попередньому періоді становитиме b_k. Визначаємо оптимальну суму коштів x_k, що доцільно вкладати в перше підприємство в k-му періоді, розв'язуючи таку задачу:

$$\max Z_k = g(x_k) + h(b_k - x_k), \tag{9.5}$$

$$0 \le x_k \le b_k. \tag{9.6}$$

Оскільки критерієм оптимальності є максимізація загального прибутку за всі n періодів, то в цілому необхідно знайти максимальне значення функціонала, що складається із максимальних значень прибутків кожного окремого періоду, тобто загальна задача має вид:

$$\max Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum_{k=1}^{n}\left[g(x_k) + h(b_k - x_k)\right] \tag{9.7}$$

за умов:

$$0 \le x_k \le b_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{9.8}$$
$$b_k = \alpha x_{k-1} + \beta(b_{k-1} - x_{k-1}) \quad \left(k = \overline{2,n}\right).$$

Цільова функція (9.7) є функцією *n* змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і залежить від початкового параметра b_1.

Розв'язування задачі (9.7)—(9.8) розглянутими раніше однокроковими методами може виявитися неможливим. Проте міркування, які привели до формулювання задачі (9.7)—(9.8), породжують ідею побудови алгоритму поетапного розв'язування динамічних задач.

9.2.1.Метод рекурентних співвідношень

Продовжимо розгляд задачі (9.7)—(9.8). Позначимо через $R_n(b)$ максимальний прибуток, який досягнуто внаслідок виконання *n* кроків, тоді:

$R_n(b) = \max\limits_{x_1, x_2, ..., x_n} Z(b, x_1, x_2, ..., x_n)$, де змінні $x_j (j = \overline{1,n})$ задовольняють обмеження (9.8).

Як зазначалося вище, при $n = 1$ маємо однокрокову задачу управління і прибуток за один рік від вкладення коштів у два підприємства обчислюється за формулою:

$$R_1(b) = \max_{0 \le x \le b}\left[g(x) + h(b - x)\right].$$

Розглянемо період з двох років. Як зазначалося вище, до початку другого періоду залишок коштів становитиме $b_2 = \alpha x + \beta(b - x)$. Використаємо введені вище позначення: $b = b_1$, $x = x_1$.

Найбільший прибуток, який можна отримати на другому етапі, дорівнює:

$$R_2(b) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le b_1, \\ 0 \le x_2 \le b_2}} \left[g(x_1) + h(b_1 - x_1) + g(x_2) + h(b_2 - x_2) \right].$$

Розглянемо детальніше зв'язок між величинами $R_1(b)$ та $R_2(b)$, тобто максимальним прибутком для однокрокової задачі та максимальним прибутком, що може бути отриманий за два кроки.

За довільно визначеного на першому кроці значення *x*, максимальний прибуток на другому кроці визначатиметься так:

$$R_1(b_2) = \max_{0 \le x_2 \le b_2} \left[g(x_2) + h(b_2 - x_2) \right] = R_1(\alpha x + \beta(b - x)).$$

Розглянемо тепер $R_2(b)$ — найбільший прибуток, що може бути отриманий від початкової суми *b* за два періоди. Очевидно це значення буде розраховуватись, як максимальна сума доходів першого та другого періодів:

$$R_2(b) = \max_{0 \le x \le b} \left(Z_1 + Z_2 \right) = \max_{0 \le x \le b} \left[g(x) + h(b - x) + R_1(\alpha x + \beta(b - x)) \right]. \quad (9.9)$$

Формула (9.9) є рекурентним співвідношенням, яке зв'язує величину прибутку, що досягнута лише за другий інтервал планового періоду і яка дорівнює $R_1\left(\alpha x + \beta(b - x)\right)$, і прибуток за обидва (перший і другий) інтервали планового періоду, який дорівнює $R_2(b)$.

Міркуючи аналогічно, приходимо до співвідношення, що визначає загальний прибуток, який досягається за *n* інтервалів:

$$R_n(b) = \max_{0 \le x \le b} \left[g(x) + h(b - x) + R_{n-1}(\alpha x + \beta(b - x)) \right], \ \left(n = 2,3,... \right), \quad (9.10)$$

де $R_1(b) = \max\limits_{0 \le x \le b} \left[g(x) + h(b - x) \right]$. Очевидно, що $R_{n-1}(\alpha x + \beta(b - x))$ — максимальний прибуток за $n - 1$ останніх кроків за розподілу обсягів капіталовкладень на першому кроці у такий спосіб: у перше підприємство — x, а в друге — решту $(b-x)$. Визначивши $R_1(b)=\max\limits_{0\le x\le b}[g(x)+h(b-x)]$ з (9.10), можемо обчислити $R_2(b)$ і, користуючись ним, знаходимо знову з (9.10) $R_3(b)$ і т. д., причому на кожному кроці обчислень матимемо як значення $R_k(x_k)$, так і $x_k(b_k)$. Отже, процес розв'язування задачі полягає в обчисленні послідовностей функцій $R_k(x_k)$ та $x_k(b_k)$ для всіх $x_k \ge 0,\ k=\overline{1,n}$.

9.3.Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами

Планується на наступний рік діяльність виробничої системи, яка складається з n підприємств. Відома початкова сума коштів — b_0, що має бути розподілена між всіма підприємствами. Сума вкладень x приносить k-му підприємству прибуток $g_k(x)$. Значення функції $g_k(x)$ $\left(k=\overline{1,n};\ 0\le x\le b_0\right)$, задані таблицею.

Необхідно визначити x_k — кошти, які потрібно виділити *k*-му підприємству так, щоб отримати максимальний сумарний прибуток від вкладення коштів в усі підприємства $\left(\max Z = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)\right)$.

Позначимо кількість коштів, що залишилися після *k*-го кроку (тобто кошти, які необхідно розподілити між рештою (*n* – *k*) підприємств через b_k :

$$b_k = b_{k-1} - x_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Задача розв’язується поетапно. В даному разі етапами є вкладення коштів в кожне підприємство.

І етап. Кошти вкладаються лише в одне (наприклад, перше) підприємство. Найбільший прибуток (ефективність першого етапу), що може бути отриманий, позначимо через $R_1(b_0)$. Маємо:

$$R_1(b_0) = \max_{0<x_1<b_0} \{g_1(x)\}.$$

ІІ етап. Порівняємо ефективність, яку отримаємо, вкладаючи кошти лише у перше підприємство та вкладаючи кошти одночасно і в перше, і в друге підприємства. Якщо позначити ефективність другого етапу через $R_2(b_0)$, то отримаємо:

$$R_2(b_0) = \max_{\substack{0<x_1<b_0 \\ 0<x_2<b_1}} \{R_1(x_1) + g_2(x_2)\}.$$

Для k-го етапу маємо рекурентне співвідношення:

$$R_k(b_0) = \max_{0<x_k<b_k} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Послідовно розв'язуючи отримані рівняння, визначаємо оптимальні рішення на кожному етапі.

Наведемо найпростішу задачу динамічного програмування.

Приклад 9.1. Виробнича система складається з чотирьох філіалів. За умови здійснення реконструкції обладнання на кожному філіалі можна досягти певного приросту прибутку. Фірма виділяє на додаткові капітальні вкладення 200 тис. ум. од. (для спрощення розрахунків допустимо, що додаткові вкладення будуть здійснені в обсягах 50, 100, 150 та 200 тис. ум. од.).

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між філіалами для максимізації загального прибутку від усіх чотирьох філіалів за умови, що відомі прирости прибутку для кожного з них (табл. 9.1):

Таблиця 9.1

Капіталовкладення, тис. ум. од.	Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Розв'язання. В даному прикладі етапами задачі буде не час, як у попередніх викладках, а розподіл коштів між філіалами. Отже, маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень вважатимемо, що $g_i(x)$ — приріст прибутку в i-му філіалі за умови капіталовкладень у нього обсягом x тис. ум. од. Умова задачі має вигляд (табл.9.2):

Таблиця 9.2

Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	30	36	28
60	70	64	56
100	90	95	110
140	122	130	142

I етап

Найпростіший спосіб розподілу коштів, з якого починаємо розв'язування задачі, — це вкладення коштів лише у перший філіал. Якщо маємо в розпорядженні суму коштів $b_1 = 50$ тис. ум. од., то ефективність вкладення цієї суми відповідає прибутку, що його буде отримано від інвестування в перший філіал — 25 тис. ум. од. Ефективність першого етапу позначимо через $R_1(b)$:

$$R_1(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le b_1} \left[g(x_1)\right] = \max_{\substack{x_1 = 0, \\ x_1 = 50}} \left[g(0), g(50)\right] = g(50) = 25.$$

Аналогічно поступаємо у разі, коли в розпорядженні маємо суму $b_2 = 100$ тис. ум. од. Тоді з наявних коштів вкладати можна суму величиною x_2, що може набувати таких значень: $x_2 = 0$, або

$x_2 = 50$, або $x_2 = 100$ тис. ум. од. Очевидно, що з трьох названих можливих варіантів найбільшу ефективність будемо мати, вклавши кошти в сумі 100 тис. ум. од. Отже, фіксуємо найбільшу ефективність на другому кроці першого етапу — $R_1(b_2 = 100) = 60$, потім на третьому кроці — $R_1(b_3 = 150) = 100$ тис. ум. од. і т. д.

Узагальнимо всі випадки першого етапу у вигляді «таблиці найбільших ефективностей», де відображено можливі прибутки за умови різних вкладень тільки в першу філію (табл. 9.3):

Таблиця 9.3

b	$R_1(b)$
50	25
100	60
150	100
200	140

II етап

На кожному етапі необхідно зіставити ефективності прийнятих рішень на попередньому та поточному етапах. Тобто, тепер розглянемо розподіл коштів одночасно між двома філіалами фірми, порівнюючи отриманий прибуток з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою для загального випадку:

$$R_k(b_0) = \max_{0 < x_k < b_k} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Для нашого прикладу величина $R_1(x_1)$ — ефективність, що дають вкладення на попередньому етапі (в даному прикладі — в перший філіал фірми), яка була розрахована на першому кроці, і позначалась через $R_1(b)$, а величина $g_2(b_0 - x_1)$ — прибуток, що дає другий філіал від залишку суми.

За введених у даному прикладі позначень формула набуває вигляду:

$$R_2(b) = \max_{0 \le x \le b}\left[g_1(x) + g_2(b - x)\right] = \max_{0 \le x \le b}\left[g_2(x) + R_1(b - x)\right].$$

Знову спочатку допускаємо, що розподіляється сума $b_1 = 50$. Тоді можливі два варіанти вкладення: $x_1 = 0$ (вкладаємо кошти лише в другий філіал) або $x_1 = 50$ (вкладаємо кошти лише в перший філіал), тоді:

$$R_2(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le 50}\left[R_1(x_1) + g_2(b_1 - x_1)\right] = \max\left[g_2(0) + R_1(50); R_1(0) + g_2(50)\right]$$

$$R_2(b_1 = 50) = \max\left[0 + 25; 30 + 0\right] = 30.$$

Для наочності подамо проміжні розрахунки у вигляді табл.9.4:

Таблиця 9.4

x_1	$b_1 - x_1$	$R_1(x_1)$	$g_2(b_1 - x_1)$	$R_2(b_1)$
0	50	0	30	0 + 30 = 30
50	0	25	0	25 + 0 = 25

Стрілкою позначено найбільший з можливих прибутків за умови розподілу вкладення 50 тис. ум. од. одночасно в перший та другий філіали фірми.

У такий спосіб визначено наступний елемент «таблиці найбільших ефективностей» для випадку, коли $b_1 = 50$ (табл. 9.5):

Таблиця 9.5

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	
150	100	
200	140	

Потім розглядаються можливі варіанти розподілу коштів, якщо $b_2 = 100$, тоді вкладати лише в другий філіал можна суму $x_2 \le b_2$. x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. Маємо такі результати: (табл. 9.6):

Таблиця 9.6

x_2	$b_2 - x_2$	$R_1(x_2)$	$g_2(b_2 - x_2)$	$R_2(b_2)$
0	100	0	70	0 + 70 = 70
50	50	25	30	30 + 25 = 55
100	0	60	0	60 + 0 = 60

З табл. 9.6 висновуємо, що вкладаючи 100 тис ум. од., з усіх варіантів найбільший прибуток буде дорівнювати 70 тис. ум. од. Отже, таблиця найбільших ефективностей після цього кроку поповнюється наступним елементом (табл. 9.7):

Таблиця 9.7

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	
200	140	

Аналогічно проводимо обчислення для $b_3 = 150$ та $b_4 = 200$ тис. ум. од.

Нехай $b_3 = 150$ (розглядається чотири можливих варіанти розподілу, табл. 9.8):

Таблиця 9.8

x_3	$b_3 - x_3$	$R_1(x_3)$	$g_2(b_3 - x_3)$	$R_2(b_3)$
0	150	0	90	0 + 90 = 90
50	100	25	70	25 + 70 = 95
100	50	60	30	60 + 30 = 90
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Нехай $b_4 = 200$ (розглядається п'ять можливих варіантів розподілу, табл. 9.9):

Таблиця 9.9

x_4	$b_4 - x_4$	$R_1(x_4)$	$g_2(b_4 - x_4)$	$R_2(b_4)$
0	200	0	122	0 + 122 = 122
50	150	25	90	25 + 90 = 115
100	100	60	70	70 + 60 = 130
150	50	100	30	100 + 30 = 130
200	0	140	0	140 + 0 = 140

Внесемо всі розрахунки другого етапу в таблицю максимальних ефективностей, табл. 9.10:

Таблиця 9.10

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	100
200	140	140

III етап

Знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що описують прибуток, який можна отримати від вкладення одразу в перший та другий філіал (стовпчик $R_2(b)$) та прибуток від вкладення одночасно в три філіали. Знову використаємо формулу:

$$R_3(b_0) = \max_{0 \le x_2 \le b_2} \left[R_2(x_2) + g_3(b_0 - x_2) \right]$$

Аналогічно попереднім випадкам спочатку беремо $b_1 = 50$, тоді $x_1 = 0$ або $x_1 = 50$ тис. ум. од., маємо (табл. 9.11):

Таблиця 9.11

x_1	$b_1 - x_1$	$R_2(x_1)$	$g_3(b_1 - x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

$R_3(b_1 = 50) = 36$.

Другий крок: $b_2 = 100$, тоді x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. В результаті маємо (табл. 9.12):

Таблиця 9.12

x_2	$b_2 - x_2$	$R_2(x_2)$	$g_3(b_2 - x_2)$	$R_3(b_2)$
0	100	0	64	0 + 64 = 64
50	50	30	36	36 + 30 = 66
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$R_3(b_2 = 100) = 70$.

При $b_3 = 150$ величина x_3 може набувати чотирьох значень: $x_3 = 0$, $x_3 = 50$, $x_3 = 100$, $x_3 = 150$ тис. ум. од., які означають частини загальної суми вкладення коштів лише в третє підприємство, відповідні їм чотири випадки: $b_3 - x_3 = 150$, $b_3 - x_3 = 100$, $b_3 - x_3 = 50$, $b_3 - x_3 = 0$ — лишки коштів, що необхідно вкладати в перші два філіали. Маємо (табл. 9.13):

Таблиця 9.13

x_3	$b_3 - x_3$	$R_2(x_3)$	$g_3(b_3 - x_3)$	$R_3(b_3)$
0	150	0	95	0 + 95 = 95
50	100	30	64	30 + 64 = 94
100	50	70	36	70 + 36 = 106
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Отже, $R_3(b_3) = 106$.

Обчислення для останнього (четвертого) кроку $(b_4 = 200)$ третього етапу наведені в табл. 9.14:

Таблиця 9.14

x_4	$b_4 - x_4$	$R_2(x_4)$	$g_3(b_4 - x_4)$	$R_3(b_4)$
0	200	0	130	0 + 130 = 130
50	150	30	95	30 + 95 = 125
100	100	70	64	70 + 64 = 134
150	50	100	36	100 + 36 = 136
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_3(b_4) = 140$. Запишемо значення $R_3(b)$ у вигляді наступного стовпчика таблиці найбільших ефективностей (табл. 9.15).

Таблиця 9.15

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$
50	25	30	36
100	60	70	70
150	100	100	106
200	140	140	140

Аналогічно проводяться обчислення для $R_4(b)$, які наводяться без коментарів.

$b_1 = 50.$

Таблиця 9.16

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	28	0 + 28 = 28
50	0	36	0	36 + 0 = 36

$R_4(b_1) = 36.$

$b_2 = 100.$

Таблиця 9.17

x_2	$b_2 - x_2$	$R_3(x_2)$	$g_4(b_2 - x_2)$	$R_4(b_2)$
0	100	0	56	56 + 0 = 56
50	50	36	28	36 + 28 = 64
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$R_4(b_2) = 70.$

$b_3 = 150.$

Таблиця 9.18

x_3	$b_3 - x_3$	$R_3(x_3)$	$g_4(b_3 - x_3)$	$R_4(b_3)$
0	150	0	110	110 + 0 = 110
50	100	36	56	36 + 56 = 92
100	50	70	28	70 + 28 = 98
150	0	106	0	106 + 0 = 106

$R_4(b_3) = 110.$

$b_4 = 200.$

Таблиця 9.19

x_4	$b_4 - x_4$	$R_3(x_4)$	$g_4(b_4 - x_4)$	$R_4(b_4)$
0	200	0	142	142 + 0 = 142
50	150	36	110	36 + 110 = 146
100	100	70	56	70 + 56 = 126
150	50	106	28	106 + 28 = 134
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_4(b = 200 = b_4) = 146$.

Остаточно маємо табл. 9.20:

Таблиця 9.20

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$	$R_4(b)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

З табл. 9.20 легко помітити, що найбільший прибуток, який дадуть всі чотири філіали за умови вкладення коштів у розмірі 200 тис. ум. од., становить 146 тис. ум. од. Повертаючись до останнього кроку розрахунків (табл. 9.19) бачимо, що число 146 відповідає змінній $x_4 = 150$, $b_4 - x_4 = 50 \Rightarrow 110 + 36 = R_2(150)$.

Звідси маємо, що 150 тис. ум. од. необхідно вкласти в четвертий філіал, а 50 тис. ум. од. розподілити між трьома іншими. Знову повертаємося до елементів табл. 9.20. Використання 50 тис. ум. од. на трьох перших філіалах дає загальний прибуток обсягом 36 тис. ум. од. (виділений елемент таблиці 9.20). Це значення було розраховано на III етапі, на першому кроці: $b = 50 = b_1$ у такий спосіб (табл. 9.21):

Таблиця 9.21

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36

50	0	30	0	30 + 0 = 30

Отже, маємо: $x_1 = 50$, а $g_3(50) = 36$. Це означає, що 50 тис. ум. од. виділяються третьому філіалу, $b_1 - x_1 = 0$, $R_2(0)$ — що в перші два філіали кошти взагалі не вкладаються.

Отже, оптимальним планом задачі є: $X^*(x_1^* = 0; x_2^* = 0;\ x_3^* = 50;$ $x_4^* = 150$ тис. ум. од.). У разі такого розподілу коштів між філіалами фірми максимальний прибуток становитиме 146 тис. ум. од.

9.4. Принцип оптимальності

З викладених у попередніх параграфах міркувань можна висновувати, що для прийняття оптимального рішення на *k*-му кроці багатокрокового процесу потрібна оптимальність рішень на всіх його попередніх кроках, а сукупність усіх рішень дає оптимальний розв'язок задачі лише в тому разі, коли на кожному кроці приймається оптимальне рішення, що залежить від параметра етапу b_k, визначеного на попередньому кроці.

Цей факт є основою методу динамічного програмування і є сутністю так званого ***принципу оптимальності*** Р. Белмана, який формулюється так:

Оптимальний розв'язок багатокрокової задачі $X^*(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ має ту властивість, що яким би не був стан системи b_i в результаті деякої кількості кроків, необхідно вибирати управління x_{i+1}^* на найближчому кроці так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.

Доведемо справедливість такого твердження, міркуючи від супротивного. Нехай маємо задачу на максимізацію функції $Z = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j)$ і вектор $X^*(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*)$ є її оптимальним планом (стратегією, поведінкою) n-крокового процесу (n-вимірної задачі) з початковим параметром стану b.

Принцип оптимальності еквівалентний твердженню, що вектор $(x_2^*,..., x_n^*)$ повинен бути оптимальним планом $(n-1)$-крокового процесу $(n-1)$-вимірної задачі з початковим параметром стану b_{n-1}, що дорівнює $b - x_1^*$. Припустимо протилежне, тобто що вектор $(x_2^*,...,x_n^*)$ не є оптимальним планом відповідного процесу, а ним є якийсь інший план $(x_2',...,x_n')$. Тоді дістанемо:

$$\max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') > \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*),$$

але

$$\max_{x_1,x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j^*) = \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) <$$
$$< \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') = \max_{x_1} \max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \max_{x_1,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j),$$

що суперечливо. Отже, принцип оптимальності доведено.

9.5.Багатокроковий процес прийняття рішень

Будь-яку багатокрокову задачу можна розв'язувати порізному: або знаходити одразу всі елементи розв'язку на всіх кроках, або будувати оптимальне управління поступово, крок за кроком (на кожному етапі розрахунків оптимізуючи лише один крок). Як правило, другий спосіб оптимізації є значно простішим, ніж перший, особливо при значній кількості кроків. Оптимізація одного кроку є простішою порівняно з оптимізацією всього процесу, тому краще багато разів розв'язувати простіші задачі, ніж один раз — складну.

Динамічний процес поділяється на сукупність послідовних етапів або кроків. На кожному етапі оптимізується тільки один крок, а рішення, під впливом якого система переходить з поточного стану в новий, вибирається з врахуванням його наслідків у майбутньому і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі.

Плануючи багатокроковий процес, необхідно обирати управління на кожному кроці з урахуванням його майбутніх наслідків на тих кроках, які ще попереду. Лише на останньому кроці можна прийняти рішення, яке дасть максимальний ефект, оскільки наступного кроку для нього не існує. Тому оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця, тобто спочатку планується останній крок. На базі відомої інформації про те, як закінчився попередній крок, для різних гіпотез щодо завершення передостаннього кроку вибирається управління на останньому. Таке управління називають умовно-оптимальним.

Для всіх кроків його знаходять із припущення, що попередній крок закінчився згідно з однією із можливих гіпотез.

Коли всі умовно-оптимальні управління на всіх кроках відомі, то це означає, що визначено, як необхідно керувати на кожному кроці, яким би не був процес на початку. В такому разі можна знайти не умовно-оптимальне, а оптимальне управління.

Дійсно, якщо відомо початковий стан S_0, то можна вибрати для нього оптимальне управління x_1^*, що приведе до стану S_1, для якого також відоме оптимальне управління x_2^* і т.д.

Отже, в процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатоковий процес виконується двічі. Перший раз — від кінця до початку, в результаті чого знаходять умовно-оптимальні управління і умовно-оптимальні виграші для всіх кроків. Другий раз — від початку до кінця, в результаті чого знаходять вже оптимальні покрокові управління, тобто оптимальне управління процесом у цілому.

Перший етап — знаходження умовно-оптимальних управлінь є дуже складним та довгим у порівнянні з другим. На другому етапі залишається лише «прочитати» рекомендації, що отримані на першому. Зауважимо, що «кінець» та «початок» можна поміняти місцями і здійснювати процес оптимізації також і в іншому напрямку (приклад 9.1).

Враховуючи вищезазначене, опишемо алгоритм розв’язування задач динамічного програмування, який складається з послідовності таких операцій:

1. Визначають специфічні показники стану досліджуваної керованої системи і множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи описується у такий спосіб, щоб можна було забезпечити зв'язок між послідовними етапами розв'язання задачі і мати змогу одержати допустиме рішення задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо, а крім того, приймати оптимальні рішення на наступних етапах без урахування впливу майбутніх рішень на ті, що були прийняті раніше.

2. Поділяють процес на етапи (кроки), які, як правило, відповідають певним періодам планування динамічних процесів, або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткуванню тощо) у разі підготовки рішень стосовно керування ними.

3. Формулюють перелік управлінь x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначають ефект, який забезпечує управління x_j на j–му кроці, якщо перед тим система була у стані S, у вигляді функції ефективності:

$$\max Z(S, x_j)\,.$$

5. Визначають, як змінюється стан S системи під впливом управління x_j на j-му кроці, тобто як здійснюється перехід до нового стану:

$$S' = \varphi_j(S, x_j)\,.$$

6. Будують рекурентну залежність задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(S)$, починa-

ючи з j–го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(S')$:

$$Z_j(S) = \max_{x_j}\{Z_j(S)\} = \max_{x_j}\{f_j(S, x_j) + Z_{j+1}(S', x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на j-му кроці $(x_j(S))$. Зауважимо, що у функції $Z_{j+1}(S)$ необхідно замість S врахувати змінений стан системи, тобто $S' = \varphi_j(S, x_j)$.

7. Використовують умовну оптимізацію останнього n-го кроку, визначаючи множину станів S, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану. Умовно-оптимальний ефект на n-му кроці обчислюють за формулою:

$$Z_n(S) = \max_{x_n}\{f_n(S, x_n)\}.$$

Потім знаходять умовно-оптимальне управління $x_n(S)$, в результаті реалізації якого цей максимум буде досягнуто.

8. Проводять умовну оптимізацію $(n-1)$-го, $(n-2)$-го та інших кроків за рекурентними залежностями (див. п. 6) і визначають для кожного кроку умовно-оптимальне управління:

$$x_n^*(S_{n-1}).$$

9. Проводять безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямку від початкового стану S_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на пер-

шому кроці x_1^* змінюють стан системи згідно з пунктом 5. Потім для цього нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і аналогічно ці дії повторюють до останнього етапу (кроку).

В результаті знаходять оптимальне покрокове управління $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, що забезпечує максимальну ефективність Z^*.

9.6.Приклади розв'язування задач динамічного програмування

Приклад 9.2. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного підприємства розроблено інвестиційні проекти, які відображають прогнозовані загальні витрати C (обсяги капіталовкладень) та доходи D, пов'язані з реалізацією кожного проекту. Ці показники наведені в табл. 9.22:

Таблиця 9.22

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект не передбачає розширення виробництва, а тому має нульові витрати і доходи. Необхідно розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язання. Як вже наголошувалось, спрощеним, але і найменш ефективним способом розв'язування подібних задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати їх всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про недопустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу, починаючи пошук умовно-оптимального управління з останнього кроку. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженням на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб можна було послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 2—4;

x_3 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 3 і 4;

x_4 — обсяг капіталовкладень, виділених на 4 кроці.

k_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяг інвестицій в i-те підприємство $\left(k_i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4\right)$.

k_i^* $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальний обсяг інвестицій в i-те підприємство.

Рекурентне співвідношення, що описує зв'язок між ефективностями управління від 4-го до 1-го кроку (від четвертого до першого підприємства) подається у вигляді:

$$f_i^*\left(x_5\right)=0,$$

$$f_i^*\left(x_i;k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i-C_i\left(k_i\right)\right)\right\} \quad \left(i=\overline{1,4}\right),\ C_i\left(k_i\right)\le x_i,$$

де $f_i^*\left(x_i;k_i\right)$ — сумарна ефективність інвестицій з i-го кроку до останнього.

Тут $f^*\left(x_5\right)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує.

Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап IV.

$$f_4^*\left(x_4;k_4\right)=\max_{k_4}\left\{D_4\left(k_4\right)+f_5^*\left(x_4-C_4\left(k_4\right)\right)\right\}.$$

Результати розрахунків подамо таблицею:

Таблиця 9.23

x_4	Дохід $f_4\left(x_4;k_4\right)=D_4\left(k_4\right)+f_5^*\left(x_5\right)$					Оптимальний розв'язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f_4^*\left(x_4\right)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1

2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

$$f_3^*(x_3;k_3) = \max_{k_3}\{D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))\}$$

за умов

$$C_3(k_3) \le x_3,\ \ k_3 = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 9.24:

Таблиця 9.24

x_3	Дохід $f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*(x_3)$	k_3^*
0	$0+f_4^*(0-0)= =0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*(1-0)= =0+2=2$				2	0
2	$0+f_4^*(2-0)= =0+8=8$	$4+f_4^*(2-2)= =4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*(3-0)= =0+8=8$	$4+f_4^*(3-2)= =4+2=6$	$9+f_4^*(3-3)= =9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*(4-0)= =0+8=8$	$4+f_4^*(4-2)= =4+8=12$	$9+f_4^*(4-3)= =9+2=11$	$12+f_4^*(4-4)= =12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконують так. Нехай потрібно знайти $f_3^*(x_3 = 3)$. Обчислюємо за формулою:

$$f_3(x_3; k_3) = D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3)).$$

Отже,

$$f_3(x_3 = 3; k_3 = 1) = 0 + f_4^*(3 - 0) = 0 + f_4^*(3) = 0 + 8 = 8,$$

$$f_3(x_3 = 3; k_3 = 2) = 4 + f_4^*(3 - 2) = 4 + 2 = 6,$$

$$f_3(x_3 = 3; k_3 = 3) = 9 + f_4^*(3 - 3) = 9 + 0 = 9.$$

Зауважимо, що $C_3(k_3 = 1) = 0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*(x_3 - C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Потім маємо:

$$f_3^*(x_3; k_3) = \max_{k_3=1,2,3} \{D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))\} = \max\{8,6,9\} = 9.$$

Етап 2

$$f_2^*(x_2; k_2) = \max_{k_2} \{D_2(k_2) + f_3^*(x_2 - C_2(k_2))\}$$

за умов:

$$C_2(k_2) \le x_2, \quad k_2 = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Результати розрахунків подані в табл. 9.25:

Таблиця 9.25

x_2	Дохід $f_2(x_2; k_2) = D_2(k_2) + f_3^*(x_2 - C_2(k_2))$					Оптимальне рішення	
	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1;k_1) = \max_{k_1}\left\{D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))\right\}$$

за умов:

$$C_1(k_1) \le x_1,\ k_1 = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Виконуємо розрахунки лише для x_1=4, подаючи їх у табл. 9.26:

Таблиця 9.26

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3 + f_2^*(4-1) = = 3 + 12 = 15$	$5 + f_2^*(4-2) = = 5 + 6 = 11$	$7 + f_2^*(4-3) = = 7 + 4 = 11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, яким передбачено 1 млн грн інвестицій з доходом, що дорівнює 3 млн грн. Отже, для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4–1=3 млн грн інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов x_2=3 максимальний ефект можна отримати в разі реалізації для другого підприємства першого проекту (k_2=1). Дохід у такому разі становитиме 4 млн грн. Отже, x_3=3–1=2, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн грн інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов x_3=2 маємо, що k_3=0. Отже, x_4=2, а йому відповідають капітальні вкладення k_4=2, які забезпечують дохід обсягом 8 млн грн. Остаточно маємо: дохід від 4 млн грн інвестицій становить 3+4+8=15 (млн. грн).

Приклад 9.3. Підприємство розробляє стратегію поповнення запасів деякої продукції для заданого періоду, який складається з N етапів (підперіодів). Для кожного з них відомий обсяг попиту, причому він не є однаковим для всіх етапів. Щоб задовольнити попит, підприємство може придбати необхідну кількість продукції, замовивши її у виробника, або виготовити її самостійно. Передбачається, що запаси поповнюються миттєво, запізнення поставки та дефіцит недопустимі. Залежно від ринкової кон'юнктури підприємству може бути вигідно створювати запаси продукції для задоволення попиту в майбутньому, що пов'язано, проте, з додатковими витратами на зберігання запасів.

Потрібно розробити програму управління запасами підприємства, тобто визначити обсяги замовлення й період його розміщення, щоб загальні витрати на постачання та зберігання продукції були мінімальними, а попит задовольнявся повністю й своєчасно.

Дані задачі подано в табл. 9.27:

Таблиця 9.27

Період (квартал року)	Обсяг попиту на продукцію, тис. од.	Витрати на розміщення замовлення, тис. грн	Витрати на зберігання, тис. грн
1	4	7	2
2	5	8	3
3	3	6	1
4	2	9	0

Відомо, що на початку планового періоду запас становить 2 тис. од., а під час купівлі продукції діє система оптових знижок. Витрати на придбання 1 тис. од. продукції становлять 15 тис. грн, а коли розмір замовлення перевищує 3 тис. од., то витрати знижуються на 12% і становлять 12 тис. грн.

Нехай $N\ \left(i=\overline{1,N}\right)$ — кількість етапів планового періоду. Тоді для i-го етапу введемо такі позначення: x_i — запас продукції на початок етапу; y_i — обсяг замовленої продукції (обсяг замовлення); h_i — витрати на зберігання 1 тис. од. запасу продукції; k_i — витрати на розміщення замовлення; β_i — обсяг попиту на продукцію; $C_i y_i$ — витрати, що пов'язані з купівлею (виробництвом) продукції y_i.

Визначимо $f(x_i,\ y_i)$ як мінімальні витрати на етапах $1, ..., N$, якщо обсяги запасів дорівнюють x_i.

Рекурентні залежності, що відповідають схемі зворотного прогону, набувають вигляду:

$$f_i^*(x_i)=\min_{y_i} f(x_i;y_i)=\min_{y_i}\{C_i y_i+k_i+h_i(x_i)+f_{i+1}(x_i+y_i-\beta_i)\}$$

за умов:

$$\beta_i \le x_i + y_i \le \beta_i + ... + \beta_N, \ y_i \ge 0, \ i = \overline{1, N}.$$

Для N-го етапу маємо:

$$f_N^*(x_N) = \min_{y_N}\{C_N y_N + k_N\}$$

за умов:

$$x_N + y_N = \beta_N, \ y_N \ge 0.$$

Розглянемо покроковий розрахунок оптимальної стратегії управління запасами.

Етап 4. Маємо: $\beta_4 = 2$,

$$f_4(x_4) = \min_{x_4, y_4}\{C_N y_N + k_N\}$$

за умов:

$$x_4 + y_4 = 2.$$

Можливі варіанти розв'язків наведені в табл. 9.28:

Таблиця 9.28

x_4	$f(x_4)$			Оптимальний розв'язок	
	$y_4 = 0$	$y_4 = 1$	$y_4 = 2$	$f_4^*(x_4)$	Y_4^*
0			$9 + 2 \cdot 15 = 39$	39	2
1		$9 + 1 \cdot 15 = 24$		24	1
2	$0 + 0 \cdot 15 = 0$			0	0

Етап 3. Маємо: $\beta_3 = 3$.

$$f_3^*(x_3) = \min_{y_3}(x_i; y_i) = \min_{y_3}\{k_3 + C_3 y_3 + h_3 \cdot x_3 + f_4^*(x_3 + y_3 - \beta_3)\}$$

за умов:

$$3 \le x_3 + y_3 = 3 + 2.$$

Результати розрахунків подамо у табл. 9.29:

Таблиця 9.29

x_3	Доходи: $f_3(x_3; k_3) = D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))$	Оптимальний розв'язок

	$y_3 = 0$	$y_3 = 1$	$y_3 = 2$	$y_3 = 3$	$y_3 = 4$	$y_3 = 5$	$f_3^*(x_3)$	y_3^*
0				6 + 3 · 15 + + 39 = 90	6 + 4 · 12 + + 24 = 78	6 + 5 · 12 + + 0 = 66	66	5
1			6 + 2 · 15 + + 1 · 1 + 39 = 76	6 + 3 · 15 + + 1 · 1 + 39 = 76	6 + 3 · 12 + + 1 · 1 + 0 = 55		55	4
2		6 + 1 · 15 + + 2 · 1 + 39 = 62	6 + 2 · 15 + + 2 · 1 + 24 = 62	6 + 3 · 15 + + 2 · 1 + 0 = 53			53	3
3	3 · 1 + 39 = 42	6 + 1 · 15 + + 3 · 1 + 24 = 48	6 + 2 · 15 + + 3 · 1 + 0 = 39				39	2
4	4 · 1 + 24 = 48	6 + 1 · 15 + + 4 · 1 + 0 = 25					25	1
	5 · 1 + 0 = 5						5	0

Розрахунки виконуємо так. Наприклад, обчислимо $f_3^*(x_3)$ і y_3^*. Оскільки за умовою $3 \le x_3 + y_3 \le 5$, то x_3 може набувати значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, а y_3 — також значень 0, 1, 2, 3, 4, 5. Тепер знайдемо $f_3^*(x_3)$ і y_3^* для $x_3 = 2$ і $y_3 = 1, 2, 3$. Для $x_3 = 2$ і $y_3 = 1$ маємо:

$$f_3(x = 2; y_3 = 1) = k_3 + 1 \cdot C_3 + h_3 \cdot 2 + f_4^*(0) = 6 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + 39 = 62.$$

Аналогічно:

$$f_3(x = 2; y_3 = 2) = 6 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + f_4(1) = 6 + 30 + 2 + 24 = 62,$$

$$f_3(x=2; y_3=3) = 6 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + f_4(2) = 6 + 45 + 2 + 0 = 53.$$

Далі обчислюємо:

$$f^*(x=2) = \min_{Y_N}\{f_3(x=2; y=1); f_3(x=2; y=2); f_3(x=2; y=3)\} =$$
$$= \min(62,\ 62,\ 53) = 53.$$

Отже,

$$f^*(x=2) = 53 \text{ при } y^* = 3.$$

Так само виконуємо розрахунки для x=1, 2, 3, 4, 5, а результати записуємо у відповідну таблицю.

Етап 2. Маємо: $\beta_2 = 5$.

$$f_2^*(x_2) = \min_{y_2}\{k_2 + C_2 y_2 + h_2 x_2 + f_3^*(x_2 + y_2 - \beta_2)\}$$

за умов:

$$5 \le x_2 + y_2 \le 5 + 3 + 2 = 10.$$

У таблицю записуємо лише остаточні результати обчислень (табл. 9.30):

Таблиця 9.30

x_2	$f(x_2)$											Оптимальні розв'язки	
	$y_2=0$	$y_2=1$	$y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4$	$y_2=5$	$y_2=6$	$y_2=7$	$y_2=8$	$y_2=9$	$y_2=10$	$f_2^*(x_2)$	y_2^*
$x_2=0$						134	135	145	143	141	133	133	10
x_2					125	126	136	134	132	124		124	9

= 1													
$x_2 = 2$				125	117	127	125	123	115			115	8
$x_2 = 3$			113	117	118	116	114	106				106	7
$x_2 = 4$		101	105	118	107	105	97					97	6
$x_2 = 5$	81	93	106	107	96	88						81	0
$x_2 = 6$	73	94	95	96	79							73	0
$x_2 = 7$	74	83	74	79								74	0 або 2
$x_2 = 8$	63	72	67									63	0
$x_2 = 9$	52	55										52	0
$x_2 = 10$	35											35	0

Етап 1.
Маємо: $\beta_1 = 4$.

$$f_1^*(x_1) = \min_{y_1}\{k_1 + C_1 y_1 + h_1 x_1 + f_2^*(x_1 + y_1 - \beta_1)\}$$

за умов:

$$4 \le x_1 + y_1 \le 4 + 5 + 3 + 2 = 14.$$

Діємо так, як і на етапі 2, складаючи таблицю результатів (табл. 9.31):

Таблиця 9.31

x_1	$f_1(x_1)$											Оптимальні розв'язки	
	$y_1 = 2$	$y_1 = 3$	$y_1 = 4$	$y_1 = 5$	$y_1 = 6$	$y_1 = 7$	$y_1 = 8$	$y_1 = 9$	$y_1 = 10$	$y_1 = 11$	$y_1 = 12$	$f_1^*(x_1)$	y_2^*
2	174	180	174	177	180	176	180	193	194	195	180	174	2 або 4

Отже, дістали два варіанти оптимального плану управління запасами підприємства, яким відповідають однакові мінімальні загальні витрати на постачання та зберігання продукції.

Інформацію про перший варіант оптимального плану містить табл. 9.32:

Таблиця 9.32

Етап	Запас	Обсяг замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1 = 2$	$y_1^* = 2$	$B_1 = 4$	$x_2 = 2 + 2 - 4 = 0$	$7 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 2 = 41$
2	$x_2 = 0$	$y_2^* = 10$	$B_2 = 5$	$x_3 = 0 + 10 - 5 = 5$	$8 + 10 \cdot 12 + 0 = 128$
3	$x_3 = 5$	$y_3^* = 0$	$B_3 = 3$	$x_4 = 5 + 0 - 3 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$
4	$x_4 = 2$	$y_4^* = 0$	$B_4 = 2$	$x_5 = 2 + 0 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
Разом					174

Другий варіант оптимального плану наведено в табл. 9.33:

Таблиця 9.33

Етап	Запас	Обсяг замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1 = 2$	$y_1^* = 4$	$B_1 = 4$	$x_2 = 2 + 4 - 4 = 2$	$7 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 2 = 59$
2	$x_2 = 2$	$y_2^* = 8$	$B_2 = 5$	$x_3 = 2 + 8 - 5 = 5$	$8 + 8 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 110$
3	$x_3 = 5$	$y_3^* = 5$	$B_3 = 3$	$x_4 = 5 + 0 - 3 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$
4	$x_4 = 2$	$y_4^* = 2$	$B_4 = 2$	$x_5 = 2 + 0 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
Разом					174

Зіставляючи ці два варіанти, бачимо, що відрізняються вони лише першими двома етапами і дають змогу маневрувати фінансовими ресурсами підприємства, яке водночас вирішує ще низку інших проблем.

Заключні зауваження

Розв’язування наведених задач динамічного програмування грунтується на визначеному Беллманом принципі оптимальності. Безумовно, Беллман один з перших зрозумів суть принципу оптимальності і з дивовижною винахідливістю став застосовувати його до сотень різних оптимізаційних задач, що виникають як в економіці, так і в математиці, техніці тощо. У книзі «Кібернетика і медична діагностика» Белман писав: «Найцінніша ознака математики — її універсальність. Математичні методи, розроблені для дослідження економіки, можуть знайти застосування при вивченні питань хіміотерапії; теорія, первісно розроблена для розрахунку оптимальних орбіт космічних кораблів, може використовуватися для конструювання протезів. Нові ідеї, раз народившись, швидко знаходять собі застосування в найрізноманітніших галузях».

Зрозуміло, що викладення такого напрямку як динамічне програмування у вигляді короткого конспекту є неповним. Основну увагу було зосереджено на двох головних моментах: по-перше, на основних поняттях та формальних побудовах, що складають сутність теорії динамічного програмування; по-друге, на описанні обчислювального методу динамічного програмування.

Залишились поза увагою такі цікаві задачі динамічного програмування, що стосуються резервування ресурсів, розподілу ресурсів із вкладенням доходів у виробництво, марківські моделі прийняття рішень тощо. Детальніше задачі динамічного програмування розглядаються в літературі [7, 8, 12, 19].

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.
2. Назвіть методи розв'язування задач динамічного програмування.
3. Наведіть приклади економічних задач, що належать до класу задач динамічного програмування.
4. Сформулюйте принцип оптимальності Р. Белмана.
5. Чи забезпечує принцип оптимальності незалежність наступних розв'язків від здобутих раніше?

Приклади та завдання для самостійної роботи

***Задача 9.1**.* Фірма планує нарощування виробничих потужностей на трьох підприємствах, для чого виділяються кошти обсягом 18 млн гривень. Для кожного підприємства розроблено інвестиційні проекти, які містять обсяги загальних витрат (інвестицій) та прибутків, що пов'язані з реалізацією кожного проекту.

Таблиця 9.34

Інвестиційний проект	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3	
	інвестиції, млн грн	прибуток, млн грн	інвестиції, млн грн	прибуток, млн грн	інвестиції, млн грн	прибуток, млн грн
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9

3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Задача 9.2. Розв'яжіть задачу1, якщо заданий обсяг інвестицій становитиме 20 млн грн, а перший інвестиційний проект (ситуація, коли певному підприємству не виділяються кошти) є недопустимим.

«Там на неведомых дорожках
Следы невиданных зверей…»
А. С. Пушкин

РОЗДІЛ 10. СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Повернувшись до наведеної в першому розділі класифікації задач математичного програмування, переконаємося, що в попередніх розділах досить детально були розглянуті основні види математичних моделей, які мають детермінований характер. Головною умовою побудови та використання детермінованих моделей є припущення про те, що всі початкові параметри задачі мають бути чітко визначеними. З погляду економіки така умова означає, що на етапі постановки задачі абсолютно точною є інформація стосовно всіх параметрів моделі. Однак загальновідомо, що економічні системи функціонують і розвиваються за умов невизначеності, тобто досить важко, а іноді і неможливо, мати точні значення деяких параметрів математичної моделі, особливо коли прогнозується розвиток процесів у майбутньому. Фактичні значення можуть суттєво відрізнятися від тих, які були взяті за основу при побудові математичних моделей та визначенні оптимальних планів, що породжує ризик прийнятих рішень. Невизначеність може бути різного ступеня залежно від того, яку інформацію ми маємо про досліджуваний процес чи явище. Якщо відомий розподіл відповідних параметрів, то для прийняття рішень використовують методи стохастичного програмування, суть яких полягає в тому, що відшукуючи оптимальне рішення $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, тобто значення керованих змінних, необхідно враховувати також вплив ряду випадкових чинників $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, керувати якими немає можливості. Наприклад, у разі планування діяльності сільськогосподарських підприємств є можливість точно передбачати площі посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин (керовані змінні), але кінцевий результат діяльності у значній мірі залежить також від погодних умов, податкової та кредитної політики тощо (некеровані змінні).

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку — випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише за розроблення методів розв'язування задач, а також у разі їх постановки. Адже у постановці кожної задачі мають відображатися особливості прийняття рішень за умов невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

10.1. Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Типову задачу математичного програмування в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, для компонент якого:

$$\max(\min) F = f(X),$$
$$q_i(X) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0.$$

Якщо функції в даній задачі крім керованих параметрів X залежать ще і від деяких випадкових величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, то маємо ***задачу стохастичного програмування***:

$$\max(\min) F = f(X, \omega),$$
$$q_i(X, \omega) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$
$$X \ge 0, \ \omega \in \Omega,$$

де Ω — простір подій ω.

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію стосовно детермінованості (стохастичності) функцій $f(X, \omega)$, $q_i(X, \omega)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

I) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;

II) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

III) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

1. Детермінованим чи випадковим є вектор X. Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів

моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від ω — $X(\omega)$, тобто залежить від випадкових змінних.

2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500±200 чи 450±50? У першому разі платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому — лише від 400 до 500.

3. Як виконуються обмеження: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

При постановці задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з врахуванням евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора X зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково має бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того самого підприємства за тих самих умов визначатиме, приміром, обсяги кредитів, то його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть отримані.

Методи розв’язування стохастичних задач поділяють на дві групи — прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв’язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X,\omega)$ і $g_i(X,\omega)\le 0, i=\overline{1,m}$ на базі інформації щодо параметра ω. Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

10.2. Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування

В задачах детермінованого характеру за певним набором початкових даних однозначно визначається вигляд цільової функції та обмежень задачі. У стохастичному програмуванні особливості побудови математичних моделей задач пов’язані з можливостями вибору виду функції мети та обмежень, тобто за одного набору початкових значень можна отримати математичні моделі, що суттєво відрізнятимуться, а отже, значні розбіжності матимуть і отримані за ними оптимальні плани. Розглянемо основні відмінності будови математичних моделей задач стохастичного програмування.

Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин: цільової функції і обмежень. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

- максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву *М*-моделей;

• мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву *V*-моделей;

• ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до Р-моделей.

Обмеження в стохастичних економіко-математичних моделях можуть також задаватися різними способами, а значить, отримані оптимальні плани будуть мати відповідний рівень ймовірності їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічних процесів), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попиту на вироблену продукцію, загальної суми податків тощо).

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді:

$$g(X,\omega) \leq 0 . \qquad (10.1)$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (10.1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega \in \Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема замість (10.1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю. Наприклад:

$$P\{g(X,\omega) > 0\} \leq \gamma , \qquad (10.2)$$

Або

$$P\{g(X,\omega) \leq 0\} \geq 1-\gamma . \qquad (10.3)$$

Обмеження (10.2) трактується так: ймовірність того, що $g(X,\omega) > 0$, не перевищує величину γ. Відповідно вираз (10.3) гарантує, що з ймовірністю $1-\gamma$ буде виконуватися обмеження (10.1). Наприклад, якщо $\gamma = 0{,}05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у п’яти випадках не буде виконуватися.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватися в середньому, частина — в жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X,\omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану для заданих X та ω. Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X за випадкових параметрів ω можна сформулювати у таких варіантах:

а) $\max Mf(X,\omega)$, (10.4)

за умов:

$P\{g(X,\omega)\le 0\}\ge 1-\gamma$; (10.5)

$X\ge 0$, $\omega\in\Omega$; (10.6)

б) $\max \xi$ (10.7)

за умов:

$P\{f(X,\omega)\ge \xi,\ g(X,\omega)\le 0\}\ge 1-\gamma$; (10.8)

$X\ge 0$, $\omega\in\Omega$. (10.9)

Отже, за постановки задачі варіанту а) необхідно максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, щодо ресурсів, виконання контрактів тощо виконуються з імовірністю $1-\gamma$. За постановки задачі варіанту б) крім цього вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку було не менше величини ξ з імовірністю $1-\gamma$, а також, щоб величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанту а) полягає у тому, що він простіший стосовно обчислення.

Оскільки у моделі (10.4)—(10.6) як критерій оптимальності використано математичне сподівання $f(X,\omega)$, то маємо *М*-модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають *М*-планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і по-іншому, поєднуючи або комбінуючи у певний спосіб умови наведених вище першої та другої моделей. Так, приміром, задача стохастичного програмування може мати такий вигляд:

$$P\{f(X,\omega) \geq \alpha\} \to \max,$$

за умов:

$$M(g_i(X,\omega)) \leq 0 \quad (i = \overline{1,k};\ k < m);$$

$$g_i(X,\omega) \leq 0\ (i = \overline{k+1,m});$$

$$X \geq 0 \quad \omega \in \Omega.$$

Отже, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного їх виду для розв’язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, наявної інформації та мети дослідження.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Розробляючи стратегічні плани, враховують всі можливі значення ω, тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища, та приймають рішення щодо траєкторії розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести спостереження над ω (у певний момент стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв'язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, плануючи виробничу діяльність підприємства, рішення щодо обсягів випуску продукції приймаються з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ при заданому $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу:

$$\max f(X(\omega)),$$

за умов:

$$g_i(X(\omega)) \le 0; \quad i = \overline{1,m},$$

$$X(\omega) \ge 0.$$

У загальному випадку спостереження уможливлюють неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення — спостереження — рішення — спостереження...

або

спостереження — рішення — спостереження — рішення...

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N раз, то модель називають N-етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — то задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з N етапів у свою чергу також може бути поділений. У такому разі маємо одноетапні чи двохетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому разі, коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми величинами і початкову задачу стохастичного програмування зводять до детермінованої.

Двохетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи.

На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі. Для існування розв'язку двохетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

Побудуємо математичну модель відомої задачі про визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого максимізується загальний прибуток підприємства. Для спрощення розглянемо використання лише двох видів ресурсів, обсяги яких відомі: $b_1 = 550$ од., $b_2 = 205$ од. Прибуток від реалізації одиниці *j*-го виду продукції $c_{kj}\ (k, j = \overline{1,3})$ є випадковим, але відомі ймовірності одержання *k*-ої величини прибутку від реалізації одиниці *j*-го виду продукції $p_{kj}\ (k, j = \overline{1,3})$. Норми витрат *i*-го виду ресурсу на одиницю *j*-го виду продукції $a_{ij}\ (i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3})$ детерміновані. Початкові дані наведені в таблицях 1—4.

Таблиця 10.1

Прибуток від одиниці першого виду продукції, ум. од. (c_{k1})	Ймовірність (p_{k1})
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 10.2

Прибуток від одиниці другого виду продукції, ум. од. (c_{k_2})	Ймовірність (p_{k_2})
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 10.3

Прибуток від одиниці третього виду продукції, ум. од. (c_{k_3})	Ймовірність (p_{k_3})
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 10.4

Вид продукції	Норма витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, ум. од.	
	першого виду	другого виду
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Розв'язання.

Як зазначалось, математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції. Розглянемо кілька можливих варіантів постановок для умов даної задачі.

І варіант.

Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\max F = C(\omega)X,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною з законом розподілу ймовірностей $N(\overline{F}, \sigma_F^2)$, де $\overline{F}$ — математичне сподівання, а σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв'язати таку задачу, необхідно знайти математичне сподівання $\overline{F}$.

Позначимо символами $M(c_j)$, $j = \overline{1,3}$ — математичне сподівання прибутку від j-го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду:

$$\max \overline{F} = M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega)X),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з M-моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням випадкової величини (прибутку).

Оскільки випадкова величина прибутку є дискретною і відомі значення відповідних ймовірностей $p_{kj}\ (k = \overline{1,3}; j = \overline{1,3})$, то можна безпосередньо обчислити значення $M(c_j)\ \left(j = \overline{1,3}\right)$. Отже, в числовому вигляді маємо:

$$M(c_1) = \sum_{k=1}^{3} c_{k1}p_{k1} = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} + c_{31}p_{31} = 10 \cdot 0{,}3 + 13 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}3 = 12{,}7;$$

$$M(c_2)=\sum_{k=1}^{3}c_{k2}p_{k2}=c_{12}p_{12}+c_{22}p_{22}+c_{32}p_{32}=12\cdot 0{,}2+15\cdot 0{,}5+13\cdot 0{,}3=13{,}8;$$

$$M(c_3)=\sum_{k=1}^{3}c_{k3}p_{k3}=c_{13}p_{13}+c_{23}p_{23}+c_{33}p_{33}=12\cdot 0{,}3+11\cdot 0{,}5+14\cdot 0{,}2=11{,}9.$$

Математична модель задачі набуває такого вигляду:

$$\max F=12{,}7x_1+13{,}8x_2+11{,}9x_3,$$

$$\begin{cases}5x_1+4x_2+3x_3\le 550;\\ x_1+2x_2+1{,}5x_3\le 205;\end{cases}$$

$$x_j\ge 0\ (j=\overline{1,3}).$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом, але оптимальний план детермінованої задачі є наближеним розв'язком початкової стохастичної.

Оптимальним планом є $X_1^*=(x_1^*\approx 46{,}67;\ x_2^*=0;\ x_3^*\approx 105{,}56)$, причому прибуток становить $F_{\max}\approx 1848{,}78$.

II варіант.

Отриманий розв'язок може бути основою плану виробництва продукції за даних умов. Однак очевидно, що, оскільки значення випадкових величин були замінені їх математичним сподіванням, то розв'язок задачі знайдено як деяке усереднення всіх можливих за даних умов розв'язків. Для деякого набору фіксованих умов розрахований план може виявитись неоптимальним, тобто справжнє значення прибутку буде значно відрізнятися від очікуваного рівня. Якщо, наприклад, зовнішні умови складаються найнесприятливіше (мінімальні рівні прибутків для кожного з видів продукції), то значення цільової функції для відшуканого оптимального плану буде дорівнювати:

$$F(c_{j\min})=10\cdot 46{,}67+11\cdot 105{,}56=1627{,}86.$$

Очевидно, що відхилення даного значення від середнього очікуваного рівня (1848,78 – 1627,86 = 220,92) показує можливе завищення прибутку у плані. Відомо, що однією з головних характеристик відхилення значень випадкової величини від її середнього є дисперсія. Розрахуємо значення дисперсії для отриманого оптимального плану:

$$D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 =$$
$$= 3{,}81 \cdot (46{,}67)^2 + 1{,}56 \cdot 0 + 1{,}29 \cdot (105{,}56)^2 = 22672{,}88\ .$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{22672{,}88} = \ = 150{,}58$.

Якщо допустити, що випадкова величина має нормальний закон розподілу, то, враховуючи властивості середнього квадратичного відхилення (правило трьох «сігм»), визначимо межі, в яких змінюватиметься прибуток: $\overline{F} \pm 3\sigma_F = 1848{,}78 \pm 451{,}74 = [1397{,}04; 2300{,}52]$. Якщо розраховані зміни прибутку не можуть влаштовувати особу, що приймає рішення, то доцільно ввести обмеження, яке зменшить ризик втрати доходу.

За необхідності зменшення можливих втрат прибутку в систему обмежень вводять умову, що дисперсія прибутку має не перевищувати деякої заданої величини. Розв'яжемо задачу з додатковою умовою, що дисперсія має не перевищувати 5000.

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3\ ,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \\ 3{,}81x_1^2 + 1{,}56x_2^2 + 1{,}29x_3^2 \le 5000; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1{,}3})\ .$$

Ця задача є нелінійною. Розв'язавши її, маємо такий оптимальний план:

$X_2^* = (x_1^* = 14{,}23;\ x_2^* = 37{,}78;\ x_3^* = 39{,}39)$, причому прибуток $F = 1170$ буде змінюватися приблизно на 210 ум. од. (оскільки $\sigma_F = \sqrt{D_F} \approx 70{,}7$).

III варіант.

Застосування інструментарію математичного програмування до розв'язання економічних задач уможливлює врахування найвибагливіших побажань стосовно набору властивостей розроблюваних планів. Допустимо, що необхідно, орієнтуючись на деякий середній рівень прибутку, досягти мінімального рівня можливих його змін. У такому разі доречно використати *V*-модель задачі стохастичного програмування:

$$\min Z = D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \\ M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 \ge W; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}),$$

де W — бажаний рівень сподіваного прибутку.

Зафіксуємо бажаний прибуток на рівні не нижче, ніж 1500 ум. од., і знайдемо оптимальний план такої задачі:

$$\min Z = D_F = 3{,}81x_1^2 + 1{,}56x_2^2 + 1{,}29x_3^2,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \\ 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3 \ge 1500; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Розв'язавши цю задачу квадратичного програмування, маємо: $X_3^* = (x_1^* \approx 18{,}24;\ x_2^* \approx 48{,}4;\ x_3^* \approx 50{,}47)$, мінімальна дисперсія сподіваного прибутку буде дорівнювати $Z = \min D_F = 8206{,}125$, тобто зміни прибутку відбуватимуться в межах ± 270 ум. од.

Вибір одного з наведених варіантів математичних моделей залежатиме від конкретної ситуації, поставлених цілей та вимог, однак наведений приклад показує, що використання стохастичних задач дає математично обґрунтовану інформацію, яка може бути основою прийняття рішень за складних реальних умов.

10.3. Приклади економічних задач стохастичного програмування

Приклад 10.2. Нехай потрібно зробити запас з n товарів у обсягах $X=(x_1, x_{2,\ldots, x_n})$, на які є випадковий попит $W=(\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_n)$. За нестачі одиниці j-го товару застосовується штрафна санкція у розмірі c_j, тобто $C=(c_1, c_2,\ldots, c_n)$, а затрати на зберігання одиниці відповідної продукції, яку не вдалося збути, задаються вектором $D=(d_1, d_2,\ldots, d_n)$.

Розв'язання. Функція збитків, що відповідає розв'язку X, має вигляд:

$$f(X,\omega)=\sum_{j=1}^{n}\left\{c_j\max\left(0,\omega_j-x_j\right)+d_j\max\left(0,x_j-\omega_j\right)\right\},$$

де $c_j\max\left(0,\omega_j,-x_j\right)$ — штраф за незадоволення попиту по j-му виду продукції; $d_j\max\left(0,x_j-\omega_j\right)$ — витрати на зберігання j-ої продукції. Для знаходження оптимального розв'язку цієї задачі необхідно мати функцію розподілу ймовірностей випадкової величини ω. Якщо така функція розподілу невідома, тобто її неможливо відшукати, то допускають, що випадкова величина розподілена рівномірно. В такому разі необхідно пам'ятати, що саме таке припущення може призвести до прийняття неправильного рішення.

Приклад 10.3. Індивіди можуть тримати своє багатство у вигляді грошей та облігацій. Оскільки гроші — це актив, що використовується як засіб обігу, то вони не приносять прибутку у вигляді процентів. Облігації — це цінні папери, що дають їх власникові певний дохід. Логічно допустити, що індивідууми мають зберігати своє багатство у вигляді облігацій. Однак це не так, оскільки процентна ставка і ринкова вартість облігацій наперед точно не відомі , тобто існує невизначеність. Необхідно визначити оптимальний розподіл активу на гроші та облігації.

Розв'язання. Нехай S — загальна величина активу, а x та y — величини активів, які зберігаються відповідно у формі грошей та облігацій. Вважаємо, що через рік активи, вкладені в облігації, змінюються. За решти однакових умов облігацію, яка приносить більший процент прибутку, на ринках цінних паперів можна продати за більшу суму, ніж облігацію з меншим процентом. Позначимо через ξ та η величини активів, які реалізуються через рік на одиницю активів, відповідно збережених у формі грошей та вкладених в облігації. Величина $\xi \equiv 1$, а η є випадковою величиною. Економіко-математична задача найвигіднішого розподілу активу на гроші та облігації полягає у максимізації сподіваної корисності:

$$\max F(x, y) = M(x + з\, y),$$

за умов:

$$x + y \leq S;$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Звідси випливає, що, коли $M\eta > 1$, то активи потрібно вкладати в облігації, а в протилежному разі — навпаки. Отже, питання щодо розподілу активу між грішми та облігаціями повністю вирішується на користь одного з цих видів заощаджень. Якщо $M\eta = 1$, то однаково, який спосіб заощадження буде використано.

Приклад 10.4. Відомо, що у комерційних банках нараховується більша процентна ставка на вкладені кошти порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним вкладником постає дилема: мати менший, але гарантований дохід, або більший, проте з ризиком втратити внесок. З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок в ощадний банк. Визначити оптимальний розподіл вкладень у банки.

Розв'язання. Позначимо через S загальну суму грошей певного власника; x— обсяг вкладень в ощадний банк, y— у комерційний; a, b— відповідно процентні ставки нарахувань в ощадному та комерційному банках; p — ймовірність повернення вкладу з комерційного банку; $(1-p)$ — ймовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку.

За певного розподілу S на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання доходів:

$ax + by$ — за умов успішного функціонування комерційного банку;

$ax - y$ — у протилежному разі.

Економіко-математична модель має такий вигляд:

$$\max F(x, y) = (1-p)(ax - y) + p(ax + by)$$

за умов:

$$x + y \le S\,;$$

$$x, y \ge 0.$$

Приклад 10.5. Потрібно оцінити доцільність страхування. Нехай якась особа бажає застрахувати частину свого активу. Для цього вона сплачує певний внесок страховій компанії, а у разі втрати активу одержує від неї страхову винагороду. Визначити частку активу, яку особа вважає за доцільне застрахувати.

Розв'язання. Позначимо через S актив (капітал, майно тощо), власником якого є певна особа. Частину його, яку бажано застрахувати, позначимо через x. Тоді страховий внесок, що сплачується страховій компанії, дорівнює rx, а у разі втрати активу клієнт одержує винагороду qx. Якщо відома ймовірність p недоторканності всього активу, то економіко-математичну модель визначення частки страхового активу можна записати так:

$$\max F(x) = p(S - rx) + (1-p)qx\,,$$

$$0 \le x \le S\,.$$

Тут можна легко врахувати також обсяги доходів.

Подібна модель може використовуватися страховими компаніями для визначення доцільних величин страхових внесків та страхових винагород, які зацікавили б клієнтів і були б вигідними страховій компанії.

Приклад 10.6. У буряко-цукровому комплексі мають суму коштів S, які необхідно розподілити між розширенням сировинної бази і збільшенням потужностей з її переробки. Потрібно так спланувати розподіл коштів, вважаючи урожайність цукрових буряків випадковою величиною ξ, щоб отримати найбільшу кількість цукру.

Розв'язання. Нехай q_1 — витрати коштів на вирощування цукрових буряків на одному гектарі; q_2 — питомі зведені витрати на створення одиниці потужності цукрового заводу; d — частка виходу цукру з одиниці сировини; x — планова площа під цукровими буряками; y — планова потужність цукрового заводу.

Потрібно максимізувати приріст обсягу виробництва цукру за обмежених коштів. Економіко-математична модель має вигляд:

$$\max F(x, y) = d\ M\left(\min_{x,y}\{\xi\ x, y\}\right)$$

за умов:

$$q_1 x + q_2 y \le S\ ;$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

10.4. Одноетапні задачі стохастичного програмування

Розглянемо лінійну одноетапну задачу стохастичного програмування в такій постановці: визначити план X, для якого

$$\max M\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j(\omega)x_j\right\},$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\right\} \ge p_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0, \omega \in \Omega \ \ (j = \overline{1, n}),$$

де вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції $C(\omega)=(c_j(\omega))\ \ (j=\overline{1,n})$, матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень $A(\omega)=\left(a_{ij}(\omega)\right)\ \ (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$, а також вектор $B(\omega)=(b_i(\omega))\ \ (i=\overline{1,m})$ є випадковими величинами; ω — випадковий параметр, Ω — множина значень ω, що з'являються з певною ймовірністю. Нехай $A(\omega)$ — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $\overline{a}_{ij}$ і дисперсією σ_{ij}^2, а $B(\omega)$ і $C(\omega)$ — нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями відповідно $\overline{b}_i$ та $\overline{c}_j$ і дисперсіями σ_i^2, σ_j^2.

Оскільки в обмеженнях задачі виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\ (i=\overline{1,m})$ матриця $A(\omega)$ та вектор $B(\omega)$ є нормально розподіленими випадковими величинами, то їх різниці $\Delta_i(X)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)$ $(i=\overline{1,m})$ також є випадковими величинами з нормальним розподілом, математичним сподіванням $\overline{\Delta_i}(X) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j - \overline{b_i}\ (i = \overline{1,m})$ і дисперсією $\sigma_i^2 = \sum \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_j^2$.

Обмеження $P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \le b_i(\omega)\right\} \ge p_i\ (i = \overline{1,m})$ еквівалентні нерівностям $P\{\Delta_i(X) \le 0\} \ge p_i\, (i = \overline{1,m})$. Враховуючи, що $\Delta_i(X)$ нормально розподілена випадкова величина, використаємо функцію нормального закону розподілу, внаслідок чого наведену нерівність можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(X)} \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{\frac{(\xi - \overline{\Delta_i})^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\} d\xi \ge p_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Позначимо: $\Phi(\mathrm{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$. Тоді останню нерівність зведемо до вигляду:

$\Phi\left(-\frac{\overline{\Delta_i}(X)}{\sigma_i(X)}\right) \ge p_i$, звідки $\overline{\Delta_i}(X) + \Phi^{-1}(p_i)\sigma_i(X) \le 0$.

Підставивши в цю нерівність значення $\overline{\Delta_i}(X)$ і $\sigma_i(X)$, отримаємо:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \quad (i = \overline{1,m}).$$

Отже, початкову стохастичну задачу зведено до детермінованого аналогу з лінійною цільовою функцією та нелінійними обмеженнями:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \le \overline{b_i} - \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \quad (i = \overline{1,m}).$$

Таку задачу можна розв'язати одним з відомих методів розв'язування задач нелінійного програмування, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо одноетапну задачу стохастичного програмування, що задана *P*-моделлю. Отже, маємо задачу виду:

$$\min F = k$$

за умов:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0;$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$X \ge 0.$$

У даній задачі необхідно мінімізувати величину *k*, що обмежує витрати на виготовлення продукції $\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$, причому така вимога має виконуватися не строго, а із заданим рівнем імовірності — p_0. Інші обмеження також виконуються з певною імовірністю — p_i $(i = \overline{1,m})$.

Допустимо, що випадкова величина $c_j \quad (j=\overline{1,n})$ — нормально розподілена з математичним сподіванням $\overline{c_j}$ і кореляційною матрицею $C=\left(c_{tj}\right)$, де $c_{tj}=M\left\{(c_t-\overline{c}_t)(c_j-\overline{c}_j\right\}$. Тоді вираз $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ буде випадковою величиною, що також нормально розподілена з математичним сподіванням $\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j$ та дисперсією $\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_t x_j$. Отже, (з попередніх викладок) можна записати:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\}=p_0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k-\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_t x_j}}\right)=p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\left(X\right)=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j+\Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj}x_t x_j}\,.$$

При $p_0 \ge 0$ величина $k(X)$ є угнутою функцією за змінними x_j. Отже, за зроблених допущень задачі стохастичного програмування

$$\min F=k\,,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\}=p_0\,,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i=\overline{1,m})\,,$$

$$X \ge 0$$

відповідає детермінований еквівалент:

$$\min\ k(X)=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_j x_j+\Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{tj}x_t x_j}$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_t\sum_j \nu_{it}x_t x_j+2\sum_j \nu_{ij}x_j^2+\theta_i^2}\le \bar{b}_i-\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j \quad (i=\overline{1,m}).$$

Остання задача являє собою задачу опуклого програмування. Для її розв'язування можна застосувати теорему Куна—Таккера, або один з інших методів розв'язування задач нелінійного програмування.

Приклад 10.7. Фермер має змогу купити три види зерна та готувати з нього різні суміші для виробництва свинини. У табл. 10.5 містяться дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби у поживних речовинах. Потреба у поживних речовинах розподілена рівномірно на зазначених інтервалах від мінімально можливого до максимального рівня $[\min_i; \max_i]$ для кожної i-ої поживної речовини $(i=\overline{1,4})$.

Таблиця 10.5

ВМІСТ ПОЖИВНИХ РЕЧОВИН В 1Ц ЗЕРНА ТА ПОТРЕБА У ПОЖИВНИХ РЕЧОВИНАХ

Зерно	Поживна речовина				Ціна, грн
	кормові одиниці, ц	перетравний протеїн, кг	лізин, кг	кальцій, кг	
Ячмінь, ц	1,15	8,5	0,41	0,2	45
Кукурудза, ц	1,33	7,3	0,21	0,05	40
Горох, ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
Потреба у поживних речовинах:					

а) максимальна (max_i)	106	890	45	12	—
б) мінімальна (min_i)	95,4	801	41	9	—

Необхідно розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальний розв'язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна за умов задоволення мінімально допустимих потреб у всіх поживних речовинах з ймовірністю $\gamma = 0{,}9$.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — відповідно обсяги ячменю, кукурудзи і гороху, які необхідно закупити.

Критерій оптимальності:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$P\{1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq a\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c\} \geq 0{,}9;$$
$$P\{0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d\} \geq 0{,}9,$$

де a, b, c, d — відповідно потреби кормових одиниць, перетравного протеїну, лізину та кальцію (випадкові, рівномірно розподілені величини).

Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами, тобто:

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq a_1;$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b_1;$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c_1;$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 — відповідно значення випадкових величин, що задовольняють умови:

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0{,}9; \text{ і } P\{b \geq b_1\} \geq 0{,}9;$$

$$P\{c \geq c_1\} \geq 0{,}9; \text{ і } P\{d \geq d_1\} \geq 0{,}9.$$

Визначимо параметри $a_1, b_1, c_1, d_1.$ З теорії ймовірностей відомо, що:

$$\frac{1}{106 - 95{,}4} \int_{95{,}4}^{a_1} d\varphi = 0{,}9 .$$

Отже, маємо: $\frac{1}{10{,}6}\left(\varphi\Big|_{95{,}4}^{a_1}\right) = 0{,}9.$ Звідси: $\frac{1}{10{,}6}(a_1 - 95{,}4) = 0{,}9$ або $a_1 - 95{,}4 = 9{,}54,$ тому $a_1 = 104{,}94.$

Відповідно отримаємо: $b_1 = 881{,}1;\ c_1 = 44{,}6;\ d_1 = 11{,}7.$

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке буде використано для відгодівлі свиней:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \geq 104{,}94,$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq 881{,}1,$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq 44{,}6,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq 11{,}7,$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0.$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, отримаємо: $x_1 = 30{,}94$, $x_2 = 35{,}59$, $x_3 = 18{,}66$. Оптимальні витрати дорівнюють 3749 гривням.

10.5.Двохетапні задачі стохастичного програмування

Недоліком розглянутих одноетапних задач стохастичного програмування є те, що в них лише фіксується факт можливих відхилень значень випадкових параметрів і усереднені розв'язки вибирають за умови, що відхилення значень від середнього рівня в будь-який бік небажане (зменшується величина дисперсії параметрів у обмеженнях або цільова функція — дисперсія мінімізується). У більшості реальних економічних задач має значення не лише величина відхилення, але також і його напрямок. Двохетапні задачі стохастичного програмування позбавлені зазначеного недоліку.

Розглянемо задачу стохастичного програмування в такій постановці:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j \quad , \tag{10.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j = b_i(\omega) \; (i = \overline{1,m}) \quad ; \tag{10.11}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,n}) . \tag{10.12}$$

Якщо обмеження залежно від значень випадкових параметрів та вектора X виконуються як $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega)$, то можливе існування надлишку (ресурсів, продукції тощо). Позначимо його через Δ_i^+:

$$\Delta_i^+(X,\omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right) .$$

За виконання обмежень залежно від значень випадкових параметрів та вектора X у вигляді $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \geq b_i(\omega)$ виникає дефіцит. Позначимо його через Δ_i^-:

$$\Delta_i^-(X,\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right) .$$

Отже, якщо $\Delta_i^+(X,\omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right)$, то $\Delta_i^-(X,\omega) = 0$, а якщо $\Delta_i^-(X,\omega) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right)$, то $\Delta_i^+(X,\omega) = 0$.

Інакше кажучи,

$$\Delta_i^+(X,\omega) = \max\left[0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right) \right],$$

$$\Delta_i^-(X,\omega) = \max\left[0, \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\right)\right].$$

Очевидно, що система обмежень (10.11) задачі може бути подана в еквівалентній формі:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j + \Delta_i^+ - \Delta_i^- = b_i(\omega)\ (i = \overline{1,m}).$$

Допустимо також, що відомі величини α_i — питомі витрати на збереження надлишків $(\alpha_i > 0)$ та β_i — питомі витрати, що пов'язані з дефіцитом $(\beta_i > 0)$ $(i = \overline{1,m})$. Отже, можна визначити штрафну функцію для i-го обмеження за результатом його виконання. Позначимо її через S, тоді:

$$S_i = \max\left\{\alpha_i\Delta_i^+; -\beta_i\Delta_i^-\right\} = \begin{cases} \alpha_i\Delta_i^+, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) \le b_i(\omega), \\ -\beta_i\Delta_i^-, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) \ge b_i(\omega). \end{cases}$$

Тоді доцільно розв'язувати задачу (10.10)—(10.12) у такій постановці:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + M\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i\Delta_i^+(X,\omega) + \beta_i\Delta_i^-(X,\omega)\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + M\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \max\left\{0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j\right)\right\} + \right.$$

$$\left. + \beta_i \max\left\{0, \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\right)\right\}\right), \qquad (10.13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j = b_i(\omega)\ (i = \overline{1,m}); \qquad (10.14)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{10.15}$$

Змінні Δ_i^+ та Δ_i^- можна розглядати як такі, що забезпечують виконання обмежень (10.11) як рівностей.

Отже, розв’язування задачі відбувається в два етапи: спочатку відшукують фіксований план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ згідно з апріорною інформацією про стан зовнішнього середовища, який і визначає реалізацію випадкових параметрів. Значення вектора *X* не задовольняє обмеження задачі для кожного $\omega \in \Omega$. На другому етапі після спостереження за зовнішнім середовищем і отримання точного значення випадкових параметрів ω знаходять значення змінних Δ_i^+ та Δ_i^-, що компенсують відхилення, які виникли за попереднім планом *X*. Витрати на корекцію початкового плану визначаються як

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \Delta_i^+ + \beta_i \Delta_i^-).$$

Важливо спочатку отримати такий план, який би вимагав мінімальних витрат не лише на його реалізацію, але і на його коректування.

Коректування планів у процесі їх реалізації є цілком природним при складанні планів для реальних економічних процесів. Необхідність коректування плану зумовлена не недоліками планування, а складністю прийняття рішень за умов невизначеності.

Детерміноване моделювання не дає змоги об’єднати два етапи: прийняття плану та його коректування. Перехід від детермінованих моделей до стохастичних, в яких використовуються випадкові величини, що саме і викликають необхідність корекції, уможливлює отримання математичних моделей, що об’єднують вищеназвані два етапи планування. Отже, в результаті розв'язування двохетапних стохастичних задач отримують плани, що є стійкими за умов невизначеності і мінімізують загальні витрати на реалізацію і корекцію плану, тобто забезпечують загальний ефект від попереднього плану та його корекції.

У моделях двохетапного стохастичного програмування відображаються найхарактерніші особливості планування за умов невизначеності:

1) ймовірнісний характер початкової інформації,

2) вибір попереднього плану з урахуванням його майбутнього коректування,

3) коректування попередньо вибраного плану по мірі уточнення інформації.

Модель (10.13)—(10.15) — найпростіша двохетапна модель стохастичного програмування. У загальному випадку план-корекція вводиться в систему обмежень з допомогою матриці корекції загального вигляду, елементи якої можуть залежати від ω, тобто розглядається система нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j + \sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega)y_k + b_i(\omega) \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \quad y_k \ge 0 \quad \left(k = \overline{1,r}\right),$$

або у векторно-матричній формі:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \ge 0; \tag{10.16}$$

$$X \ge 0, \ Y \ge 0. \tag{10.17}$$

Попередній план X вибирається до спостережень над ω. Коли ω стає відомим, то визначають план-корекцію Y у такий спосіб, щоб виконувались співвідношення (10.16), (10.17). При цьому ефект від плану-корекції дорівнює:

$$\sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega)y_k. \tag{10.18}$$

Оскільки з кожним планом-корекцією Y пов'язаний певний ефект, то при певному X і спостереженому ω його краще за все вибирати з умови максимізації (10.18) за обмежень (10.16), (10.17). Позначимо такий план через $Y(X,\omega)$ і назвемо його оптимальною корекцією плану X за зовнішніх умов ω. Можна допустити, що $Y(X,\omega)$ існує при кожному X і ω, у протилежному разі в (10.16) можна ввести штучні змінні Y^{-} і одночасно — в (10.17) з досить великим штрафом (прийом введення штучних змінних детально описано в розділі 2).

Сподіваний ефект від плану-корекції дорівнює:

$$M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega) y_k(X,\omega)\right).$$

Суть задачі полягає у відшуканні плану X, який максимізував би математичне сподівання ефекту від плану з урахуванням його майбутньої корекції:

$$F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega) y_k(X,\omega)\right) \tag{10.19}$$

за умов:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \geq 0; \tag{10.20}$$

$$X \geq 0,\ Y \geq 0. \tag{10.21}$$

Іноді нелінійну задачу (10.19)—(10.21) зручно формулювати дещо в іншому вигляді, а саме: знайти такий детермінований вектор X і такий $Y(\omega)$, щоб

$$\max F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\big(d(\omega), Y(\omega)\big) \tag{10.22}$$

за обмежень:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y(\omega) + b(\omega) \geq 0; \tag{10.23}$$

$$X \geq 0,\ Y(\omega) \geq 0. \tag{10.24}$$

У такій постановці двохетапна задача зводиться до одноетапної. Одночасно знаходиться оптимальний план X і його оптимальна корекція $Y(\omega)$. Задача (10.22)—(10.24) на відміну від (10.19)—(10.21) лінійна, однак, якщо в задачі (10.19)—(10.21) розв'язком є n-вимірний вектор X, для пошуку якого можна застосувати чисельні методи, то в задачі (10.22)—(10.24) невідомими є $(X, Y(\omega))$ і застосувати для розв'язування задачі чисельні методи можна лише за умови, якщо Ω — скінченна множина з невеликою кількістю елементів.

Приклад 10.8. Розглянемо в загальному вигляді найпростішу стохастичну задачу з визначення оптимального плану виробництва.

Необхідно спланувати виробництво однорідної продукції, попит на яку випадковий.

Розв'язання. Позначимо через X обсяги виробництва продукції, через ω — попит на неї, а через C — витрати на виробництво одиниці продукції.

Оскільки попит на продукцію випадковий, то за будь-яких значень X можливе або її перевиробництво, або дефіцит. Позначимо надлишок продукції через $Y^+(X,\omega)$, дефіцит — через $Y^-(X,\omega)$, а питомі витрати, що пов'язані зі зберіганням надлишку продукції та компенсацією дефіциту, — відповідно через D^+ та D^-. Завдання полягає в знаходженні X, що мінімізує математичне сподівання витрат, які пов'язані з виробництвом, надлишком та дефіцитом продукції.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min F(X) = CX + M\left(D^+Y^+(X,\omega) + D^-Y^-(X,\omega)\right),$$

де

$$Y^{+}(X,\omega)=\max\{0,X-\omega\},$$

$$Y^{-}(X,\omega)=\max\{0,\omega-X\},\ X\geq 0.$$

Очевидно, що коли розв'язок вибрати за середнім значенням попиту $\overline{\omega}$, то при $D^{+}>C$ та $D^{-}>C$ (що, як правило, виконується) отримуємо тривіальну відповідь: $X=\omega$.

Приклад 10.9. Потрібно перевезти однорідну продукцію від двох постачальників трьом споживачам. Обсяг продукції першого постачальника a_1 = 340 од., а другого — a_2 = 560 од. Попит кожного споживача на продукцію є випадковим і відомий з відповідними ймовірностями, які наведені в табл. 10.6—10.8.

Таблиця 10.6

Попит першого споживача на продукцію, од. (b_1)	Ймовірність
100	0,05
175	0,2
200	0,6
300	0,1
340	0,05

Таблиця 10.7

Попит другого споживача на продукцію, од. (b_2)	Ймовірність
250	0,05
290	0,25
300	0,4

320	0,2
360	0,1

Таблиця 10.8

Попит третього споживача на продукцію, од. (b_3)	Ймовірність
290	0,1
300	0,3
400	0,3
590	0,2
600	0,1

Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача, що наведені в табл. 10.9 в умовних одиницях:

Таблиця 10.9

Постачальник	Споживач		
	перший	другий	третій
Перший	30	37	28
Другий	32	26	30

Якщо попит на продукцію буде більшим, ніж її наявність, то необхідно буде сплатити штраф за недопостачання кожної одиниці продукції першому, другому та третьому споживачам обсягом відповідно 105, 169 і 86 ум. од., а якщо попит буде меншим, то необхідно буде зберігати надлишки, що потребуватиме додаткових витрат на одиницю продукції обсягом відповідно 40, 45 та 30 ум. од.

Необхідно визначити обсяги перевезень продукції від постачальників до споживачів, які забезпечили б за заданих умов мінімальні витрати на постачання і зберігання продукції, а також на штрафи за недопостачання.

Розв'язання.

Задача належить до задач транспортного типу. Необхідно перевірити умову існування її розв'язку. Оскільки потреби споживачів є випадковими величинами, то визначимо спочатку математичне сподівання попиту кожного споживача.

$$M(b_1) = 100 \cdot 0{,}05 + 175 \cdot 0{,}2 + 200 \cdot 0{,}6 + 300 \cdot 0{,}1 + 340 \cdot 0{,}05 = 207;$$

$$M(b_2) = 250 \cdot 0{,}05 + 290 \cdot 0{,}25 + 300 \cdot 0{,}4 + 320 \cdot 0{,}2 + 360 \cdot 0{,}1 = 305;$$

$$M(b_3) = 290 \cdot 0{,}1 + 300 \cdot 0{,}3 + 400 \cdot 0{,}3 + 590 \cdot 0{,}2 + 600 \cdot 0{,}1 = 417.$$

Загальний обсяг попиту на продукцію становитиме:

$$\sum_{j=1}^{3} M(b_j) = 207 + 305 + 417 = 929,$$

а пропозиція дорівнює: $\sum_{i=1}^{2} a_i = 340 + 560 = 900$ од.

Зіставимо обсяг продукції у постачальників і сподіваний загальний попит:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i < \sum_{j=1}^{3} M(b_j).$$

Отже, виникає незадоволений попит: $\sum_{j=1}^{3} M(b_j) - \sum_{i=1}^{2} a_i = 929 - 900 = 29$ од.

Позначимо через x_{ij} — обсяги перевезень продукції від *i*-го постачальника до *j*-го споживача, а невідомі величини, що характеризують обсяги недопостачання та надлишки, — відповідно векторами

$$Y^- = (y_1^-, y_2^-, y_3^-),$$

$$Y^+ = (y_1^+, y_2^+, y_3^+).$$

Тоді математична модель двохетапної задачі стохастичного програмування, зведена до задачі лінійного програмування, відповідно до моделі (10.22)—(10.24) має вигляд:

$$\min F = 30x_{11} + 37x_{12} + 28x_{13} + 32x_{21} + 26x_{22} + 30x_{23} +$$
$$105y_1^- + 169y_2^- + 86y_3^- + 40y_1^+ + 45y_2^+ + 30y_3^+$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 340; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 560; \\ x_{11} + x_{21} - y_1^+ + y_1^- = 207; \\ x_{12} + x_{22} - y_2^+ + y_2^- = 305; \\ x_{13} + x_{23} - y_3^+ + y_3^- = 417. \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$, $y_j^+ \geq 0$, $y_j^- \geq 0$, $i = 1,2;\ j = 1,2,3$.

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо оптимальний план:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 340 \\ 207 & 353 & 0 \end{pmatrix},$$

причому план-корекція $Y^+ = (0 \quad 0 \quad 77)$, $Y^- = (0 \quad 48 \quad 0)$. Мінімальні витрати дорівнюють: F=35744 ум. од.

Заключні зауваження

Одним із способів урахування випадкових процесів та явищ є застосування методів стохастичного програмування.

Головною метою використання стохастичних моделей і методів оптимального планування є врахування всього діапазону можливих значень параметрів, що вивчаються, та імовірнісного характеру використаної інформації. Причини імовірнісного характеру вхідної інформації для економіко-математичних моделей відомі: наявність випадкових помилок при зборі даних, випадковість економічних процесів, вплив погодних умов на деякі галузі матеріального виробництва. Вивчення, а також практичне застосування стохастичних моделей дає змогу не лише підвищити наукову обґрунтованість та точність планових розрахунків, але також і розглянути ряд цікавих задач, розв'язування яких із застосуванням детермінованих моделей неможливе.

Однією з важливих переваг, що дає використання методів і моделей стохастичного програмування, є можливість знаходження оперативних та перспективних планів розвитку системи, що досліджується, які можна коригувати, причому в такому разі сумарні витрати на реалізацію плану та його подальшу корекцію будуть мінімальними.

Необхідно зазначити, що більшість практично цікавих моделей стохастичного програмування має ряд особливостей, які не дають змоги застосовувати до них традиційні методи нелінійного програмування. Тому останнім часом інтенсивно розвиваються прямі методи стохастичного програмування, з допомогою яких стало можливим розв'язування подібних задач.

Серед спеціалізованої літератури, присвяченої стохастичному програмуванню, слід виокремити роботи Ю. М. Єрмольєва та ін. [7, 8, 14].

Контрольні запитання

1. Сутність задач стохастичного програмування.

2. За якими ознаками можлива класифікація задач стохастичного програмування?

3. Яка стохастична задача називається одноетапною?

4. Яка стохастична задача називається двохетапною?

5. Назвіть методи розв'язування одноетапних стохастичних задач.

6. Назвіть методи розв'язування двохетапних стохастичних задач.

7. Як звести стохастичну задачу виду:

$$M(C(\omega)X) \to \max,$$

$$A(\omega) \le B(\omega),$$

$$X \ge 0,\ \omega \in \Omega$$

до детермінованої задачі?

Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 10.1. Фірма виробляє товар, попит на який наперед невідомий. Навіть за відомих цін та витрат на виробництво очевидним є ризик або недоодержання прибутку, якщо обсяг виробництва менший від попиту, або невиправданих витрат у протилежному разі.

Нехай введено такі позначення: ξ — випадковий попит на продукцію; C — ціна на реалізовану продукцію; g — питомі витрати на її виробництво; x — шуканий обсяг виробництва продукції.

Побудуйте модель збалансування попиту та пропозиції з урахуванням можливості часткової адаптації виробництва до попиту.

Задача 10.2. Для виробництва двох видів виробів $(j = 1,2)$ можна використати обладнання двох типів $(i = 1,2)$. Затрати часу a_{ij} використання обладнання для виготовлення продукції є випадковими величинами. Собівартість одного виробу b_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ буде також випадковою величиною. Нехай щільності розподілів випадкових величин a_{ij} та b_{ij} відомі: a_{ij} розподілені за нормальним законом з математичними сподіваннями $\bar{a}_{ij}$ та середніми квадратичними відхиленнями σ_{ij}, а b_{ij} розподілені рівномірно на інтервалі (b_{ij}, γ_{ij}).

Нехай N_1 та N_2 — плани випуску першого та другого виробів (що зумовлюється контрактом), наприклад, $N_1 = 100$ шт., $N_2 = 200$ шт.

Визначте оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані виробничі затрати на випуск виробів, якщо ризик (ймовірність) перевищення фонду часу T на виконання контрактів становить не більше як 0,10, а ризик невиконання контракту не більший за 0,05.

Побудуйте математичну модель задачі та відшукайте розв'язки задачі за даними, наведеними у табл. 10.10.

Таблиця 10.10

<table>
<tr><td rowspan="3">Група обладнання, (i)</td><td colspan="4">Питомі затрати часу, год/шт.</td><td colspan="4">Питома собівартість виробу, ум. од.</td><td>Фонд часу i-го обладнання, год</td></tr>
<tr><td colspan="2">$j=1$</td><td colspan="2">$j=2$</td><td colspan="2">$j=1$</td><td colspan="2">$j=2$</td><td></td></tr>
<tr><td>a_{i1}</td><td>σ_{i1}</td><td>a_{i2}</td><td>σ_{i2}</td><td>δ_{i1}</td><td>γ_{i1}</td><td>δ_{i2}</td><td>γ_{i2}</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>50</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>3</td><td>6</td><td>2</td><td>8</td><td>65</td></tr>
</table>

«…Гра — не філософія і не релігія,
це особлива дисципліна, за своїм характером
вона найближча до мистецтва..»

Г.Гессе «Гра в бісер»

РОЗДІЛ 11. ТЕОРІЯ ІГОР

Теорія ігор вперше була систематично викладена Нейманом і Моргенштерном та оприлюднена лише 1944 року в монографії «Теорія ігор і економічної поведінки», хоча окремі результати були опубліковані ще в 20-х роках. Нейман і Моргенштерн написали оригінальну книгу, яка містила переважно економічні приклади, оскільки економічні задачі простіше за інші описати за допомогою чисел. Під час другої світової війни і одразу після неї теорією ігор серйозно зацікавились військові, які одразу побачили в ній математичний апарат для дослідження стратегічних проблем і підготовки рішень. Потім головна увага знову була звернута до економічних проблем. Нині сфера застосування теорії ігор значно розширилась. Так, у соціальних науках апарат теорії ігор застосовується у психології для аналізу торгових угод та переговорів, а також для вивчення принципів формування коаліцій тощо.

11.1. Основні поняття теорії ігор

У попередніх розділах описані такі задачі математичного програмування, де рішення на основі розрахованого оптимального плану приймає лише один суб'єкт, що має чітко визначену мету. Відомо, що будь-яка економічна система не функціонує ізольовано, а на певних етапах своєї діяльності вступає в різні економічні відносини з іншими суб'єктами господарювання. Оптимальний план за наведеними вище математичними моделями визначався, виходячи з інтересів тільки однієї сторони економічних відносин, не враховуючи можливі варіанти дій інших сторін.

У даному розділі розглядаються ситуації з кількома учасниками, коли значення цільової функції для кожного учасника залежить не лише від його власної поведінки, але і від дій інших суб'єктів.

За умов ринкової економіки все частіше мають місце ***конфліктні ситуації***, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець — покупець (монополія — монопсонія). Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, дві фірми, які надають однакові послуги, можуть об'єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

Теорія ігор — це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Реальні конфліктні ситуації досить складні і обтяжені великою кількістю несуттєвих чинників, що ускладнює їх аналіз, тому на практиці будують спрощені моделі конфліктних ситуацій, які називають ***іграми***.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають ***гравцями***, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються ***стратегіями***, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються ***функціями виграшу***. Задачею кожного гравця є знаходження ***оптимальної стратегії***, яка за умови багатократного повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

11.2. Класифікація ігор

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається парною (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є множинною.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра — скінченна, в іншому разі — нескінченна.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо гру з нульовою сумою. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри — з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про кооперативну гру, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається некооперативною.

11.3.Матричні ігри двох осіб

Найчастіше розглядається гра з двома гравцями, в якій виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю, що в теорії ігор називають ***грою двох осіб з нульовою сумою***. Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності менеджерів, маркетологів, спеціалістів рекламних служб, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв’язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Отже, маємо два гравці A і B (гра двох осіб з нульовою сумою). Кожний гравець вибирає одну із можливих стратегій: позначимо стратегії гравця A — A_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, стратегії гравця B — B_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Результати (плата) за всіма можливими варіантами гри задаються спеціальними функціями, які залежать від стратегій гравців, як правило, у вигляді платіжної матриці.

Нехай $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)$ $\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ — виграш гравця A;
$\varphi_2\left(A_i;B_j\right)$ $\left(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n}\right)$ — виграш гравця B.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)+\varphi_2\left(A_i;B_j\right)\equiv 0.$

Тоді в разі, якщо $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)=\varphi\left(A_i;B_j\right)$, то $\varphi_2\left(A_i;B_j\right)=-\varphi\left(A_i;B_j\right)$.

Отже, мета гравця A — максимізувати величину $\varphi\left(A_i;B_j\right)$, а гравця B — мінімізувати її. Нехай $\varphi\left(A_i;B_j\right)=a_{ij}$, тобто маємо матрицю A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають стратегіям A_i, а стовпці — стратегіям B_j.

Матриця A називається ***платіжною***, а також ***матрицею гри***. Елемент цієї матриці a_{ij} — це виграш гравця A, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець B — стратегію B_j.

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією ігор для вибирання раціональних варіантів рішень, найпоширенішим є песимістичний критерій мінімаксу-максиміну. Суть цього критерію у наступному.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i, тоді у найгіршому разі він отримає виграш, що дорівнює min a_{ij}, тобто навіть тоді, якщо гравець B і знав би стратегію гравця A. Передбачаючи таку можливість, гравець А має вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$a = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Така стратегія гравця А позначається A_{i_0} і має назву ***максимінної***, а величина гарантованого виграшу цього гравця називається ***нижньою ціною гри***.

Гравець В, який програє суми у розмірі елементів платіжної матриці, навпаки має вибрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця А. Стратегія гравця В позначається через B_{j_0} і називається ***мінімаксною***, а величина його програшу — ***верхньою ціною гри***, тобто

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні невигідно змінювати вибрану стратегію, оскільки її супротивник може у відповідь вибрати іншу стратегію, яка забезпечить йому кращий результат.

Якщо

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon,$$

тобто, якщо $a = \beta = \upsilon$, то гра називається ***цілком визначеною***. В такому разі виграш гравця А (програш гравця В) називається ***значенням гри*** і дорівнює елементу матриці $a_{i_0 j_0}$. Цілком визначені ігри називаються ***іграми з сідловою точкою***, а елемент платіжної матриці, значення якого дорівнює виграшу гравця А (програшу гравця В) і є сідловою точкою. В цій ситуації оптимальним рішенням гри для обох сторін є вибір лише однієї з можливих, так званих чистих стратегій — максимінної для гравця А та мінімаксної для гравця В, тобто якщо один із гравців притримується оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад 11.1. Фірма виготовляє устаткування для хімічної промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *А*-1, *А*-2, *А*-3. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *М*-1, *М*-2, *М*-3 залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл.11.1:

Таблиця 11.1

СОБІВАРТІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ УСТАТКУВАННЯ, тис. ум. од.

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язання.

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5,$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7,$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5,$$

$$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$$ — нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 — також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати — 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10,$$

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7,$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9,$$

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$$ — верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення. Скоротити матрицю можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну.

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки(стовпці)), називаються ***дублюючими***. Якщо всі елементи *i*-го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів *j*-го рядка (стовпця), то кажуть, що *i*-та стратегія гравця А (гравця В) є ***домінуючою*** над *j*-ою.

Для спрощення розрахунків дублюючі та ті стратегії, для яких існують домінуючі, вилучають з платіжної матриці.

Приклад 11.2. Маємо гру гравців А і В, яка задана такою платіжною матрицею:

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець B} \\ \text{Гравець A} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А і В.

Розв'язання.

Оптимізацію гри почнемо з визначення домінуючих стратегій для кожної із сторін, а також виключення із дальшого аналізу невигідних і дублюючих стратегій.

Визначимо домінуючі стратегії. Перша стратегія гравця А домінує над третьою, оскільки всі значення його виграшів за будь-яких дій противника є не гіршими, ніж за вибору третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші, ніж відповідні елементи її третього рядка. Тому третя стратегія гірша, ніж перша і може бути виключена із платіжної матриці.

Продовжуючи аналіз можливих дій гравця В, легко помітити, що його перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для цього гравця. Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

За вибору гравцем А першої стратегії залежно від дій гравця В він може отримати 6, 3, 8 або 5 одиниць виграшу. Але у будь-якому разі його виграш буде не меншим від $\min\{6,3,8,5\} = 3,$ тобто незалежно від поведінки гравця В. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем А другої стратегії, то, міркуючи аналогічно, з'ясуємо, що його гарантований виграш становитиме $\min(6,5,7,6) = 5.$ Для третьої стратегії маємо: $\min(4,4,3,8) = 3.$

Отже, нижня ціна гри буде дорівнювати: $\alpha = \max\{3,5,3\} = 5,$ а гравець А для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу із трьох можливих стратегій. Ця стратегія є максимінною у даній грі.

Гравець В, який намагається мінімізувати свій програш, вибираючи першу стратегію, може програти 6,6 або 4 одиниці. Але за будь-яких варіантів дій гравця А гравець В може програти не більше ніж $\max\{6,6,4\}=6.$ Для другої стратегії маємо: $\max\{3,5,4\}=5,$ для третьої — $\max\{8,7,3\}=8,$ а для четвертої — $\max\{5,6,8\}=8.$ Отже, верхня ціна гри становитиме: $\beta=\min\{6,5,8,8\}=5.$

Гравцю В доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінімаксною у грі. Оскільки $\alpha=\beta,$ то ця гра має сідлову точку. Ціна гри дорівнює 5. Оптимальною максимінною стратегією гравця А є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця В оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

З наведеного прикладу зрозуміло, чому мінімаксна та максимінна стратегії мають назву песимістичних. Вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він буде діяти за найгірших для нього умов. Зрозуміло, що в даному разі вибір такої стратегії може не влаштовувати учасників гри. Нехай гравець А вибрав другу (максимінну) стратегію і притримується її. Допустимо, що гравцеві В став відомим вибір стратегії противника, тоді йому доцільно обрати третю стратегію, за якої виграш становитиме 7 одиниць. У свою чергу гравець А також знає про зміну стратегії гравця В на третю і вибирає першу стратегію, що дає йому змогу отримати виграш у сумі 8 одиниць і т.д. Можливість такого розвитку подій виникає тому, що мінімаксна та максимінна стратегії в даному разі ***не є стійкими***. Тобто обставини, за яких обидва гравці використовують мінімаксну та максимінну стратегії, невигідні гравцям у тому разі, коли один з них змінює свою оптимальну стратегію.

Однак така нестійкість властива не всім іграм із сідловою точкою. В деяких випадках сідловій точці відповідають стійкі максимінна та мінімаксна стратегії. В такому разі відхилення від оптимальної стратегії одним з гравців спричиняє таку зміну виграшу, яка є невигідною для цього гравця, оскільки стан або не змінюється, або погіршується.

Отже, в загальному випадку не можна стверджувати, що гра з сідловою точкою визначає стійкі оптимальні стратегії.

11.4.Гра зі змішаними стратегіями

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta,$ то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування ***змішаних стратегій***, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною частотою.

Ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця А — вектор $X = (x_1, x_2, \ldots x_m),$ де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$

для гравця В — вектор $Y = (y_1, y_2, \ldots y_n),$ де $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$

Очевидно, що $x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right); \; y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченної гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв'язку визначає теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема (*основна теорема теорії ігор*). Кожна скінченна гра має, принаймні, один розв'язок, можливий в області змішаних стратегій.

Нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців A і B за теоремою визначають вектори $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*\right)$ і $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots y_n^*\right)$, що дають змогу отримати виграш:

$$\alpha \le \upsilon \le \beta .$$

Використання оптимальної змішаної стратегії гравцем A має забезпечувати виграш на рівні, не меншому, ніж ціна гри за умови вибору гравцем B будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge \upsilon \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{11.1}$$

З другого боку, використання оптимальної змішаної стратегії гравцем B має забезпечувати за будь-яких стратегій гравця A програш, що не перевищує ціну гри υ, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le \upsilon \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{11.2}$$

Ці співвідношення використовуються для знаходження розв'язку гри.

Зауважимо, що в даному разі розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один з гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри υ незалежно від того, яку із можливих змішаних стратегій вибрав інший гравець.

З доведенням цього твердження можна ознайомитися в літературі [7, 8].

11.5. Геометрична інтерпретація гри 2×2

Найпростішим випадком скінченної гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії.

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідлової точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані значення ймовірностей застосування «чистих» стратегій гравця А через $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а для гравця В — через $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець А притримується своєї оптимальної стратегії, то виграш буде дорівнювати ціні гри. Отже, якщо гравець А притримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, то:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \qquad (11.3)$$

Оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$. Підставивши цей вираз у систему рівнянь (11.3), отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*).$$

Розв'язавши дане рівняння відносно невідомого x_1^*, маємо:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (11.4)$$

тоді: $$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (11.5)$$

Провівши аналогічні міркування стосовно гравця B, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \qquad (11.6)$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*).$$

Розв’язавши це рівняння відносно невідомого y_1^*, маємо:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (11.7)$$

тоді: $$y_2^* = 1 - \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (11.8)$$

Ціну гри υ знаходять, підставлючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) в будь-яке з рівнянь (11.3) або (11.6):

$$\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (11.9)$$

Приклад 11.3. Знайти розв’язок гри з платіжною матрицею:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	3

Розв’язання. Переконаємося, що гра не має сідлової точки:

$$\max\{\min(2;\ 5);\ \min(4;3)\} = \max\{2;3\} = 3 = \alpha,$$

$$\min\{\max(2;\ 4);\ \max(5;3)\} = \min\{4;5\} = 4 = \beta.$$

Отже, ця гра не має сідлової точки. Скористаємося формулами (11.4), (11.5), (11.7), (11.8), (11.9). Маємо:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3-4}{2+3-5-4} = \frac{1}{4};$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$y_1^* = \frac{3}{4};$$

$$y_2^* = \frac{1}{4}.$$

Ціна гри $\upsilon = \dfrac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \dfrac{3 \cdot 2 - 5 \cdot 4}{2+3-5-4} = 3{,}5$.

Отже, оптимальна стратегія кожного гравця полягає в тому, щоб випадково чергувати свої «чисті» стратегії. Гравець А має використовувати першу стратегію з імовірністю $\frac{1}{4}$, а другу — з імовірністю $\frac{3}{4}$, а гравець В — навпаки. За цих умов середній виграш дорівнюватиме 3,5.

Розв'язку гри 2 × 2 можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

Розглянемо гру з платіжною матрицею виду:

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Відмітимо на осі абсцис відрізок довжиною, що дорівнює одиниці (рис. 11.1). Лівий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 0$) буде відповідати стратегії A_1, а правий кінець ($x = 1$) — стратегії A_2, всі проміжні точки цього відрізка відповідатимуть змішаним стратегіям гравця А, причому імовірність x_1 стратегії A_1 буде дорівнювати відстані від точки Р до правого кінця відрізка, а ймовірність x_2 стратегії A_2 — відстані до лівого кінця відрізка. Проведемо через точки A_1 та A_2 два перпендикуляри до осі абсцис: вісь І і вісь ІІ. На першій з них відмітимо виграш за вибору стратегії A_1, а на другій — за стратегії A_2.

Нехай противник вибрав стратегію B_1, їй відповідають на осях І та ІІ дві точки B_1, причому довжина відрізка A_1B_1 дорівнює a_{11}, а довжина відрізка A_2B_1 дорівнює a_{12}.

Аналогічно будуємо пряму B_2B_2, яка відповідає стратегії B_2.

Необхідно знайти оптимальну стратегію X^*, таку, за якої мінімальний виграш гравця A буде максимальним. Для цього виділимо жирною лінією на малюнку нижню межу виграшу за умови вибору стратегій B_1 та B_2, тобто ламану лінію B_1MB_2. На цій межі знаходяться значення мінімального виграшу гравця A за будь-якої його змішаної стратегії. Очевидно, що найкраще з можливих мінімальних значень у нашому прикладі знаходиться в точці M, а в загальному випадку відповідає тій точці, де крива, що позначає мінімальний виграш гравця A, набуває максимального значення.

Ордината цієї точки є ціною гри υ. Відстань до лівого кінця відрізка x_2 та відстань до правого кінця відрізка — x_1 дорівнюють відповідно ймовірностям стратегій A_2 та A_1.

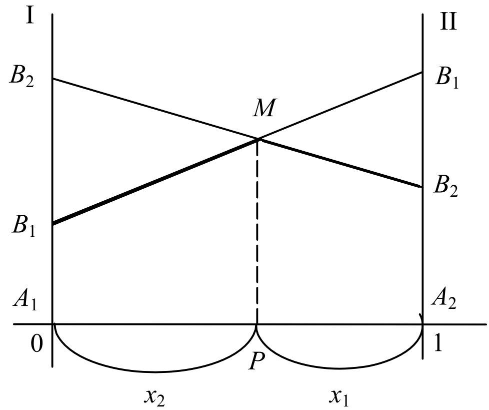


Рис. 11.1

Геометрична інтерпретація дає також змогу наочно зобразити нижню та верхню ціну гри (рис. 11.2). Для нашого прикладу нижньою ціною гри є величина відрізка A_2B_2, а верхньою ціною гри — A_2B_1.

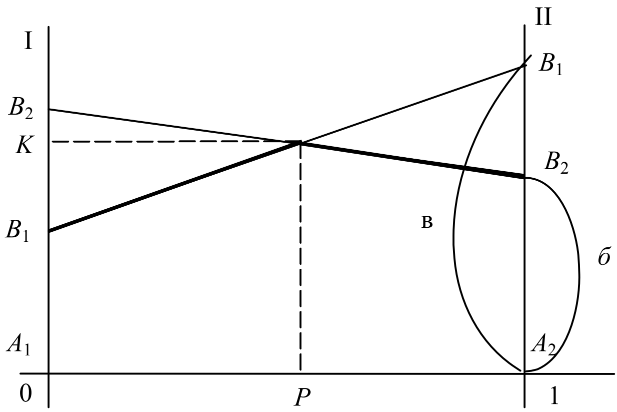


Рис. 11.2

На цьому ж рисунку можна розглянути і геометричну інтерпретацію оптимальних стратегій противника В. Дійсно, частка y_1^* стратегії B_1 в оптимальній змішаній стратегії $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$ дорівнює відношенню довжини відрізка KB_2 до суми довжин відрізків KB_2 та KB_1 на осі I: $y_1^* = \frac{KB_2}{KB_2 + KB_1} = \frac{KB_2}{B_1 B_2}$.

З наведених міркувань легко висновувати, що гру 2 × 2 можна розв'язати елементарними прийомами. Аналогічно може бути розв'язана гра 2 × *n*, тобто коли гравець *A* має лише дві стратегії, а гравець *B* – *n*. У такому разі на рисунку слід зобразити перетин *n* прямих, що відповідатимуть *n* стратегіям гравця *B*. Мінімальні виграші гравця *A* являтимуть собою також ламану лінію, максимальне значення якої і визначатиме оптимальну стратегію для гравця *A* (рис.11.3).

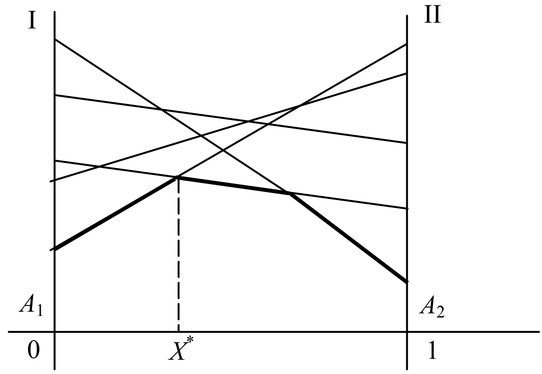


Рис. 11.3

Можна також розв'язати і гру $m \times 2$, з тією різницею, що необхідно визначати не нижню величину виграшу, а верхню і знаходити не максимальне з можливих значення, а мінімальне.

11.6. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо гра $2 \times n$ або $m \times 2$ може бути розв'язана геометрично, то у випадку гри $3 \times n$ ($m \times 3$) геометрична інтерпретація переходить у простір, що ускладнює як її побудову, так і сприйняття. У випадку ж, коли $n > 3$, $m > 3$, геометрична інтерпретація взагалі неможлива. Для розв'язування гри $m \times n$ використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається парна гра зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для гравця А та стратегіями $B_1, B_2, ..., B_m$ для гравця В і платіжною матрицею $\left(a_{ij}\right)$ $\left(i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n}\right)$. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_m^*)$ та $Y^*=(y_1^*,y_2^*,...,y_n^*)$, де $\sum_{i=1}^{m}x_i^*=1$, $\sum_{j=1}^{n}y_j^*=1$.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця А. За основною теоремою теорії ігор така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший за ціну гри (поки що невідому величину) υ, за будь-якої поведінки гравця *B*.

Допустимо, що гравець А застосовує свою оптимальну стратегію, а гравець В — свою «чисту» *j*-ту стратегію B_j, тоді середній виграш гравця А дорівнюватиме:

$$a_{1j}x_1^*+a_{2j}x_2^*+...+a_{mj}x_m^*. \tag{11.10}$$

За цих обставин виграш має бути не меншим, ніж ціна гри. Отже, для будь-якого значення j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ величина виду (11.10) має бути не меншою, ніж υ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^*+a_{21}x_2^*+...+a_{m1}x_m^*\geq \upsilon; \\ a_{12}x_1^*+a_{22}x_2^*+...+a_{m2}x_m^*\geq \upsilon; \\ .... \\ a_{1n}x_1^*+a_{2n}x_2^*+...+a_{mn}x_m^*\geq \upsilon. \end{cases}$$

Розділивши всі обмеження на υ, отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1^*}{\upsilon}+a_{21}\dfrac{x_2^*}{\upsilon}+...+a_{m1}\dfrac{x_m^*}{\upsilon}\ge 1; \\ a_{12}\dfrac{x_1^*}{\upsilon}+a_{22}\dfrac{x_2^*}{\upsilon}+...+a_{m2}\dfrac{x_m^*}{\upsilon}\ge 1; \\ .... \\ a_{1n}\dfrac{x_1^*}{\upsilon}+a_{2n}\dfrac{x_2^*}{\upsilon}+...+a_{mn}\dfrac{x_m^*}{\upsilon}\ge 1. \end{cases}$$

Позначивши $\dfrac{x_i^*}{\upsilon}=t_i$, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1+a_{21}t_2+...+a_{m1}t_m\ge 1; \\ a_{12}t_1+a_{22}t_2+...+a_{m2}t_m\ge 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+...+a_{mn}t_m\ge 1. \end{cases}$$

$$t_i\ge 0\quad\left(i=\overline{1,m}\right).$$

Враховуючи умову, що $x_1^*+x_2^*+...+x_m^*=1$, отримуємо $t_1+t_2+...+t_m=\dfrac{1}{\upsilon}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягти, коли вираз $t_1+t_2+...+t_m=\dfrac{1}{\upsilon}$ набуватиме мінімального значення. Отже, врешті маємо звичайну задачу лінійного програмування.

Цільова функція:

$$\max\upsilon=\min\frac{1}{\upsilon}=\min\sum_{i=1}^{m}t_i \tag{11.11}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}t_1+a_{21}t_2+...+a_{m1}t_m\ge 1; \\ a_{12}t_1+a_{22}t_2+...+a_{m2}t_m\ge 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1+a_{2n}t_2+...+a_{mn}t_m\ge 1. \end{cases} \tag{11.12}$$

$$t_i\ge 0\quad\left(i=\overline{1,m}\right). \tag{11.13}$$

Розв'язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо значення $t_i \left(i=\overline{1,m}\right)$, а також величину $\frac{1}{\upsilon}$ і значення $x_i^* = \upsilon t_i$, що є оптимальним розв'язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ для гравця *A*.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця *B*. З цією метою позначимо:

$$u_j = \frac{y_j^*}{\upsilon} \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Маємо таку лінійну модель задачі:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \le 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \le 1; \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \le 1. \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця *B* є двоїстою до задачі гравця *A*, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає також оптимальний розв'язок спряженої.

Розглянемо приклад застосування методів лінійного програмування для знаходження оптимального розв'язку гри.

Приклад 11.4. Агрофірма «Зоря» розробила шість бізнес-планів (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) для їх здійснення у наступному році. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виділено п'ять ситуацій (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5). Для кожного варіанта X_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ бізнес-плану та зовнішньої ситуації Y_j $\left(j=\overline{1,5}\right)$ обчислені прибутки, які наведені у табл. 11.2:

Таблиця 11.2

Варіант бізнес-плану	Зовнішня ситуація				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	прибутки, тис. грн				
X_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Необхідно вибрати найкращий варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів.

Розв'язання.

Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи вищенаведеної таблиці. Легко переконуємося, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Потім визначаємо:

$$a=\max\{\min(1{,}0;1{,}5;2;2{,}7;3{,}2);\min(1{,}2;1{,}4;2{,}5;2{,}9;3{,}1);$$
$$\min(1{,}3;1{,}6;2{,}4;2{,}8;2{,}1);\min(2{,}1;2{,}4;3;2{,}7;1{,}8);\min(2{,}4;2{,}9;3{,}4;1{,}9;1{,}5);$$
$$\min(2{,}6;2{,}7;3{,}1;2{,}3;2);\}=\max\{1{,}0;1{,}2;1{,}3;1{,}8;1{,}5;2\}=2,$$

а також

$$\beta=\min\{\max(1{,}0;1{,}2;1{,}3;2{,}1;2{,}4;2{,}6);\max(1{,}5;1{,}4;1{,}6;2{,}4;2{,}9;2{,}7);$$
$$\max(2;2{,}5;2{,}4;3;3{,}4;3{,}1);\max(2{,}7;2{,}9;2{,}8;2{,}7;1{,}9;2{,}3);$$
$$\max(3{,}2;3{,}1;2{,}1;1{,}8;1{,}5;2)\}=\min\{2{,}6;2{,}9;3{,}4;2{,}9;3{,}2\}=2{,}6\ .$$

Отже, $\alpha\neq\beta,$ тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов:

$$\begin{gathered} t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \geq 1; \\ 1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \geq 1; \\ 2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \geq 1; \\ 2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \geq 1; \\ 3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \geq 1; \\ t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1{,}6}\right). \end{gathered}$$

Розв'язуємо цю задачу симплексним методом. Оптимальний розв'язок задачі: $t_2 = 0{,}11$; $t_6 = 0{,}33$. Звідси отримаємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^* = 0{,}24$; $x_6^* = 0{,}76$. Ціна гри $\upsilon = 2{,}264$.

Заключні зауваження

Задачі теорії ігор належать до задач прийняття рішень за умов невизначеності та ризику.

Невизначеність результатів гри зумовлена кількома чинниками. По-перше, як правило, кількість можливих варіантів розвитку подій дуже велика, тому передбачити результат гри неможливо. Простою ілюстрацією такого твердження є гра в шахи. Із-за безлічі можливих комбінацій знайти оптимальний розв'язок такої гри неможливо. По-друге, значний вплив на хід та результати гри мають випадкові чинники, дію яких передбачити неможливо, наприклад, у рулетці. По-третє, джерелом невизначеності є брак інформації щодо дій противника. Крім того, невизначеність певною мірою може стосуватися також і мети, якої прагне досягти суб'єкт. Не завжди таку мету можна виразити однозначно, а тим більше одним показником.

Зрозуміло, що коли початкові умови задачі містять значну кількість невизначених параметрів, то математичне дослідження не може дати чіткого обґрунтування раціонального розв'язку, однак і за відсутності повної визначеності кількісний аналіз дає наукову основу для прийняття рішень. Т. Сааті — засновник науки «Дослідження операцій» (інструментарієм якої є «Математичне програмування») писав, що «Дослідження операцій» — це таке мистецтво, яке дає погані відповіді на такі практичні запитання, на які інші методи дають ще гірші відповіді.

Отже, уможливлюючи розв'язування задач за умов невизначеності, навіть якщо неможливо знайти точний оптимальний розв'язок, математичні методи, в тому числі і методи теорії ігор, являють собою допоміжний матеріал, який дає змогу в складній ситуації оцінити кожен з можливих варіантів розвитку подій, а отже, прийняти виважене рішення.

Контрольні запитання

1. Що називається конфліктною ситуацією?
2. Що таке гра?
3. Що таке хід гри?
4. Дайте визначення платіжної матриці.
5. Сформулюйте принцип мінімаксу.
6. Дайте визначення максимінної та мінімаксної стратегій.
7. Яка гра називається скінченною, парною?
8. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
9. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
10. У який спосіб здійснюється зведення гри до задачі лінійного програмування?

Приклади та завдання для самостійної роботи

Задача 11.1. Розв'язати графічно ігри.

1) $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 1 & 3 & 4 & -3 & -2 \\ & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{array}$;

2) $\begin{array}{c|cc} & B & \\ \hline & 2 & 5 \\ & 7 & 1 \\ A & 3 & 7 \\ & 4 & 6 \\ & 9 & 2 \end{array}$;

3) $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}$, 4) $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline & 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ A & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{array}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1.*Абрамов Л. М., Капустин В. Ф.* Математическое программирование. Л., Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. — 184 с.

2.*Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.

3.*Ашманов С. А.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.

4.*Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.

5.*Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.

6.*Вагнер Г.* Основы исследования операций. — Т. 1—3. — М.: Мир, 1972.

7.*Вентцель Е. С.* Исследование операций. М.: «Сов. радио», 1972. — 552 с.

8.*Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964.

9.*Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. — М.: Советское радио, 1966.

10.*Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969.

11.*Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщение и приложения. — М.: Прогресс, 1966.

12.*Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій: Підручник. — 4-те вид., перероб. і допов. — К., 2000. — 688 с.

13.*Зангвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. М.: «Сов.радио», 1973. — 312 с.

14.*Ермольев Ю. М., ЯстремскийА. И.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании. М.: Наука, 1979. — 249 с.

15.*Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.

16.*Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая шк., 1975.

17.*Калихман И. Л., Войтенко М. А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1973.

18.*Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.*; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 407 с.

19.*Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М.: Высш. школа, 1980. — 300 с.

20.*Кюнци Г. П., Крелле В.* Нелинейное программирование. — М.: «Советское радио», 1965. — 299 с.

21.*Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. М.* Методы выпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987.

22.*Муртаф Б.* Современное линейное программирование. Теория и практика. — М.: Мир, 1984.

23.*Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В.* Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Частина 1.: Навч. посібник. — К.: ІСОД, 1996. — 128 с.

24.*Наконечный С. И., Андрийчук В. Г.* Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства. Учеб. Пособие. — Киев: КИНХ, 1982. — 106 с.

25.*Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

26.*Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М.* Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: ІЗМН, 1996. — 312 с.

27.*Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К.: Наук. думка., 1985. — 384 с.

28.*Степанюк В. В.* Методи математичного програмування К.: Вища школа, 1997. — 272 с.

29.*Таха Х.* Введение в исследование операций. — М.: Мир, 1985. — Т.1, 2.

30.*Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.

31.*Ястремский А. И.* Стохастические модели математической экономики. — К.: 1983.

32.*Ястремский А. И.* О соотношениях двойственности в условиях оптимальности в линейных задачах стохастического программирования // Кибернетика. — 1987. — №1. — С. 102—107.