1.(1). 证明 (1). 距离空间中的闭集可为可列个开集的交
(2). 距离空间中的开集为可列个闭集的并
(1). 设F是距离空间 (X,ρ) 中任一闭集，令 ~~$G_n=\{x\in X,\rho(x,F)<\frac{1}{n}\}$~~ $G_n=\{x\in X.\rho(x,F)<\frac{1}{n}\}$.
易证每个 G_n 为开集，且 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$
(2) 对于X中任一开集G，令 $F=G^c$，由(1)知 存在开集 G_n，使 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，从而 $G=F^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^c$

4. 设X按距离 ρ 为距离空间，$F\subset X$ 非空，令 $f(x)=\inf_{y\in F}\rho(x,y)$，证明：$f(x)$ 是X上的连续泛函
任取 $x,x_0\in X$，则由 $\rho(x,y)\leq\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)$ 可得：
$$\inf_{y\in A}\rho(x,y)\leq\rho(x,x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x_0,y)$$
同理，$\inf_{y\in A}\rho(x_0,y)\leq\rho(x,x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x,y)$
整理得：$|f(x)-f(x_0)|\leq\rho(x,x_0)$　故 $f(x)$ 为连续泛函

5. 设X为距离空间，F_1,F_2 为X中不相交的闭集，证明存在X上的连续泛函 $f(x)$，使得当 $x\in F_1$ 时，$f(x)=0$
当 $x\in F_2$ 时，$f(x)=1$

记 $\rho(x,A)=\inf_{y\in A}\rho(x,y)$，并且令 $f(x)=\dfrac{\rho(x,F_1)}{\rho(x,F_1)+\rho(x,F_2)}$
则 $f(x)$ 是X上的连续函数且 $f(x)=\begin{cases}0 & x\in F_1\\ 1 & x\in F_2\end{cases}$

11. 设 f 是定义在距离空间X上的实泛函，证明f连续的充要条件是下列之一成立
(1) 对任给的实数 α，$\{x:f(x)>\alpha\}$ 及 $\{x:f(x)<\alpha\}$ 均为开集
(2) 对任给的实数 α，$\{x:f(x)\geq\alpha\}$ 及 $\{x:f(x)\leq\alpha\}$ 均为闭集
(1) 设 α 为任一实数，选取递减趋于 α 的有理数列 $\{r_n\}$，则
$$f^{-1}(\alpha,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(r_n,+\infty)\text{ 为开集}$$
同样可证对于任意实数 β，$f^{-1}(-\infty,\beta)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(-\infty,t_n)$ 为开集
这里 $\{t_n\}$ 是递增趋于 β 的有理数列，$f^{-1}(-\infty,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(-\infty,n)$ 为开集
对于任意实数 α,β　$f^{-1}(\alpha,\beta)=f^{-1}(\alpha,+\infty)\cup f^{-1}(-\infty,\beta)$ 为开集
对于任意开集G，可以表示为可数个开区间的并，故 $f^{-1}(G)$ 可以表示为可数开区间的逆像集的并，也就是开集的并
从而 $f^{-1}(G)$ 也是开集，f连续
(2) 若 $\{x:f(x)\geq\alpha\}$ 为闭集，则 $\{x:f(x)<\alpha\}=R\setminus\{x:f(x)\geq\alpha\}$ 为开集
同样由 $\{x:f(x)\leq\alpha\}$ 和 $\{x:f(x)>\alpha\}$ 为开集，由(1)得：f连续

23. 证明列紧集的闭包是紧集
设A是距离空间X上的列紧集。若 $\{x_n\}\subset\bar{A}$，则存在 $\{y_n\}\subset A$ 满足 $\rho(y_n,x_n)<\frac{1}{2^n}$
由于A列紧，$\{y_n\}$ 存在子列 $\{y_{n_k}\}$ 收敛，即存在 $y_0\in X$，有 $\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=y_0$
显然 $y_0\in\bar{A}$，而 $\rho(x_{n_k},y_0)\leq\rho(x_{n_k},y_{n_k})+\rho(y_{n_k},y_0)<\frac{1}{2^{n_k}}+\rho(y_{n_k},y_0)\to0$，$k\to\infty$
故 $\{x_n\}$ 存在收敛于 $\bar{A}$ 的子列，即 $\bar{A}$ 紧

扫描全能王 创建

26 证明：如果 F_1, F_2 是距离空间 X 中的紧集，则存在 $x_0 \in F_1$, $y_0 \in F_2$ 使其中 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_0, y_0)$

其中 $\rho(F_1, F_2) = \inf\limits_{\substack{x \in F_1 \\ y \in F_2}} \rho(x, y)$

由inf定义，从存在 $x_n \in F_1$, $y_n \in F_2$ 使 $\rho(F_1, F_2) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n)$.

因为 F_1, F_2 为 X 中的紧集，必存在子序列 $\{n_k\}$ 使 $x_{n_k} \to x_0 \in F_1$, $y_{n_k} \to y_0 \in F_2$

再由 $\rho(x, y)$ 的连续性，即得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_0, y_0)$

34. 设 T 为完备距离空间 X 到它自身的映射，如果 $\alpha_0 = \inf\limits_{n} \sup\limits_{x \neq y} \frac{\rho(T^n x, T^n y)}{\rho(x, y)} < 1$. 证明 T 存在唯一不动点

由 α_0 定义知，存在 n_0 使 $\sup\limits_{x \neq y} \frac{\rho(T^{n_0} x, T^{n_0} y)}{\rho(x, y)} < 1$.

记下确界为 θ，则对任意 $x, y \in X$, $\rho(T^{n_0} x, T^{n_0} y) \leq \theta \rho(x, y)$

则 T 存在唯一的不动点

35. 设 X 是以 ρ 为距离的紧空间，T 是 X 到它自身的映射，若对任何 $x, y \in X$，且当 $x \neq y$ 时，有 $\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$，证明 T 有唯一的不动点

唯一性：设 x, y 是 X 两不动点，$x \neq y$，则 $\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$，矛盾．∴ 唯一性得证

存在性：定义 $\phi: X \to R$, $\phi(x) = \rho(x, Tx)$. 则 ϕ 是 X 上的连续函数

由于 X 紧，ϕ 在 X 有最小值，设 $x_0 \in X$ 是最小点．即 $\phi(x_0) = \min\limits_{x \in X} \rho(x, Tx)$.

若 $x_0 \neq Tx_0$，则 $\phi(Tx_0) = \rho(Tx_0, T^2 x_0) < \rho(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$.

这与 $\phi(x_0)$ 是最小值矛盾．故 $x_0 = Tx_0$ 是 T 的不动点

扫描全能王 创建

5. 设 l^∞ 为一切有界数列组成的集，线性运算与 l^p 的相同，在 l^∞ 中定义范数如下：$\|x\|=\sup_{n\ge1}|\xi_n|$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^\infty$，证明 l^∞ 按照 $\|\cdot\|$ 是不可分的完备赋范空间

容易验证 $\|\cdot\|$ 满足范数公理，下证 l^∞ 完备性。

设 $\{x_n\}$ 是 l^∞ 中基本列，其中 $x_n=\{\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_i^{(n)}\cdots\}$，则任给 $\varepsilon>0$ 存在 N，当 $m,n>N$ 时有

$\|x_n-x_m\|=\sup_{i\ge1}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon$，故对每个 i，$\{\xi_i^{(n)}\}$ 是基本数列，记 $\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}$，~~…~~

对每个 i 有 $|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon$，固定 n，令 $m\to\infty$ 得 $|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\le\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots)$

从而可得 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}\in l^\infty$，且 $\|x_n-x\|\to0\ (n\to\infty)$

下证 l^∞ 是不可分的，记 $K=\{\{\xi_i\}\mid\xi_i=0$ 或 $1\}$，易知 K 不可数，且 $x,y\in K$，$x\ne y$ 时 $\|x-y\|=1$。

若 l^∞ 可分，则存在可数子集 $\{y_k\}$ 在 l^∞ 中稠密，以 K 中点为中心，$\frac13$ 为半径作开球，这种开球的全体构成的集合不可数

由于 $\overline{\{y_k\}}=l^\infty$，则每个球都含有 $\{y_k\}$ 中的点，从而至少有一个 y_k 同属于两个不同的开球

不妨设同属于 $S(x,\frac13)$，$S(y,\frac13)$，其中 $x,y\in K$，$x\ne y$

则 $1=\|x-y\|\le\|x-y_k\|+\|y_k-y\|<\frac23$，矛盾，故 l^∞ 不可分

13. 设 E 是巴拿赫空间，点列 $\{x_n\}\subset E$ 满足 $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|=M<\infty$，其中 $M>0$ 为常数，证明存在 $x\in E$ 使 $x=\sum_{n=1}^\infty x_n$ 且 $\|x\|\le M$

令 $S_k=\sum_{n=1}^k x_n$，由 $\|S_k-S_{k'}\|=\|\sum_{n=k'+1}^k x_n\|\le\sum_{n=k'+1}^k\|x_n\|$ $(k'<k)$ 知，$\{S_k\}$ 是基本列，而

而 E 完备，则存在 $x\in E$ 满足 $x=\lim_{k\to\infty}S_k=\sum_{n=1}^\infty x_n$，且 $\|x\|=\lim_{k\to\infty}\|S_k\|\le\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^k\|x_n\|=M$

16. 设 E 是赋范线性空间，L 是 E 的真闭子空间，证明 L 在 E 中是稀疏集

反证法：假设 L 不在 E 中稀疏，即存在 E 的开集 G，$G\subset\overline{L}=L$，设 $S(x_0,r)$ 是 G 中一开球，则 $S(x_0,r)\subset L$

从而 $S(0,r)=S(x_0,r)-x_0\subset L$。

此外，由黎斯引理，存在 $y_0\in E$，$\|y_0\|=1$，使得 $\|y_0-x\|\ge\frac12$，对任意 $x\in L$

即 $\|\frac r2y_0-\frac r2x\|\ge\frac r4$，对任意 $x\in L$

当 x 遍取 L，$\frac r2x$ 也遍取 L，故 $\frac r2y_0\notin L$，而 $\|\frac r2y_0\|=\frac r2$，有 $\frac r2y_0\in S(0,r)\subset L$，矛盾

23. 设 $\mathcal{H}$ 是内积空间，$x,y\in\mathcal{H}$，证明 $x\perp y$ 的充分必要条件是对任何数 α，有 $\|x+\alpha y\|\ge\|x\|$

必要性显然(还真挺显然)，下证充分性。

若 $\|x+\alpha y\|\ge\|x\|$，且 $y\ne0$，则取 $\alpha=-\frac{(x,y)}{\|y\|^2}$，可得

$0\le(x+\alpha y,x+\alpha y)-\|x\|^2=\overline{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2=-|(x,y)|^2\|y\|^{-2}\le0$

故必有 $x\perp y$

24. 设 $\mathcal{H}$ 是内积空间，$x,y\in\mathcal{H}$，证明 $x\perp y$ 的充分必要条件是对于任何数 α，有 $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$

必要性显然，下证充分性

若 $\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$，则 $(x+\alpha y,x+\alpha y)=(x-\alpha y,x-\alpha y)$，展开得：$\mathrm{Re}\,\alpha(y,x)=0$

分别取 $\alpha=1$，$\alpha=i$，得 (x,y) 的实部虚部均为 0，即 $(x,y)=0$

25. 设 $\mathcal{H}$ 是希尔伯特空间，M 是 $\mathcal{H}$ 的子集，证明 $(M^\perp)^\perp$ 是包含 M 的最小闭子空间

首先证明若 M 是 $\mathcal{H}$ 的子空间，则 $\overline{M}=(M^\perp)^\perp$

若 $x\in\overline{M}$，即存在 $\{x_n\}\subset M$，且 $x_n\to x\ (n\to\infty)$，则对任意 $y\in M^\perp$，有 $(x_n,y)=0$，令 $n\to\infty$ 得 $(x,y)=0$

即 $\overline{M}\subset(M^\perp)^\perp$，反之，若 $x\in(M^\perp)^\perp$，分解 $x=y+z$，其中 $y\in\overline{M}$，$z\in\overline{M}^\perp=M^\perp$，则 $0=(x,z)=(z,z)$

故 $x=y\in\overline{M}$，$(M^\perp)^\perp\subset\overline{M}$，从而 $\overline{M}=(M^\perp)^\perp$

若 M 仅是 $\mathcal{H}$ 的子集，易证 $M^\perp=\mathrm{span}\,M^\perp$，而 $\overline{\mathrm{span}M}=(\mathrm{span}\,M^\perp)^\perp$，即可得 $\overline{\mathrm{span}M}=(M^\perp)^\perp$，右边正是包含 M 的最小闭子空间

扫描全能王 创建

26 设 L_1, L_2 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的子空间 $L_1 \perp L_2$，L 为 L_1 与 L_2 的直接和
（由于 L_1 与 L_2 正交，故也称正交和）. 证明 L 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间的充要条件是 L_1, L_2 均为 $\mathcal{H}$ 的闭子空间

必要性. 设 L 为闭子空间，$\{x_n\} \subset L_1$. $x_n \to x (n\to\infty)$ 则 $x \in L$. 且对一切 $y \in L_2$ 有 $(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = 0$

所以 $x \in L_2^\perp$. 因为 $L = L_1 \oplus L_2$. 且 $x\in L, x \in L_2^\perp$ 故 $x \in L_1$. 所以 L_1 为闭子空间

同理可证 L_2 也为闭子空间

充分性：设 L_1, L_2 均为闭子空间. $\{x^{(n)}\} \in L$. $x^{(n)} \to \infty (n\to\infty)$. $x\in\mathcal{H}$

令 $x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}$，其中 $x_1^{(n)} \in L_1$. $x_2^{(n)} \in L_2$. 对 x 作正交分解 $x = x_1 + x_2$. ($x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_1^\perp$)

因为 $\|x_i^{(n)} - x_i\| \le \|x^{(n)} - x\| \to 0$. $(i=1,2)$. 由 L_1, L_2 闭知 $x_1 \in L_1$. $x_2 \in L_2$. 故 $x \in L_1 \oplus L_2$ 即 L 是闭子空间

29. 证明可分希尔伯特空间中的规范正交子集最多是可列的

设 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 $\mathcal{H}$ 中的规范正交系，则 $(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases}0 & \alpha\ne\beta\\ 1 & \alpha=\beta\end{cases}$

且当 $\alpha\ne\beta$ 时. $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$. 因 $\mathcal{H}$ 可分. 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的可数稠密子集. 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} S(x_n, \frac{1}{2}) \supset \mathcal{H}$

若 $\{e_\alpha\}$ 不可数，则至少有两个不同元子 e_α, e_β 同属于某一个开球 $S(x_n, \frac{1}{2})$.

于是 $\sqrt{2} = \|e_\alpha - e_\beta\| \le \|e_\alpha - x_n\| + \|x_n - e_\beta\| < 1$

矛盾. 故 $\{e_\alpha\}$ 至多可数

31 设 $\{e_k\}$, $\{e_k'\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 是希尔伯特空间中的两个规范正交系，满足 $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e_k'\|^2 < \infty$

证明当 $\{e_k\}$, $\{e_k'\}$ 中之一完备时另一个也是完备的

设 $\{e_k\}$ 完备，我们证明 $\{e_k'\}$ 也完备. 由 $\sum_{k=1}^{\infty} \|e_k - e_k'\| < \infty$

存在 n_0 使 $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \|e_k - e_k'\|^2 < 1$ 令 $M = \overline{\operatorname{span}\{e_k'\}_{k=n_0+1}^{\infty}}$ $N = \overline{\operatorname{span}\{e_k\}_{k=n_0+1}^{\infty}}$ （∞ 改为 1 时 $n_0 = 0$）

则 $\mathcal{H} = M\oplus M^\perp = N \oplus N^\perp$ 显然 $\dim M^\perp \le n_0$ 因此若能证明 $\dim M^\perp = n_0$，则（∞ 改为 1 时显然）

$M^\perp = \overline{\operatorname{span}\{e_k'\}_{k=1}^{n_0}}$，$\mathcal{H} = M = \overline{\operatorname{span}\{e_k'\}_{k=1}^{\infty}}$ 从而 $\{e_k'\}$ 完备

事实上任取 $f\ne 0$. $f\in M^\perp$. 则 $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |(f, e_k - e_k')|^2 < \|f\|^2$

由此可知 $f \notin N$ 令 $f = g_1 + g_2$，其中 $g_1 \in N^\perp$. $g_2 \in N$. 则 $g_1 \ne 0$. 令 $Pf = g_1$ 则 P 是 $M^\perp \to N^\perp$ 的一对一线性映射

故 $M^\perp$ 与 $N^\perp$ 的一个子空间同构. 但 $\dim N^\perp = n_0$. 故 $\dim M^\perp \le n_0$. 从而 $\dim M^\perp = n_0$，$\{e_k'\}$ 完备.

扫描全能王 创建

1. 设 $\alpha(\cdot)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 令 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$. $(x\in C[a,b])$

证明 T 是由 $C[a,b]$ 到其自身的有界线性算子的充分必要条件是 $\alpha(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上连续

必要性：若 $T: C[a,b]\to C[a,b]$. 且 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$. $(x\in C[a,b])$

若令 $x(t)=1$. 则可得 $\alpha(t)\in C[a,b]$ ~~则 $\alpha(t)x(t)$ 有界, 而 $x(t)$ 也是有界, 故 T 是有界线性算子~~

充分性. 若 $\alpha(t)\in C[a,b]$. 则由 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$ $(x\in C[a,b])$. 可得 T 是由 $C[a,b]$ 到其自身的线性算子 ~~则 $\alpha(t)x(t)\in C[a,b]$~~

~~2.~~ 设 $\alpha(\cdot)$ 是定义在有界可测集 F 上的函数. 令 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$ $(x\in L^2(F))$.

证明 T 是由 $L^2(F)$ 到其自身的有界线性算子的充分必要条件是 $\alpha(\cdot)$ 在 F 上可测且本性有界

必要性. 若 $T: L^2(F)\to L^2(F)$ 且 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$. $(x\in L^2(F))$

则令 $x(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn}\alpha(t)}{(mE)^{\frac12}} & t\in E\\ 0 & t\in[a,b]-E.\end{cases}$ 得 $\alpha(t)\in L^2(F)$

充分性. 若 $\alpha(t)\in L^2(F)$. 则由 $(Tx)(t)=\alpha(t)x(t)$ $(x\in L^2(F))$ 得 T 是 $L^2(F)$ 到其自身的线性算子

同时 $\|T\|\le\|\alpha(t)\|_\infty:=S$　　$S=\operatorname{var}\sup\limits_{a\le t\le b}|\alpha(t)|$.

5. 设 $\sup\limits_{n\ge1}|a_n|<\infty$. 试在 l 上定义线性算子 ~~[illegible]~~: $y=Tx$: $\{\eta_n\}=\{a_n\xi_n\}$

其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$, $y=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots\}$. 证明 T 是有界线性算子 且 $\|T\|=\sup\limits_{n\ge1}|a_n|$

T 是 $l\to l$ 中的线性算子是显然, 因为 $\|Tx\|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n\xi_n|\le\sup\limits_n|a_n|\cdot\|x\|$. 所以 $\|T\|\le\sup\limits_{n\ge1}|a_n|$

另一方面, 取 $e_n=(\underbrace{0,0,\cdots,1}_{n\text{位}},0,\cdots)\in L$. $\|e_n\|=1$. 则 $\|T\|\ge\|Te_n\|=|a_n|$. $(n=1,2,3,\cdots)$

~~[illegible]~~ 所以 $\|T\|\ge\sup\limits_{n\ge1}|a_n|$. 从而 $\|T\|=\sup\limits_{n\ge1}|a_n|$

8. 设 E, E_1 都是赋范线性空间, $T_n, T\in\mathscr{B}(E,E_1)$. 若 $\{x_n\}\subset E$ 依范数收敛于 $x\in E$, $\{T_n\}$ 按一致算子拓扑收敛于 T. 证明 $\{T_nx_n\}$ 依范数收敛于 Tx　$\{x_n\}$ 有界. 不妨设 $\|x_n\|\le M$

因为有 T 有界, 设 $\|T\|\le K$.　$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_E=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx_n-Tx\|_{E_1}=\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx_n-Tx_n+Tx_n-Tx\|_{E_1}\le\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx_n-Tx_n\|_{E_1}+\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n-Tx\|_{E_1}$

$\le\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|\,\|x_n\|_E+\lim\limits_{n\to\infty}\|T\|\,\|x_n-x\|_E\le M\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|+K\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_E=0$

~~由题意 $\|T_n-T\|=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$~~　$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx_n-Tx\|=0$　$\therefore\{T_nx_n\}$ 依范数收敛于 Tx

13. 试计算空间 $C[0,1]$ 中下列有界线性算子的范数.

(1) $(Tx)(t)=\int_0^1\sin\pi(t-s)\,x(s)\,ds$　(2) $(Tx)(t)=\int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds$.　(3) $(Tx)(t)=\int_0^1 t^n s^n x(s)\,ds$ (n 是给定的自然数)

(1) ~~[illegible]~~ $\|T\|=\max\limits_{0\le t\le1}\int_0^1|\sin\pi(t-s)|\,ds=\frac{1}{\pi}\max\limits_{0\le t\le1}\cos(\pi t-\pi s)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$

(2) $\|T\|=\max\limits_{0\le t\le1}\int_0^1|e^{t-s}|\,ds=\max\limits_{0\le t\le1}-e^{t-s}\Big|_0^1=e-1$

(3) $\|T\|=\max\limits_{0\le t\le1}\int_0^1|t^ns^n|\,ds=\max\limits_{0\le t\le1}\frac{1}{n+1}t^ns^{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$

14. 设巴拿赫空间 E 是 E 的闭子空间 L 与 M 的直接和. $E=L\oplus M$. 证明存在 $k>0$. 使得对于任何 $x\in E$.

有 $\|y\|\le k\|x\|$. $\|z\|\le k\|x\|$, 这里 $y\in L$. $z\in M$. $x=y+z$

在 $E=L\oplus M$ 中定义新范数 $\|x\|\!|=\|y\|+\|z\|$. $(x=y+z\in E)$ $\boxed{\text{易证}(E,\|\!|x\|\!|)\text{完备}}$

且 $\|x\|=\|y+z\|\le\|\!|x\|\!|$. 根据巴拿赫逆算子定理的推论. 存在 $k>0$, 使 $\frac{1}{k}\|\!|x\|\!|\le\|x\|$

于是 $\|y\|\le k\|x\|$. $\|z\|\le k\|x\|$

证 $(E,\|\!|\cdot\|\!|)$ 完备 ~~[illegible]~~ 先证 $(E,\|\!|\cdot\|\!|)$ 为赋范线性空间. 只验证 ①

② ~~[illegible]~~ $\|\!|\alpha x\|\!|=\|\alpha y\|+\|\alpha z\|=|\alpha|(\|y\|+\|z\|)=|\alpha|\,\|\!|x\|\!|$　③ 令 $x_1=y_1+z_1$, $x_2=y_2+z_2$. 则 $\|\!|x_1+x_2\|\!|=\|y_1+y_2\|+\|z_1+z_2\|$

$\le\|y_1\|+\|z_1\|+\|y_2\|+\|z_2\|=\|\!|x_1\|\!|+\|\!|x_2\|\!|$　故 $(E,\|\!|\cdot\|\!|)$ 为赋范线性空间

设 $\{x_n\}$ 是 $(E,\|\!|\cdot\|\!|)$ 上的基本列, 设 $x_m=y_m+z_m$　$x_n=y_n+z_n$, 故 $\|\!|x_m-x_n\|\!|=\|y_m-y_n\|+\|z_m-z_n\|<\varepsilon$. 即 $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 也是基本列

$\because(E,\|\cdot\|)$ 完备 $\therefore\exists y_0, z_0\in E$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y_0\|=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n-z_0\|=0$ 又 $\because$ L, M 是闭子空间. 故 $y_0\in L$. $z_0\in M$

令 $x_0=y_0+z_0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\|y_n-y_0\|+\|z_n-z_0\|)=\|y_m-y_0\|+\|z_m-z_0\|\le\varepsilon$ 即 $\|\!|x_m-x_0\|\!|\le\varepsilon$　$x_m\to x_0$, 即 $(E,\|\!|\cdot\|\!|)$ 完备

扫描全能王 创建

18. 设 E, E_1 是巴拿赫空间. $T_n, T\in \mathscr{B}(E,E_1)$, 若 $\{x_n\}\subset E$ 依范数收敛于 $x\in E$, $\{T_n\}$ 弱收敛于 T.

证明 $\{T_n x_n\}$ 弱收敛于 Tx. $\{T_n\}$ 弱收敛于 T 的含义是: 对任一 $x\in E$, 任一 $g\in E_1^*$, 有 $\{g(T_n x)\}\to g(Tx)$ $(n\to\infty)$

由题知, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_E=0$, 又 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T, 即对 $\forall x\in E$, $g\in E^*$, 有 $\{g(T_n x)\}\to g(Tx)$ $(n\to\infty)$

对 $\forall g\in E_1^*$ $\|g(T_nx_n)-g(Tx)\| = \|g(T_nx_n)-g(T_nx)+g(T_nx)-g(Tx)\|$

$\le \|g(T_nx_n)-g(T_nx)\|+\|g(T_nx)-g(Tx)\| = g(T_n)\|x_n-x\|_E+\|g(T_nx)-g(Tx)\|\to 0$ $(n\to\infty)$

故 $\{T_n x_n\}$ 弱收敛于 Tx

20. 设 $g(\cdot)$ 是可测集 F 上的可测函数, 如果对任何 $f\in L^p(F)$, $(1\le p<\infty)$, $g(\cdot)f(\cdot)$ 可积

证明 $g\in L^q(F)$, 这里 q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

证: 设 $1<q<\infty$, 令 $g_n(t)=\begin{cases} g(t) & |f(t)|\le n\\ 0 & |f(t)|>n\end{cases}$ 则 $g_n(t)\in L^q(G)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

作 $L^p(G)$ 上的线性泛函如下 $F_n(f)=\int_G f(t)g_n(t)dt$ $(\forall f\in L^p(G))$

易知 $F_n\in(L^p(G))^*$, 且 $\|F_n\|=\|g_n\|_q$. 因为 $g(t)\in L(G)$, 故 g_n 几乎处处收敛于 g

又因为 $|g_n(t)f(t)|\le|g(t)f(t)|\in L(G)$

由勒贝格控制收敛定理知, 对每个 $f\in L^p(G)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}|F_n(f)|=|\int_G g(t)f(t)dt|<\infty$

根据共鸣定理可得: $\|g_n\|_q\le M$. ($M>0$ 为常数)

再由法杜定理得: $\{\int_G|g(t)|^q dt\}^{\frac{1}{q}}\le M$ 即 $g(t)\in L^q(G)$

(29) 设 E 是赋范线性空间, f 是 E 上的非零有界线性泛函, 证明存在 $x_0\in E$, 使 $f(x_0)\ne 0$

$E=N\oplus\{\alpha x_0\}$, 这里 α 是实(或复)数, N 是 f 的零空间

$\because f(x)$ 是 E 上的非零有界线性泛函. $\therefore$ 存在 $y_0\in E$ 使 $f(y_0)\ne0$. 令 $x_0=\frac{y_0}{f(y_0)}$, $f(x_0)=1$

对 $\forall x\in E$, 令 $z=x-f(x)x_0$. $f(z)=f(x)-f(x)f(x_0)=0$. $\therefore z\in N$ 且 $z=x-f(x)x_0$

$\therefore x=z+f(x)x_0$. 下证其为直和

对 $\forall y\in N\cap\{\alpha x_0\}$, 则 $y\in N$ 存在 α_0 使得 $y_0=\alpha_0x_0$ $\therefore f(y)=0=\alpha_0 f(x_0)$

又 $f(x_0)=1$. $\therefore \alpha_0=0$. $y=0$ 直和得证. $E=N\oplus\{\alpha x_0\}$

(30) 设 f 是定义在赋范线性空间 E 上的无界线性泛函, 且 f 的零空间在 E 中稠密.

$\because N=\{x: x\in E, f(x)=0\}$ 表示 f 的零空间 使 f 是无界线性泛函, $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|f(x)|=+\infty$

$\therefore$ 对 $\forall n\in N^+$, $\exists\{x_n\}\in E$, $\|x_n\|=1$, 使 $f(x_n)\ge n$

对任一 $x\in E$, $f(x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n)=0$ $\therefore y_n=x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n\in N$.

令 $n\to\infty$, 则 $y_n\to x$ $\therefore N$ 在 E 中稠密

31. 证明30题的逆命题, 若 f 为 E 上的非零线性泛函, 且 f 的零空间在 E 中稠密, 则 f 无界

反证法: 若 f 是 E 上的非零有界线性泛函, 则 $\exists x_0\in E$, 使 $f(x_0)\ne0$

$E=N\oplus\{\alpha x_0\}$. 则取 $x=kx_0$, $x\in E$, $f(x)\ne0$

又 $\because N\cap\{\alpha x_0\}=\phi$. $\therefore$ 对 $\forall\{x_n\}\in N$, $\|x_n-kx_0\|\not\to0$. $\therefore$ f 的零空间在 E 中不稠密, 矛盾 $\therefore f$ 无界

34. 证明 R^n(或 C^n)上的任一线性泛函可表成 $f(x)=\sum\limits_{j=1}^n c_j\xi_j$, 其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 属于 R^n(或 C^n)

c_j $(j=1,2,\cdots,n)$ 为实(或复)数.

取 E^n 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$, 对 $\forall x\in E^n$, $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n$

故对 $\forall f\in(E^n)^*$, $f(x)=\xi_1f(e_1)+\xi_2f(e_2)+\cdots+\xi_nf(e_n)$

令 $c_i=f(e_i)$, $f(x)=c_1\xi_1+\cdots+c_n\xi_n=\sum\limits_{k=1}^n c_k\xi_k$

扫描全能王 创建

39. 证明任何有限维赋范线性空间都是自反的

设E^n为n维赋范线性空间，$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$是它的一组基底，于是可取出$(E^n)^*$中的元组$\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$如下：

~~使得~~ $e_i'(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

任取$x\in E^n$，$x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e_j$，则$e_i'(x)=\xi_i$.

易证$\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$是$(E^n)^*$的一组基底，故$(E^n)^*$是n维的，于是$(E^n)^{**}$也是n维的，$J(E^n)\subset(E^n)^{**}$

$J(E^n)$是n维的，故$J(E^n)=(E^n)^{**}$，即E^n自反

40 证明无穷维赋范线性空间的对偶空间是无穷维的

设E为无穷维，而E^*为有穷维赋范线性空间，易证$(E^*)^*$与R^n ~~拓扑同~~ 拓扑同构

此处n为E^*维数，故$(E^*)^*$也是有限维的，设J为E到$(E^*)^*$中的自然嵌入映射，

则$JE\subset(E^*)^*$，JE是无穷维的，矛盾，故E^*为无穷维

49. 设$\{x_n\}$是巴拿赫空间E中的一个序列，如果对于每个$f\in E^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty$，

证明存在正数μ使对一切$f\in E^*$，$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\le\mu\|f\|$

作算子序列$T_n\in\mathscr{B}(E^*,l)$如下：$T_nf=\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), 0, \cdots\}$ $(\forall f\in E^*)$，$\sup_{n\ge1}\|T_nf\|\le\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty$

则存在$\mu>0$，使$\sup_n\|T_n\|\le\mu$，故$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|f(x_n)|=\lim_{N\to\infty}\|T_Nf\|\le\mu\|f\|$ $(\forall f\in E^*)$

53. 设M为赋范线性空间E的闭子空间，x_0是M中某个弱收敛点列的极限，证明$x_0\in M$

设$x_0\notin M$，则$d=\rho(x_0,M)>0$，由哈恩-巴拿赫定理，必存在$f\in E^*$，使$f(x_0)=d$，$f(x)=0$ $(\forall x\in M)$

但由条件，存在$x_n\in M$，使x_n弱收敛于x_0，故$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$ 矛盾，因此$x_0\in M$.

57. 证明l^2中的[illegible]线性算子T存在有界逆算子的充要条件是$\inf_{n\ge1}|\alpha_n|>0$

充分性，令$Sy=\frac{y_n}{\alpha_n}$，其中$y=(y_n)$，则易知$ST=TS=I$，所以$T^{-1}=S$

由于$\|T^{-1}\|=\frac{1}{\inf_{n\ge1}|\alpha_n|}$，故$T^{-1}$有界。

必要性：若T^{-1}存在有界，则存在$\alpha>0$，使$\|Tx\|\ge\alpha\|x\|$ $(\forall x)$，由

此易证对一切n有$|\alpha_n|\ge\alpha$，故$\inf_{n\ge1}|\alpha_n|>0$

72 设E, E_1都是无限维巴拿赫空间，$T\in\mathscr{B}(E,E_1)$是紧算子但非有限秩的，证明T的值域$T(E)$在E_1中不可能是闭的

若T不是满射，限制到E_1上使它成为满射，由于值域$T(E)$是闭的，T仍是巴拿赫空间的紧算子，故不妨设T为满射

由于T是紧算子，对E中有界集S，TS为列紧集，由于E_1为无限集，故只有TS包含开球B，可在B中找到没有聚点的点列，所以TS不包含内点，这会导致一个矛盾

而T为满射，由开映射定理，故为开映射，只有S为开集，TS就是开集，因此T的值域$T(E)$在E_1中不可能是闭的

74 设E, E_1均为赋范线性空间，$S, T\in\mathscr{B}(E,E_1)$且S, T均为紧算子，证明$\alpha S+\beta T$也是紧算子，这里$\alpha$, β是实(复)数

先证$S+T$是紧算子，设$\{x_n\}$是E中的有界序列，由于S是紧算子，所以$\{Sx_n\}$存在一收敛子列$\{Sx_{n_k}\}$.

又由于T是紧算子，所以$\{Tx_{n_k}\}$存在收敛的子列$\{Tx_{n_k}\}$，于是$\{(S+T)x_{n_k}\}$是$\{(S+T)x_n\}$的收敛子列 ∴$S+T$是紧算子

再证αS, βT是紧算子，$\{x_n\}$是E中有界序列，则$\{\alpha x_n\}$，$\{\beta x_n\}$也为E中有界序列，同理由于S, T为紧算子，

得$\{S\alpha x_n\}$的收敛子列$\{Sx_{n_k}\}$，$\{T\beta x_n\}$的收敛子列$\{T\beta x_{n_k}\}$，于是$\{\alpha Sx_{n_k}\}$和$\{\beta Tx_{n_k}\}$分别是$\{\alpha Sx_n\}$和$\{\beta Tx_n\}$

的收敛子列，因此αS, βT为紧算子，故$\alpha S+\beta T$也是紧算子。

扫描全能王 创建

2. T是由 $L^2(E)$ 到其自身的有界线性算子...

与1题同理可证T是线性算子

充分性. 由于 $\alpha(t)$ 在E上本性有界，故 $\exists$ E中的一个零测集 E_0 使得 $\alpha(t)$ 在 $E-E_0$ 上有界

即 $\exists M>0$，使得 $|\alpha(t)|\le M$，对 $\forall x\in L^2(E)$. $\int_E |\alpha(t)\,x(t)|<\infty$.

所以 $\int_E |\alpha(t)\,x(t)|^2 dt \le M^2\int_E |x(t)|^2 dt<\infty$ $\quad \alpha(t)\,x(t)\in L^2(E)$

所以T是 $L^2(E)$ 到 $L^2(E)$ 的线性算子

对 $\forall x\in L^2(E)$，$\|Tx\|=\left(\int_E |\alpha(t)\,x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\le M\left(\int_{E-E_0}|x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=M\left(\int_E |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=M\|x\|$

故 $\|T\|\le M$. T是有界的，T是 $L^2(E)$ 到自身的线性有界算子

必要性. 令 $x(t)=1$，x是E上的可测函数 $\|x(t)\|=\left(\int_E dt\right)^{\frac{1}{2}}=(m(E))^{\frac{1}{2}}<\infty$，故此时 $x(t)\in L^2(E)$

因此 $T_n=\alpha(t)\in L^2(E)$ 所以 $\alpha(t)$ 可测 ?

令 $E_n=\{t: t\in E, |\alpha(t)|\ge n\}\subset E$. 且 $\chi_{E_n}(t)\in L^2(E)$

所以 $\|T\chi_{E_n}\|^2\le\|T\|^2\|\chi_{E_n}\|^2=\|T\|^2 mE_n$

$\|T\chi_{E_n}\|^2=\int_E (T\chi_{E_n})^2 dt=\int_E (\alpha(t)\,\chi_{E_n}(t))^2 dt\ge n^2 m(E_n)$

所以 $n^2 m(E_n)\le\|T\|^2 m(E_n)$ 若对 $\forall n$，$m(E_n)\ne 0$ $\|T\|^2\ge n^2$. 与T是有界算子矛盾

故 $\exists n_0>0$ 使 $m(E_{n_0})=0$ 即当 $t\in E-E_{n_0}$ 时 $|\alpha(t)|<n_0$ 成立

故 $\alpha(t)$ 在E上可测且本性有界

扫描全能王 创建