山东大学 运筹学 课程试卷（B）卷　　课程号 28230430　　2022-2023 学年 1 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人
得分									

得分	阅卷人

一、 **应用题**（20 分）某工厂从事原料加工生产。已知该工厂有 P_1，P_2 和 P_3 三种原料，重量分别为 11900 千克，4000 千克和 6000 千克。该工厂可以利用这些原料生产 5 种产品 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 和 Q_5。这 5 种产品的每千克的利润及每生产一千克该产品所消耗的原料重量见下表。例如每生产一千克 Q_2 分别消耗 5 千克 P_1，2 千克 P_2 和 1 千克 P_3，利润为 8 元。请你为该工厂安排一个获得总利润最多的生产方案并给出总利润的值。（要求列出单纯形表的迭代过程。）

单位消耗(kg)	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
P_1	2	5	2	4	4
P_2	0	2	4	8	1
P_3	8	1	6	4	2
单位利润（元）	10	8	12	16	7

得分	阅卷人

二、**计算题**（15 分）利用割平面法求解下面整数规划问题。（要求列出单纯形表的迭代过程。）

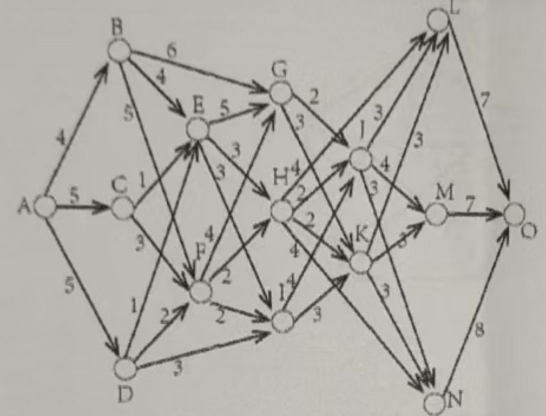
$$\begin{cases} \max\ 5x_1+6x_2+7x_3 \\ 7x_1+10x_2+11x_3 \le 201 \\ x_1,x_2,x_3 \text{ 均为非负整数} \end{cases}$$

数学与统计学院 学院（系） 专业 级 班

密 封 线

得分	阅卷人

三、**解答题**。（10 分）下图为一个有向网络。图中的有向边（弧）表示两点间单方向可达，上面的数字表示这段距离。请找出一条从点 A 到点 O 最短路并给出该最短路的长度。（计算过程可标在图上，写出最终结果。）



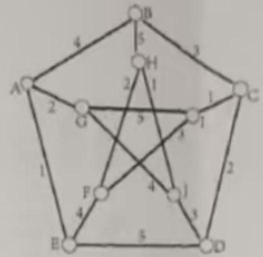
得分	阅卷人

四、**应用题**（15 分）比如在春节期间，你的一位亲人或朋友参加活动中了举办方的奖，可以从八种奖品中挑选奖品。举办方要求挑选的奖品总重量不能超过 99kg。每种奖品的重量及价值见下表。请你利用所学的动态规划方法，为她给出一个能够领取奖品总价值最大的方案，并给出最多可领到奖品总价值。（要求给出必要的计算步骤。）

奖品编号	1	2	3	4	5	6	7	8
奖品价值(百元)	9	14	25	35	36	70	80	135
奖品重量(kg)	5	7	13	18	20	40	45	70

得分	阅卷人

五、应用题（10 分）某一行政区域有 A、B、C、D、E、F、G、H、I 和 J 十个县城。在城乡建设中，需要对已有的县城之间的道路进行翻新。下图中的边表示两县城之间有旧道路，边上的数字表示该道路的长度，单位为 10 千米。因财政资金有限，不能更新所有的道路，但首期道路翻新项目要求翻新的道路能将这十个县城连接起来。请你为该项目设计一个翻新道路总里程最短的方案并给出该方案中翻新道路总里程是多少。（可在图上进行计算分析，直接写出结果。）



得分	阅卷人

六、应用题（15 分）一个国王有 9 个美貌公主，都到了结婚的年龄。这时候有 9 个外国王子来提亲，都愿意娶其中的任何一位公主。分别用字母 A，B，C，…，I 代表这每位王子。在这些王子中，每位公主都有自己喜欢的(可能不只一个)。公主喜欢哪些王子的信息见下表。对于这次提亲，假如你是国王，只意愿将女儿嫁给自己喜欢的人，你将会如何安排，使得能嫁给自己喜欢的王子的公主数最多？

公主编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
喜欢的王子	D,H	A,B,C	A,B,D	D,H	D,E,F	E,F,G	D,I	H,I	H,I

得分	阅卷人

七、应用题（15 分）某项工程由 11 项工作组成（分别用代码 A，B，C，…，K 表示)。这些工作的完成时间及相互关系见下表。请（1）画出该项目的箭线图；

（2）求出关键路线和工期时间。

工作	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
完成时间(天)	6	7	3	5	2	9	10	4	6	5	4
紧前工作	无	无	无	A	B	C	D,E,F	D,E,F	E,F	H,I	L

数学与统计学院 学院（系）　专业　级

密 封 线

2022-2023(1) 运筹学 试题卷(B)答案

一、应用题（共 20 分）

解：设每种产品Q_i生产x_i千克，$1 \le i \le 5$，则该问题可转化为如下线性规划：

$$\max \quad 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 16x_4 + 7x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 \le 11900 \\ 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \le 4000 \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \le 6000 \end{cases}$$

该规划的标准型为：

$$\min \quad -10x_1 - 8x_2 - 12x_3 - 16x_4 - 7x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 + x_6 = 11900 \\ 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 + x_7 = 4000 \\ 8x_1 + x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_8 = 6000 \end{cases}$$

单纯型法求解上述规划问题步骤如下：

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 12 & 16 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 11900 \\ 0 & 2 & 4 & 8^{*} & 1 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 8 & 1 & 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6000 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & -8000 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 9900 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 500 \\ 8^{*} & 0 & 4 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 4000 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & \frac{25}{8} & 0 & -\frac{11}{8} & -\frac{5}{4} & -13000 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & \frac{25}{8} & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 8900 \\ 0 & \frac{1}{4}^{*} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 500 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 500 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -9 & -16 & \frac{9}{8}^{*} & 0 & -\frac{27}{8} & -\frac{5}{4} & -21000 \\
0 & 0 & -9 & -16 & \frac{9}{8} & 1 & -\frac{19}{8} & -\frac{1}{4} & 900 \\
0 & 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2000 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 500
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -21900 \\
0 & 0 & -8 & -\frac{128}{9} & 1 & \frac{8}{9} & -\frac{19}{8} & -\frac{2}{9} & 800 \\
0 & 1 & 6 & \frac{100}{9} & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{9} & 2000 \\
1 & 0 & 2 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 500
\end{pmatrix}
$$

由最后一张单纯型表可知，总利润最多的生产方案为：分别生产 500 千克 Q_1，2000 千克 Q_2 和 800 千克 Q_5，Q_3 和 Q_4 不生产。该方案产生的总利润为 21900 元。（1 分）

二、计算题（共 15 分）

解：将该整数规划中的整数约束松弛可得如下线性规划问题：

$$
\max \quad 5x_1 + 6x_2 + 7x_3
$$
$$
\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 + 11x_3 \le 201 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}
$$

（3 分）

其标准形式为：

$$
\min \quad -5x_1 - 6x_2 - 7x_3
$$
$$
\begin{cases} 7x_1 + 10x_2 + 11x_3 + x_4 = 201 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}
$$

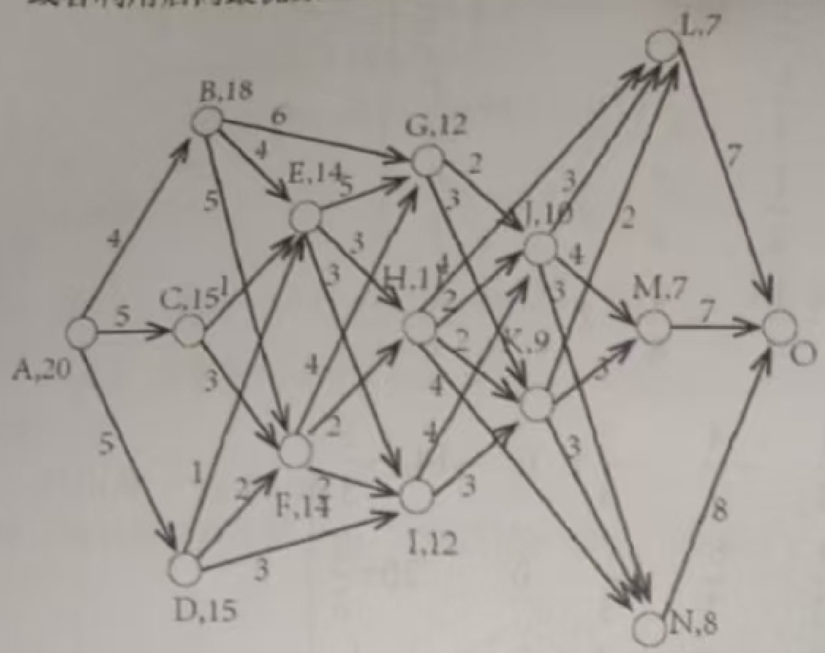
（2 分）

利用割平面法解该整数规划问题的过程如下：

$$
\begin{pmatrix}
0 & -\frac{8}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{5}{7} & 0 & -143-\frac{4}{7} \\
1 & \frac{10}{7} & \frac{11}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{201}{7} \\
0 & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & -\frac{5}{7}
\end{pmatrix}
$$

（5 分）

或者利用后向最优原理计算，得到如下计算数据：



故可知从 A 到 O 的一条最短路为：A → C(或 D) → E → H(或 H → K) → L → O，或者

A → D → I → K → L → O，其长度为 20。

四、应用题（共 15 分）

解：设$f_k(y)$为在前 k 个奖品中选择，总重量不超过 y 千克的情况下，可选取奖品的最大总价值。设第 k 个编号的奖品价值为a_k，重量为b_k千克，利用动态规划原理我们可知：

$$\begin{cases} f_k(y)=\max\ \{a_k+f_{k-1}(y-b_k), f_k(y)\} & k>1, \\ f_1(y)=\begin{cases} a_1, & y\ge a_1 \\ 0, & y<a_1 \end{cases} \end{cases}$$

因此，我们有如下递推式：

$$\begin{aligned} f_8(99) &= \max\{135+f_7(29), f_7(99)\} \\ &= \max\{135+f_5(29), 80+f_6(54), f_6(99)\} \\ &= \max\{135+f_5(29), 80+70+f_5(14), 80+f_5(54), 70+f_5(59), f_5(99)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5(29) &= \max\{36+f_4(9), f_4(29)\} \\ &= \max\{36+9, 35+f_3(11), f_3(29)\} \\ &= \max\{44, 35+9, 9+14+25\} = 48 \end{aligned}$$

$$f_5(14) = \max\{9+14, 25\} = 25$$

$$\begin{aligned} f_5(54) &= \max\{36+f_4(34), f_4(54)\} \\ &= \max\{36+35+f_3(16), 36+f_3(34), 9+14+25+35\} \\ &= \max\{36+35+25, 36+9+14+25, 83\} = 96 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -142-\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} & 0 & 26+\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

（2分）

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -142-\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 26+\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

（1分）

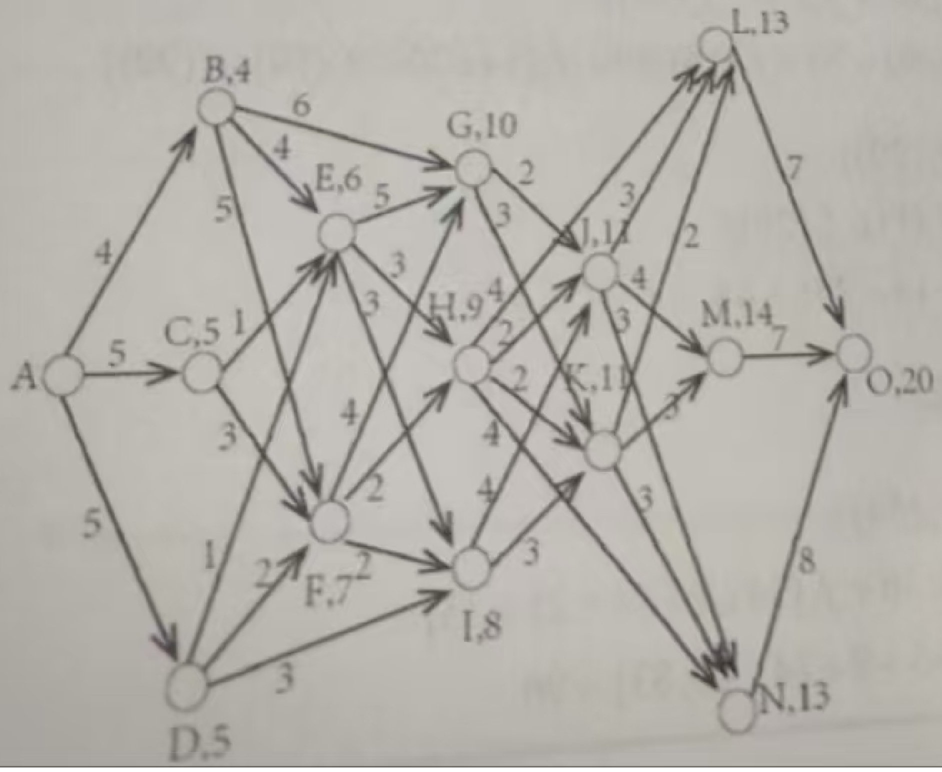
$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -142 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

（1分）

故原整数规划问题的最优解为$(x_1,x_2,x_3)=(27,0,1)$，最大值为142。（1分）

三、解答题（共10分）

解：利用前向最优原理计算，其计算过程中得到数据如下：



$$f_5(59) = \max\{36 + f_4(39), f_4(59)\}$$
$$= \max\{36+35+f_3(21), 36 + f_3(39), 83\}$$
$$= \max\{36+35+39, 84, 83\} = 110$$

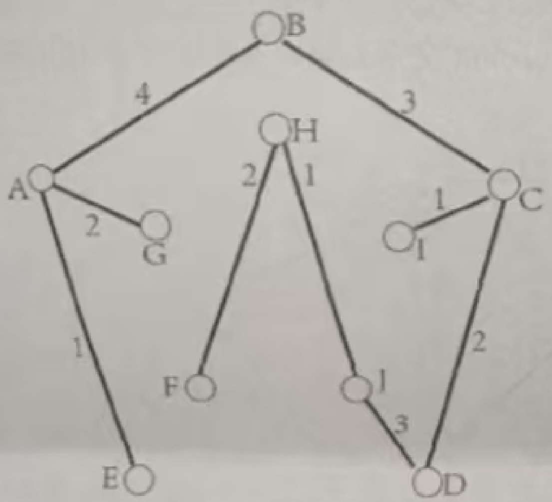
$$f_5(99) = 9+14+25+35+36 = 119$$

因此， $f_8(99)=\max\{135+48, 80+70+25, 80+96, 70+110, 119\} = 184$ 。

即而，最多可领取奖品的总价值为 18400 元，选取编号为 1,2,3 和 8 的奖品获得最大价值。

五、应用题（共 10 分）

解：该问题为最小树问题，该问题的一个最小树如下：

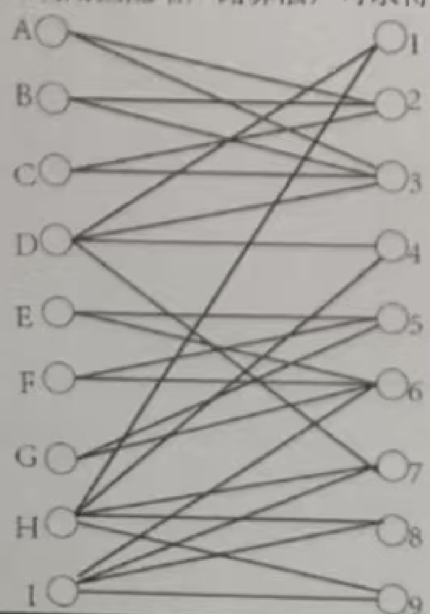


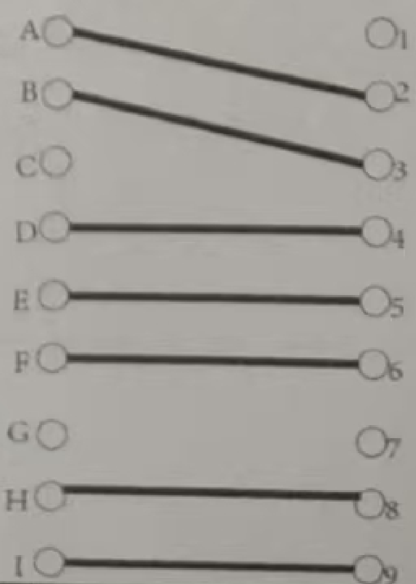
（9 分）

该树的权为 19。即翻新如图所示的道路，为一个翻新总里程最短的方案。该方案中翻新的道路总里程为 190 千米。

六、解答题（共 15 分）

解：公主喜欢的王子信息可用下图（左）表示。求最优的配对方案为求二部图的最大匹配问题。利用匹配增广路算法，可求得该图的一个最大匹配，见下图（右）。

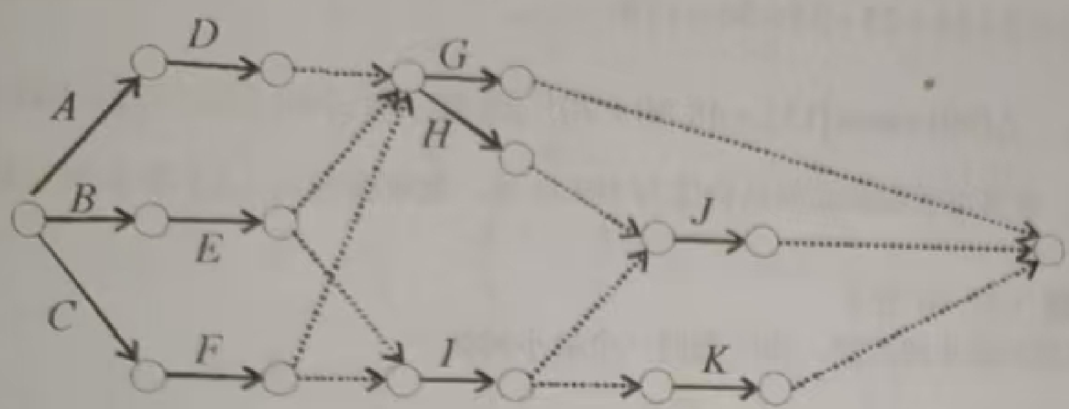




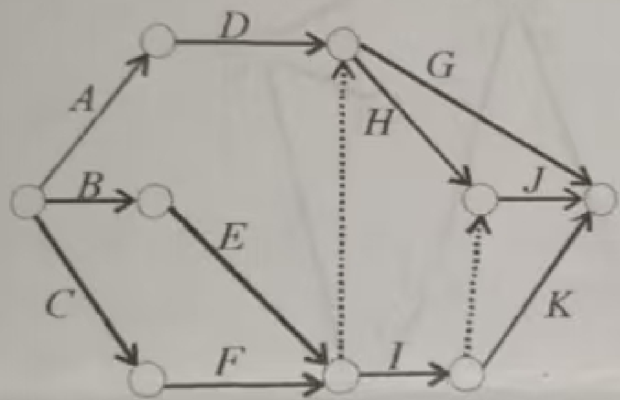
因此，右图的配对方案为使得嫁给自己喜欢王子的公主数最多的方案。

七、应用题（共 15 分）

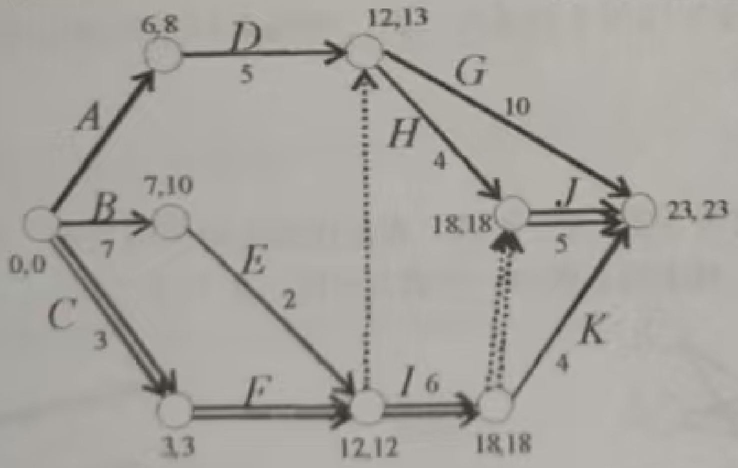
解：（1）该项目的初步箭线图为



将能够和并的虚拟工作的起点节点和结束节点合并，并经过化简可得如下的最终的箭线图：



（2）计算每个节点的最早开始时间与最晚开始时间，计算结果如下图：



通过计算可得工期时间为 23，关键路线如图双线所示。（5 分）