姓名　　学号　　班　　级　　专业　　学院

密　　封　　线

题号	一	二	三	四	五	六	七		复核人
得分									

得分	阅卷人

一、填空题（15 空，每空 3 分，共 45 分）

1. 最大基数对集的整数规划模型为 $\max \sum_i \sum_j w_{ij} x_{ij}$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_j x_{ij} \le 1 & i=1,2,\cdots,m \\ \sum_i x_{ij} \le 1 & j=1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \ge 0 & i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n \end{cases}$$

其中 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in M \\ 0 & (i,j) \notin M \end{cases}$

2. 若区间$[a,b]$为函数$f(x)$的单谷区间，$\bar{x}$是函数$f(x)$在该区间的极小点，取$c,d \in [a,b]$，$c < d$且有$f(c) < f(d)$，则极小点$\bar{x}$的搜索区间可以缩减为 $[a,d]$ 。

3. 约束 $x_1 + 2x_2 \le 6, 4x_1 + 6x_2 \ge 9$ 中只有一个起作用，引入 0-1 变量 y，把它们表示成一般线性约束条件为 $\begin{cases} x_1+2x_2 \le 6 + My \\ -4x_1 - 6x_2 \le -9 + M(1-y) \end{cases}$ $y=0,1$，M 为足够大正数 。

4. 合作博弈中，假设核心、核仁、稳定集都存在，它们的包含关系为 稳定集包含核心包含核仁

5.某公司欲投资一个新产品，估计市场销售状况有两种可能：畅销、滞销，概率分别为 0.3 和 0.7，盈利分别为 20 万元和-7 万元。若存在完全信息，完全信息的价值为 4.9 万元。

6. 已知规范形式原问题（min 问题）的最优单纯形表中原变量检验数为$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，松弛变量的检验数为$(\lambda_{n+1},\cdots,\lambda_{n+m})$，其中所有$\lambda_j \le 0$。对偶问题的最优解为 $w_i = \lambda_{n+i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 。

7. 给定矩阵对策中局中人 1 的收益矩阵 A 如下，写出求局中人 1 的混合最优策略的线性规划（无需求解）$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$。该线性规划为：

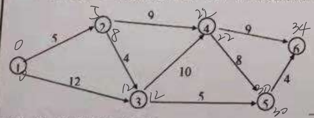
$$\begin{cases} \min z = x_1 + x_2\ (+x_3) \\ \text{s.t.}\ 7x_1 + 4x_2\ (+6x_3) \ge 1 \\ 3x_1 + 6x_2\ (+x_3) \ge 1 \\ 9x_1 + 8x_2\ (+8x_3) \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$ 和 $$\begin{cases} \max w = y_1 + y_2\ (+y_3) \\ \text{s.t.}\ 7y_1 + 3y_2\ (+9y_3) \le 1 \\ 4y_1 + 6y_2\ (+8y_3) \le 1 \\ 6y_1 + y_2\ (+8y_3) \le 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

8.写出与"图$T = (N,E)$是树"等价的 3 个命题：
① T连通且无回路
② T有$|N|-1$条边且无回路
③ T连通且有$|N|-1$条边
④ T连通且每条边都是割边
⑤ T的任两点间都有唯一的路相连
⑥ T无回路，但在任一对不相邻的点间加一条边则构成唯一的一个回路

9.若用障碍函数法求解问题$\begin{cases} \min (x-1)^2 \\ s.t.\ 2-x \le 0 \end{cases}$，写出一种目标增广函数 $F_{c_k}(x) = (x-1)^2 + k[\max(2-x,0)]^2 = \begin{cases} (x-1)^2 + k(2-x)^2 & x<2 \\ (x-1)^2 & x \ge 2 \end{cases}$

10. 给出不确定型决策的 3 种决策准则：①乐观法 ②悲观法 ③折衷系数法 ④后悔值法 ⑤等可能法 。

11. 若下图是某一工程施工网络图，图中弧上的数字为工序时间(天)，则关键路线为：



$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$ 。

工序（2，4）的最晚开始时间 13 。

12. 若上图为一运输网络，图中边上数据为弧容量，发点为 1，收点为 6。 该运输网络的最小割是 (4,6) (5,6) ，最大流的流值为： 13 。

13. 纯整数线性规划松弛问题的最优单纯形表某行对应方程：$\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_4 = \frac{5}{3}$，可以产生割平面条件为： $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \ge \frac{2}{3}$ 。

课程号 28230430　　　　2020-2021 学年　第一 学期

得分	阅卷人

二．计算题（20 分，要求基本步骤）

给定线性规划如下

$$\max\ z = 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12 \\ 4x_2 + x_4 = 16 \\ 5x_3 + x_5 = 15 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. 用单纯形法求上面线性规划问题的最优解；
2. 写出对偶规划和互补松紧条件,并写出对偶规划的最优解。

1.转化为标准形式

$$\min -z = -2x_2 - 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12 \\ 4x_2 + x_4 = 16 \\ 5x_3 + x_5 = 15 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1.2.3.4.5 \end{cases}$$

得单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	-2	-3	0	0	0
x_1	1	2	2	0	0	12
x_4	0	4	0	1	0	16
x_5	0	0	5^*	0	1	15

⇓

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	-2	0	0	$\frac{3}{5}$	9
x_1	1	2^*	0	0	$-\frac{2}{5}$	6
x_4	0	4	0	1	0	16
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	3

⇓

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	15
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	3
x_4	-2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	4
x_3	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	3

最优解 $x^* = (0,3,3,4,0)^T$ ∴ $z^* = 15$

2.对偶规划为

$$\begin{cases} \min\ 12w_1 + 16w_2 + 15w_3 \\ w_1 \ge 0 \\ 2w_1 + 4w_2 \ge 2 \\ 2w_1 + 5w_3 \ge 3 \\ w_2 \ge 0 \\ w_3 \ge 0 \end{cases}$$

互补松紧条件：

$$\begin{cases} x_1^* w_1^* = 0 \\ x_2^*(2w_1^* + 4w_2^* - 2) = 0 \\ x_3^*(2w_1^* + 5w_3^* - 3) = 0 \\ x_4^* w_2^* = 0 \\ x_5^* w_3^* = 0 \end{cases}$$

∴ $w_1^* = 1$　$w_2^* = 0$　$w_3^* = \frac{1}{5}$

得分	阅卷人

三．计算分析题（每题 10 分，共 20 分）

1.给定非线性规划问题如下，判断是否为凸规划。

$$\min\ f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ 5x_1^2 + x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0, j = 1.2.3 \end{cases}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

f的Hessian矩阵为 $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

一、二、三阶顺序主子式为 $4>0$　$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9>0$　$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18>0$

$\nabla^2 f(x)$ 为正定矩阵，f为严格凸函数

$\nabla^2 g_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 半正定．$g_1(x)$ 是凸函数

$\nabla^2 g_2(x) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，半正定．$g_2(x)$ 是凸函数

∴非线性规划为凸规划

2. 旅行者的负重能力为 a(kg),背包容积为 b(m³),共有 n 个物品可供选择。这些物品的重量分别为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$,体积分别为 $b_1,b_2,\ldots,b_n$,价值分别为 $c_1,c_2,\ldots,c_n$,问该如何选择才能使装入的价值最大？把该问题看成多阶段决策问题，并利用最优化原理找出递推公式。要求：写出状态、决策、状态转移方程、最优值函数。

数学模型为 $\max\ c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \le a \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n \le b \\ x_i \ge 0,\ 且为整数 \end{cases}$$

分为n个阶段 (x_k,y_k) 表示第k阶段~~开始~~留给前k种物品的重量和体积

u_k 表示装入第k种物品的件数

$x_{k-1} = x_k - a_ku_k$　　$y_{k-1} = y_k - b_ku_k$

$f_k(x_k,y_k)$ 为背包允许物品总重量不超过 x_k，且体积不超过 y_k，装入前k种物品的最大价值

$$\begin{cases} f_k(x_k,y_k) = \max\{c_ku_k + f_{k-1}(x_k-a_ku_k,\ y_k-b_ku_k)\} \\ u_k \le \min(x_k/a_k,\ y_k/b_k) \\ u_k \ge 0\ 为整数 \end{cases}$$

$f_0(x_0,y_0) = 0$

得分	阅卷人

四.（15 分）运输问题的发量、收量以及单位物资运费如右表所示。

1)用最小树方法或最小元素法求得初始运输方案；2)对 1）求得的基可行解，判断是否为最优解。若否，只需迭代一次求出下一个基可行解。（要求基本步骤）

产＼销	B1	B2	B3	B4	产量
A1	8	6	10	9	35
A2	9	12	13	7	50
A3	14	9	16	5	40
销量	45	20	30	30	