学院____ 专业____ 级____ 班____ 学号____ 姓名____

密……封……线

题号	一	二	三	四	五	六	总分	复核人
得分								

得分	阅卷人

一、（16 分）将方程 $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=0$ 化为标准型，并消去一阶偏导数项。

得分	阅卷人

二、（20 分）求解如下初边值问题。

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\sin x, 0<t<kx, \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=\sin x, \\ u(x,t=kx)=\tan x, (\text{其中} k>1). \end{cases}$$

得分	阅卷人

三、(20 分) 求解如下初边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \left(t > 0, 0 < x < \infty\right), \\ u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \left(0 \le x < \infty\right), \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

得分	阅卷人

四、(20 分) 求解如下初值问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = x, -\infty < x < +\infty, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

姓名 学号 班级 专业 密 封 线

得分	阅卷人

五、（16 分）试用静电源像法求出圆上二维调和方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 < R^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=R^2} = f(\theta) \end{cases}$$

得分	阅卷人

六、（8 分）试证明如下问题的唯一性和稳定性。

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u + u_x + u_y = f(x,y), \\ u|_{\partial D} = 0, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), \end{cases}$$ 其中 D 为二维有界连通光滑区域。

2021-2022-1 偏微分方程B卷 参考答案

一、解:原方程的特征方程为：$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+1=0$ ，解之得：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$，

作：$\xi=y-\frac{1}{2}x,\eta=\frac{1}{2}x$，原方程可化为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-2u_{\xi}+2u_{\eta}+2u=0.$$

令$u=e^{\lambda\xi+\mu\eta}v$，化简方程并整理得到$\lambda=1,\mu=-1$，原方程化为

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}=0$$ ……………………………16分。

二、解：由叠加原理，原问题可分解为如下两个问题：

$$\text{(I)}\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=sinx,\\ u(x,t=kx)=tanx,\end{cases}\quad \text{(II)}\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0,\\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0,\\ u(x,t=kx)=0.\end{cases}$$

先考虑问题（I）.由达朗贝尔公式，当$x>t$时，$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}sin\,\xi d\xi$.

当$x<t$时，由边界条件可得$u_1(x,t)=tan\left(\frac{x-t}{1-k}\right)+\frac{1}{2}\int_{\frac{1+k}{1-k}(x-t)}^{x+t}sin\,\xi d\xi$.

对问题(II)，由杜哈梅原理并结合问题（I）的解，可得：

$$u_2=\begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}sin\xi d\xi d\tau,\\ \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\frac{1+k}{1-k}(x-(t-\tau))}^{x+(t-\tau)}\tau sin\xi d\xi d\tau.\end{cases}$$ ……………………20分

由叠加原理，可知原问题的解$u(x,t)=u_1+u_2$.

三、解：设$u(x,t)=X(x)T(t)$，带入方程得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda.$$

考虑

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X(l)=0,\end{cases}$$

以上问题仅当$\lambda>0$时有非平凡解，同时解得$\lambda=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,k=1,2,K$ 因此可得方程的通

解

为：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi t}{l}+B_k\sin\frac{k\pi t}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

其中

$$\begin{cases}A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi,\\ B_k=\frac{2}{k\pi}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi.\end{cases}$$ …………………20 分

四、解：由叠加原理，原问题可分解为如下两个问题：

$$(I)\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u(x,0)=x^2,\end{cases}\quad(\mathrm{II})\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=x,\\ u(x,0)=0,\end{cases}$$

先考虑问题（I），利用 Fourier 变换，可得解为

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\,\xi.$$

再考虑问题（II），由杜哈梅原理

$$u_2(x,t)=\int_0^t\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\,\xi d\tau.$$

由叠加原理，可知原问题的解$u(x,t)=u_1+u_2$.……………………………20 分

五、应用静电源像法得到格林函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0M}}-\ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}\right),$$

其中 $\frac{1}{r_{M_0M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}$,

$$\frac{1}{r_{M_1M}}=\frac{1}{\sqrt{\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos\gamma}},$$

$\cos\gamma=\cos(\theta-\theta_0)$。

利用 $\rho_0\rho_1=R^2$，可得在圆周 $\rho=R$ 上，

$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\rho=R}=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2}$，由此可得：

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)f(\theta)}{R^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2}d\theta。$$ ……………………16 分

六、证明：方程两边同时乘上u，然后在D上积分可得，该方程的能量不等式为

$$\|u\|_{L^2(D)}^2 + e^{C_1 t}\int_0^t e^{-C_1\tau}\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 d\tau$$

$$\le e^{C_1 t}\|\varphi\|_{L^2(D)}^2 + C_2 e^{C_1 t}\int_0^t e^{-C_1\tau}\|f\|_{L^2(D)}^2 d\tau.$$

下面先考虑唯一性。设u_1, u_2都是原问题的解，则令$u = u_1 - u_2$，带入能量不等式，可得：

$\|u\|_{L^2(D)}^2 + e^{C_1 t}\int_0^t e^{-C_1\tau}\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 d\tau \le 0$,

由此可知，$u = u_1 - u_2 = 0$，即$u_1 = u_2$。

接下来我们考虑稳定性，假设$\|f_1 - f_2\|_{L^2(D)}^2 \le \varepsilon$和$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(D)}^2 \le \varepsilon$，带入能量不等式可得：$\|u\|_{L^2(D)}^2 + e^{C_1 t}\int_0^t e^{-C_1\tau}\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 d\tau \le C\varepsilon$.

由此可知，原问题的稳定性。……………………………………………………8 分