山东大学____常微分方程____课程试卷　　课程号____28220200____　　____2020-2021____学年____1____学期

题号	一	二	三	四	五	六	总分	复核人
得分								

得分	阅卷人

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 方程$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^n+\dfrac{dy}{dx}-y^2+x^2=0$的阶数是（　）.

A. n;　B. 1;　C. 2;　D. n-1.

2. 齐次二阶线性微分方程解集合是（　）维线性空间.

A. 1;　B. 2;　C. 3;　D. 以上说法都不对.

3. 在开区域上，微分方程饱和解的存在区间一定是（　）区间.

A. 闭;　B. 左开右闭;　C. 开;　D. 左闭右开.

4. 函数$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)$在区间$I$上线性无关的（　）条件是它们的朗斯基行列式在区间$I$上不恒等于零.

A. 充分且必要;　B. 既不充分也不必要;　C. 充分;　D. 必要.

5. 若函数$\varphi(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，则方程$y'=\varphi(x)y$的任一非零解（　）与x轴相交.

A. 可能;　B. 不可能;　C. 一定能;　D. 无法确定.

得分	阅卷人

二、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1. 若常系数方程$x''+px'+qx=0$有一个解为$e^{-t}\sin t$，则该方程的通解为________.

2. 函数$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$是一阶线性非齐次方程的两个不同特解，则该一阶线性非齐次方程的通解可以用这两个解表示为________.

3. 方程$\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}=f(xy)$经过变量变换________可以化为变量分离方程.

4. $y\equiv1$是满足方程$y'''+3y''-y'+y=1$和初值条件________的唯一解.

5. 若方阵$\Phi(t)$和$\Psi(t)$都是线性微分方程$\vec{x}'=A(t)\vec{x}$的基解矩阵，则$\Phi(t)\Psi^{-1}(t)=$________.

得分	阅卷人

三、计算题（每题 10 分，共 30 分）

1. 求方程$y\sin x+\dfrac{dy}{dx}\cos x=1$的通解.

2. 验证微分方程$\left(\cos x\sin x - xy^2\right)dx + y\left(1-x^2\right)dy = 0$是恰当方程，并求其通解.

3. 给定方程$\dfrac{dy}{dx}=\sin(\dfrac{2y}{x})$，试求$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$和$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$在$x_0=1$，$y_0=0$时的表达式.

得分	阅卷人

四、解答题（每题 15 分，共 30 分）

1. 求微分方程$y''+2ay'+a^2y=e^x$的通解，其中a是常数.

2. 常系数微分方程组$\vec{x}'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$，其中$\vec{x}=\vec{x}(t)$为3维向量函数. 求满足初值条件$\vec{\varphi}(0)=\vec{\eta}=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}$的解$\vec{\varphi}(t)$，并求$\exp At$.

姓名______ 学号______ 班______ 级______ 专业______ 学院______

密……封……线

得分	阅卷人

五、证明题（15 分）

设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是二阶齐次线性微分方程 $y''+q(x)y=0$ 的两个解，其中 $q(x)$ 是 R 上的连续函数，记 $W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}$，试证：

（1）$W(x)\equiv C$，C 为常数；

（2）若 $\varphi_1(x)=e^{\frac{x}{2}}$，则方程通解为 $y(x)=c_1e^{\frac{-x}{2}}+c_2e^{\frac{x}{2}},(c_1,c_2\in R)$.

得分	阅卷人

六、附加题（每题 15 分，二选一）

1. 设 $f(x,y)$ 在实平面上连续可微且满足 $|f(x,y)|\le M(x)|y|+N$，其中 $M(x)$ 非负连续，$N\ge 0$. 证明微分方程 $y'=f(x,y)$ 任何解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2. 设 $\varphi(x),x\in(-h,h),h>0$ 是初值问题 $y'=x^2+y^2,y(0)=0$ 的解，证明 $\varphi(x)$ 是奇函数.

2、常系数微分方程组 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$，其中 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ 为3维向量函数．求满足初值条件 $\vec{\varphi}(0) = \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ 的解 $\vec{\varphi}(t)$，并求 $\exp At$．

解：$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1 = -1$，

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$；（2分）

对 $\lambda_1 = -1$，特征向量为 $\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$；

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$，广义特征向量为 $\vec{v} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\beta+2\gamma \end{pmatrix}$，（3分）；

对初值条件做分解：$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ -\alpha+\gamma \\ \alpha-\beta+2\gamma \end{pmatrix}$，求得 $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) \\ \beta = \frac{1}{4}(3\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3) \\ \gamma = \frac{1}{4}(\eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3) \end{cases}$，

则 $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) \\ -\frac{1}{4}(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) \\ \frac{1}{4}(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3) \end{pmatrix}$，$\vec{v} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\eta_1 + 2\eta_2 - \eta_3 \\ \eta_1 + 2\eta_2 + \eta_3 \\ -\eta_1 + 2\eta_2 + 3\eta_3 \end{pmatrix}$，（3分）；

满足条件 $\vec{\varphi}(0) = \vec{\eta}$ 的解为：

2、验证微分方程$\left(\cos x\sin x - xy^2\right)dx + y\left(1-x^2\right)dy = 0$是恰当方程，并求其通解.

解：$M(x,y)=\cos x\sin x - xy^2$，$N(x,y)=y(1-x^2)$，$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=-2xy=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$，

即方程恰当；(3 分)

原方程分项组合得$\cos x\sin xdx + ydy - (xy^2dx + yx^2dy)=0$，

或写成$d(\frac{1}{2}\sin^2 x)+d(\frac{1}{2}y^2)-d(\frac{1}{2}x^2y^2)=0$；(3 分)

原方程通解为$\sin^2 x + y^2 - x^2y^2 = c$，其中$c$为任意常数。(4 分)

3、给定方程$\dfrac{dy}{dx}=\sin(\dfrac{2y}{x})$，试求$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$和$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$在$x_0=1$，$y_0=0$时的表达式.

解：$f(x,y)=\sin(\dfrac{2y}{x})$，$y(x,x_0,y_0)=\varphi_0\equiv 0$；(3 分)

由解对初值的可微性定理，得$\dfrac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi_0)}{\partial y}ds}=0$；(3 分)

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=1\cdot e^{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi_0)}{\partial y}ds}=e^{\int_1^x \cos\frac{2y}{s}\frac{2}{s}\Big|_{y=\varphi_0}ds}=e^{2\int_1^x\frac{1}{s}ds}=x^2\text{。(4 分)}$$

四、解答题。(每题 15 分)

1、求微分方程$y''+2ay'+a^2y=e^x$的通解，其中a是常数.

解：特征方程$\lambda^2+2a\lambda+a^2=0$有 2 重根$\lambda_1=\lambda_2=-a$；(3 分)

当$a=-1$，齐次方程通解为$y=c_1e^t+c_2te^t$；(2 分)

1 是特征方程 2 重根，设非齐次方程特解为$\tilde{y}=At^2e^t$，代入原方程得$A=\dfrac{1}{2}$；(3 分)

原方程通解为$y=c_1e^t+c_2te^t+\dfrac{1}{2}t^2e^t$；(1 分)

当$a\neq -1$，齐次方程通解为$y=c_1e^{-at}+c_2te^{-at}$；(2 分)

1 不是特征根，设非齐次方程特解为$\tilde{y}=Ae^t$，代入方程得$A=\dfrac{1}{(a+1)^2}$；(3 分)

原方程通解为$y=c_1e^{-at}+c_2te^{-at}+\dfrac{1}{(1+a)^2}e^t$。(1 分)

$$\varphi(t)=e^{-t}E\vec{u}+e^{t}[E+t(A-E)]\vec{v}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-t}\begin{pmatrix}\eta_1-2\eta_2+\eta_3\\-(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)\\\eta_1-2\eta_2+\eta_3\end{pmatrix}+\frac{1}{4}e^{t}\begin{pmatrix}1-t&t&0\\0&1-t&t\\-t&t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\eta_1+2\eta_2-\eta_3\\\eta_1+2\eta_2+\eta_3\\-\eta_1+2\eta_2+3\eta_3\end{pmatrix}\text{（4 分）}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}e^{-t}(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)+e^{t}[(-2t+3)\eta_1+2\eta_2+(2t-1)\eta_3]\\-e^{-t}(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)+e^{t}[(-2t+1)\eta_1+2\eta_2+(2t+1)\eta_3]\\e^{-t}(\eta_1-2\eta_2+\eta_3)+e^{t}[(-2t-1)\eta_1+2\eta_2+(2t+3)\eta_3]\end{pmatrix}$$

初值$\vec{\eta}$分别取$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，可得

$$\exp At=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}e^{-t}+(-2t+3)e^{t}&-2e^{-t}+2e^{t}&e^{-t}+(2t-1)e^{t}\\-e^{-t}+(-2t+1)e^{t}&2e^{-t}+2e^{t}&-e^{-t}+(2t+1)e^{t}\\e^{-t}+(-2t-1)e^{t}&-2e^{-t}+2e^{t}&e^{-t}+(2t+3)e^{t}\end{pmatrix}\text{。（3 分）}$$

五、证明题。（15 分）

证明：

（1）$W[x]=\begin{vmatrix}\varphi_1&\varphi_2\\\varphi_1'&\varphi_2'\end{vmatrix}=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1'$，$W'[x]=(\varphi_1\varphi_2'-\varphi_2\varphi_1')'=\varphi_1\varphi_2''-\varphi_2\varphi_1''$；（3 分）

因$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$是$y''+q(x)y=0$的解，$W'[x]=\varphi_1[-q(x)\varphi_2]-\varphi_2[-q(x)\varphi_1]=0$；（4 分）

即朗斯基行列式$W[x]$满足一阶线性齐次微分方程$W'[x]=0$，则$W(x)\equiv W(x_0)$，即

$W(x)\equiv C$，C为常数。（3 分）（也可以利用刘维尔公式进行说明）

（2）$\varphi_1(x)=e^{\frac{x}{2}}$，可得到与它线性无关的另一个解$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)\int\frac{1}{\varphi_1^{2}(x)}dx$，

通解为$y=\varphi_1(x)[c_1\int\frac{1}{\varphi_1^{2}(x)}dx+c_2]=c_1e^{\frac{-x}{2}}+c_2e^{\frac{x}{2}}(c_1,c_2\in R)$。（5 分）

六、附加题。（每题 15 分）

1、证明：反证，若解的存在区间是(α,β)，假设其中$\beta<+\infty$，则当$x\to\beta^-$时$\varphi(x)\to\infty$。

取$x_0\in(\alpha,\beta)$，$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt$，

$$|\varphi(x)|\le|\varphi(x_0)|+\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi(t))|dt\le|\varphi(x_0)|+N(\beta-x_0)+\int_{x_0}^{\beta}M(t)|\varphi(t)|dt\text{，}$$

记$|\varphi(x_0)|+N(\beta-x_0)=K$，$K$为正常数，则$|\varphi(x)|\le K+\int_{x_0}^{\beta}M(t)|\varphi(t)|dt$，由 Gronwall

不等式得$|\varphi(x)|\le Ke^{\int_{x_0}^{\beta}M(t)dt}<\infty$，这与$\varphi(x)$无界矛盾。

2、证明：设$\Psi(x)=-\varphi(-x)$，只需证函数$\Psi(x)$也是初值问题的解，则利用解的存在唯一性可知$\Psi(x)=\varphi(x)$；（5 分）

事实上，$\Psi'(x)=[-\varphi(-x)]'=\varphi'(-x)=x^2+[\varphi(-x)]^2=x^2+[-\varphi(-x)]^2=x^2+[\Psi(x)]^2$，

而$\Psi(0)=-\varphi(0)=0$，即$\Psi(x)$是初值问题的解；（6 分）

因整个平面都是方程$y'=x^2+y^2$解的存在唯一性区域，故$\Psi(x)=\varphi(x)$，即

$-\varphi(-x)=\varphi(x)$，即$\varphi(x)$是奇函数。（4 分）