山东大学 2022-2023 学年 第一 学期 拓扑学 课程试卷 B 卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 | 阅卷人 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

一、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1. 两个 Lindeloff 空间的积空间未必是 Lideloff 空间。(　　)

2.. 若拓扑空间 $X$ 满足第一可数性公理，则 $X$ 的子空间 $Y$ 也满足第一可数性公理。(　　)

3. 设 $T_1$,$T_2$ 是集合 $X$ 的两个拓扑，则 $T_1 \cap T_2$ 不一定是集合 $X$ 的拓扑。(　　)

4. 含有不可数多个点的可数补空间是可分空间。(　　)

5. 设 $X$ 是一个 Hausdorff 空间，则 $X$ 中的任何一个收敛序列只有一个极限点。(　　)

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

二、填空题 (每题 2 分,共 10 分)

1. 设 $X$ 是一个拓扑空间，如果 $X$ 中有两个非空的隔离子集 $A,B$，使得 $A\cup B = X$，则称 $X$ 是一个__________空间。

2. 设 $X=\{1,2,3\}$，$X$ 的拓扑 $\mathrm{T}=\{X,\phi,\{2\},\{2,3\}\}$，则 $X$ 的子集 $A=\{1,2\}$ 的内部为__________。

3. 设 $X=\{a,b\}$，写出 $X$ 上的所有拓扑____________________。

4. 设 $X$ 是一个拓扑空间，如果____________________，则称 $X$ 是一个紧致空间。

5. 正则的 $T_1$ 空间称为__________。

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

三、(15 分) 设 $X$ 是一个非空集合，

$\mathscr{T}=\{U\subset X \mid U'$ 是 $X$ 的一个有限子集$\}\cup\{\varnothing\}$。

(1) 证明：$\mathscr{T}$ 是 $X$ 上的一个拓扑。

(2) 设 $A$ 是 $X$ 中的一个无限子集，求 $A$ 的导集 $d(A)$。

# 山东大学 2022-2023 学年 第一 学期 拓扑学 课程试卷 A卷

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 | 阅卷人 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

## 一、判断题（每题 2 分，共 10 分）

1. 若拓扑空间 $X$ 满足第二可数性公理，则 $X$ 的子空间 $Y$ 也满足第二可数性公理。（　　）

2. 两个连通空间的积空间仍是连通空间。（　　）

3. 设 $X=\{1,2,3\}$，$X$ 上的拓扑 $\mathrm{T}=\{X,\phi,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$，则拓扑空间 $(X,\mathrm{T})$ 是 $T_1$ 空间。（　　）

4. 含有无限多个点的有限补空间不是紧致空间。（　　）

5. 设 $X$ 是一个 Hausdorff 空间，则 $X$ 中的任何一个收敛序列只有一个极限点。（　　）

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

## 二、填空题（每题 2 分，共 10 分）

1. 设 $X$ 是一个拓扑空间，如果 $X$ 中有两个非空的隔离子集 $A,B$，使得 $A\cup B=X$，则称 $X$ 是一个______________空间。

2. 设 $X=\{1,2,3,4\}$，$X$ 上的拓扑 $T=\{\{1,2\},\{1,2,4\},\{4\},\varnothing\}$，写出拓扑空间 $(X,T)$ 中的所有闭子集____________________________。

3. 若拓扑空间 $X$ 有一个可数稠密子集，则称 $X$ 是一个______________。

4. 设 $X=\{a,b\}$，则 $X$ 上的离散拓扑和平庸拓扑分别为______________________。

5. 设 $X$ 是一个拓扑空间，如果__________________________，则称 $X$ 是一个 $T_1$ 空间。

密　封　线

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

三、（15分）设 $X$ 是一个非空集合，

$\mathcal{T}=\{U\subset X \mid U'$ 是 $X$ 的一个可数子集$\}\cup\{\varnothing\}$。

（1）证明：$\mathcal{T}$ 是 $X$ 上的一个拓扑。

（2）设 $A$ 是 $X$ 中的一个不可数子集，求 $A$ 的导集 $d(A)$ 和闭包 $\bar{A}$。

2022-2023-1 拓扑学考试试卷 A

一（10分） 1. ✓ 2. ✓ 3. × 4. × 5. ✓

二（10分）1. 不连通 2. {3,4}，{3}，{1,2,3}，X，∅

3. 可分 4. {{a},{b},{a,b}，∅}， {{a,b}，∅}

5. 如果 X 中任何两个不同的点有互不相交的开邻域

三、（15分）（1）（a） $X\in T$，因为 $X'=\varnothing$；另外由定义有，$\varnothing\in T$。

（b）设 $A,B\in T$。如果 $A$ 和 $B$ 之中有一个是空集，则 $A\cap B=\varnothing\in T$。假定 $A$ 和 $B$ 都不是空集。这时 $(A\cap B)'=A'\cup B'$ 是 $X$ 的一个可数子集，所以 $A\cap B\in T$。

（c）设 $T_1\subset T$。令 $T_2=T_1-\{\varnothing\}$。显然有 $\bigcup_{A\in T_1}A=\bigcup_{A\in T_2}A$。

如果 $T_2=\varnothing$，则 $\bigcup_{A\in T_1}A=\bigcup_{A\in T_2}A=\varnothing\in T$

设 $T_2\neq\varnothing$。任意选取 $A_0\in T_2$，则 $(\bigcup_{A\in T_1}A)'=(\bigcup_{A\in T_2}A)'=\bigcap_{A\in T_2}A'\subset A_0'$ 是 $X$ 的一个可数子集，所以 $\bigcup_{A\in T_1}A\in T$。根据上述（1）（2）（3），$T$ 是 $X$ 上的一个拓扑。

……………………… 6分

（2） $d(A)=\overline{A}=X$.

………………………15分

四、（45分）1. 证明：（1）：对于任意 $x\in d(A)$，设 $U$ 是 $x$ 的任何一个邻域，则有 $U\cap(A-\{x\})\neq\phi$，由于 $A\subset B$，从而 $U\cap(B-\{x\})\supset U\cap(A-\{x\})\neq\phi$，因此 $x\in d(B)$，故 $d(A)\subset d(B)$.

………3分

（2）证明：设 $\beta_1$，$\beta_2$ 分别为 $X_1$，$X_2$ 的可数基， 则 $\beta_1\times\beta_2$ 为 $X_1\times X_2$ 的可数基，所以 $X_1\times X_2$ 为第二可数空间。

………9分

2. **证明：** 设 $Y$ 是拓扑空间 $X$ 中的一个连通子集，如果 $X$ 中有隔离子集 $A$ 和 $B$ 使得 $Y\subset A\cup B$，则或者 $Y\subset A$，或者 $Y\subset B$。

证明：如果 $A$ 和 $B$ 是 $X$ 中的隔离子集使得 $Y \subset A \cup B$，则

$$((A\cap Y)\cap \overline{B\cap Y}) \cup ((B\cap Y)\cap \overline{A\cap Y})$$

$$\subset (A\cap Y\cap \bar{B}) \cup (B\cap Y\cap \bar{A})$$

$$= Y\cap ((A\cap \bar{B}) \cup (B\cap \bar{A}))$$

$$= \emptyset$$

这说明$A\cap Y$和$B\cap Y$也是隔离子集。然而

$$(A\cap Y) \cup (B\cap Y) = (A\cup B)\cap Y = Y$$

因此根据定理 4.1.3, 集合$A\cap Y$和$B\cap Y$中必有一个是空集。如果$A\cap Y = \emptyset$必, 据上式立即可见$Y\subset B$, 如果$B\cap Y = \emptyset$, 同理可见$Y\subset A$。

…………………………9 分

3. 若空间 X 的每个开覆盖都有有限子覆盖，则称 X 是紧致空间。

设$Y$是紧致空间$X$中的一个闭子集。如果$\aleph$是$Y$的一个覆盖，它由$X$中的开集构成。则$\boldsymbol{\beta} = \aleph \cup \{Y'\}$是$X$的一个开覆盖。 设$\boldsymbol{\beta}_1$是$\boldsymbol{\beta}$的一个有限子族并且覆盖$X$。则$\boldsymbol{\beta}_1 - \{Y'\}$便是$\aleph$的一个有限子族并且覆盖$Y$。这证明$Y$是$X$的一个紧致子集。

…………………………9 分

4. **证明：**设 $A$ 是 $X$ 的一个紧致子集，$x\in A'$. 对于每一个 $y\in A$, 由于 $X$ 是一个 Hausdorff 空间，故存在 $x$ 的一个开邻域 $U_y$ 和 $y$ 的一个开邻域 $V_y$ 使得

$U_y \cap V_y = \phi$.

集族$\{V_y \mid y\in A\}$显然是由 $X$ 中的开集构成的 $A$ 的一个覆盖，它有一个有限子覆盖，设为$\{V_{y_1}, V_{y_2}, \cdots, V_{y_n}\}$，令$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ 和 $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$，它们分别是点 $x$ 和 $A$ 的开邻域，且易知$U\cap V = \phi$.

…………………9 分

5. **证明：**设 $X$ 满足第二可数性公理，B 是它的一个可数基. 由于 $f: X\to Y$

是一个开映射. $\tilde{\mathcal{B}} = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ 是由 $Y$ 中开集构成的一个可数族.

下面证明 $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 $Y$ 的一个基. 设 $U$ 是 $Y$ 的任意开集，则 $f^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的一个开集. 因此存在 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$，使得 $f^{-1}(U) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$. 由于 $f$ 是一个满射，所以有 $U = f(f^{-1}(U)) = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_1} f(B)$，从而 $U$ 是 $\tilde{\mathcal{B}}$ 中某些元素的并，故 $\tilde{\mathcal{B}}$ 是 $Y$ 的一个基. 这说明 $Y$ 也满足第二可数性公理.

……………………9 分

五（13 分）、

解：可从所学的基础理论、思想方法、拓扑学的应用、与其他领域的联系选择两个或多个方面进行论述。

……………………13 分

六（7 分）、证明：（1）设 $(X,p)$ 是一个紧度量空间. 由球形领域构成的集族 $\{B(x,1) | x \in X\}$ 是 $X$ 的一个开覆盖，它有一个有限子覆盖，设为 $\{B(x_1,1), B(x_2,1), \dots, B(x_n,1)\}$. 令

$$M = \max\{p(x_i,x_j) | 1 \le i,j \le n\} + 2$$

如果 $x,y \in X$，则存在 $i,j, 1 \le i,j \le n$，使得 $x \in B(x_i,1)$ 和 $y \in B(x_j,1)$，于是

$$p(x,y) \le p(x,x_i) + p(x_i,x_j) + p(x_j,y) < M$$

……………………5 分

（2）实数空间 R 是一个非紧致的度量空间的例子。……………………7 分

密 封 线

| 得分 | 阅卷人 |
| --- | --- |
| | |

五 、(13 分) 设 $X$ 是一个拓扑空间，证明 $X$ 是 hausdorff 空间当且仅当积空间 $X\times X$ 的对角线 $\Delta=\{(x,x)\in X\times X\mid x\in X\}$ 是一个闭集.

| 得分 | 阅卷人 |
| --- | --- |
| | |

六 、(7 分) 写出映射连续的 3 个等价条件，并证明：从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射。

2022-2023-1　　拓扑学考试试卷　（B 卷）

一（10 分）　1. √　2. √　3. ×　4. ×　5. √

二（10 分）1. 不连通　2. {2}

3. { X，∅ }，{ X，{a}，∅ }，{ X，{b}，∅ }，{ X，{a}，{b}，∅ }

4. X 的 每个开覆盖都有有限子覆盖

5. $T_3$空间

三、（15 分）（1）（a）$X \in T$，因为 $X' = \varnothing$；另外由定义有，$\varnothing \in T$。

（b）设 $A, B \in T$。如果 $A$ 和 $B$ 之中有一个是空集，则 $A \cap B = \varnothing \in T$。假定 $A$ 和 $B$ 都不是空集。这时 $(A \cap B)' = A' \cup B'$ 是 $X$ 的一个有限子集，所以 $A \cap B \in T$。

（c）设 $T_1 \subset T$。令 $T_2 = T_1 - \{\varnothing\}$。显然有 $\bigcup_{A \in T_1} A = \bigcup_{A \in T_2} A$。

如果 $T_2 = \varnothing$，则 $\bigcup_{A \in T_1} A = \bigcup_{A \in T_2} A = \varnothing \in T$

设 $T_2 \neq \varnothing$。任意选取 $A_0 \in T_2$，则 $(\bigcup_{A \in T_1} A)' = (\bigcup_{A \in T_2} A)' = \bigcap_{A \in T_2} A' \subset A_0'$ 是 $X$ 的一个有限子集，所以 $\bigcup_{A \in T_1} A \in T$。根据上述（1）（2）（3），$T$ 是 $X$ 上的一个拓扑。

……………………… 10 分

（2）$d(A) = X$.　　……………………15 分

四、（45 分，每题 9 分）

1. 紧致空间的例子：闭区间[a, b]

……………………2 分

（2）**证明**：设$X$是一个可数紧致空间。为了证明它是一个列紧空间，我们只要证明它的每一个可数的无限子集都有凝聚点。现在用反证法来证明这一点。假设$X$有一个可数无限子集$A$没有凝聚点。首先这蕴涵$A$是一个闭集。此外对于每一个$a \in A$，由于$a$不是$A$的凝聚点，所以存在$a$的一个开邻域$U_a$使得 $U_a \cap A = \{a\}$。于是集族$\{U_a | a \in A\} \cup \{A'\}$是$X$的一个开覆盖。由于$X$是可数紧致空间，它有一个有限子覆盖，不妨设为$\{U_{a_1}, U_{a_2}, \cdots, U_{a_n}, A'\}$。由于$A'$与 $A$ 无交，所以 $\{U_{a_1}, U_{a_2}, \cdots, U_{a_n}\}$ 必定覆盖 $A$。因此，

# 山东大学（威海） 参考答案及评分标准

2022-2023-1 拓扑学考试试卷 （B 卷）

一（10 分） 1. √ 2. √ 3. × 4. × 5. √

二（10 分）1. 不连通 2. {2}

3. { X，∅ },{ X，{a},∅ }， { X，{b},∅ }， { X，{a},{b},∅ }

4. X 的 每个开覆盖都有有限子覆盖

5. $T_3$空间

三、(15 分)（1）(a) $X \in T$，因为$X' = \varnothing$；另外由定义有，$\varnothing \in T$。

(b) 设 $A, B \in T$。如果 $A$ 和 $B$ 之中有一个是空集，则 $A \cap B = \varnothing \in T$。假定 $A$ 和 $B$ 都不是空集。这时$(A \cap B)' = A' \cup B'$ 是 $X$ 的一个有限子集，所以 $A \cap B \in T$。

(c) 设$T_1 \subset T$。令$T_2 = T_1 - \{\varnothing\}$。显然有$\bigcup_{A \in T_1} A = \bigcup_{A \in T_2} A$。

如果$T_2 = \varnothing$，则$\bigcup_{A \in T_1} A = \bigcup_{A \in T_2} A = \varnothing \in T$

设$T_2 \neq \varnothing$。任意选取 $A_0 \in T_2$，则$(\bigcup_{A \in T_1} A)' = (\bigcup_{A \in T_2} A)' = \bigcap_{A \in T_2} A' \subset A_0'$ 是 $X$ 的一个有限子集，所以$\bigcup_{A \in T_1} A \in T$。根据上述（1）（2）（3），$T$ 是 $X$ 上的一个拓扑。

……………………… 10 分

（2） $d(A) = X$. ………………………15 分

四、(45 分，每题 9 分)

1. 紧致空间的例子：闭区间[a, b]

………………………2 分

（2）**证明：** 设$X$是一个可数紧致空间。为了证明它是一个列紧空间，我们只要证明它的每一个可数的无限子集都有凝聚点。现在用反证法来证明这一点。假设$X$有一个可数无限子集$A$没有凝聚点。首先这蕴涵$A$是一个闭集。此外对于每一个$a \in A$,由于$a$不是$A$的凝聚点，所以存在$a$的一个开邻域$U_a$使得 $U_a \cap A = \{a\}$。于是集族$\{U_a | a \in A\} \cup \{A'\}$是$X$的一个开覆盖。由于$X$是可数紧致空间，它有一个有限子覆盖，不妨设为$\{U_{a_1}, U_{a_2}, \cdots, U_{a_n}, A'\}$。由于$A'$与 $A$ 无交， 所 以 $\{U_{a_1}, U_{a_2}, \cdots, U_{a_n}\}$ 必 定 覆 盖 $A$ 。 因 此 ，

$A=(U_{a_1}\cup U_{a_2}\cup\cdots\cup U_{a_n})\cap A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是一个有限集。这是一个矛盾。

……………………9 分

2. **证明：** 如果 $f(X)$ 是 $Y$ 的一个不连通子集，则存在 $Y$ 的非空隔离子集 $A,B$ 使得 $f(X)=A\cup B$。

于是 $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ 是 $X$ 的非空子集，并且：

$$
\begin{aligned}
&(f^{-1}(A)\cap\overline{f^{-1}(B)})\cup(f^{-1}(B)\cap\overline{f^{-1}(A)})\\
&\subset(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(\overline{B}))\cup(f^{-1}(B)\cap f^{-1}(\overline{A}))\\
&=f^{-1}((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=\phi
\end{aligned}
$$

所以 $f^{-1}(A),f^{-1}(B)$ 是 $X$ 的非空隔离子集 此外，$f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)=f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(f(X))=X$，这说明 $X$ 不连通，矛盾. 从而 $f(X)$ 是 $Y$ 的一个连通子集.

……………………9 分

3. 设$X$是一个拓扑空间。如果$X$的每一个开覆盖都有一个可数子覆盖，则称拓扑空间$X$是一个 Lindeloff 空间。

**证明：** 设$Y$是 Lindeloff 空间$X$的一个闭子空间，$\aleph$是子空间$Y$的一个开覆盖。则对于每一个$A\in X$存在$X$中的一个开集$U_A$使得$U_A\cap Y=A$。于是$\{U_A|A\in\aleph\}\cup\{Y'\}$是$X$的一个开覆盖，它有一个可数子覆盖，设为$\{U_{A_1},U_{A_2},\cdots\}\cup\{Y'\}$。(即使可以找到一个子覆盖不包含$Y'$，但添上一个元素也无何不可。)这时易见$\{A_1,A_2,\cdots\}$，其中$A_i=U_{A_i}\cap Y$，$i\in Z_+$，便是$\aleph$的一个(关于子空间$Y$的)可数子覆盖。

……………………9 分

4. **证明：** 设$X$是一个满足第二可数性公理的空间，$\boldsymbol{\beta}$是它的一个可数基。在$\boldsymbol{\beta}$中的每一个非空元素B中任意取定一个点$x_B\in B$。令$D=\{x_B|B\in\beta,B\neq\emptyset\}$，这是一个可数集。由于$X$中的每一个非空开集都能够表示为$\boldsymbol{\beta}$中若干个元素(其中当然至少会有一个不是空集)之并，因此这个非空开集一定与$D$有非空的交，所以可数集$D$是$X$的一个稠密子集。

……………………9 分