姓名 学号 班级 专业 学院 数学与统计

密 封 线

# 山东大学 实变函数 课程试卷(A)

课程号 28220220 2019-2020 学年 第二 学期

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | 复核人 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

一（每小题各 10 分，共 20 分）

1. (1) 设 $f$ 为 $[0,1]$ 上的实函数，存在常数 $K$ 使对任一自然数 $n$ 与任意 $n$ 个互不相同的数 $x_1,\cdots,x_n\in[0,1]$ 有

$$\left|f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right|\le K$$

则集 $E=\{x\in[0,1]:f(x)\neq 0\}$ 为至多可列的.

(2). 证明：R 上单调函数 $f$ 的不连续点的集合 $D_f$ 为至多可列集.

记 $D_f=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$

其中 $x_1<x_2<\cdots x_n<\cdots$,

$f(x_1+0)-f(x_1-0)>0$

2. 设 $F_1,F_2$ 是 $R^n$ 中的闭集，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$.试证存在开集 $G_1,G_2$，使 $G_1\cap G_2=\varnothing$，而 $G_1\supset F_1, G_2\supset F_2$.

1, (1) $E_n=E(f\geq\frac{1}{n})$, $E_{-n}=E(f\leq-\frac{1}{n})$.

则 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cup E_{-n})$

对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in E_k$，有 $f(x_i)\geq\frac{1}{k}$

故 $\frac{n}{k}\leq|\sum f(x_i)|\leq K$，推每个 $E_k$ 为有限集.

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

二（每小题各 15 分，共 30 分）

1. (1) 设 $\{E_n\}$ 为 **R** 中互不相交的集列，$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则

$$m_*E\geq\sum_{n=1}^{\infty}m_*E_n.$$

(2). 设 $\{E_n\}$ 为可测集列且 $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n<\infty$，则 $m(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)=0$.

2. (1) 设 $\{E_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的可测集列，且满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}m(E_n)=1$$

试证明对 $0<a<1$，必存在 $\{E_{n_k}\}$，使得

$$m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k})>a.$$

(2). 设 $m^*(E)=q>0$，则对任何数 $c\in(0,q)$，有子集 $E_0\subset E$，使 $m^*(E_0)=c$

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

三（每小题各 15 分，共 30 分）

1. (1) 设 $E$ 是 $[0,1]$ 中的不可测子集.令

$$f(x)=\begin{cases} x & x\in E \\ -x & x\notin E \end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是否可测? $|f(x)|$ 是否可测?

(2). 证明：$f(x)$ 在 $E$ 上可测的充要条件是：对任一有理数 $r$ ,集 $E(f>r)$ 恒可测.

2.(1) 设 $f(x), f_n(x)(n\in \mathrm{N})$ 均是可测集 $E$ 上的几乎处处有限的可测函数，并且 $mE(f_n\neq f)<1/2^n\ (n\in \mathrm{N})$,试证 $f_n \xrightarrow{a.e} f(n\to\infty)$.

(2). 设 $f(x)$ 是在 上定义的几乎处处有限的可测函数，证明存在一列多项式几乎处处收敛于 $f(x)$.

| 得分 | 阅卷人 |
|---|---|
| | |

四（每小题 10 分，共 20 分）

1. (1) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x$

(2). 设 $f_n(n=1,2,3\cdots)$、$f$ 均是 $E$ 上的可积函数，$\{f_n\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_E |f(x)|\mathrm{d}m .$$

则对任意的可测子集 $e\subset E$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}m=\int_e |f(x)|\mathrm{d}m .$$

2.(1) 证明：如果 $f(x)$ 在 $(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 上可积，$\varepsilon>0$ 为常数，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m=0$$

(2). 设 $mE<+\infty$，证明序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $E$ 依测度收敛于零的充分与必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{f_n^2(x)}{1+f_n^2(x)}\mathrm{d}m=0 .$$