
Universidad del Valle

Taller N°3 álgebra lineal.

Nombre: ____ Código: __________ Fecha: 2025-10-26

Profesor Iván D. Jaramillo M.

Espacios vectoriales, subespacios vectoriales, bases y dimensiones.

1. Considere el conjunto S= $\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2x2}(\mathbb{R})$

   a. Demuestre que S es un subespacio vectorial de M_{2x2} $(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares.
   b. Encuentre una base para S e indique cuál es su dimensión.

2. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, y sea $q(x) = 1 + x + 2x^2 \in p_2[x]$.

   a. Demuestre que $B = \{1 - x^2, 1 + x^2, 1 + 2x\}$ es una base para $P_2[x]$.
   b. Encuentre los λ_1, λ_2 y λ_3 de $q(x)$ en la base B.

3. Determine si $S = \{(1,1), (3,5)\}$ es una base para $\mathbb{R}$^2.
4. Determine si $L = \{1 - x + 3x^2, 1 - x, x^2\}$ es una base de p_2.
5. Sea $W = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$, halle una base para W.

6. Determine la dimensión de $V = Gen\{1 - x, 1 + x, x\}$.

7. Determine si el conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, donde $v_1 = (1,0,10)$, $v_2 = (0,1,-1,2)$, $v_3 = (0,2,2,1)$ y $v_4 = (1,0,0,1)$ son una base para R^4

8. Determine la dimensión del subespacio $Y = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 / x_1 = x_3 \right\}$ de R^3.

Transformación lineal, núcleo e imagen de una transformación.

9. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2. Demuestre que la aplicación $T : P_2[x] \to R^2$ dada por
$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p''(0) - p(0) \\ p(0) - p'(0) \end{pmatrix}$$
Es una transformación lineal.

10. Sea L: $p_2 \longrightarrow p_2$ la transformación lineal definida como
$$L(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$$

a. ¿$t^2 - t - 1$ está en el Núcleo (L)?
b. ¿$t^2 + t - 1$ está en el Núcleo (L)?
c. ¿$2t^2 - t$ está en la imagen (L)?
d. ¿$t^2 - t + 2$ está en la imagen (L)?

11. La aplicación $T : R^3 \to R^2$ dada por
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$
¿Es una transformación lineal?

Valores propios, vectores propios y polinomio característico.

12. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentre los valores propios y vectores propios de A.

13. Determine el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de la siguiente matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Diagonalización de matrices.

14. Diagonalice la matriz A, proporcionando la matriz P, P^{-1} y la matriz diagonal D.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: *En el presente taller hay algunos temas vistos en el curso, pero recuerde que en la evaluación podrá estar incluido TODOS los temas vistos y las propiedades vistas.*