

GUÍA Nro. 5: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES ESCALARES DE VARIAS VARIABLES

1. Introducción

En esta guía vamos a estudiar la integral definida de una función de dos variables sobre una región en el plano y la integral definida de una función de tres variables sobre una región en el espacio. Estas integrales se conocen como integrales dobles e integrales triples, respectivamente. También vamos a considerar la integral de una función de varias variables sobre una curva en el plano o el espacio, y sobre una superficie en el espacio. Estas integrales se conocen como integrales de línea e integrales de superficie, respectivamente.

La idea es similar a la de integral definida de una función de una variable, $\int_a^b F(x)dx$. Cuando $F(x) \geq 0$ en $[a, b]$, esta integral representa el área bajo la curva $y = F(x)$ sobre el intervalo. Pero recordemos que la integral puede definirse sin recurrir al concepto de área, mediante sumas de Riemann. Comenzamos por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos que, “por simplicidad”, los tomaremos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Se numeran los subintervalos con $i = 1, 2, \dots, n$ y elegimos un valor de x en cada subintervalo (x_i^*). Ver Figura ??.

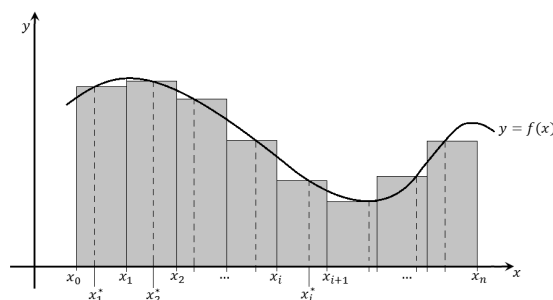


Figura 1: Suma de Riemann para una función de una variable

Entonces formamos la n -ésima suma de Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n F(x_i^*)\Delta x$$

y tomamos el límite de esta suma cuando $n \rightarrow \infty$ para obtener la integral definida de F desde a hasta b :

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i^*)\Delta x$$

2. Integrales dobles

En esta sección vamos a trabajar con integrales DEFINIDAS, para funciones de dos variables sobre regiones planas, llamadas integrales dobles. Realizaremos el cálculo de estas integrales sobre una región dada en el

plano y el resultado será un NÚMERO.

2.1. Integral doble en un rectángulo

Pensemos en una función de dos variables $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, cuyo dominio es un rectángulo cerrado R con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R puede describirse en términos de dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, que representan a sus lados a lo largo de los ejes x e y , respectivamente. Esto es,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

o $R = [a, b] \times [c, d]$. (Dibuje el rectángulo R en el plano xy).

Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en R , de manera que su gráfica es una superficie en \mathbb{R}^3 que está arriba del rectángulo R . Consideremos ahora, la región sólida, S , de \mathbb{R}^3 , limitada por: el rectángulo R (como “piso”), los cuatro planos verticales $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ (como “paredes”) la superficie de la gráfica de f (como “techo”). Nuestro objetivo es hallar el volumen del sólido S . Así como en una variable, se comenzó el estudio de integrales aproximando el área bajo la curva $y = F(x)$ de una función $F(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, en dos variables aproximaremos el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ de una función $f(x, y) \geq 0$ en el rectángulo R .

¿Cómo encaramos la aproximación del volumen de S ? El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos, para lo cual, comenzaremos subdividiendo los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$. Por ejemplo, dividiremos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, numerados con $i = 1, 2, \dots, n$, de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos, numerados con $j = 1, \dots, m$, también de igual ancho $\Delta y = \frac{d-c}{m}$. Ver Figura ?? . Luego R queda dividido en nm subrectángulos, que llamaremos R_{ij} . ¿cuál es el área de cada subrectángulo?

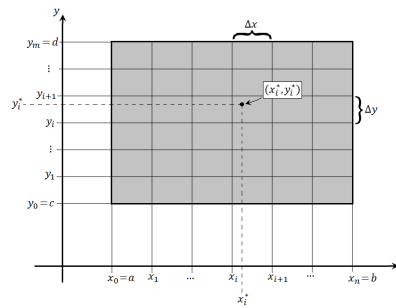


Figura 2: Subdivisión del rectángulo R en $n \cdot m$ subrectángulos de área $\Delta A = \Delta x \Delta y$ cada uno

Tomemos un punto “de muestra” cualquiera, que llamaremos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) , en cada subrectángulo R_{ij} y aproximemos la parte del sólido S que está arriba de R_{ij} con un paralelepípedo (o “columna”) de base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$. ¿Qué volumen tiene esta “columna”? ¿Sabemos calcularlo? El volumen de cada columna está dado por $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$.

Si realizamos este procedimiento de aproximación para los nm subrectángulos y sumamos los volúmenes de todas las nm “columnas”, obtendremos una aproximación del volumen total del sólido S :

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Esta suma se llama suma doble de Riemann (comparar con la suma de Riemann para una función de una variable).

EJEMPLO 1: Estimar el volumen del sólido que se encuentra arriba del rectángulo $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ y debajo del paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Para ello, dividir R en cuatro subrectángulos iguales y elegir el punto “de muestra” como la esquina superior derecha de cada subrectángulo R_{ij} .

El primer paso para la aproximación es subdividir el rectángulo R . Para ello dividimos primero cada uno de los intervalos $[0, 2]$ y $[-1, 1]$, en dos subintervalos del mismo ancho. R queda así subdividido en 4 subrectángulos: R_{11} , R_{12} , R_{21} y R_{22} , con área $\Delta A = 1$ cada uno. Elegimos como punto “de muestra” la esquina superior derecha de cada R_{ij} , esto es: $(x_{11}^, y_{11}^*) = (0, 1)$, $(x_{12}^*, y_{12}^*) = (0, 2)$, $(x_{21}^*, y_{21}^*) = (1, 1)$, $(x_{22}^*, y_{22}^*) = (1, 2)$. Calculamos la correspondiente suma de Riemann para la función $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ (que resulta positiva sobre R):*

$$\begin{aligned} S_{22} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \\ &= f(1, 0) \Delta A + f(1, 1) \Delta A + f(2, 0) \Delta A + f(2, 1) \Delta A \\ &= 15 + 13 + 12 + 8 = 48 \end{aligned}$$

Con 4 subrectángulos, la aproximación al volumen del sólido es $V \approx 48$. Al aumentar el número de subdivisiones considerando n y m cada vez más grandes, la aproximación mejorará. Pruebe con $n = m = 4$ ¿Qué aproximación al volumen del sólido obtuvo? Si el valor exacto del volumen es $V = 52$, ¿mejoró la aproximación?

En este ejemplo, si tenemos en cuenta la simetría de la función, $f(x, y) = f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, observamos que el volumen del sólido sobre $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ es 2 veces el volumen del sólido sobre $[0, 2] \times [0, 1]$. Podríamos haber trabajado entonces sobre el rectángulo más pequeño y luego hacer $V_{[0,2] \times [-1,1]} = 2 V_{[0,2] \times [0,1]}$. Utilice este resultado y aproxime el volumen pedido, calculando la suma de Riemann para f sobre $[0, 2] \times [0, 1]$ con 4 subrectángulos. Compare con la aproximación obtenida previamente.

En general, cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre R , podemos expresar el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R como:

$$V = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Esta expresión induce la siguiente definición de integral doble de una función de dos variables sobre un rectángulo:

DEFINICIÓN:

La integral doble de una función de dos variables f , sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

si este límite existe.

Si f es una función continua en R , se puede demostrar que el límite de la definición anterior existe y el resultado es un número real.

Notemos que la definición anterior es aplicable a cualquier función de dos variables, sin importar su signo. Ahora bien, cuando $f(x, y) \geq 0$ en R , la integral doble $\iint_R f(x, y) dA$, representa el volumen V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$, y puede escribirse:

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

2.1.1. Integrales dobles iteradas

Sabemos por lo visto en Análisis I, que evaluar una integral de una variable utilizando directamente su definición en base a sumas de Riemann es una tarea difícil, y en este sentido, el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) proporciona un método más simple para calcularla. La evaluación de integrales dobles a partir de su definición es incluso más difícil, pero veremos en esta sección una forma práctica que en general nos permitirá calcularlas.

Supongamos que $f(x, y)$ es una función continua de dos variables, definida en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Pensemos ahora en la siguiente integral $\int_c^d f(x, y) dy$. ¿Qué significa? Esta notación quiere decir que la variable x queda fija mientras $f(x, y)$ se integra con respecto a y , desde $y = c$ hasta $y = d$. Observemos que $\int_c^d f(x, y) dy$ nos da una expresión que depende de x . Si ahora integramos ésta con respecto a x , desde $x = a$ hasta $x = b$, obtenemos

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Esta expresión se conoce como integral iterada (iterar significa repetir, volver a hacer un proceso: en este caso la iteración consiste en integrar una vez y luego volver a integrar otra vez más). En general, la escribiremos:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

donde queda indicado que primero integramos con respecto a y , desde c hasta d , y luego con respecto a x , desde a hasta b .

De manera similar, tenemos la integral iterada

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

indicando que primero integramos con respecto a x , desde a hasta b , y luego integramos la expresión resultante con respecto a y , desde c hasta d .

EJEMPLO 2: Evaluar las siguientes integrales iteradas: (a) $\int_0^2 \int_1^3 x^2 y dy dx$; (b) $\int_1^3 \int_0^2 x^2 y dx dy$

(a) Primero hacemos $\int_1^3 x^2 y dy$, o sea que la variable x queda fija mientras $x^2 y$ se integra con respecto

a y , desde $y = 1$ hasta $y = 3$:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^2 y \, dy &= \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=3} \\ &= x^2 \left(\frac{3^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) \\ &= 4 x^2\end{aligned}$$

Ahora integramos esta expresión con respecto a x , desde $x = 0$ hasta $x = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 4 x^2 \, dx &= \left[4 \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= 4 \left(\frac{2^3}{3} \right) - 4 \left(\frac{0^3}{3} \right) = 4 \frac{8}{3} \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

(b) En este caso, primero hacemos $\int_0^2 x^2 y dx$:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \int_0^2 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^3 \left[\int_0^2 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^3 \left(\frac{8}{3} y \right) dy = \left[\frac{8}{3} \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

Notemos que en el ejemplo previo, se obtuvo la misma respuesta cuando integramos primero con respecto a y , que cuando integramos primero con respecto a x . El siguiente teorema indica, efectivamente, que bajo ciertas condiciones, las dos integrales iteradas dan el mismo valor numérico, es decir que el orden de integración no altera el resultado. Este teorema proporciona además un método para evaluar una integral doble expresándola como integral iterada (en cualquier orden):

Teorema de Fubini para integrales dobles:

Si $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\int \int_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

En general el Teorema de Fubini se satisface aún bajo condiciones más débiles: basta con suponer que la función f está acotada en R , es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y existen las integrales iteradas.

El Teorema de Fubini nos permite entonces calcular la integral doble sobre un rectángulo una función continua, mediante integrales iteradas, esto es, integrando con respecto a una variable a la vez y además en cualquier orden de integración, lo que es muy conveniente como veremos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3: Calcular la integral doble $\int \int_R (1 + 6xy^2) dA$, donde $R = [0, 2] \times [-1, 1]$

Para calcular la integral doble sobre el rectángulo R utilizaremos el teorema de Fubini y como este teorema nos permite elegir el orden, utilizaremos la siguiente integral iterada:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (1 + 6xy^2) dy \right] dx &= \int_0^2 \left[y + 6x \frac{y^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [(1 + 6x) - (-1 - 2x)] dx \\ &= \int_0^2 (2 + 4x) dx = \left[2x + 4 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Calcular integrando primero respecto de la variable x , y verificar que se obtiene el mismo resultado.

EJEMPLO 4: Calcular $\int \int_R y \sin(xy) dA$, donde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi\}$

Si primero integramos con respecto a x , obtenemos

$$\begin{aligned} \int \int_R y \sin(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy \\ &= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi [-\cos(2y) + \cos y] dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin(2y) + \sin y \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Notar que para evaluar la primera integral, necesitamos dar una primitiva para una función del tipo $k \sin(kx)$. En cambio, si hubiéramos integrado primero respecto de la variable y , hubiéramos necesitado una primitiva para $y \sin(xy)$ con respecto a y , es decir una función de la forma: polinomio (en y) por función trigonométrica, que requiere integración por partes. Claramente en este ejemplo conviene integrar primero respecto de x !

EJEMPLO 5: Calcular el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el plano $x = 3$ y el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$. Esboce el gráfico del sólido.

Como $f(x, y) = 4 - y^2$ resulta positiva sobre el rectángulo $R = [0, 3] \times [0, 2]$, el volumen puede obtenerse como la integral doble de la función f sobre R . Como en el primer octante $z \geq 0$, se debe cumplir

$z = 4 - y^2 \geq 0$, esto es $|y| \leq 2$. Si primero integramos con respecto a x , obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_R (4 - y^2) dA &= \int_0^2 \int_0^3 (4 - y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 [(4 - y^2)x]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_0^2 (4 - y^2) 3 dy = 3 \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= 3 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Evalúe el volumen integrando primero respecto de y . ¿Obtuvo el mismo valor?

2.2. Integral doble en una región plana general

En el caso de integrales definidas en una variable la región de integración es un intervalo, pero en dos variables la situación es más rica y hay mayor variedad de regiones para considerar. Hasta ahora estudiamos integrales dobles sobre rectángulos; en esta sección definiremos la integral doble sobre una región D más general.

Supongamos que D es una región acotada, es decir que existe un rectángulo R tal que $D \subset R$. Definimos entonces una nueva función F , con dominio en el rectángulo R , de la siguiente forma:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R - D \end{cases}$$

Entonces, si la integral doble de F sobre R existe (notar que es una integral sobre un rectángulo), definimos la integral de f sobre D como:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$$

donde la segunda es una integral sobre un rectángulo que ya sabemos calcular. Por otra parte, la definición es “natural” (razonable) ya que $F(x, y) = 0$ cuando (x, y) se encuentra fuera de D y por lo tanto “no aporta nada” a la integral. Notemos que no importa el rectángulo R que consideremos, el único requisito es que R contenga a D .

Nos preguntamos, ¿qué pasa cuando $f(x, y) \geq 0$? La integral doble $\iint_D f(x, y) dA$ ¿es el volumen del sólido que se encuentra arriba de D y debajo de la gráfica de f ? Es fácil darse cuenta que sí. Observemos que $f(x, y) \geq 0$ implica que $F(x, y) \geq 0$ también, y la $\iint_R F(x, y) dA$ (integral sobre un rectángulo) es entonces el volumen del sólido que se encuentra arriba de R y debajo de la gráfica de F , pero ambos sólidos tienen el mismo volumen!

En general, es posible que F tenga discontinuidades en los puntos de la frontera de D (¿cuándo esto no ocurriría?, ¿cómo sería f en ese caso?). Sin embargo, si f es continua en D y además la frontera de D es una curva “bien comportada”, se puede demostrar que la integral doble de F sobre R existe y por lo tanto $\iint_D f(x, y) dA$ existe. Estudiaremos a continuación, regiones de integración D que tienen este “buen comportamiento”: las clasificaremos en regiones de tipo I y regiones de tipo II. Hay regiones del plano que

son de ambos tipos (“muy bien comportadas”), y otras que no son de ninguno de estos dos tipos... veremos cómo proceder en estos casos.

2.2.1. Regiones planas de tipo I y tipo II

- Una región plana es de tipo I si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de la variable x , esto es:

$$D_I = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son funciones continuas de x en $[a, b]$. Ver Figura ??.

Por ejemplo, la región del plano xy limitada por las curvas $y = x$, $y = x^2$ y las rectas verticales $x = 3$ y $x = 4$, es una región de tipo I, ¿en qué intervalo de x ? Un círculo de radio 1 centrado en el origen, es una región de tipo I en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Cuáles son las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$? La región encerrada entre dos círculos concéntricos centrados en el origen con radios 1 y 2, respectivamente, no es una región de tipo I; ¿por qué? La región encerrada entre el eje x y la función $g(x) = [x]$ (función “parte entera”) en el intervalo $[1, 3]$, no es de tipo I, pero sí es unión de dos regiones de tipo I, ¿cuáles son? Dibújelas.

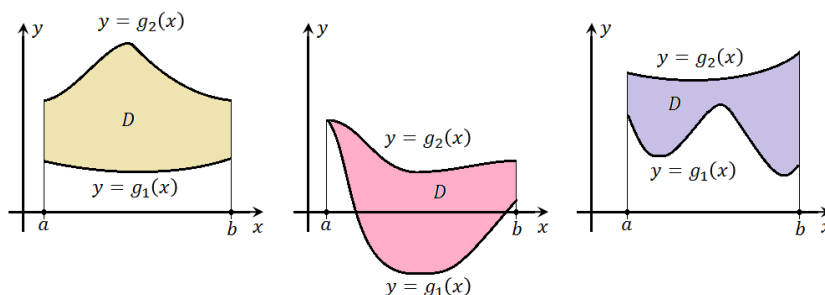


Figura 3: Algunos ejemplos de regiones de tipo I

Supongamos entonces que D es una región de tipo I, ¿cómo encaramos en este caso el cálculo de la integral doble sobre la región D ? Siguiendo la definición, eligiéremos un rectángulo R que contenga a D (¿existirá?) y luego definimos F , que coincidirá con f en D y se anulará fuera de D . Aplicando finalmente la definición:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$$

Si aplicamos el Teorema de Fubini en la última integral (explique por qué podemos hacerlo), tenemos:

$$\iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx$$

Si tenemos en cuenta que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ ó $y > g_2(x)$ (¿por qué?), podemos escribir:

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

donde hemos tenido en cuenta que $F(x, y) = f(x, y)$ en D , o sea cuando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. O sea que finalmente podemos escribir una integral doble sobre una región D de tipo I, como una integral iterada:

Integral doble en regiones de tipo I:

Sea $f : D_I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en una región D_I de tipo I,

$$D_I = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son funciones continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int \int_{D_I} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

- Una región plana es de tipo II si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de la variable y , esto es:

$$D_{II} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c, d]$. Ver Figura ??.

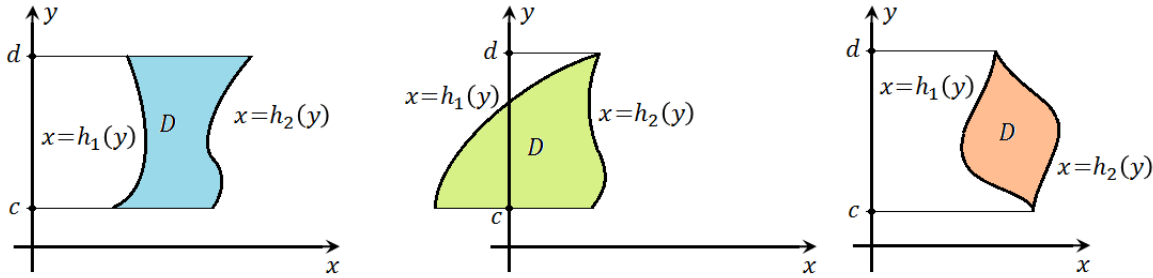


Figura 4: Algunos ejemplos de regiones de tipo II

Procediendo de manera similar a lo que hicimos con las regiones de tipo I, se puede demostrar para las regiones de tipo II un resultado semejante:

Integral doble en regiones de tipo II:

Sea $f : D_{II} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en una región D_{II} de tipo II,

$$D_{II} = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c, d]$, entonces

$$\int \int_{D_{II}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

EJEMPLO 6: Hallar $\int \int_D (x^3 y + \cos x) dA$, donde D es el triángulo en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Observemos que el triángulo D es una región de tipo I:

$$D = D_I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$$

y también es una región de tipo II:

$$D = D_{II} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Entonces, podemos calcular la integral doble integrando primero con respecto a y ($D = D_I$ como región de tipo I) ó primero con respecto a x ($D = D_{II}$ como región de tipo II). Para ilustrar el procedimiento, lo haremos de las dos formas:

(a) Consideremos $D = D_I$:

$$\begin{aligned} \int \int_D (x^3 y + \cos x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3 y + \cos x) dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3 y^2}{2} + (\cos x) y \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx \\ &= \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x \cos x) dx = \frac{\pi^6}{(12)(64)} + [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Notar que en el cálculo anterior, necesitamos aplicar “integración por partes” para hallar una primitiva para $x \cos x$.

(b) Consideremos ahora $D = D_{II}$:

$$\begin{aligned} \int \int_D (x^3 y + \cos x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} (x^3 y + \cos x) dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^4 y}{4} + \sin x \right]_{x=y}^{x=\pi/2} dy = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi^4 y}{2^4 4} + 1 - \frac{y^5}{4} - \sin y \right) dy \\ &= \left[\frac{\pi^4 y^2}{2^7} + y - \frac{y^6}{24} + \cos y \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^6}{(8)(64)} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{(24)(64)} + 0 - 1 \\ &= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Como era de esperar, considerando a D de tipo I ó de tipo II, llegamos al mismo resultado. En cuanto al grado de dificultad de los cálculos, si bien fue semejante en ambos casos, notemos que cuando consideramos $D = D_I$ fue necesario aplicar “integración por partes”.

Este ejemplo nos muestra la conveniencia de observar un poco las integrales antes de decidir el orden de las integrales iteradas. Esta observación comprende tanto la región a integrar, como el integrando. Notar, por ejemplo, que la $\int \int x dA$ sobre un círculo D centrado en el origen, da 0 por simetría.

Recordemos que cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre la región D , la integral doble es el volumen del sólido que está por arriba de la región D y por debajo de la gráfica de f . En los dos ejemplos siguientes usaremos integral doble para calcular el volumen de un sólido.

EJEMPLO 7: Determinar el volumen del sólido acotado por arriba por el cilindro parabólico $z = x^2$ y por debajo por la región del plano xy encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$.

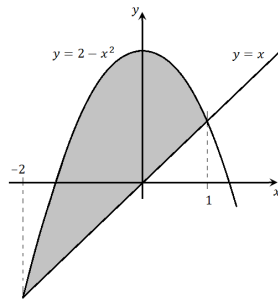


Figura 5: Región del plano encerrada por la parábola $y = 2 - x^2$ y la recta $y = x$

Veamos primero qué tipo de región es D : si observamos la Figura ?? notamos que D es una región de tipo I y también de tipo II, ¿por qué? En este caso, por ser más simple, consideraremos a D como región de tipo I. Necesitamos los puntos de intersección entre la recta $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$ para poder definir a la región D . Así vemos que, reemplazando $y = x$ en la ecuación de la parábola, queda $x = 2 - x^2$, que tiene 2 soluciones, $x = 1$ y $x = -2$. Como $y = x$, los puntos de intersección son $(1, 1)$ y $(-2, -2)$. Entonces $D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x^2\}$, y evaluamos las siguientes integrales iteradas:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^1 \left[\int_x^{2-x^2} x^2 dy \right] dx \\ &= \int_{-2}^1 [x^2(2 - x^2 - x)] dx = \int_{-2}^1 (2x^2 - x^4 - x^3) dx \\ &= 2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^1 \\ &= \frac{31}{5} - \frac{17}{4} - 2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8: Halle el volumen del tetraedro limitado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$. Ver Figura ??.

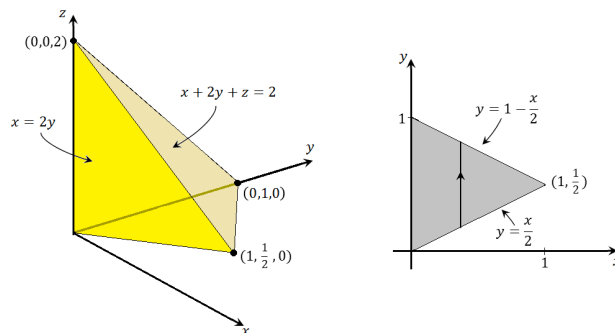


Figura 6: (a) Tetraedro en el primer octante (b) Región de integración D en el plano xy

Comenzamos haciendo una representación gráfica del sólido en \mathbb{R}^3 . La base del tetraedro es un triángulo en el plano xy , ¿cuáles son las rectas que lo limitan? Son las rectas del plano xy determinadas cuando

los planos de las “paredes” y el plano del “techo” cortan el plano del “piso”, esto es, i) el plano xz corta al xy en el eje y , o sea en la recta $x = 0$, ii) el plano $x = 2y$, corta al xy en la recta $x = 2y$, iii) el plano $x + 2y + z = 2$ corta al xy en la recta $x + 2y = 2$. O sea que D es el triángulo limitado por las rectas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. Vemos que el sólido se encuentra por arriba del triángulo D y por debajo del plano $z = 2 - x - 2y$.

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\}$$

Si ahora integramos nos queda:

$$\begin{aligned} V &= \int \int_D (2 - x - 2y) dA = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y) dy dx \\ &= \int_0^1 [2y - xy - y^2]_{y=\frac{x}{2}}^{y=1-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \left[2 - x - x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como ya hemos mencionado, en algunos casos puede ser conveniente invertir el orden de la integración; por ejemplo, cuando la integral es muy difícil e intentamos ver si en el orden inverso la dificultad es menor. ¿Cómo invertir el orden de integración? Mostraremos un ejemplo simple:

EJEMPLO 9: Graficar la región de integración para la integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2) dy dx$$

Escribir una integral equivalente con el orden de integración inverso.

La región de integración es $D = D_I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$. Al trazar el gráfico de la región D , vemos que D está limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

Para encontrar los límites de integración en el orden inverso, es decir cuando integramos primero respecto de x y luego respecto de y (esto es, $D = D_{II}$), podemos hacer lo siguiente: imaginamos una recta horizontal que “atraviase” la región de izquierda a derecha. Notamos que la recta “entra” en $x = \frac{y}{2}$ y “sale” en $x = \sqrt{y}$. Luego hacemos que y varíe desde $y = 0$ hasta $y = 4$. La integral entonces queda:

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4x + 2) dx dy$$

El valor común de estas dos integrales es 8. Hacer las dos integrales como ejercicio.

2.3. Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g funciones de dos variables y supongamos que existen las integrales dobles $\int \int_D f(x, y) dA$ y $\int \int_D g(x, y) dA$, donde D es una región plana general. Entonces se cumple:

1. $\int \int_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \int \int_D f(x, y) dA + \int \int_D g(x, y) dA$
2. $\int \int_D c f(x, y) dA = c \int \int_D f(x, y) dA$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.
3. Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$:

$$\int \int_D f(x, y) dA \geq \int \int_D g(x, y) dA$$

4. Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se intersecan salvo quizás en sus fronteras, entonces

$$\int \int_D f(x, y) dA = \int \int_{D_1} f(x, y) dA + \int \int_{D_2} f(x, y) dA$$

5. Si integramos la función constante $f(x, y) = 1$ sobre una región D , obtenemos el área de D .

$$\int \int_D 1 dA = A(D)$$

6. Si $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$, entonces

$$m A(D) \leq \int \int_D f(x, y) dA \leq M A(D)$$

2.4. Integral doble en coordenadas polares

Supongamos que se pretende calcular $\iint_D xy dA$, donde D es la porción, en el primer cuadrante, de la corona circular de radio interior 2 y radio exterior 5. Algunas regiones del plano, como esta D , son descritas más fácilmente usando coordenadas polares en lugar de coordenadas cartesianas (repasar lo visto en la Guía 1 – Sección 8.1). Por otro lado, una función de dos variables definida para puntos P del plano puede también tener una expresión más simple si se escriben x e y en términos de r y θ . En uno u otro caso, conviene operar en coordenadas polares. Veamos entonces cómo se calcula una integral doble en este sistema de coordenadas.

Empezamos por recordar la noción del denominado “rectángulo polar” o *sector de corona circular*, visto en el Ejercicio 10 de la Guía 1:

$$\mathcal{R} = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

cuya área está dada por

$$A(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha).$$

Como ejemplo, el sector de corona circular entre los radios 2 y 3, y entre los ángulos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ es el conjunto $\{(r, \theta) : 2 \leq r \leq 3, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}$; notar que, en coordenadas cartesianas, esta misma región se escribe $\{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3}\}$ (grafique e indique si se trata de una región de tipo I, o de tipo II, o de tipos I y II a la vez, o ni I ni II).

Una función f de dos variables puede darse en términos de las coordenadas polares, a través de la composición:

$$f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Como ejemplo, la función que indica la distancia de un punto al origen, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, resulta simplemente $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r$.

Con estos ingredientes, aplicamos la idea de sumas de Riemann al cálculo de una integral definida de una función de dos variables, sobre una región del plano con forma de “rectángulo polar”.

Para ello, dividimos la región \mathcal{R} en nm “subrectángulos polares” dando una subdivisión del radio en n tramos iguales de largo $\Delta r = \frac{b-a}{n}$, y una subdivisión del ángulo en m partes cada una de las cuales subtiende un arco de $\Delta \theta = \frac{\beta-\alpha}{m}$. ¿Cuál es el área de cada *subsector de corona circular* \mathcal{R}_{ij} , entre r_i y $r_i + \Delta r$, y entre θ_j y $\theta_j + \Delta \theta$? Ver Figura ??.

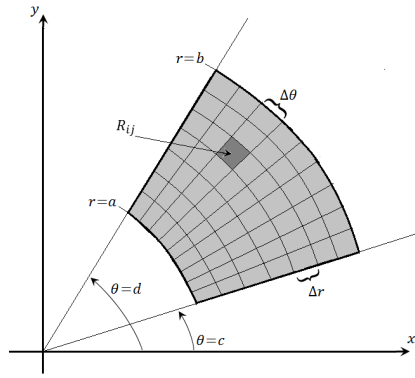


Figura 7: Subdivisión del sector de corona circular determinado por $r \in [a, b]$, $\theta \in [\alpha, \beta]$.

Aplicando la expresión dada más arriba para el área de un sector de corona, tenemos

$$\Delta A_{ij} = \frac{1}{2} [(r_i + \Delta r)^2 - r_i^2] [(\theta_j + \Delta \theta) - \theta_j] = \frac{1}{2} [2r_i \Delta r + (\Delta r)^2] \Delta \theta.$$

Dado que Δr es muy pequeño (tomando n suficientemente grande), se puede despreciar el término cuadrático, y resulta

$$\Delta A_{ij} = r_i \Delta r \Delta \theta$$

Observar que es razonable que aparezca el factor r_i , pues para Δr y $\Delta \theta$ fijos, los subsectores \mathcal{R}_{ij} más alejados del origen tienen área mayor.

Dentro de cada subsector \mathcal{R}_{ij} , elegimos un punto de muestra, que estará caracterizado por un radio r_{ij}^* y un ángulo θ_{ij}^* . Luego, la suma de Riemann doble en coordenadas polares queda

$$S_{nm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta \theta$$

que, en el límite para n y m tendiendo a $+\infty$, da la integral buscada.

DEFINICIÓN:

La integral doble de f en coordenadas polares sobre el sector de corona circular \mathcal{R} (denotado por \mathcal{R}_{xy} cuando se expresa en coordenadas cartesianas, y por $\mathcal{R}_{r\theta}$ cuando se expresa en coordenadas polares), es

$$\iint_{\mathcal{R}_{xy}} f(x, y) dA = \iint_{\mathcal{R}_{r\theta}} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) r dr d\theta = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(r_{ij}^* \cos \theta_{ij}^*, r_{ij}^* \sin \theta_{ij}^*) r_{ij}^* \Delta r \Delta \theta$$

si el límite existe.

OBSERVACIÓN:

Notamos que, al integrar en coordenadas polares, aparece un factor r que multiplica a los diferenciales dr y $d\theta$ para formar el elemento de área: $dA = r dr d\theta$. Se puede demostrar (mire en la bibliografía) que ese factor está directamente relacionado con el *Jacobiano* de la transformación de coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares (r, θ) :

$$J(r, \theta) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Para ser precisos, el factor que aparece al sustituir las variables es el valor absoluto del Jacobiano:

$$|J(r, \theta)| = r.$$

(No se debe olvidar el valor absoluto, ya que eso asegura que el elemento de área sea positivo!!)

NOTA ADICIONAL:

El factor $|J|$ no resulta tan sorprendente, si recordamos que para una función de una variable, la técnica de sustitución dice que $\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x(u)) x'(u) du$. Esto es, cuando se escribe x en términos de u , aparece un factor $x'(u) = \frac{dx}{du}$, que es el análogo a $J(r, \theta) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r}$ (en valor absoluto). Recordar además que la sustitución implica redefinir el intervalo de integración.

Se puede probar un resultado más general, la llamada *transformación* (o cambio) de coordenadas, de (x, y) a (u, v) , para funciones de dos variables, que permite calcular una integral doble como

$$\iint_{\mathcal{R}_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

donde se incluye el valor absoluto del Jacobiano de la transformación: $|J(u, v)| = |x_u y_v - x_v y_u|$, y se tiene en cuenta la redefinición de la región de integración de modo que $(u, v) \in \mathcal{R}_{uv}$. En ciertas ocasiones esta transformación facilita los cálculos, ya sea porque simplifica la función a integrar, o porque resulta más sencilla la región de integración, o por ambos motivos! Busque algún ejemplo en la bibliografía y estúdielo.

Por último, en coordenadas polares es aplicable la noción de integrales iteradas, y también se puede definir la integral doble para regiones polares generales en el plano. En este caso, hablamos de regiones polares de tipos I ó II, cuando se dan entre valores fijos del radio o del ángulo, respectivamente. ¿Cómo definiría estas regiones? ¿Cómo serían los gráficos típicos?

En el siguiente ejemplo resumimos los pasos a seguir para calcular una integral doble usando coordenadas polares.

EJEMPLO 10: Calcular $\iint_D xy \, dA$ donde D es la porción, en el primer cuadrante, de la corona circular de radio interior 2 y radio exterior 5.

- 1) Expresamos la región de integración en coordenadas polares, usando que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ implica $4 \leq r^2 \leq 25$, luego $r \in [2, 5]$; mientras que $x > 0$, $y > 0$ implican $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Luego $\mathcal{R}_{r\theta} = [2, 5] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ que es un rectángulo polar.
- 2) Expresamos la función a integrar, en coordenadas polares (sustituyendo x por $r \cos \theta$ e y por $r \sin \theta$):
 $f(x, y) = xy$ implica $f(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) = r \cos \theta \, r \sin \theta = r^2 \sin \theta \cos \theta$.
- 3) Armamos la integral, agregando el Jacobiano r :
 $\iint_D xy \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_2^5 r^2 \sin \theta \cos \theta \, (r \, dr \, d\theta) = \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_2^5 r^3 \, dr \right)$.
 Complete el cálculo y compruebe que el resultado de la integral es $\frac{609}{8}$.

En el último paso resuelto en el ejemplo, observe que usamos la *propiedad de factorización*: dado que el integrando es un producto de la forma $g(r)h(\theta)$ y los límites de integración son fijos, se pueden hallar las dos integrales por separado. Esta propiedad NO se puede aplicar, por ejemplo, si el integrando es de la forma $\ln(r^3 - \theta)$ ó los límites son variables.

EJEMPLO 11: Hallar el volumen del sólido delimitado por la superficie cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la superficie esférica $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

El sólido S en este ejemplo tiene la forma de “un cucurucho con una bocha de helado” (grafique). Notamos que la coordenada z de los puntos del sólido satisface $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, lo que indica que el “techo” de S es una parte de la superficie de la esfera, la cual puede verse como la gráfica de la función de dos variables $t(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, mientras que el “piso” de S no es $z = 0$ en este ejemplo (como vimos en la mayoría de los ejemplos anteriores de cálculo de volumen), sino que es una parte de la superficie del cono, la cual puede verse como la gráfica de la función de dos variables $p(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. El volumen se expresa, por lo tanto, como

$$V(S) = \iint_D [t(x, y) - p(x, y)] \, dA = \iint_D [\sqrt{1 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}] \, dA$$

Nos falta determinar la región de integración D . Sospechamos (por el dibujo realizado) que se trata de un círculo. La frontera de la región de integración D es, de hecho, la proyección sobre el plano xy de la curva intersección C entre las superficies del cono y la esfera. Resolvamos esta intersección igualando las expresiones para z : $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, de donde se obtiene $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ con $z = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (esto es, la curva intersección C también se puede ver como la intersección de una superficie cilíndrica con un plano horizontal). Proyectando en el plano xy , deducimos que la ecuación $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ es la frontera de la región de integración, esto es, $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

Vemos que tanto la función a integrar $t(x, y) - p(x, y)$ como la región de integración D se describen muy fácilmente si trabajamos en coordenadas polares. Efectivamente, se tiene

$$V(S) = \int \int_{D_{r\theta}} [\sqrt{1 - r^2} - r] (r \, dr \, d\theta)$$

donde $D_{r\theta} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. la solución finalmente es $V(S) = \pi(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2})$ (que resulta una cantidad positiva).

En este ejemplo podríamos haber utilizado una *simetría* del problema: el volumen total de S es igual a 4 veces el volumen del sólido contenido en el primer octante. Este cálculo alternativo corresponde a la región de integración dada por un cuarto de círculo, solo en el primer cuadrante, o sea el mismo intervalo para r pero con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Es muy útil analizar las simetrías de un problema, si las tiene, dado que muchas veces nos puede facilitar la respuesta, *sin hacer ningún cálculo!*. Por ejemplo, $\iint_D x \, dA$ sobre un círculo D centrado en el origen da 0, *por simetría* (sin cuentas). Para convencerse, piense en las sumas de Riemann para esta integral: cada elemento de área dA (un subrectángulo polar) se multiplica por el valor de muestra x en ese subrectángulo; pero hay tantos valores de x positivos como negativos, de modo que se cancelan.

2.5. Aplicaciones de las integrales dobles

Discutimos en esta sección algunas aplicaciones físicas de las integrales dobles.

2.5.1. Valor promedio de una función de dos variables

Si x_1, x_2, \dots, x_n son n números, su promedio está definido por $[x_i]_{prom} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (por ejemplo: la altura promedio de los alumnos del curso). Este concepto nos lleva a definir el valor promedio de una función de una variable F en el intervalo $[a, b]$ como

$$F_{prom} = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x) dx$$

donde $b-a$ es la longitud del intervalo de integración (como n era el número de elementos en el caso discreto dado). Ejemplo: Densidad promedio de una varilla metálica.

Asimismo para funciones de dos variables, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, decimos que el valor promedio de f sobre D es:

$$f_{prom} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y) dA$$

donde $A(D)$ es el área de D . Teniendo en cuenta que $A(D) = \iint_D dA$, podemos escribir el valor promedio como:

$$f_{prom} = \frac{\iint_D f(x, y) dA}{\iint_D dA}$$

Ejemplo: Temperatura promedio de una placa bidimensional.

EJEMPLO 12: Hallar el valor promedio de $f(x, y) = x \sin^2(xy)$ en $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$

Primero calculamos

$$\begin{aligned}
 \int \int_D f(x, y) dA &= \int_0^\pi \int_0^\pi x \sin^2(xy) dy dx \\
 &= \int_0^\pi \left[\int_0^\pi x \frac{1 - \cos(2xy)}{2} dy \right] dx = \int_0^\pi \left[\frac{xy}{2} - \frac{\sin(2xy)}{4} \right]_{y=0}^{y=\pi} dx \\
 &= \int_0^\pi \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\sin(2\pi x)}{4} \right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\
 &= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}
 \end{aligned}$$

El valor promedio es

$$f_{prom} = \frac{\int \int_D f(x, y) dA}{\int \int_D dA} = \frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2) - 1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \simeq 0,7839$$

2.5.2. Cálculo de la masa total y coordenadas del centro de masa de una placa

En Análisis I, aplicando integrales de una variable pudimos calcular momentos y también el centro de masa de una placa delgada o lámina de densidad constante. Ahora, el cálculo con integrales dobles, nos permite considerar una lámina con densidad variable. Supongamos que la lámina ocupa una región D del plano xy y su densidad superficial en un punto $(x, y) \in D$ está dada por $\rho(x, y)$, donde $\rho(x, y)$ es una función continua. Se demuestra que la masa total de la lámina es:

$$m = \int \int_D \rho(x, y) dA$$

en kg, si ρ esta dada en kg/m².

Podemos también encontrar el centro de masa de una lámina con densidad $\rho(x, y)$ en una región D . Las coordenadas (x_{CM}, y_{CM}) del centro de masa son:

$$\begin{aligned}
 x_{CM} &= \frac{1}{m} \int \int_D x \rho(x, y) dA \\
 y_{CM} &= \frac{1}{m} \int \int_D y \rho(x, y) dA
 \end{aligned}$$

(en m) donde m es la masa total de la lámina.

EJEMPLO 13: Hallar el centro de masa del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ si la densidad de masa es $\rho(x, y) = e^{x+y}$

Calculemos primero la masa total:

$$\begin{aligned}
 m &= \int \int_D e^{x+y} dA = \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [e^{x+y}]_0^1 dy \\
 &= \int_0^1 (e^{1+y} - e^y) dy = [e^{1+y} - e^y]_0^1 \\
 &= e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 \simeq 2,9525
 \end{aligned}$$

Ahora calcularemos la integral:

$$\begin{aligned}\iint_D x e^{x+y} dA &= \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [x e^{x+y} - e^{x+y}]_0^1 dy \\&= \int_0^1 [e^{1+y} - e^{1+y} + e^y] dy \\&= \int_0^1 e^y dy = e - 1\end{aligned}$$

de modo que:

$$x_{CM} = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1} \simeq 0,5820$$

Se pueden intercambiar los papeles de y y x en todos estos cálculos, por lo que $y_{CM} = \frac{1}{e-1}$ igual que x_{CM} .

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2:

1. Evalúe las siguientes integrales iteradas:

- a) $\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx$
- b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y \cos x + 2) dy dx$
- c) $\int_0^1 \int_0^1 (xy e^{x+y}) dy dx$
- d) $\int_{-1}^0 \int_1^2 (-x \ln y) dy dx$

2. Evalúe las integrales del ejercicio anterior integrando primero respecto de x y después respecto de y .

3. Calcule las siguientes integrales dobles, donde $R = [0, 2] \times [-1, 0]$:

- a) $\int \int_R (x^2 y^2 + x) dy dx$
- b) $\int \int_R (|y| \cos(\frac{\pi}{4} x)) dy dx$

4. Halle el volumen del sólido acotado por la gráfica de $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$ en el plano xy y los planos verticales $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$.

5. Halle el volumen del sólido sobre el rectángulo $[-1, 1] \times [-3, -2]$ en el plano xy y bajo de la gráfica de $f(x, y) = x^4 + y^2$.

6. Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral $I = \int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy$

7. Halle el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico $z = 1 + (x-1)^2 + 4y^2$, los planos $x = 3$ e $y = 2$, y los planos coordenados.

8. Evalúe la integral iterada:

- a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$
- b) $\int_1^2 \int_y^2 xy dx dy$
- c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} e^{\sin \theta} dr d\theta$

9. Evalúe la integral doble:
- $\int \int_D x^3 y^2 dA$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$
 - $\int \int_D (x + y) dA$, D es la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$
 - $\int \int_D y^3 dA$, D es la región triangular con vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$ y $(3, 2)$
10. Halle el volumen del sólido dado en los siguientes casos:
- El sólido bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre la región limitada por $y = x^2$ y $x = y^2$.
 - El sólido limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$, en el primer octante.
 - El sólido limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$
11. En los siguientes ejercicios, trace la región de integración y escriba una expresión para cada integral cambiando el orden de la integración:
- $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx$
 - $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$
 - $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy$
12. Evalúe la integral $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ invirtiendo el orden de integración.
13. Calcule el volumen del sólido encerrado entre el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.
14. Determine el área de la región encerrada por curva $r^2 = 4 \cos(2\theta)$
15. Calcule el volumen del sólido que está arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$ y debajo del paraboloide $z = 3x^2 + 3y^2$
16. Halle el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$
17. Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y tiene función de densidad $\rho(x, y) = x^2$.
18. Halle el promedio de $f(x, y) = y \sin(xy)$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$
19. Halle el promedio de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$

3. Integrales triples

En esta sección vamos a estudiar integrales DEFINIDAS para funciones de tres variables sobre regiones sólidas, llamadas integrales triples. Realizaremos el cálculo de estas integrales sobre una región dada en el espacio y el resultado será un NÚMERO.

3.1. Integral triple en una caja

Así como comenzamos el estudio de integrales dobles, integrando funciones de dos variables definidas sobre un rectángulo, para estudiar integrales triples comenzaremos integrando funciones de tres variables con dominio en una caja o prisma rectangular B con caras paralelas a los planos coordenados.

Una caja rectangular B puede describirse en términos de tres intervalos cerrados $[a, b]$, $[c, d]$ y $[s, t]$, que representan a sus aristas a lo largo de los ejes x , y , z , respectivamente. Esto es,

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, s \leq z \leq t\}$$

ó $B = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$ (Dibuje la caja B en \mathbb{R}^3).

Para definir la integral triple usamos la idea de sumas de Riemann. Para ello, el primer paso es dividir B en cajas más pequeñas. De manera semejante a lo que hicimos para integrales dobles, dividimos los intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[s, t]$, respectivamente, en n subintervalos de ancho Δx , m subintervalos de ancho Δy y l subintervalos de ancho Δz . Luego B queda dividido en nml cajas más pequeñas, que denominamos B_{ijk} . ¿Cuál es el volumen ΔV de cada caja pequeña?

Tomamos un punto “de muestra” cualquiera, que llamamos $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$, en cada B_{ijk} y formamos la suma triple de Riemann:

$$S_{nml} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

Por analogía con la definición de integral doble, definimos la *integral triple* como el límite de las sumas de Riemann:

DEFINICIÓN:

La *integral triple de f sobre la caja B* es

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

si el límite existe.

Se puede demostrar que el límite de la definición anterior existe si f es una función continua en B , y el resultado es un número real.

3.1.1. Integrales triples iteradas

Del mismo modo que para las integrales dobles, las integrales triples pueden expresarse en forma de integrales iteradas, lo que brinda un método práctico para calcularlas:

Teorema de Fubini para integrales triples:

Si $f : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en la caja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$, entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_s^t \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

La integral iterada del teorema de Fubini indica que integramos primero con respecto a la variable x , desde a hasta b , (manteniendo fijas y y z), luego integramos la expresión que queda, con respecto a y , desde c hasta d , (manteniendo z fija), y por último integramos con respecto a z , desde s hasta t . Hay otros cinco posibles órdenes en los que podemos integrar, y todos dan el mismo valor. Por ejemplo, si integramos primero con respecto a z (desde s hasta t), luego con respecto a x (desde a hasta b) y finalmente con respecto a y (desde c hasta d), tenemos:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_c^d \left[\int_a^b \left(\int_s^t f(x, y, z) dz \right) dx \right] dy$$

En general el Teorema de Fubini se cumple si suponemos que f está acotada en B , es discontinua sólo en un número finito de superficies suaves, y existen las integrales iteradas.

Así vemos que al igual que la integral doble, la integral triple puede calcularse integrando con respecto a una variable a la vez en cualquier orden de integración, lo que muchas veces es muy conveniente, como veremos en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 14: Evaluar $\iiint_B (2x + 3y + z) dV$, donde $B = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$

Comenzamos graficando la región sólida B . Notar que, en este ejemplo, cualquier orden en el que realicemos las integrales iteradas demandará, en principio, un trabajo similar. Por lo tanto eligiremos uno cualquiera de los órdenes posibles:

$$\begin{aligned} \iiint_B (2x + 3y + z) dV &= \int_{-1}^1 \left[\int_1^2 \left(\int_0^1 (2x + 3y + z) dz \right) dx \right] dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^2 \left[(2x + 3y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_1^2 \left(2x + 3y + \frac{1}{2} \right) dx dy = \int_{-1}^1 \left[x^2 + \left(3y + \frac{1}{2} \right) x \right]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(3y + \frac{7}{2} \right) dy = \left[\frac{3y^2}{2} + \frac{7}{2}y \right]_{y=-1}^{y=1} = \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2} \right) = 7 \end{aligned}$$

EJEMPLO 15: Calcular la integral triple $\iiint_B f(x, y, z) dV$, donde $f(x, y, z) = ye^{-xy}$ y $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

En este ejemplo también elegimos uno cualquiera de los órdenes de integración posibles:

$$\begin{aligned}\iiint_B ye^{-xy} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ye^{-xy} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \left[y \left(-\frac{e^{-xy}}{y} \right) \right]_{x=0}^{x=1} dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - e^{-y}) dy dz = \int_0^1 [y + e^{-y}]_{y=0}^{y=1} dz \\ &= \int_0^1 e^{-1} dz = [e^{-1}z]_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Como ejercicio, calcule alguna de las otras integrales iteradas (por ejemplo: $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ye^{-xy} dz dy dx$), verifique que se obtiene el mismo resultado y compare la dificultad de los cálculos involucrados en cada orden elegido. Observe que, dado que f no depende de z , si hacemos primero la integral con respecto a z desde 0 a 1, eso da $[z]_0^1 = 1$; y luego queda por calcular la integral doble de la función de dos variables, ye^{xy} sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$.

Teniendo en cuenta que $f(x, y, z) = -f(-x, -y, z)$, ¿podría decir, sin hacer cálculos, cuánto vale la integral de la función dada si $B = [-1, 0] \times [-1, 0] \times [0, 1]$? ¿Y si $B = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$? (Piense en las sumas de Riemann)

EJEMPLO 16: Integrar $f(x, y, z) = ze^{x+y}$ sobre $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned}\iiint_B ze^{x+y} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ze^{x+y} dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{z^2}{2} \right) e^{x+y} \right]_{z=0}^{z=1} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{x+y}}{2} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{x+y}}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{x+1} - e^x}{2} dx = \left[\frac{e^x(e-1)}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{(e-1)^2}{2}\end{aligned}$$

Notar que como integramos sobre un rectángulo, los límites de las integrales iteradas son números (constantes fijas) y además la función f se puede escribir $f(x, y, z) = e^x e^y z$. Por lo tanto, en este ejemplo, la integral triple también se podría haber calculado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\iiint_B ze^{x+y} dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ze^x e^y dx dy dz \\ &= \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^1 e^y dy \right) \left(\int_0^1 z dz \right) \\ &= (e-1) \cdot (e-1) \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Podemos aprovechar esta propiedad de factorización cuando el integrando es un producto de la forma $f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$ y además la región de integración es una caja $[a, b] \times [c, d] \times [s, t]$.

CUIDADO: Notar que esta propiedad NO es aplicable en el caso general (por ejemplo, si la función es $f(x, y, z) = \cos(ze^{x+y})$).

3.2. Integral triple en una región sólida general

Definiremos la integral triple sobre una región sólida acotada $E \subset \mathbb{R}^3$, siguiendo una idea muy similar a la que empleamos en integrales dobles. Consideramos una caja B tal que $E \subset B$. A continuación definimos una nueva función $F : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que coincida con $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en E y que sea 0 en los puntos de B que no están en E . Definimos entonces la integral triple de f sobre E :

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV$$

Esta integral existe si f es una función continua en E y la frontera de E es una superficie “suave”.

OBSERVACIÓN: las propiedades que vimos para integrales dobles se extienden fácilmente a integrales triples.

A continuación, clasificaremos las regiones de integración E en regiones de tipo 1, 2 y 3. Destaquemos que habrá sólidos que son de los tres tipos, y otros que no son de ninguno de estos tipos. Veamos cómo se procede en estos casos.

3.2.1. Regiones sólidas de tipos 1, 2 y 3

- Una región sólida es de tipo 1 si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables x e y , esto es:

$$E_1 = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

donde D_{xy} es la proyección de E_1 sobre el plano xy , como se muestra en la Figura ???. Notar que la frontera superior del sólido E es la superficie con ecuación $z = u_2(x, y)$, mientras que la frontera inferior es la superficie $z = u_1(x, y)$.

Por ejemplo, la región del primer octante limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, es una región de tipo 1, ¿cuál es su proyección D_{xy} sobre el plano xy ? Un esfera sólida de radio 1 centrada en el origen, es una región de tipo 1 en el círculo del plano xy dado por, $x^2 + y^2 \leq 1$. ¿Cuáles son las funciones $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$? La región sólida encerrada entre dos esferas concéntricas centradas en el origen con radios 1 y 2, respectivamente, no es una región de tipo 1 (¿por qué?).

La integral triple sobre una región de tipo 1 se escribe como una integral iterada, de la siguiente forma:

$$\iiint_{E_1} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

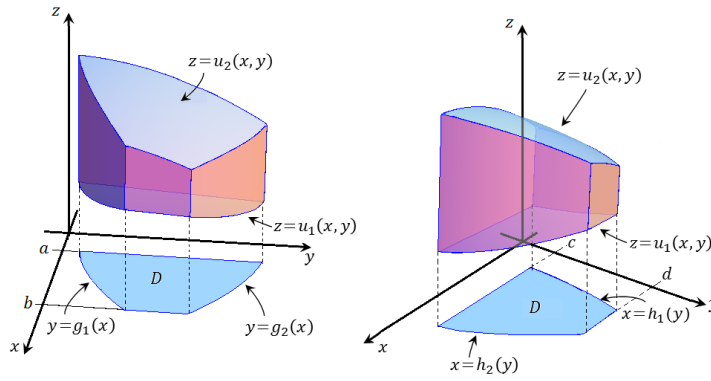


Figura 8: Algunos ejemplos de regiones sólidas de tipo 1

Ahora bien, la proyección D_{xy} sobre el plano xy es una región plana que a su vez puede ser de tipo I ó II. Entonces el sólido E_1 podrá describirse como:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

ó

$$E_1^{II} = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

según D_{xy} sea una región plana de tipo I ó de tipo II, respectivamente; la integral triple podrá entonces escribirse como:

$$\iiint_{E_1^I} f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

ó

$$\iiint_{E_1^{II}} f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

- De manera semejante, una región sólida E es de tipo 2 si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables y y z , esto es:

$$E_2 = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\}$$

donde D_{yz} es la proyección de E sobre el plano yz , como se muestra en la Figura ??a.

La integral triple sobre una región de tipo 2 se escribe como una integral iterada, de la siguiente forma:

$$\iiint_{E_2} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{v_1(y, z)}^{v_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

Notemos que E_2 es un sólido proyectable sobre el plano yz y análogamente a lo que pasaba con el sólido de tipo 1, su proyección puede ser, a su vez, I ó II, lo que conducirá a una descripción E_2^I ó E_2^{II} , respectivamente.

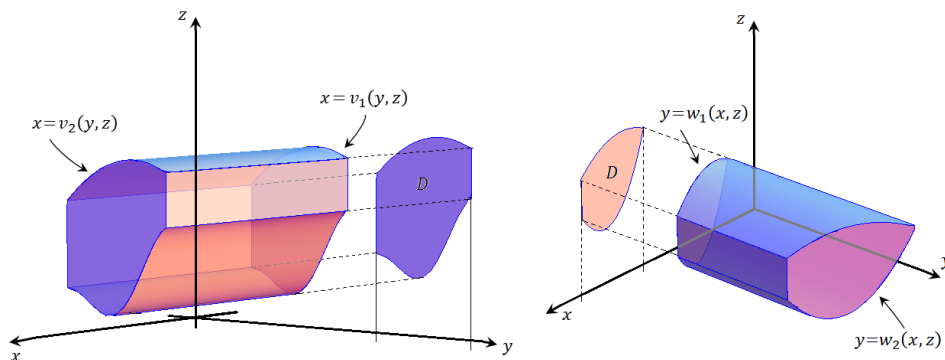


Figura 9: Regiones sólidas (a) de tipo 2 (b) de tipo 3

- De manera análoga, una región sólida E es de tipo 3 si se encuentra entre las gráficas de dos funciones continuas de las variables x y z , esto es:

$$E_3 = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, w_1(x, z) \leq y \leq w_2(x, z)\}$$

donde D_{xz} es la proyección de E sobre el plano xz , como se muestra en la Figura ??b.

La integral triple sobre una región de tipo 3 se escribe como una integral iterada, de la siguiente forma:

$$\iiint_{E_3} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xz}} \left[\int_{w_1(x, z)}^{w_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

Notemos que E_3 es un sólido proyectable sobre el plano xz y análogamente a lo que pasaba con los sólidos de tipo 1 y 2, su proyección puede ser, a su vez, I ó II, lo que conducirá a una descripción E_3^I ó E_3^{II} , respectivamente.

Veamos ahora algunos ejemplos de evaluación de integrales triples. Cuando planteamos la integral triple, es conveniente trazar dos diagramas: i) uno de la región sólida E , que es la región de integración, y ii) otro de la proyección de E sobre alguno de los planos coordenados (el que sea más conveniente). Observando los gráficos, determinamos si E es un sólido de tipo 1, 2 ó 3; y si su proyección sobre el plano coordenado elegido es a su vez una región plana de tipo I ó II. Puede ocurrir también, que E no sea de ninguno de los tres tipos; en ese caso será necesario subdividir el sólido en otros de un tipo dado.

EJEMPLO 17: Evaluar $\iiint_E x^2 \cos z dV$, donde E es la región encerrada entre los planos $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, utilizando dos órdenes de integración diferentes.

Tracemos primero los dos diagramas: i) la región sólida E ; ii) su proyección sobre el plano coordenado que sea más conveniente para integrar.

i) Los tres planos verticales ($x = 0$; $y = 0$; $x + y = 1$) y los dos horizontales ($z = 0$; $z = \frac{\pi}{2}$), encierran al cortarse entre sí al sólido E que tiene forma de prisma recto con base triangular, como se ve en la Figura ??a. Vemos que el “piso” del sólido está en el plano $z = 0$; y el “techo” está en $z = \frac{\pi}{2}$

ii) Proyectamos sobre el plano xy : los planos verticales, al cortar al plano xy determinan una región triangular plana de vértices $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(0, 1)$, como se ve en la Figura ??b

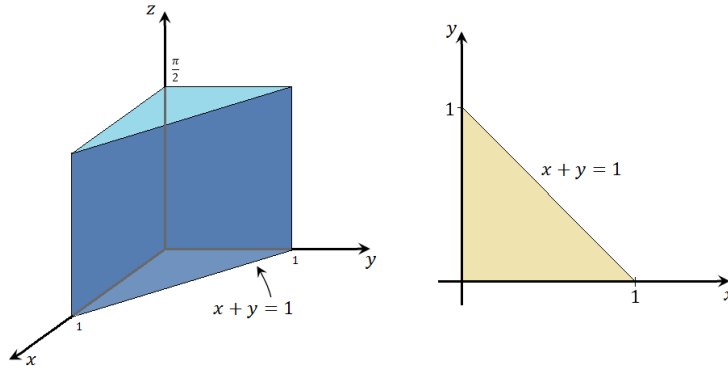


Figura 10: a) Sólido E limitado por los planos: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$
b) Proyección de E sobre el plano xy

El sólido E es entonces una región sólida de tipo 1, y su proyección D_{xy} sobre el plano xy es una región plana triangular (de tipos I y II a la vez).

Cálculamos la integral triple de dos formas:

(a) El triángulo en el plano xy lo describimos como una región plana de tipo I:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - x), 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$$

(b) El triángulo en el plano xy lo describimos como una región plana de tipo II:

$$E_1^{II} = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq (1 - y), 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$$

(a) De esta forma, la integral triple se calcula en el siguiente orden:

$$\begin{aligned} \iiint_{E_1^I} x^2 \cos z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} [x^2 \sin z]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 \, dy \, dx = \int_0^1 [x^2 y]_{y=0}^{y=1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 x^2(1-x) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(b) Considerando al sólido como E_1^{II} , el cálculo de la integral triple se realiza en el siguiente orden:

$$\begin{aligned} \iiint_{E_1^{II}} x^2 \cos z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos z \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1-y} \, dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-y)^3}{3} \, dy = - \left[\frac{(1-y)^4}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Asimismo, también podríamos haber proyectado sobre el plano xz o sobre el plano yz . Calcule nuevamente la integral triple, proyectando ahora sobre yz . ¿Encontró alguna ventaja al realizar los cálculos de esta manera?

Así como la integral simple $L(I) = \int_a^b 1 \, dx$, da la longitud del intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, y la integral doble $A(D) = \iint_D 1 \, dA$, proporciona el área de la región plana $D \subset \mathbb{R}^2$, notamos que la integral triple $V(E) = \iiint_E 1 \, dV$ brinda el volumen del sólido $E \subset \mathbb{R}^3$ (Piense en las sumas triples de Riemann: en este caso se está asignando valor 1 a cada caja pequeña de volumen ΔV). Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 18: Calcular el volumen del sólido E encerrado por las superficies $S_1 : z = x^2 + 3y^2$ y $S_2 : z = 8 - x^2 - y^2$.

El volumen del sólido E puede calcularse mediante la integral triple:

$$V(E) = \iiint_E 1 \, dV$$

Para evaluar esta integral triple, primero hacemos un esbozo de las gráficas de las dos superficies que limitan al sólido E . Luego, observando el gráfico, determinamos sobre qué plano nos conviene proyectar E y hacemos un diagrama de la proyección.

Notemos que ambas superficies corresponden a paraboloides elípticos de eje z : uno de ellos (S_1) se abre hacia arriba en el semiespacio z positivo, con un vértice en el origen, y el otro (S_2) se abre hacia abajo desarrollándose por debajo del plano horizontal $z = 8$, con vértice en $(0, 0, 8)$ (dibuje ambos paraboloides).

Ambas superficies se cortan en una curva de \mathbb{R}^3 que satisface: $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$; o sea que la curva intersección está en el cilindro de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Vemos, además que (dentro del cilindro) la superficie S_1 está por debajo de la superficie S_2 ; esto implica que los valores de Z de los puntos que forman el sólido E van desde $x^2 + 3y^2$ hasta $8 - x^2 - y^2$ (y no al revés!)

Si proyectamos el sólido E sobre el plano xy (E_1 : sólido de tipo 1), es equivalente a proyectar el cilindro: obtenemos la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ en el plano xy . La elipse encierra una región plana de tipo I y II; elegimos por ejemplo, considerarla de tipo I, entonces:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} \leq y \leq \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}}, x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$

Ahora ya podemos evaluar la integral triple para obtener el volumen de E :

$$\begin{aligned}
 V(E) &= \int \int \int_{E_I} dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} 1 \cdot dz \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}^{\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} (8 - x^2 - 4y^2) \, dy \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[(8 - x^2)y - 4\frac{y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}}^{y=\sqrt{2-\frac{x^2}{2}}} dx \\
 &= \int_{-2}^2 \left[2(8 - x^2) \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(2 - \frac{x^2}{2} \right)^{3/2} \right] dx \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx = 8\pi\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

donde para hacer la integral de una variable del último paso se utilizó la sustitución $x = 2 \sin u$ (hacer el cálculo completo).

3.3. Integral triple en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas

3.3.1. Coordenadas cilíndricas

Supongamos que se pretende calcular $\iiint_E xyz \, dV$, donde E es el sólido formado por los puntos del primer octante que distan entre 3 y 5 unidades del eje z , y cuya altura va de 1 a 4. Algunas regiones del espacio, como ésta E , son descritas más fácilmente usando coordenadas cilíndricas en lugar de coordenadas cartesianas (repasar lo visto en la Guía 1 – Sección 8.2). Por otro lado, una función de tres variables definida para puntos P del espacio puede también tener una expresión más simple si se escriben x, y, z en términos de r, θ, z . En uno u otro caso, conviene operar en coordenadas cilíndricas. Veamos entonces cómo se calcula una integral triple en este sistema de coordenadas.

Empezamos por escribir en coordenadas cilíndricas el volumen de un sólido con forma de “caja cilíndrica” (esto es, entre valores de r , θ y z constantes).

Como ejemplo tenemos el sólido: $E = \{(r, \theta, z) : 3 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq z \leq 4\}$. Su volumen está dado por: $V(E) = [\frac{1}{2}(5^2 - 3^2)\frac{\pi}{2}](4 - 1)$, donde el factor entre corchetes es el área de la base, y el otro factor es la altura. Notar que, en coordenadas cartesianas, esta misma región se escribe $\{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq z \leq 4\}$ (grafique e indique si se trata de una región sólida de tipo 1, 2 ó 3, o de varios tipos a la vez, o ninguno).

Un elemento de volumen dV con esta forma tiene la base que es un “rectángulo polar” (o *sector de corona circular*) de área $dA = r \, dr \, d\theta$, y tiene altura dz ; entonces

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Una función f de tres variables puede darse en términos de las coordenadas cilíndricas, a través de la composición:

$$f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Como ejemplo, la función que indica la distancia de un punto al origen, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, resulta $f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Con estos ingredientes, aplicamos la idea de sumas de Riemann al cálculo de una integral definida de una función de tres variables, sobre una región del espacio con forma de “caja cilíndrica”. Ver Figura ?? . Podemos extender las ideas desarrolladas para integrales dobles en coordenadas polares, agregando aquí la coordenada z apropiadamente.

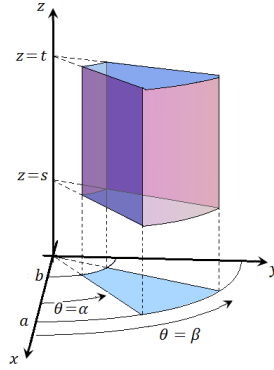


Figura 11: “Caja cilíndrica” determinada por $r \in [a, b]$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, $z \in [s, t]$.

DEFINICIÓN:

La integral triple de f en coordenadas cilíndricas sobre el sólido \mathcal{E} (denotado por \mathcal{E}_{xyz} cuando se expresa en coordenadas cartesianas, y por $\mathcal{E}_{r\theta z}$ cuando se expresa en coordenadas cilíndricas), es

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{E}_{xyz}} f(x, y, z) dV &= \iiint_{\mathcal{E}_{r\theta z}} f(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) r dr d\theta dz = \\ &= \lim_{n, m, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(r_{ijk}^* \cos \theta_{ijk}^*, r_{ijk}^* \sin \theta_{ijk}^*, z_{ijk}^*) r_{ijk}^* \Delta r \Delta \theta \Delta z \end{aligned}$$

si el límite existe.

OBSERVACIÓN:

Notamos que, al integrar en coordenadas cilíndricas, aparece un factor r que multiplica a los diferenciales dr , $d\theta$ y dz para formar el elemento de volumen. Se puede demostrar (mire en la bibliografía) que ese factor está directamente relacionado con el *Jacobiano* de la transformación de coordenadas cartesianas (x, y, z) a coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$J(r, \theta, z) \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Para ser precisos, el factor que aparece al sustituir las variables es el valor absoluto del Jacobiano:

$$|J(r, \theta, z)| = r.$$

(No se debe olvidar el valor absoluto, ya que eso asegura que el elemento de volumen sea positivo!!)

En coordenadas cilíndricas es aplicable la noción de integrales iteradas. También se puede definir la integral triple para una región sólida general en el espacio.

En el siguiente ejemplo resumimos los pasos a seguir para calcular una integral triple usando coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 19: Calcular $\iiint_E xyz \, dV$ donde E es la región del primer octante entre las superficies cilíndricas $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 25$, con altura entre 1 y 4.

- 1) *Expresamos la región de integración en coordenadas cilíndricas, usando que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$:*
 $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ implica $9 \leq r^2 \leq 25$, luego $r \in [3, 5]$; mientras que $x \geq 0$, $y \geq 0$ implican $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$; por último $z \in [1, 4]$. Luego $\mathcal{E}_{r\theta z} = [3, 5] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [1, 4]$ que es una caja cilíndrica.
- 2) *Expresamos la función a integrar, en coordenadas cilíndricas (sustituyendo x por $r \cos \theta$ e y por $r \sin \theta$, mientras que z permanece igual):*
 $f(x, y, z) = xyz$ implica $f(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z) = r \cos \theta \, r \sin \theta \, z = r^2 \sin \theta \cos \theta \, z$.
- 3) *Armamos la integral, agregando el Jacobiano r (en valor absoluto):*
 $\iiint_E xyz \, dV = \int_1^4 \int_0^{\pi/2} \int_3^5 r^2 \sin \theta \cos \theta \, z \, (r \, dr \, d\theta \, dz) = \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_3^5 r^3 \, dr \right) \left(\int_1^4 z \, dz \right)$.
Complete el cálculo.

Veamos el cálculo de un volumen usando integrales triples en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 20: Hallar el volumen del sólido E delimitado por la superficie cónica $S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la superficie esférica $S_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, usando coordenadas cilíndricas (ver Ejemplo 11).

Sabemos que $V(E) = \iiint_E 1 \, dV$, esto es, el volumen del sólido E puede calcularse mediante la integral triple de la función constante $f(x, y, z) = 1$, que en cualquier otro sistema de coordenadas que no sea el cartesiano, sigue siendo la misma función constante de valor 1.

Escribamos la región de integración en términos de r, θ, z . Tenemos $S_1 : z = r$ (recordemos que el cono en cilíndricas tiene una expresión sencilla), y $S_2 : z = \sqrt{1 - r^2}$. La intersección entre ambas superficies se obtiene igualando los valores de z , luego $r = \sqrt{1 - r^2}$, o sea la curva intersección es la circunferencia de radio $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a la altura $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Luego

$$\mathcal{E}_{r\theta z} = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2} \right\}$$

Realizando la primera integral iterada con respecto a z , queda aún por resolver una integral doble, que es la misma que la dada al final del Ejemplo 11. Termine el ejercicio. Compare los planteos y procedimientos realizados en ambos ejemplos, donde se pide calcular el mismo volumen.

Observamos que el uso de las coordenadas cilíndricas para resolver integrales triples, es muy conveniente cuando la región de integración es un sólido del tipo 1 y su proyección sobre el plano xy es una región plana fácilmente expresable en coordenadas polares.

3.3.2. Coordenadas esféricas

En algunos problemas, será conveniente utilizar las coordenadas esféricas: ρ (distancia de un punto al origen de coordenadas), θ (el mismo ángulo que en coordenadas polares o cilíndricas), y ϕ (el ángulo entre el semieje z positivo y la dirección del vector \overrightarrow{OP}).

Puede probarse que el elemento de volumen se escribe

$$dV = \rho^2 \sen \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Calcule el Jacobiano de la transformación entre coordenadas cartesianas y esféricas, $J(\rho, \theta, \phi) \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}$. ¿Qué diferencia encuentra con la expresión anterior? (concretamente, ¿qué ocurre con el signo?)

Una integral triple en coordenadas esféricas se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\iiint_{\mathcal{E}_{xyz}} f(x, y, z) \, dV = \iiint_{\mathcal{E}_{\rho\theta\phi}} f(\rho \sen \phi \cos \theta, \rho \sen \phi \sen \theta, \rho \cos \phi) \, \rho^2 \sen \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

EJEMPLO 21: Calcular $\iiint_{\mathcal{E}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, donde \mathcal{E} es la esfera unitaria de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

Sabemos que la esfera unitaria en coordenadas esféricas se expresa:

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

Por otro lado, como la función a integrar es e^{ρ^3} en coordenadas esféricas, queda:

$$\iiint_{\mathcal{E}_{xyz}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV = \iiint_{\mathcal{E}_{\rho\theta\phi}} e^{\rho^3} (\rho^2 \sen \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi)$$

Complete el cálculo y compruebe que el valor de la integral es: $\frac{4}{3}\pi(e-1)$

Como ejercicio, compruebe que el volumen de una esfera de radio a dado, es $\frac{4}{3}\pi a^3$.

3.4. Aplicaciones de las integrales triples

Todas las aplicaciones que vimos para integrales dobles en la sección anterior, se extienden a integrales triples.

3.4.1. Valor promedio de una función de tres variables

Así como para funciones de dos variables vimos que el valor promedio de $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre D es: $F_{prom} = \frac{1}{A(D)} \int \int_D F(x, y) dA$ donde $A(D)$ es el área de D , para funciones de tres variables, $f : E \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el valor promedio de f sobre E es:

$$f_{prom} = \frac{1}{V(E)} \int \int \int_E f(x, y, z) dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E . Teniendo en cuenta que $V(E) = \int \int \int_E dV$, podemos escribir el valor promedio de f sobre E como:

$$f_{prom} = \frac{\int \int \int_E f(x, y, z) dV}{\int \int \int_E dV}$$

EJEMPLO 22: La temperatura en los puntos del cubo $E = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

- a) ¿Cuál es la temperatura promedio?
- b) ¿En qué puntos del cubo la temperatura es igual a la temperatura promedio?

a) Llamemos k a la constante de proporcionalidad, de modo que $T(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$. Como $V(E) = 2^3 = 8$, para calcular la temperatura promedio sólo falta evaluar la integral triple:

$$\begin{aligned} \int \int \int_E k(x^2 + y^2 + z^2) dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= k \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 dx dy dz + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y^2 dx dy dz + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 dx dy dz \right] \end{aligned}$$

Como x, y, z entran de manera simétrica en la descripción del cubo, las tres últimas integrales son iguales, de modo que:

$$\begin{aligned} \int \int \int_E k(x^2 + y^2 + z^2) dV &= 3k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 dx dy dz \\ &= 3k \int_{-1}^1 z^2 \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy \right) dz \\ &= 8k \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy = 4$. Finalmente

$$T_{prom} = \frac{\int \int \int_E k(x^2 + y^2 + z^2) dV}{V(E)} = \frac{8k}{8} = k$$

b) Supongamos que en un punto (x, y, z) la temperatura es igual a la temperatura promedio, entonces: $k(x^2 + y^2 + z^2) = T_{prom} = k$. Por lo tanto, la temperatura es igual a la temperatura promedio en la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que es interior al cubo E (está inscripta en el cubo).

3.4.2. Cálculo de la masa total y coordenadas del centro de masa de un cuerpo

Sea un cuerpo sólido que ocupa la región $E \subset \mathbb{R}^3$, tal que la densidad de masa en un punto $(x, y, z) \in E$, está dada por la función continua $\rho(x, y, z)$. Se demuestra que la masa total del cuerpo es:

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z) dV$$

en kg, si $\rho(x, y, z)$ está dada en kg/m^3 y las longitudes en metros.

Podemos también encontrar el centro de masa de un cuerpo sólido con densidad $\rho(x, y, z)$ que ocupa una región E . Las coordenadas (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) del centro de masa son:

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_E x \rho(x, y, z) dV$$

$$y_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_E y \rho(x, y, z) dV$$

$$z_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV$$

(en metros) donde m es la masa total del cuerpo.

EJEMPLO 23: El cubo $E = [1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ tiene densidad de masa $\rho(x, y, z) = (1+x)ye^z \text{ kg/m}^3$. Hallar la masa total del cubo.

Tenemos que evaluar la siguiente integral triple, donde E es el cubo dado, eligiendo cualquiera de los 6 órdenes de integración posibles:

$$\begin{aligned} m = \iiint_E (1+x)ye^z dV &= \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1+x)ye^z dx dy dz \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2} \right) ye^z \right]_{x=1}^{x=2} dy dz \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{5}{2} ye^z dy dz = \int_1^2 \left[\frac{5}{4} y^2 e^z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\ &= \left[\frac{15}{4} e^z \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{15}{4} e(e-1) \simeq 17,5 \text{ kg} \end{aligned}$$

(Notar que en este ejemplo, se puede aprovechar la propiedad de factorización: dado que los intervalos de integración son constantes y el integrando es un producto de la forma $f_1(x)f_2(y)f_3(z)$, se pueden evaluar las tres integrales simples por separado y luego multiplicar dichos resultados).

Pensemos ahora en una región sólida E con densidad de masa constante y que además es simétrica respecto de algún plano. Entonces, el centro de masa está en ese plano. Por ejemplo, supongamos que la región E es simétrica con respecto al plano yz ; si la densidad es constante, el integrando para calcular x_{CM} es impar y como E es simétrica, entonces $x_{CM} = 0$. Por lo tanto el centro de masa está en el plano yz . (Lo mismo ocurrirá si la densidad es una función simétrica o *par* en x , como por ejemplo $\rho(x, y, z) = x^2 g(y, z)$, siendo

simétrica la región que ocupa el objeto.) Las simetrías de la región y de la función a integrar son siempre muy útiles para simplificar los cálculos y conviene aprovecharlas. Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 24: Hallar el centro de masa de la región semiesférica E definida por la siguiente expresión $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$, suponiendo densidad $\rho(x, y, z) = 2 \text{ kg/m}^3$.

Por las simetrías de la semiesfera unitaria (con respecto a los planos xz e yz), y por ser la densidad de masa ρ constante, el centro de masa debe estar en el eje z . Efectivamente, $x_{CM} = y_{CM} = 0$ (verifíquelo). Calculemos entonces

$$z_{CM} = \frac{1}{m} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV$$

donde m es la masa total de la semiesfera. Calculamos la integral como una región de tipo 2, esto es proyectamos sobre el plano yz :

$$\begin{aligned} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} 2z dx dy dz \\ &= \int_0^1 2z \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx dy \right) dz \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx dy$$

es una integral doble que representa el área del círculo de radio $\sqrt{1-z^2}$. Por lo que, podemos decir (sin hacer el cálculo!) que el valor de dicha integral es: $\pi(1-z^2)$. Usando este resultado:

$$\begin{aligned} \iiint_E z \rho(x, y, z) dV &= 2 \int_0^1 z \pi(1-z^2) dz \\ &= 2\pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Como la densidad de masa es constante e igual a 2, la masa total es:

$$m = \iiint_E 2 dV = 2 V(E) = 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \right) \right] = \frac{4}{3} \pi$$

(en kg), donde hemos usado que el volumen de la semiesfera unitaria es $\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi 1^3 \right)$
Entonces

$$z_{CM} = \frac{\pi/2}{4\pi/3} = \frac{3}{8}$$

en metros. Luego $\vec{r}_{CM} = (0, 0, \frac{3}{8})$.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3:

1. Evalúe las siguientes integrales iteradas:

- a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$
- b) $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} dx dy dz$
- c) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2} dx dy dz$

2. Evalúe las siguientes integrales triples:

- a) $\iiint_E 2x dV$, donde $E = \{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$
- b) $\iiint_E z dV$, donde E es la región limitada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante.
- c) $\iiint_E xz dV$, donde E es el tetraedro sólido con vértices, $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$

3. Calcule el volumen de la región sólida E , en cada uno de los siguientes casos:

- a) E es el tetraedro sólido encerrado en el primer octante por el plano $6x + 3y + 2z = 6$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
- b) E es la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, entre el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$.
- c) E es la región sólida que está entre el cilindro $z = y^2$ y el plano xy , acotada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$
- d) E es la región sólida del primer octante que es común a los interiores de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.

4. Sea E la región acotada por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$. Escriba integrales iteradas triples en el orden $dz dx dy$ y $dz dy dx$, que den el volumen del sólido E .

5. Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada que figura en cada uno de los siguientes casos:

- a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy dz dx$
- b) $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx dz dy$

6. En cada uno de los siguientes casos, describa y grafique la región sólida cuyo volumen está dado por la integral que se menciona y luego calcule el volumen de la región:

- a) $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r dz dr d\theta$.
- b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$

7. Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar las siguientes integrales:

- a) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV$, donde E es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$
- b) $\iiint_E x^2 dV$, donde E es el sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba del plano $z = 0$ y abajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$
- c) $\iiint_E (x^3 + xy^2) dV$, donde E es el sólido del primer octante que está debajo del paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$

8. Utilice coordenadas esféricas para evaluar las siguientes integrales:

a) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dV$, donde B es la esfera unitaria de ecuación: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

b) $\iiint_E z dV$, donde E es la región que está entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

9. Halle la masa y centro de masa del sólido dado E , con función de densidad $\rho(x, y, z) = y$ (en g/cm³), si E es el tetraedro limitado por los planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
10. Calcule la densidad de masa promedio para el sólido E del ejercicio anterior en g/cm³.
11. Considere un cono circular de altura $h = 0,3$ m y radio de la base $a = 0,1$ m, hecho en madera de quebracho colorado de densidad constante $\rho = 1200$ kg/m³. Halle la masa del cono (en kg).