ТЕМА 1. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1.Предмет і походження дисципліни

Цією справою займаються кожен день мільйони людей самих різних спеціальностей, незалежно від віку і суспільного положення, але вдається ця справа далеко не кожному. Мова іде про прийняття рішень, про те про що ми говоримо “7 раз відмір, 1 раз - відріж”.

По якій дорозі везти вантаж? Чи оперувати хворого? Коли починати сільськогосподарські роботи? Агроному, шоферу, лікарю, інженеру – всім постійно приходиться вибирати з багатьох можливостей найкращий образ дій, тобто вирішувати.

Приймаючи рішення, сучасний керівник підприємства, господар, лікар, військовий поряд з кількісними результатами обчислень повинен враховувати велику множину обставин і міркувань якісного характеру, які не зводяться до однозначних відповідей. І, як правило, виходить, що в подібних умовах можна діяти і так і інакше. А життя вимагає на чомусь зупинитись, прийти до единого рішення. В цьому випадку не обійтись без вибору, який, крім вміння рахувати, ще вимагає вольових якостей.

Французький вчений, фізик і логік, ректор Парижського університету *Жан Буридан* , який жив між 1300 і 1358 роком, створив забавну наукову алегорію про віслюка, який вмер з голоду, оскільки не зміг вибрати один з двох однакових оберемків сіна, що залишив йому господар. Сумна історія буриданового віслюка – найкраща ілюстрація того, що може статись, якщо у відповідального за прийняття рішення відсутня воля. Тоді стає зрозумілим, дивний на перший погляд, афоризм: „Краще одне пагане рішення, ніж два гарних.”

Нове в науці і техніці зробило людину в багато разів сильнішою. Ця могутність багато дає, але і багато вимагає: неправильні, або просто не дуже гарне рішення призводять до непоправного лиха, до зайвих затрат цінних ресурсів, непотрібним витратам людських ресурсів, мільйонним збиткам. Але правильні, обґрунтовані рішення дають великі переваги.

Рішення ці дуже складні, вимагають громіздких розрахунків, значних розумових зусиль. Але підраховано, що тільки за рахунок гарних рішень по організації управління виробництвом вдасться при незмінних потужностях збільшити випуск на 7-10%, а для отримання таких прибутків звичайним шляхом, за рахунок побудови нового обладнання, в масштабах країни знадобились би роки напруженої праці та мільйонні витрати.

Такі результати сьогодні можуть бути отримані рядовим менеджером керівної ланки.

У кожного часу є свій міф.

....Одного разу молодий чоловік звернувся до комп'ютера з проханням підібрати йому наречену. Йому хотілось, щоб його обраниця була невеликого зросту, товариська, віддавала перевагу скромному одягу: поєднання чорного та білого кольору, і до того ж вміла плавати. Швидкодіюча машина не заставила себе довго чекати з відповіддю: „Вам підходить пінгвін".

У бездоганно точній відповіді, але цілковито безглуздій відповіді машини свідоцтво труднощів взаєморозуміння людини і комп'ютера. Між тим від їх контакту сьогодні залежить благополуччя людства.

З одного боку, люди зрозуміли необхідність мудрих і обґрунтованих рішень, без яких не можна вдосконалити виробництво, з іншого – створили потужні комп'ютери, які виконують декілька сот мільйонів операцій за секунду.

Але як розказати бездушній машині, що від неї вимагається, на якій мові їй пояснити наше бажання і можливі шляхи вдосконалення виробнитства, покращення його якості і ефективності?

...Відомий фізик-теоретик Д.Гіббс був людиною дуже стриманою. На засіданнях вченої ради університету він завжди мовчав. Свою єдину промову, що ввійшла в історію науки Гіббс виголосив з наступного приводу.

Обговорювалось питання, чому приділити в нових учбових програмах більше місця – іноземним мовам чи математиці. Гіббс сказав: „Математика – це мова!”.

Слід додати тільки одне: мова, зрозуміла, як людині так і комп’ютеру. Зміст операції 2 Х 2 = 4 однаково зрозумілий як нам з Вами, так і машині.

Нажаль, далеко не всі задачі керування виробництвом зрозумілі як 2 на 2, але головне зрозуміло принцип: щоб знайти спільну мову з обчислювальною машиною, виробнича задача повинна бути перекладена на мову чисел і формул – на мову математики.

...В 1938 році до 25 професора Ленінградського університету Л.В.Канторовичу звернулись представники фанерного тресту з незвичним для того часу проханням. Потрібно було розрахувати найвигідніший розподіл роботи 8 станків по кожному з 5 видів матеріалу.

Розв’язок задачі методом перебору всіх варіантів потребувало б мільйонів років напруженої обчислювальної роботи.

Молодий вчений знайшов дотепний метод розв’язку „станкової” задачі – швидкий і точний. Але головне, зроблене Л.В.Канторовичем, виходило далеко за межі клопоту фанерного тресту. Відштовхуючись від частинної задачі, вчений знайшов загальний метод розв’язку цілого ряду важливих економічних проблем. Новий метод, який отримав назву лінійного програмування, дав відповідь на питання, як керувати виробництвом, щоб забезпечити максимальний випуск продукцій потрібного асортименту, яким кращим способом розподілити посівні площі, як побудувати раціональний план перевезення вантажів....

За розробку метода лінійного програмування і економічних моделей в 1965 році Л.В.Канторовичем разом з академіком В.С.Немчіновим і професором В.В.Новожиловим – була присуджена Ленінська премія. Зараз його праці визнані в усьому світі. В 1975 році разом з американським професором Т.Купмансом академік Л.В.Канторович отримав Нобелевську премію з економіки.

Лінійне, і ширше, математичне програмування – зараз один з основних методів обґрунтування виробничо-економічних рішень. Але не єдиний. Сьогодні існують такі математичні засоби для отримання найкращого рішення: теорія ефективності, теорія ігор, теорія масового обслуговування. Всі ці методи в сукупності отримали назву методів дослідження операцій.

Під операцією розуміють будь-яку цілеспрямовану діяльність людини: промислове виробництво, перевезення вантажу.

Поштовхом до розвитку методів дослідження операцій була Друга світова війна: з допомогою цих методів успішно обґрунтовувались бойові рішення. Зараз ці методи широко застосовуються в усіх областях людської діяльності.

- ДО – кількісне вираження здорового глузду.
- ДО уявляє собою мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які дають ще гірші відповіді іншими засобами – англ. вчений Т.Сааті.

Труднощі у викладенні ДО сформував американський вчений Р.Беллман: „Вчений, подібно Поломнику, повинен іти прямою і вузькою тропою між Западнямі Пере спрощення і Болотом Переускладнення ”. Бажаючих пройти цим шляхом не багато.

Отже, ***Зміст математичного програмування складають теорія і методи розв'язку задач про знаходження екстремуму функції на множинах, що визначаються лінійними та нелінійними обмеженнями (рівностями та нерівностями). Математичне програмування є одним із розділів науки про дослідження операцій.***

2. Форми організації занять та контролю

Дисципліна складається з трьох модулів, в першому модулі 2 лаб.роботи

3. Рекомендована література

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Н .Ш.Кремер Исследование операцій в єкономике. Москва, 2000-407 с.
2. *Акулич И.Л.* Математическое програмирование в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1986. – 319с.

3. *Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И.* Математические методы исследования операций: Учебное пособие. – К.: Вища школа, 1979. – 312с.
4. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций: Учебник. – К.: Вища школа, 1988. – 552с.
5. *Зайченко Ю.П, Шумилова С.А..* Исследование операций. Сборник задач: Учеб. пособие. –К.: Вища школа, 1990.-239 с.
6. *Карманов В.Г.* Математическое программирование: Учебное пособие. – М.: Наука, 1975. – 272с.
7. *Онищенко В.В., Доценко С.І.* Математичне програмування. // Навчально-методичний посібник для денної та заочної форми навчання, ДУІКТ- Київ, 2002.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. –К.: Вища шк., 1983. – 511 с.
2. Венцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
3. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
4. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. – М.: Сов. радио, 1966.- 524 с.
5. Грешилов А.А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях. – М.: Радио и связь, 1991. – 320 с.
6. Заславский Ю.П. Сборник задач по линейному программированию: Учебное пособие. – М.: Наука, 1969. – 256 с.
7. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию: Учебное пособие. М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.
8. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование: Учебное пособие. –Минск: Вышэйш. шк., 1984. –222 с.
9. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 708 с.
10. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969. – 152 с.
11. Сидоров В.С. Нелінійне і дискретне програмування. Конспект лекцій. – Львів: львів. політ. ін-т, 1991. –55 с.
12. Справочник по математике для экономистов. / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.
13. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. / Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 280 с.
14. Экономисты и математики за круглым столом. – М.: Экономика, 1965. – 207 с.

15. Юдин Д.Б. Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. радио, 1979. – 392 с.
16. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование (теория, методы, приложения). – М.: Наука, 1969. – 424 с.

4. Економічна та математична постановка задач лінійного програмування

Задача про використання сировини.

Деяке підприємство після виконання основної виробничої програми має в своєму розпорядженні надлишки сировини трьох видів - s_1, s_2, s_3 відповідно в кількостях b_1, b_2, b_3 умовних одиниць. Із цієї сировини може бути виготовлено два виду виробів - P_1 і P_2. Відомі: a_{ij} - кількість одиниць s_i- го виду сировини, що іде на виготовлення одиниці P_j- го виду виробу, і c_j - прибуток, отриманий від реалізації однієї одиниці кожного виду виробу.

Всі вказані величини подані в таблиці.

Вид сировини	Запаси сировини	Витрати сировини на виріб	
		P_1	P_2
s_1	b_1	a_{11}	a_{12}
s_2	b_2	a_{21}	a_{22}
s_3	b_3	a_{31}	a_{32}

Прибутки від продажу одиниці виробу P_1 дорівнює c_1, від продажу одиниці виробу P_2 дорівнює c_2.

Задача зводиться до того, щоб побудувати такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальним.

<u>Побудова математичної моделі.</u>

Введемо позначення: x_1- кількість одиниць виробів виду P_1, x_2 - кількість одиниць виробів виду P_2, які може випустити підприємство.

При відомій кількості сировини кожного виду, що іде на виготовлення одної одиниці виробу, і запаси сировини можемо побудувати систему обмежень, що визначає область можливих значень x_1 та x_2:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3.$$

Отримана система обмежень встановлює, що кількість сировини, що витрачається на виготовлення всіх виробів, не може перевищити запаси, що є на підприємстві. Виходячи з фізичного змісту на змінні накладаються додаткові обмеження, що вимагають невід'ємності їх значень: $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$ ($x_1, \quad x_2$ будуть рівними нулю, якщо відповідний вид виробу не випускається). Тоді прибуток, що отримає підприємство від реалізації x_1 одиниць виробів P_1 і x_2 одиниць виробів P_2, складе $F = c_1x_1 + c_2x_2$.

Отже, задача формується наступним чином.

Знайти такий вектор $X = (x_1, \quad x_2)$, при якому досягається максимум цільової функції $F = c_1x_1 + c_2x_2$ і виконується наступна система обмежень:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

5. ЗЗЛП та СЗЛП.

Постановка задачі лінійного програмування в загальній формі (ЗЗЛП)

Знайти вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\boldsymbol{x})=c_1x_1+...+c_nx_n$$

і задовольняє систему обмежень

$$a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n \; R \; a_{10}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n \; R \; a_{m0}$$
$$x_j \ge 0, \; j=1,...,k$$

(де R- один з знаків відношення =, ≤ або ≥, а умову додатності накладено не обов'язково на всі змінні).

Постановка задачі лінійного програмування в стандартній формі (СЗЛП)

Знайти вектор $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\mathbf{x})=c_1x_1+...+c_nx_n \qquad (1.1)$$

і задовольняє систему обмежень

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=a_{10} \\ &.......................... \qquad (1.2) \\ &a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=a_{m0} \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,...,n \qquad (1.3)$$

6. Графічний метод розв'язку ЗЛП

Для розв'язку двовимірних ЗЛП, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що грунтується на геометричній інтерпритації та аналітичних властивостях ЗЛП.

Розглянемо таку задачу.

Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow max\,(min) \qquad (2.1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, =, \geq\} b_m \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (2.3)$$

Припустимо, що система (2.2) за умов (2.3) сумісна і многокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією ЗЛП (2.1) кожне *i*-те обмеження-нерівність (2.2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ *(i=1, 2, ..., m)*. Системою обмежень (2.2) описується спільна частина, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Таку множину точок називають *многокутником розв'язків*, або *областю допустимих розв'язків ЗЛП* (ОДР).

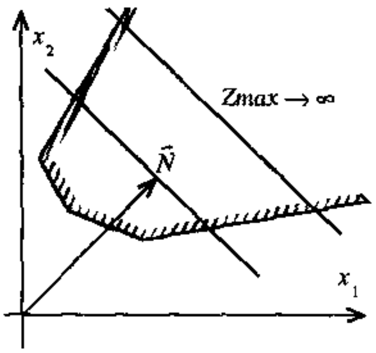
Умова (2.3) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція ЗЛП геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = const$.

Деякі властивості ЗЛП (для графічного розв'язування):

1. Якщо ОДР – обмежена, то екстремум лінійної функції Z досягається принаймні в одній з вершин многокутника.
2. Якщо ОДР – необмежена, то екстремум функції Z або не існує, або досягається принаймні в одній з вершин ОДР.
3. Якщо оптимальне значення Z досягається одночасно у двох вершинах разом, то це ж саме екстремальне значення досягається в будь-якій точці відрізка, що з'єднує ці дві вершини (альтернативний оптимум).

Отже, розв'язати ЗЛП графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (2.1) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Задача лінійного програмування не має оптимальних планів (рис. 3 — цільова функція не обмежена згори; рис. 4 — система обмежень задачі несумісна).



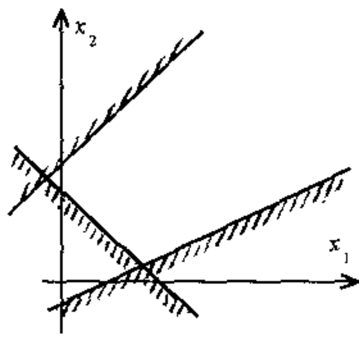


Рис.1

Рис.2

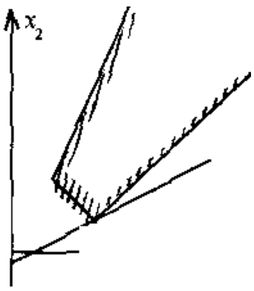


Рис.3

Рис.4

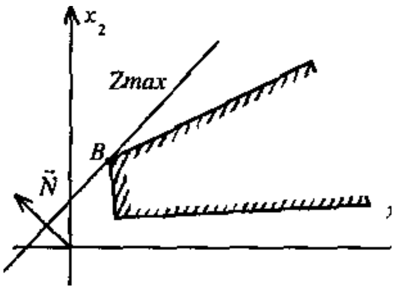


Рис.5

Рис.6

Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 5 і 6). На рис. 5 у точці *B* маємо максимум, на рис. 6 у

7. Алгоритм графічного методу:

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.2) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо многокутник розв'язків ЗЛП.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1,\ c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.
6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстримального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова фукція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Приклад 1.

Знайти графічний розв’язок ЗЛП:

$$Z = -x - y \to min$$

$$3x + y \le 21, \quad (1)$$

$$x + 2y \le 10, \quad (2)$$

$$x \ge 0,\ \ y \ge 0. \quad (3)$$

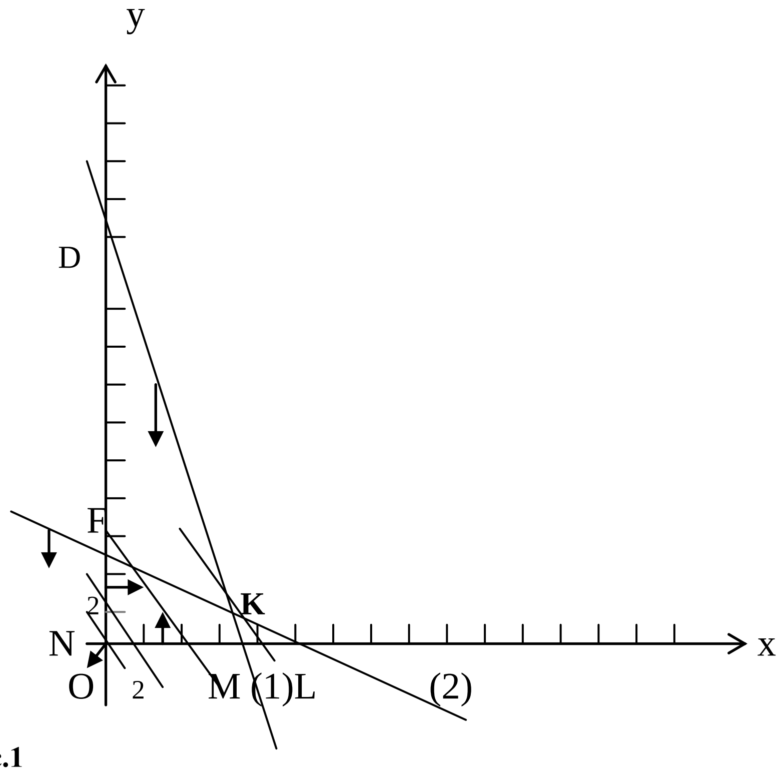


Рис.1

В (1), (2) замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей: *3x+y=21, x+2y=10.* Для спрощення побудови доцільно поділити обидві частини рівності на праву частину. Отримаємо:

$$\frac{3x}{21} + \frac{y}{21} = 1 \text{ або } \frac{x}{7} + \frac{y}{21} = 1, \quad (1^*)$$

$$\frac{x}{10} + \frac{2y}{10} = 1 \text{ або } \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1. \quad (2^*)$$

Рівняння (1*) перетинає вісі координат в *M(7,0), D(0,21)*, а (2*) – в *L(10,0), F(0,5).*

Будуємо графіки прямих (1*), (2*) (рис.1).

Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис.1 її напрям позначено стрілками), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному разі таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних (3) обмежує ОДР задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає ОДР задачі.

3. *OFKM* – чотирикутник розв'язків ЗЛП.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (-1, -1)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(x = -1, \quad y = -1)$.
5. Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $-x - y = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат.
6. Переміщуючи пряму $-x - y = 0$, в протилежному напрямі вектора $\vec{N}$ (оскільки задача мінімізації), бачимо (з рис.1), що останньою спільною точкою прямої цільової функції та многокутника *OFKM,* є точка *K*. Координати цієї точки визначають оптимальний розв'язок задачі, що мінімізує значення цільової функції.
7. Координати точки *К* визначаються перетином прямих (1) і (2):

$$\begin{cases} 3x + y = 21 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} x = 6,4 \\ y = 1,8 \end{cases} \Rightarrow K(6,4; 1,8).$$

Обчислюємо екстремальне значення цільової функції в *K(6,4; 1,8):*

$$Z_{min} = -6,4 - 1,8 = -8,2.$$

3.Симплекс-метод

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних вдаються до загального методу розв'язування задач лінійного програмування — так званого ***симплекс-методу***. Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, **симплекс-метод** — це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.
2. Побудова симплексної таблиці.
3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.
4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.
5. Повторення дій починаючи з п. 3.

Розглянемо докладніше кожний з етапів алгоритму.

1. Визначення першого опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування в канонічній формі, тобто у вигляді обмежень-рівнянь з невід'ємними правими частинами. Якщо в умові задачі присутні обмеження-нерівності, то перетворення їх на рівняння виконується за допомогою ***додаткових змінних***, які вводяться до лівої частини обмежень типу «≤» зі знаком «+», а до обмежень типу «≥» — зі знаком «–». У цільовій функції задачі додаткові змінні мають коефіцієнт нуль.

Після зведення задачі до канонічного вигляду її записують у векторній формі. За означенням опорного плану задачі лінійного програмування його утворюють m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m-вимірного простору (де m — кількість обмежень у задачі лінійного програмування).

На цьому етапі розв'язування задачі можливі такі випадки:

- після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;
- у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують ***метод штучного базису***. Ідея його полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень деякі змінні з коефіцієнтом +1, які називаються ***штучними***. У цільовій функції задачі лінійного програмування

штучні змінні мають коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M — досить велике додатне число.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають ***базисними***, а всі інші змінні — ***вільними***. Їх прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування.

2. Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність подають у вигляді симплексної таблиці.

У першому стовпчику таблиці — «Базис» — записують базисні змінні опорного плану, причому в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі.

Наступний стовпчик симплексної таблиці — «$C_{баз}$» — коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

У третьому стовпчику — «План» — записують значення базисних змінних і відшукувані у процесі розв’язування задачі компоненти оптимального плану.

У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі лінійного програмування.

3. Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з наведеною далі теоремою.

! **Теорема** (ознака оптимальності опорного плану). Опорний план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх $j\ (j = \overline{1,n})$ виконується умова

$$Z_j - C_j \geq 0 \qquad \text{(для задачі на max)}$$

або

$$Z_j - C_j \leq 0 \qquad \text{(для задачі на min)}$$

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є також вимога, щоб у процесі розв’язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю.

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначають за формулою

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$C_{баз}$» та «x_j» мінус відповідний коефіцієнт C_j. Розраховані оцінки записують в окремий рядок симплексної таблиці, який називають ***оцінковим***.

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

а) усі $\Delta_j \left(j = \overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;

б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних a_{ik} напрямного стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$. Вибирають найменше значення θ, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{rk} і методу Жордана—Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінковому рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $Z_j - C_j$ $(j = \overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

<u>Задача 1.</u>

$$x_1+x_2+x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad -x_4 \quad -2x_6 &= 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 &= 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 2x_6 &= 5 \end{aligned}$$

Складаємо симлекс-таблицю:

	C_j	1	1	1	0	0	0		
$C_Б$	$X_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_0	Θ
1	x_1	1	0	0	-1	0	-2	5	-
1	x_2	0	1	0	***(2)***	-3	1	3	3/2
1	x_3	0	0	1	2	-5	2	5	5/2
	Δ	**0**	**0**	**0**	**-3**	**8**	**-1**		
1	x_1	1	½	0	0	-3/2	-3/2	13/2	
0	x_4	0	½	0	1	-3/2	1/2	3/2	
1	x_3	0	-1	1	0	-2	1	2	
	Δ	**0**	**3/2**	**0**	**0**	**7/2**	**1/2**		

На першому кроці базисними змінними є x_1,x_2 та x_3, отже вектор $\boldsymbol{C_Б}$ має координати *(1,1,1)*. Оцінки при базисних змінних дорівнюють нулю. Для інших змінних оцінки треба обчислити за формулою $\Delta_j=c_j-(\boldsymbol{C_Б}, \boldsymbol{X_j})$. Таким чином,

$$\Delta_4=0-((1,1,1),(-1,2,3))=-3;$$
$$\Delta_5=0-((1,1,1),(0,-3,-5))=8;$$
$$\Delta_6=0-((1,1,1),(-2,1,2))=-1.$$

Далі вибираємо стовпчик з максимальною за модулем від'ємною оцінкою (тобто 4-й). Для 4-го стовпчика визначаємо мінімальне

$$\Theta: \quad min\left(\frac{3/2}{2}, \frac{5/2}{3}\right) = \frac{3}{4},$$

мінімум досягається для $i=2$. Вибираємо елемент *(2;4)* за розв'язуючий та робимо перетворення Жордана-Гауса. У другій таблиці всі $\Delta \geq 0$, тобто знайдено оптимальний розв'язок, який знаходимо із стовпця A_0 останньої таблиці:

$$\boldsymbol{X_{опт}=(13/2;\ 0;\ 2;\ 3/2;\ 0;\ 0;\ 0),}$$
$$\boldsymbol{F_{min}=13/2+2=17/2.}$$

II. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Доцільно порекомендувати студентам мати зошити для конспектів лекцій і практичних занять в першому семестрі окремо.

III. ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Карманов В.Г.* Математическое программирование: Учебное пособие. – М.: Наука, 1975. – 272с.