Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №2
«Необходимые и достаточные условия существования безусловного экстремума»
по курсу
«Методы оптимизации»

Студент группы ИУ9-82 Иванов Г.М

Преподаватель Каганов Ю.Т.

Москва, 2019

Contents

1 Цель работы

1.1 Задача 2.1

1. Исследование необходимых и достаточных условий существования экстремума функции без учета ограничений (безусловный экстремум).

2. Вычисление экстремумов функции.

2 Постановка задачи

2.1 Задача 2.1

Дано: Дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$f(x) = 5x_1^6 - 36x_2^5 + \frac{165}{2}x_1^4 - 60x_2^3 + 36, \tag{1}$$

определенная на множестве $X \in R^n$. Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^e \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на R^n:

$$f(x^e) = \min_{x \in R^n} f(x); \quad f(x^e) = \max_{x \in R^n} f(x). \tag{2}$$

С помощью заданного алгоритма решить поставленную задачу:

1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка в форме $\nabla f(x^e) = 0$ и найти стационарные точки x^e в результате решения системы n в общем случае нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Для численного решения могут быть использованы методы простой итерации - Зейделя или Ньютона.

2. В найденных стационарных точках x^e проверить выполнение достаточных, а если они не выполняются, то необходимых условий второго порядка с помощью одного из двух способов.

3. Вычислить значения $f(x^e)$ в точках экстремума.

2.2 Задача 2.2

Дано: система

$$\begin{cases} f(x) = (x_1^2 - x_1)^4 + (x_2 + 2)^2 - 10 \to extr \\ g_1(x) = x_1^2 - x_2^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x) = -x_1 \leq 0 \\ g_3(x) = -x_2 \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.

2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка.

3. Решить систему уравнений для двух случаев $\lambda_0 = 0$ и $\lambda \neq 0$. В результате находится точка x^e.

4. Для таких точек проверить достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка.

5. Вычислить значения функции $f(x)$ в точках экстремума x_k^e.

3 Исследование

3.1 Задача 2.1

3.1.1 Шаг 1

Необходимо найти стационарные точки функции:

$$f(x) = 5x_1^6 - 36x_2^5 + \frac{165}{2}x_1^4 - 60x_2^3 + 36, \quad x_i \in [-13, 10]. \tag{4}$$

- **Необходимые условия экстремума первого порядка**

  Пусть точка $x^e \in R^n$ - точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^e. Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x^e равен нулю т.е. $\nabla f(x^e) = 0$.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} f'_{x_1}(x) \\ f'_{x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30x_1^5 + 330x_1^3 \\ -180x_2^4 - 180x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

В результате решения системы были получена стационарная точка - $(0, 0)$

3.1.2 Шаг 2

Нужно проверить выполнение необходимых и достаточных условий второго порядка для всех стационарных точек.

- **Необходимое условие экстремума второго порядка**

  Пусть точка $x^e \in R^n$ точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^e. Тогда матрица Гессе $H(x^e)$ функции $f(x)$, вычисленной в точке x^e является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной) т.е.

$$H(x^e) \geq 0, \quad (H(x^e) \leq 0).$$

- **Достаточные условия экстремума**

  Пусть функция $f(x)$ в точке $x^e \in R^n$ дважды дифференцируема, её градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной) т.е.

  $$\nabla f(x^e) = 0 \text{ и } H(x^e) > 0, \quad (H(x^e) < 0)$$

  Тогда точка $x^e \in R^n$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n.

Запишем матрицу Гессе для фукнции $f(x)$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 150x_1^4 - 990x_1^2 & 0 \\ 0 & -720x_2^3 - 360x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1^4 - 33x_1^2 & 0 \\ 0 & -24x_2^3 - 12x_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Для точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$:

$$H(f(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

, в этом случае невозможно определить знак матрицы Гессе с помощью угловых и главных миноров. Поэтому попробуем определить экстремум с помощью собственных значений матрицы Гессе:

Для точки $(x_1, x_2) = (0, 0)$:

$$|H(f(x_1, x_2)) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Найдём решение квадратичного уравнения:

$$\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \tag{9}$$

Так как собственное значение равно нулю, то можно сказать, что точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ не является экстремумом.

3.1.3 Шаг 3

Необходимо вычислить значения функции

$$f(x) = 5x_1^6 - 36x_2^5 - \frac{165}{2}x_1^4 - 60x_2^3 + 36, \quad x_i \in [-13, 10]. \tag{10}$$

в точках экстремума.

Была найдена только одна стационарная точка $\mathrm{M} = (0, 0)$. Значение функции в ней равно 36.

3.2 Задача 2.2

3.2.1 Шаг 1

Обобщённая функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x) = \tag{11}$$

$\lambda_0((x_1^2 - x_1)^4 + (x^2 + 2)^2 - 10) + \lambda_1(x_1^2 - x_2^2 - 1) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2$

3.2.2 Шаг 2

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

А) Условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по x:

$$\frac{\partial L(x^e, \lambda_0^e, \lambda^e)}{\partial x_1} = 4\lambda_0(x_1 - 1)^3(2x_1 - 1)x_1^3 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L(x^e, \lambda_0^e, \lambda^e)}{\partial x_2} = 2\lambda_0(x_2 + 2) - 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0 \tag{13}$$

Б) Условие допустимости решения:

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x) = -x_1 \leq 0 \\ g_3(x) = -x_2 \leq 0 \end{cases} \tag{14}$$

В) Условия неотрицательности (неположительности) для условного минимума (максимума):

$$\lambda_j^e \geq 0 \quad (\lambda_j^e \leq 0) \quad j = 1, 2, 3 \tag{15}$$

Г) Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1^e g_1(x^e) = \lambda_1^e(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \tag{16}$$

$$\lambda_2^e g_2(x^e) = -\lambda_2^e x_1 = 0. \tag{17}$$

$$\lambda_3^e g_2(x^e) = -\lambda_3^e x_2 = 0. \tag{18}$$

3.2.3 Шаг 3

Решим систему при $\lambda_0^e = 0$ с помощью сервиса WolframAlpha.com:

$$\begin{cases} 2\lambda_1^e x_1 - \lambda_2^e = 0 - 2\lambda_1^e x_2 - \lambda_3^e = 0, \\ \lambda_1^e(x_1^2 - x_2^2 - 1) = 0, \\ -\lambda_2^e x_1 = 0, \\ -\lambda_3^e x_2 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Аналогично решим систему при $\lambda_0^e \neq 0 \quad (\lambda_0^e = 1)$:

$$\begin{cases} 4(x_1 - 1)^3(2x_1 - 1)x_1^3 + 2\lambda_1^e x_1 - \lambda_2^e = 02(1 - \lambda_1^e)x_2 - \lambda_3^e + 4 = 0, \\ \lambda_1^e(x_1^2 - x_2^2 - 1) = 0, \\ -\lambda_2^e x_1 = 0, \\ -\lambda_3^e x_2 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Были получены следующие значения:

- $\lambda_1 = -48, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4, x_1 = -1, x_2 = 0$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = -2$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = -2$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, x_1 = 1, x_2 = -2$
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4, x_1 = 0, x_2 = 0$

Следовательно точки $(0, 0)$ удовлетворяют поставленным условиям и являются регулярными точками. А так же она будет локальным минимумом, так как в них $\lambda_j^e \leq 0$ для $j = 1, 2, 3$.

3.2.4 Шаг 4

Второй дифференциал функции Лагранжа в найденной регулярной точке $x^e = (0, 0)$ равен:

$$d^2L(x^e, \lambda^e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_i dx_j = 2\lambda_1 dx_1^2 + 2(1 - \lambda_1) dx_2^2 = 0 \tag{21}$$

Проверим условия, накладываемые на первые дифференциалы активных в точке x^e ограничений-неравенств.

$$dg_2(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial g_i} dx_i = -dx_1 = 0 \tag{22}$$

$$dg_3(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_3}{\partial g_i} dx_i = -dx_2 = 0 \tag{23}$$

Следовательно, точка $x^e = (0, 0)$ является седловой точкой.

3.2.5 Шаг 5

Необходимо вычислить значения функции

$$f(x) = (x_1^2 - x_1)^4 + (x_2 + 2)^2 - 10 \tag{24}$$

в точках экстремума.

$f(x) = -6$ в стационарных точках $(0, 0)$.