**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»**
**(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ Информатики и систем управления

КАФЕДРА Теоретической информатики и компьютерных технологий

# Лабораторная работа № 6

«Метод наискорейшего спуска поиска минимума функции многих переменных»

по курсу «Численные методы»

Выполнила:

студент группы ИУ9-61Б

Яровикова Анастасия

Проверила:

Домрачева А. Б.

Москва, 2023

## 1. Цель

Целью данной работы является изучение метода наискорейшего спуска для поиска минимума функции многих переменных и сравнение полученного результата со значением минимума функции, найденным аналитически.

**Постановка задачи**

**Дано:** функция многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и точка $X^0$;

**Задание:**

- Найти минимум функции двух переменных с точностью $\varepsilon = 0.001$, начиная итерации из точки $X^0$;
- Найти минимум аналитичности;
- Сравнить полученные результаты.

**Индивидуальный вариант:**

$f(x) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_1 + x_2,\ X^0 = (0,0).$

## 2. Основные теоретические сведения

Метод наискорейшего спуска является итерационным. Пусть для заданной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на -том шаге имеется некоторое приближение к минимуму $X^k = \left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$.

Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi_k(t)$:

$$\varphi_k(t) = f\left(X^k - t * grad\, f(X^k)\right),$$

где вектор $grad\, f(X^k) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X^k), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X^k)\right)$ – градиент функции $f$ в точке $X^k$.

Функция $\varphi_k(t)$ представляет собой ограничение функции $f$ на прямую градиентного спуска, проходящую через точку -го приближения $X^k$.

Для следующего приближения к точке минимума полагаем

$$X^{k+1} = X^k - t^* * grad\, f(X^k),$$

где точка $t^*$– это минимум функции $\varphi_k(t)$.

Процесс поиска минимума продолжается до тех пор, пока $\|grad\ f(X^k)\| = \max_{1\le i\le n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^k)\right|$ не станет меньше допустимой погрешности ε.

В двумерном случае итерация имеет следующий вид:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = \left(x_k - t^*\frac{\partial f}{\partial x}, y_k - t^*\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

где $t^* = -\frac{\varphi_k'(0)}{\varphi_k''(0)}$;

$$\varphi_k'(0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

$$\varphi_k''(0) = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial f^2}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

где все производные берутся в точке $(x_k, y_k)$.

## 3. Реализация

Листинг 1. Метод наискорейшего спуска поиска минимума функции многих переменных

```
from sympy import *
import math

eps = 0.001

x, y = symbols('x y')

def f():
    return 3*x**2 - 3*x*y - 4*y**2 - 2*x + y

def analytical_min():
    return 1/3, 0.0

print('f: ', f())
fx = diff(f(), x)
fy = diff(f(), y)
print('df/dx: ', fx)
print('df/dy: ', fy)
print('d^2f/dx^2: ',diff(fx, x))
print('d^2f/dy^2: ',diff(fy, y))
print()
k = 0
xk, yk = 0.0, 0.0
while ( max(fx.subs({x: xk, y: yk}), fy.subs({x: xk, y:yk})) >= eps):
    phi1 = - (fx.subs({x: xk, y: yk}))**2 - (fy.subs({x: xk, y: yk}))**2
```

```
    phi2 = diff(fx, x).subs({x: xk, y: yk}) * (fx.subs({x: xk, y: yk}))**2 + 2 *
diff(fx , y).subs({x: xk, y: yk}) * fx.subs({x: xk, y: yk}) * fy.subs({x: xk, y: yk})
+ diff(fy, y).subs({x: xk, y: yk}) * (fy.subs({x: xk, y: yk}))**2
    t_star = - phi1 / phi2
    xk = xk - t_star * fx.subs({x: xk, y: yk})
    yk = yk - t_star * fy.subs({x: xk, y: yk})
    k +=1

print(f'methods min {xk, yk}')
print (f'analytical min: {analytical_min()}')
print(f'difference: {math.fabs(xk -analytical_min()[0]), math.fabs(yk -
analytical_min()[1])}')
```

## 4. Результаты

```
f:  3*x**2 - 3*x*y - 2*x - 4*y**2 + y
df/dx:  6*x - 3*y - 2
df/dy:  -3*x - 8*y + 1
d^2f/dx^2:  6
d^2f/dxdy:  -3
d^2f/dy^2:  -8

methods min (0.333329076144370, 0.000103369186268979)
analytical min: (0.3333333333333333, 0.0)
difference: (4.25718896357452e-6, 0.000103369186268979)
```

## 5. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен и реализован метод наискорейшего спуска, получено приближенное значение минимума функции двух переменных и был найден ее минимум аналитичности. В результате тестирования для приведенной функции после 4 итераций вычислительная погрешность составила около 0.0001.