Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатики и систем управления

КАФЕДРА Теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа № 2

«Сравнительный анализ методов численного интегрирования»

по курсу «Численные методы»

Выполнила:

студент группы ИУ9-61Б

Яровикова Анастасия

Проверила:

Домрачева А. Б.

Москва, 2023

1. Цель

Целью данной работы является сравнение по быстродействию методов численного интегрирования:

1. Метод центральных прямоугольников
2. Метод трапеций
3. Метод Симпсона

2. Постановка задачи

Дано: Интеграл I

$$\int_a^b f(x)dx$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Найти: Значение интеграла

$$I^* \approx I$$

При заданной точности $\varepsilon < 0.01$.

Индивидуальный вариант: $f(x) = xcos^2(x)$, $a = 0, b = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos^2(x)dx = 0.036685$$

3. Основные теоретические сведения

3.1 Метод центральных прямоугольников

Метод заключается в вычислении площади под графиком подынтегральной функции с помощью суммирования площадей прямоугольников, ширина которых определяется шагом разбиения (расстояние между узлами интегрирования), а высота – значением подынтегральной функции в узле интегрирования.

Пусть требуется определить значение интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда отрезок разбивается на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Получаем разбиение данного отрезка точками

$$x_{i-0.5} = a + (i - 0.5)h \qquad i = \overline{1, n}$$

Тогда приближенное значение интеграла на всем отрезке будет равно:

$$I^* = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-0.5}) = h\sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 0.5)h)$$

3.2 Метод трапеций

Метод заключается в вычислении площади под графиком подынтегральной функции с помощью суммирования площадей трапеций, высота которых определяется шагом разбиения (расстояние между узлами интегрирования), а высота – значением подынтегральной функции в узле интегрирования.

Пусть требуется определить значение интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда отрезок разбивается на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Получаем разбиение данного отрезка точками

$$x_i = a + ih \qquad i = \overline{1, n}$$

Тогда приближенное значение интеграла на всем отрезке будет равно:

$$I^* = h\left(\frac{f(a) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(b)}{2}\right) =$$

$$h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

3.3 Метод Симпсона

Метод заключается в приближении функции на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом 2 степени функции $P_2(x)$

$$P_2(x) = f_{i-0.5} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}(x_i - x_{i-0.5}) + \frac{f_i - 2f_{i-0.5} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}(x_i - x_{i-0.5})^2$$

Тогда приближенное значение интеграла на всем отрезке будет равно:

$$I^* = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-0.5}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

3.4 Уточнение значения интеграла по Ричардсону

$I \approx I_h^* + O(h^k)$, где k – порядок точности метода, I_h^* – приближенное значение интеграла, вычисленного с помощью метода с шагом h.

Для метода средних прямоугольников и метода трапеций $k = 2$.
Для метода Симпсона $k = 4$.
$O(h^k) \approx ch^k$, где c – некоторая константа, h – шаг.

Считаем, что вычисления проводятся без вычислительной погрешности, тогда можно записать строгое равенство $I = I_h^* + ch^k$ для шага h

$I = I_{\frac{h}{2}}^* + c\left(\frac{h}{2}\right)^k$ для шага $\frac{h}{2}$

Из равенств получаем уточненное значение интеграла:

$$I = I_{\frac{h}{2}}^* + \frac{I_{\frac{h}{2}}^* - I_h^*}{2^k - 1}$$

Где значение R – уточнение по Ричардсону:

$$R = \frac{I_{\frac{h}{2}}^* - I_h^*}{2^k - 1}$$

Данная величина используется для компенсации методологической погрешности численных методов интегрирования.

Чтобы построить процедуру приближенного вычисления интеграла с заданной точностью ε, используется правило Рунге:

$$|R| < \varepsilon$$

4. Реализация

Листинг 1. Численное интегрирование

```
import math


eps = 0.01


def testFunc(x):
    return x * math.cos(x) ** 2
     # return math.exp(x)

```

```
def richardsonFormula(I_h, I_h2, k):
    return (I_h - I_h2) / (2 ** k - 1)


def rect(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = sum(f(a + (i - 0.5) * h) for i in range(1, n
+ 1))
    return h * s


def trap(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s = sum(f(a + i * h) for i in range(1, n))
    return h * ((f(a) + f(b)) / 2 + s)


def simp(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    s1 = sum(f(a + i * h) for i in range(1, n))
    s2 = sum(f(a + (i - 0.5) * h) for i in range (1,
n + 1))
    s3 = sum(f(a + (i - 1) * h) for i in range(1, n +
2))
    s = s1 + 4 * s2 + s3
    return h / 6 * s


def res(metd, k, a, b, f):
    n = 1
    R = 100
    iter = 0
    I_h = 0
    while not (abs(R) < eps):
```

```
        n *= 2
        I_h2 = I_h
        I_h = metd(f, a, b, n)
        R = richardsonFormula(I_h, I_h2, k)
        iter += 1
    print(f' iterations: {iter}')
    print(f' res: {I_h}')
    print(f' res + Richardson: {I_h + R}')

if __name__ == "__main__":
    for i in range(1,5) :
        print("\n-----------\nEPS = " + str(eps))
        print("\nCentral rectangles method: ")
        res(rect, 2, 0, math.pi, testFunc)
        print("\nTrapezoids method: ")
        res(trap, 2, 0, math.pi, testFunc)
        print("\nSimpson`s method: ")
        res(simp, 4, 0, math.pi, testFunc)
        eps = eps / 10
```

5. Результаты

Для тестирования выбран интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos^2(x)dx$$

В качестве ε были выбраны следующие значения:

$$\varepsilon = 0.001, \varepsilon = 0.0001, \varepsilon = 0.00001$$

Таблица 1 – Результаты программы

Метод	Кол-во итераций	Значение интеграла	Значение интеграла с уточнением по Ричардсону
$\varepsilon = 0.001$			
Метод центральных прямоугольников	4	0.36725322733841864	0.36684480994171986
Метод трапеций	4	0.36604553395806505	0.3668565158148817
Метод Симпсона	2	0.3669524667895847	0.3668393717934952
$\varepsilon = 0.0001$			
Метод центральных прямоугольников	6	0.36687538006255127	0.3668502538890432
Метод трапеций	6	0.36680006961565864	0.36685029927146423
Метод Симпсона	3	0.3668565158148816	0.3668501190832347
$\varepsilon = 0.00001$			
Метод центральных прямоугольников	7	0.366856550324328	0.36685027374492024
Метод трапеций	8	0.3668471375817167	0.3668502751625873
Метод Симпсона	3	0.3668565158148816	0.3668501190832347

6. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены 3 метода численного интегрирования: метод центральных прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Данные методы были реализованы на языке программирования Python.

Самым точным среди рассмотренных трех методов оказался метод Симпсона.

Анализируя оставшиеся два метода, приходим к выводу, что метод средних прямоугольников точнее метода трапеций.