Lecture 01: 信号处理及系统基本概念

Kai Yu and Yanmin Qian

Cross-media Language Intelligence Lab (X-LANCE)
Department of Computer Science & Engineering
Shanghai Jiao Tong University

2021

目录

目录

- 信号与系统概述
  - 基本数学知识的复习
  - 信号与系统分类

信号与系统（基本概念）

何为信号？何为系统？

人类生活和生产需要相互交流“信息”，信息要用某种物理方式表达出来，如语言，文字或图像等约定符号. 这种约定方式组成的符号就是“消息”. 消息依附于某一物理量的变化上及构成了“信号”.

几个相关概念：

“信号”：

“符号”，包含某些物理现象之行为或本质的信息

“函数”，表示为一个或多个（独立）变量的函数

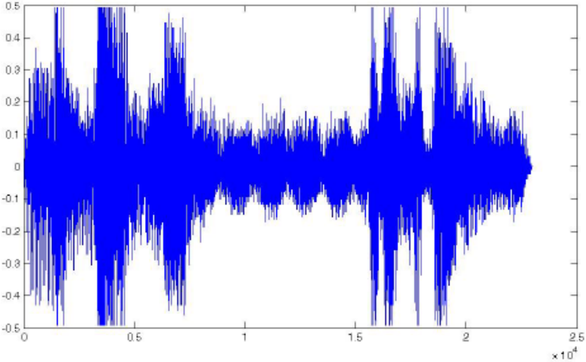
确定型号 vs. 随机信号

“消息”，信号的具体内容

“信息”，抽象的、本质的内容，信号的内涵

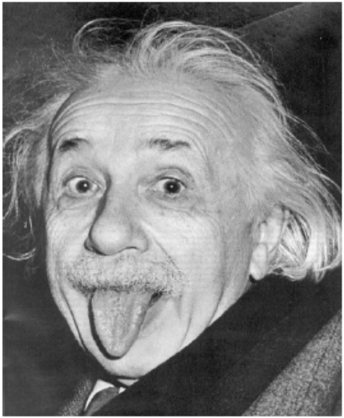
信号与系统（基本概念）

举例：声波 (时间的函数)



信号与系统（基本概念）

举例：图像 (位置的函数)

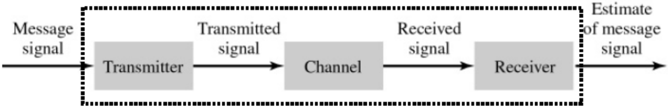


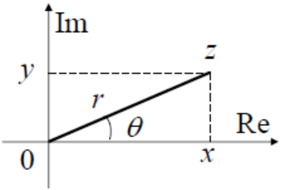
信号与系统：

举例：典型通信系统

- 输入信号为语音或数据
- 输出信号为估计的输入信号
- 通信系统包括发送器、信道、接收器等子系统

“系统”，是一个由若干互有关联的单元组成的并具有某种功能以用来达到某些特定目的的有机整体.

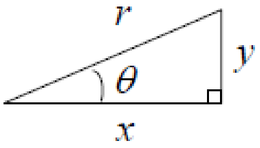




复平面

$$z = x + jy = re^{j\theta}$$

$$z_1 = x_1 + jy_1(rectangular)$$
$$= r_1 e^{j\theta_1}(\text{极坐标也可表示成}r_1\angle\theta_1)$$
$$r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
$$\theta_1 = \arg z_1 = \tan^{-1}\frac{y_1}{x_1}$$
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta(\text{欧拉公式})$$
$$z_1^* = x_1 - jy_1 = r_1 e^{-j\theta_1}(\text{共轭复数})$$
$$z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$
$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$



$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

周期与非周期：

$$f(t) = f(t+nT), \quad n = 0, \pm 1, \cdots \text{任意整数}$$

连续与离散：

时间轴连续/离散

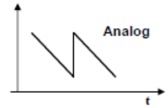
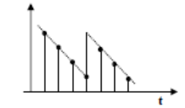
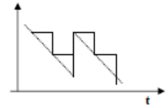
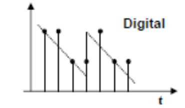
模拟与数字：

时间轴及幅度轴连续或离散

信号与系统分类

信号的描述、分类和典型示例

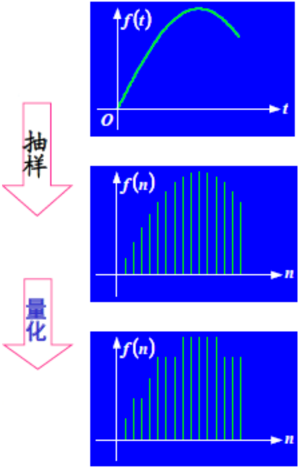
举例-1：

时间 \ 幅度	连续	离散
连续		
离散		

NOTE：数字信号可以是多电平信号 (多进制数字信号)

举例-2：

- 模拟信号：时间和幅值均为连续
- 抽样信号：时间离散，幅值连续
- 数字信号：时间和幅值均为离散



典型信号示例：(主要连续信号，离散信号在后面讲)

(1) 指数信号 $f(t) = Ke^{at} \quad a < 0$ 衰减函数，实际中常用

(2) 正弦信号 $f(t) = K\sin(\omega t + \theta), K$振幅、$\omega$角频率、$\theta$初相位

(3) 复指数信号 $f(t) = Ke^{st}, \quad s = \sigma + j\omega$

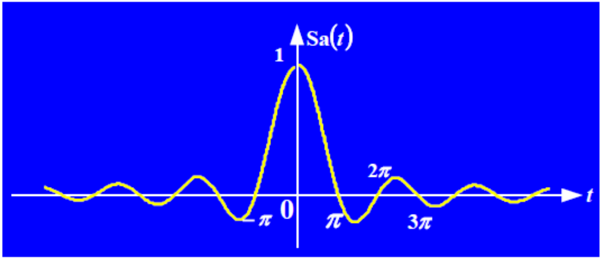
(4) 抽样信号 $Sa(t) = \dfrac{\sin t}{t} \quad (\text{Oppenheim} \sin c(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t})$

性质：

$$\int_0^{\infty} Sa(t)dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{或} \quad \int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)dt = \pi$$

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t}$$

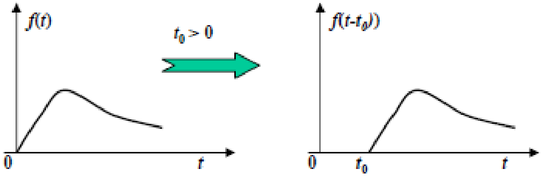
周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



(也称为抽样函数, 通信系统广泛使用.)

移位 (时移或延时)、反褶、尺度倍乘 (压缩与扩展)、微分、积分、加、乘

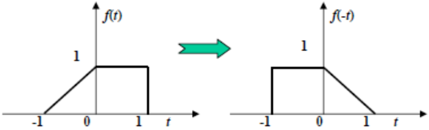
(1) 移位 $f(t-t_0)$



$t_0 > 0$右移　$t_0 < 0$左移

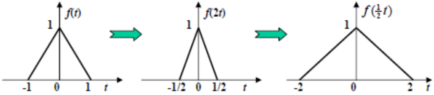
举例：移动通信中的多径传播现象

(2) 反褶 $f(-t)$



时间轴反转，卷积中的一个非常重要的过程

(3) 尺度变换 $f(at)$



尺度变换　$f(at)$

$a > 1$压缩，$a < 1$扩展

(4) 微分　$f^{'}(t) = \frac{d}{dt}f(t)$

(5) 积分　$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

(6) 相加　$f_1(t) + f_2(t)$

(7) 相乘　$f_1(t) \cdot f_2(t)$

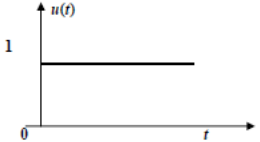
细节自学

奇异信号：函数本身或其导数具有不连续点，实际中不存在，但分析中很有用

本节着重介绍阶跃信号、冲激信号。

单位阶跃：Unit Step Function

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



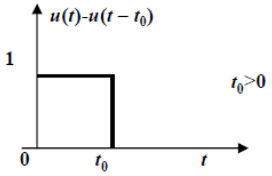
注意：在 $t = 0$ 不予定义或规定为 1/2，本课程中规定为 1/2
举例：在 $t = 0$ 接入直流 (恒压源或恒流源)

$\Rightarrow$

(1) 延迟的阶跃 $u(t - t_0)$

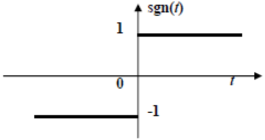
(2) 矩形脉冲

$$u(t) - u(t - t_0)$$



(3) 符号函数

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

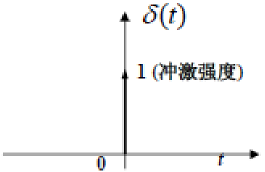


同样规定$\mathrm{sgn}(0) = 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}(t) = 2u(t)$-1

单位冲激：Unit Impulse Function$\delta(t)$

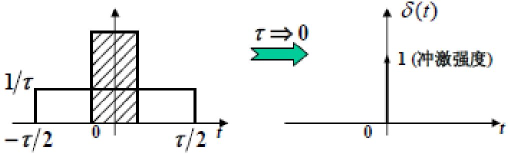
Dirac 定义 (狄拉克)

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases}$$



某些物理现象需“时间极短，取值极大”之数学模型，如数字通信中的抽样脉冲

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[U(t+\frac{\tau}{2}) - U(t-\frac{\tau}{2})\right]$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau}\left[U(t+\frac{\tau}{2}) - U(t-\frac{\tau}{2})\right] dt = 1$$ 面积恒为 1，单位冲激

注意：单位冲激用箭头表示，如强度为 E，则表示为 $E\delta(t)$

$\delta(t)$ 函数的性质:

(1) 若 $f(t)$ 在 $t=0$ 连续，且处处有界

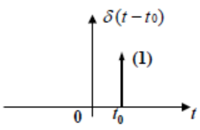
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(0)dt = f(0)$$

$$\Rightarrow \delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$$

筛选或抽样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

$$\Rightarrow \delta(t-t_0)f(t) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$



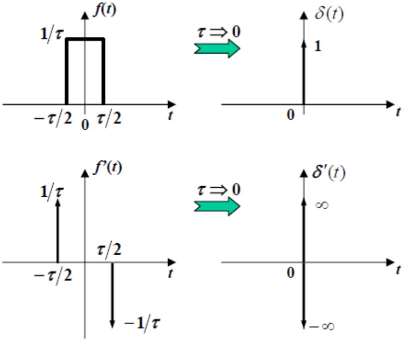
(2) 偶函数 $\delta(t) = \delta(-t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(-\tau) d(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(0) d\tau = f(0)$$

(3)$\delta(t)$ 与 $u(t)$ 之间的关系

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = 1 & (t > 0) \\ \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = 0 & (t < 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t) \\ \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \end{cases}$$

冲激偶函数　$\delta'(t)$　doublet



$\delta^{'}(t)$ 函数的性质：

(1)$\delta^{'}(t)$ 具有位于 0 点的双脉冲，关于轴互为镜像，强度为无穷大

(2)$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{'}(t)dt = 0$ 奇函数

(3)$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{'}(t)dt = -f^{'}(0)$

证明：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{'}(t)dt = f(t)\delta(t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{'}(t)\delta(t)dt = -f^{'}(0)$

系统模型及其分类

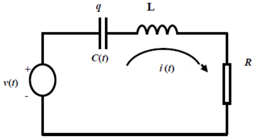
系统分类:
(1) 线性、非线性 (Linear & Non-linear)
线性系统具有叠加性和均匀性 (倍乘)，齐次性 homogeneity

$$\begin{array}{l} e_1(t) \rightarrow r_1(t) \\ e_2(t) \rightarrow r_2(t) \end{array} \Rightarrow a_1e_1(t) + a_2e_2(t) \rightarrow a_1r_1(t) + a_2r_2(t)$$

(2) 时变、时不变 (Time-variant, Time-invariant)

若 C 是变容二极管 C(t)：电容量受外界因素控制而随时间变化 (元件参数是时间的函数)

$$LC(t)\frac{d^2q(t)}{dt^2}+RC(t)\frac{dq(t)}{dt}+q(t)=C(t)v(t)$$



(3) 记忆、无记忆 (memory、memoryless)
with memory：动态系统、微分方程
without memory：即时系统、代数方程

系统模型及其分类

(4) 连续、离散

按照处理和传输的信号是连续信号还是离散信号来分

Continuous 微分系统 Differential

Discrete 差分系统 Difference

(5) 因果系统 causal

当$t < 0, e(t) = 0 \Rightarrow t < 0, r(t) = 0$ 有始系统

非因果系统：Nonanticipated 实际上少见，但有例

(6) 可逆系统：

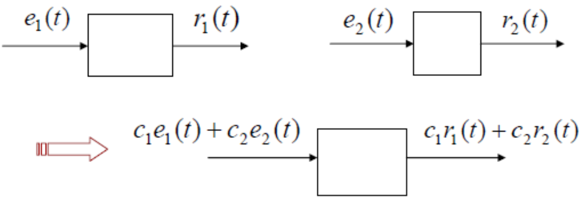
不同的输入导致不同的输出，否则为不可逆系统

本课程着重讨论线性时不变系统

系统模型及其分类

线性时不变系统 (LTI)

线性：叠加性、齐次性



时不变：响应形式与激励施加的时刻无关

$$e(t) \rightarrow r(t) \Rightarrow e(t-t_0) \rightarrow r(t-t_0)$$

线性、时不变 $\Rightarrow$ 微分特性

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t)-e(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t)-r(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \frac{de(t)}{dt} \quad \xrightarrow{e(t)} \boxed{\quad\quad} \xrightarrow{r(t)} \quad \frac{dr(t)}{dt}$$

Recall：任意信号可以用冲激信号的组合表示，即

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

将它作用到冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统，则系统的响应为

$$\begin{aligned} r(t) = H[e(t)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)H[\delta(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 就是卷积积分，用 * 标记

$$\Rightarrow r(t) = e(t) * h(t)$$

一般地，对于任意两个信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，二者卷积定义为

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

目录

- 信号与系统概述
  - 基本数学知识的复习
  - 信号与系统分类
- 连续时间系统
  - 傅里叶变换
  - 拉普拉斯变换
- 离散时间系统
  - Z 变换
  - 离散时间 (序列) 傅里叶变换

目录

- 连续时间系统
  - 傅里叶变换
  - 拉普拉斯变换

1822 Fourier 证明了将周期信号展开为正弦级数原理 ⇒ 傅立叶级数

傅立叶原理:
任何连续测量的时序或信号，都可以表示为不同频率的正弦波信号的无限叠加
傅立叶变换：另一维思维空间
离散傅立叶变换：数字信号处理
快速傅立叶变换 (并不是傅里叶发明):
通信应用，4G

什么是变换?

- 通过提取信号特征进行信号分析的一种工具 (数学工具)
- 简言之，一种特征 – > 变换 – > 另一种特征

傅立叶变换 (F-变换):

- 时域 (时间域) – > 频域 (频率域)

本章的思路:

- 傅立叶级数 – > 傅立叶变换 – > 卷积定理 – > 抽样定理

(一) 三角函数形式级数展开 (正交函数集 $\{\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$)
周期函数 $f(t)$，周期为 T_1，角频率为 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$，频率 $f_1 = \frac{1}{T_1}$

$$
\text{当}\begin{cases} \text{信号周期内间断点数有限} & \\ \text{信号周期内极大/极小值数目有限} & \Rightarrow \text{Dirichlet 条件} \\ \text{一周期内信号可积} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)|dt < \infty & \end{cases}
$$

可展开：$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)dt$ $a_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos n\omega_1 t dt$

$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin n\omega_1 t dt$

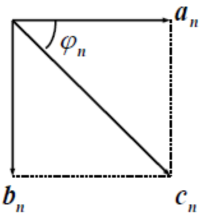
根据三角函数的性质，可将余弦分量和正弦分量合并：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$c_0 = a_0$(直流分量不变)

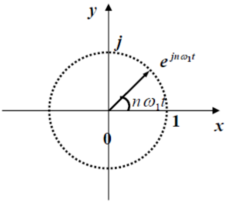
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}$$



(二) 指数形式级数展开：(正交函数集 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$)
欧拉公式：$e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j\sin n\omega_1 t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos n\omega_1 t = \dfrac{1}{2}\left(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}\right) \\ \sin n\omega_1 t = \dfrac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}\right) \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right)$$

$$F(0) = F_0 \quad F(n\omega_1) = F_n \quad F(-n\omega_1) = F_{-n}$$

$$\Rightarrow = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{(同学可自行推导)}$$

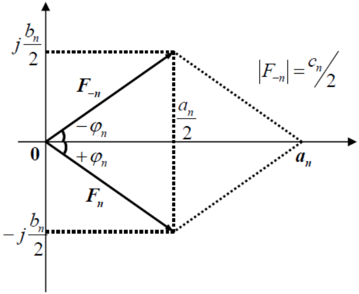
F_n 与其它系数的关系：

$$F_0 = a_0 = c_0$$

$$F_n = |F_n|e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \varphi_n\text{仍为}c_n\text{对应的}\varphi_n$$

$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

利用下图矢量分解：



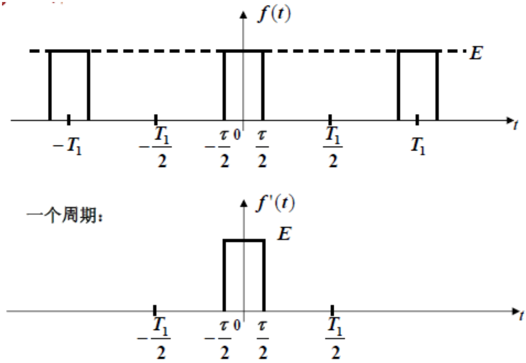
须注意的两个现象：

(1) $f(t)$ 展开式中包含复数 (数学变换的结果)

(2) 出现负频率分量 (原正频率分量的能量减半)

(3) 负频率没有物理意义，不会在实际系统中出现，其引入给信号分析带来便利。

(一) 周期矩形脉冲信号


$f(t)$
E
t
$-T_1$
$-\frac{T_1}{2}$
$-\frac{\tau}{2}$
0
$\frac{\tau}{2}$
$\frac{T_1}{2}$
T_1
一个周期:
$f'(t)$
E
t
$-\frac{T_1}{2}$
$-\frac{\tau}{2}$
0
$\frac{\tau}{2}$
$\frac{T_1}{2}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

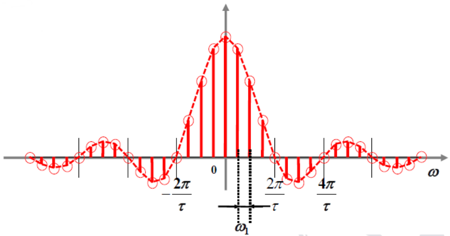
$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_1 t} dt \\
&= \frac{E}{T_1}\left(\frac{1}{-jn\omega_1}\right) e^{-jn\omega_1 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2E}{T_1 n\omega_1}\cdot\frac{e^{-jn\omega_1\tau/2} - e^{jn\omega_1\tau/2}}{-2j} \\
&= \frac{E\tau}{T_1}\cdot\frac{\sin\frac{n\omega_1\tau}{2}}{\frac{n\omega_1\tau}{2}} = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)
\end{aligned}$$

偶对称：三角函数形式展开，有 $b_n = 0$

$$c_n = a_n = 2F_n = \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$c_0 = a_0 = \frac{E\tau}{T_1}$$

频谱图 (F_n)



一般情况:

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$$

$|F_n|$频谱幅度图，φ_n频谱相位图

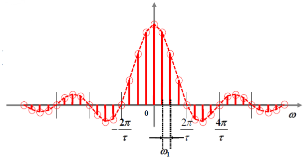
以周期矩形脉冲为例说明周期信号谱特点 (频谱分析要点)

傅里叶变换

典型周期信号的傅里叶级数

(1) 周期信号的频谱离散，谱线间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

T_1 越大，谱线越密
$T_1 \to \infty$，非周期信号，频谱连续
$\Rightarrow$ 一般信号 $\mathcal{F}$ 变换



(2) 幅度按 $S_a\left(\dfrac{n\pi\tau}{T_1}\right)$ 或 $S_a\left(\dfrac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ 变化

当 $\omega = \frac{2m\pi}{\tau}$，谱线包络过零

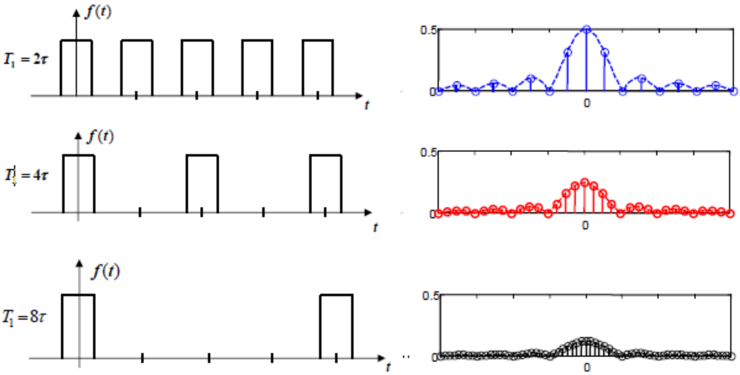
(3) 周期信号含有无穷多条谱线，但根据其包络，能量主要集中在第一个零点内 $(0 \sim \frac{2\pi}{\tau})$，即低频信号能量大。

关于周期矩形脉冲的结论：

$T\uparrow$ 谱线间隔 $\downarrow$　　零点不动

$\tau\uparrow$ 谱线间隔不动　　第一零点左移，信号带宽变窄

$T\uparrow$ or $\tau\downarrow$　　频谱幅度压低 (能量减小，相同 E)



$$T_1 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \omega_1 \to 0$$

谱线高度→0

从数学上看，当 $T_1 \to \infty$ 时，谱线高度虽很小，但其相对大小存在，且具有极为重要的意义
从物理上看，各频谱分量仍然存在，相对大小表明了特征

$$\text{由} \begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \\ F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{cases} \text{演变}$$

将 $F(n\omega_1)$ 除以 $\omega_1 \Rightarrow 2\pi \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$
定义为频谱密度（Spectrum Density）

因此得到傅立叶变换对:

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{逆变换} \end{cases}$$

$F(\omega)$ 一般为复函数，可以写作 $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$
$|F(\omega)|$ 为频谱函数的模，代表信号中各频率分量的相对大小；
$\varphi(\omega)$为$F(\omega)$ 的相位函数，表示信号中各频率分量之间的相位关系。

讨论：
(1) $f(t)$ 反映信号的时域特征，$F(\omega)$ 反映信号的频域特征，$\mathcal{F}$ 变换之本质
(2) 非周期信号同周期信号类似，可以分解为不同的频率分量；所不同的是，周期信号的频谱为离散线谱，非周期信号的频谱为连续谱，以密度函数表示。
(3) 具有离散频谱的信号，其能量集中在一些谐波分量之中。具有连续频谱的信号，其能量分布在所有频率之中，每一频率分量之能量 $\rightarrow 0$。
(4) 傅立叶级数—周期信号
傅立叶变换—非周期信号

傅里叶级数 (周期信号)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{简记} F_n$$

$$\text{周期矩形：} \; F_n = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right)$$

(1) 谱线间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

(2) 包络线零点 $m \cdot \dfrac{2\pi}{\tau}$ m 为整数

(3) 带宽 $B_W = \dfrac{2\pi}{\tau}$

傅里叶变换 (一般非周期信号)

$$\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

(一) 时域卷积

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega), \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega)F_2(\omega)$$

证明： $$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)F_2(\omega)e^{-j\omega t}d\tau = F_2(\omega)F_1(\omega)$$

(二) 频域卷积

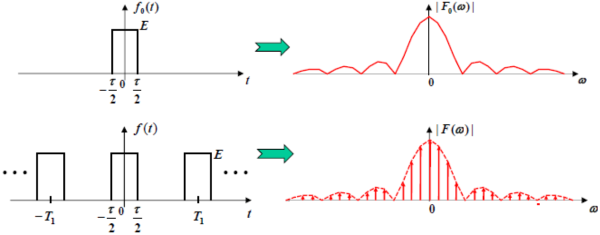
$$\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega), \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

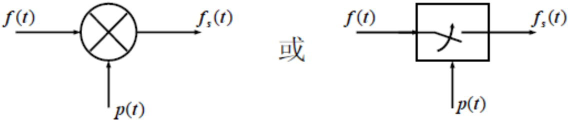
其中$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$

傅里叶变换

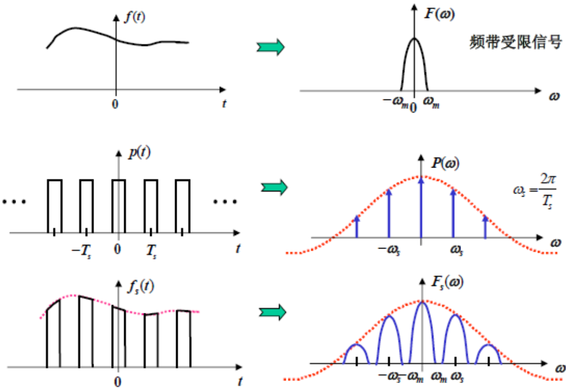
(周期) 抽样信号的傅立叶变换



(一) (周期）抽样信号：周期重复的窄脉冲（如矩形）$p(t)$
时域抽样：信号相乘



(周期）抽样信号的傅立叶变换



图解中:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \qquad P(\omega) = \mathcal{F}[p(t)]$$

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi}F(\omega) * P(\omega)$$

以下（抽样定理）的研究重点:

1 $f_s(t)$ 之频谱与 $f(t)$ 之频谱关系特征

2 能否从 $f_s(t)$ 还原出 $f(t)$? 抽样定理

3 抽样定理的实际应用——数字通信之基础

下面研究 $f_s(t)$ 与 $f(t)$ 频谱之间的关系。
对于一般周期采样信号：

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$F_s(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F(\omega - n\omega_s)$$

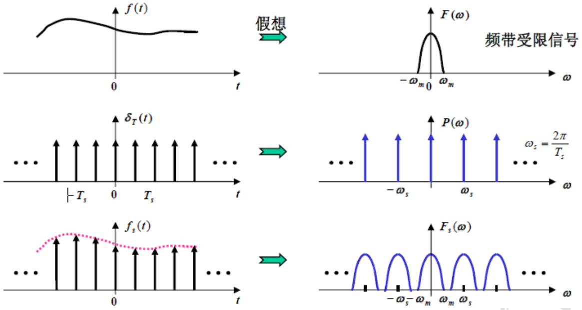
(1) 矩形抽样 ($p(t)$ 为矩形脉冲序列)

$$F_n = \frac{E\tau}{T_s} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) \qquad F_s(\omega) =$$

$$\frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

图形如前，抽样脉冲的频谱决定 $F_s(\omega)$ 包络形状，T_s 决定 $F(\omega)$ 在 $F_s(\omega)$ 中重复的疏密程度。

(2) 冲激抽样



$$F_n = \frac{1}{T_s} \quad F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

(二) 频域抽样

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F_1(\omega) = F(\omega)P(\omega) \quad \text{频率抽样}$$

$$\Rightarrow f_1(t) = f(t) * \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \frac{1}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_1)$$

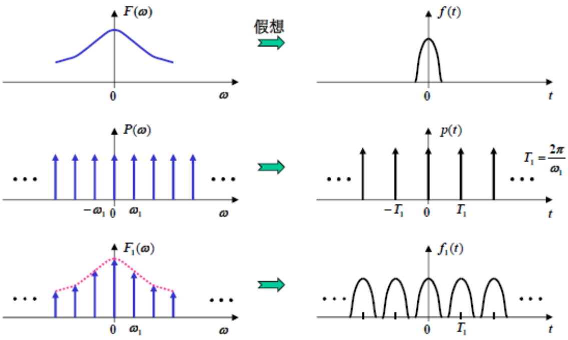
若 $f(t)$ 频谱 $F(\omega)$ 被以 ω_1 为间隔之冲激抽样，

则时域波形以 $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ 之间隔重复，

形成周期信号 $f_1(t)$

而抽样后 $F_1(\omega)$ 就是时域周期信号之离散频谱

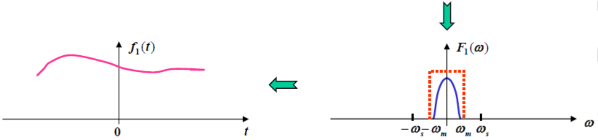
(周期）抽样信号的傅立叶变换

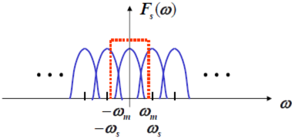


傅里叶变换
抽样定理

回顾前面讲到的冲激抽样

Note：这是 $\omega_s > 2\omega_m$ 的情况，在接收端用带宽 $> 2\omega_m$ 的滤波器即可得到





另一方面，如 $\omega_s < 2\omega_m \Rightarrow F_s(\omega)$ 频谱出现混迭无法通过滤波器滤出如 $F_1(\omega)$ 所示的频谱，也就不可能恢复 $f(t)$。

因此，对于时域抽样，ω_s 要足够大，满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$，抽样之后信号的频谱不会混迭。

或，$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ 要足够小，以保留原连续信号 $f(t)$ 之全部信息，因而完全可由 $f_s(t)$ 恢复 $f(t)$。

相反，T_s 太大，采样太疏，则有些信息遗漏。
以上便是抽样定理之核心内容。
抽样定理：
频谱受限于 $0 - f_m$ 范围内的信号，可用等间隔（T_s）抽样信号唯一表示的条件是

$$T_s \leq \frac{1}{2f_m} \qquad \text{(充分必要条件)}$$

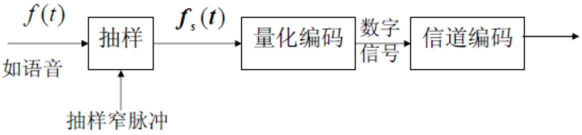
或称最低抽样率为 $2f_m$。$T_s = \dfrac{1}{2f_m}$ 称为 Nyquist 间隔 (最大抽样间隔)
$2f_m$ 也称 Nyquist 速率 (Nyquist 1928)

Note：
1 $f(t)$ 频带受限 f_m，若不受限，则无法避免混迭。
2 以上是时域抽样定理，根据对称性，可得出频域抽样定理：
频域抽样定理：
Question: 若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中于范围 $-t_m \sim t_m$ 内，在频域中，需要满足怎么样的采样频率对 $\mathcal{F}[f(t)]$ 进行抽样，抽样后的频谱 $F_1(\omega)$ 可以唯一地表示原信号?

Note：
1 $f(t)$ 频带受限 f_m，若不受限，则无法避免混迭。
2 以上是时域抽样定理，根据对称性，可得出频域抽样定理：
频域抽样定理：
若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中于范围 $-t_m \sim t_m$ 内，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $\mathcal{F}[f(t)]$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_1(\omega)$ 可以唯一地表示原信号。

抽样定理在数字通信中广泛采用，是数字通信系统之基础理论。

例如: 数字通信系统终端系统通常含有以下部分:



*PCM 通信系统或现在的数字程控交换机用户接口应用了此原理:
语音 0 ～ 3400HZ，PCM 编码采样速率 8KHz>2×3.4KHz

Pierre-Simon Laplace (1749 –1827)：法国数学家及天文学家
Oliver Heaviside (1850 ∼ 1925)：英国自学成才的电磁学家、工程师

算子法及应用
拉普拉斯变换
电工学应用

上一章讲述了 $\mathcal{F}$-变换：$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
$\mathcal{F}$-变换是将信号表示成复指数 e^{-st} 线性组合，$s = j\omega$
$\mathcal{L}$-变换：
看作 $\mathcal{F}$-变换的推广，也是将信号表示成复指数 e^{-st} 线性组合，其中 s 为任意复数 $s = \sigma + j\omega$。$\mathcal{L}$-变换除了和 $\mathcal{F}$-变换一样分析信号与 LT1 系统，同时提供了研究信号与系统的另一种工具，更重要的是 $\mathcal{L}$-变换还可以用来分析 $\mathcal{F}$-变换所不能分析的系统，如不稳定系统。
因此要注意　　$\mathcal{L}$-变换侧重于系统分析

(一) 定义

$$\begin{cases} F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds \end{cases}$$

表示成 $\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] & \text{象函数} \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] & \text{原函数} \end{cases}$

实际是求 $\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}]$，使之收敛

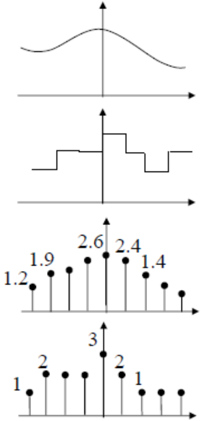
目录

- 信号与系统概述
  - 基本数学知识的复习
  - 信号与系统分类
- 连续时间系统
  - 傅里叶变换
  - 拉普拉斯变换
- 离散时间系统
  - Z 变换
  - 离散时间 (序列) 傅里叶变换

目录

- 离散时间系统
  - Z 变换
  - 离散时间 (序列) 傅里叶变换

回顾：信号的分类（第 1 部分）
Continuous-time Signal（时间连续）
Analog Signal Quantization Signal
Discrete-time Signal（时间离散）
Sampling Signal Digital Signal

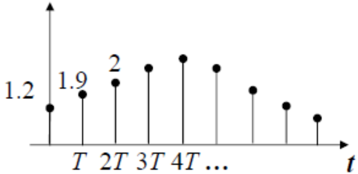


系统:
Continuous-time System 输入输出连续时间信号
Discrete-time System 输入输出离散时间信号
实际系统

离散系统的优点：

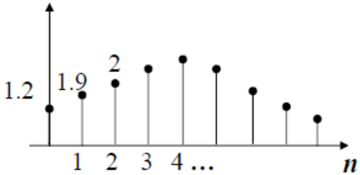
- 大规模集成
- 可靠性高
- 精度高

$x(nT)$



等间隔 T

$x(n)$



一组序列值的组合

$\{x(n)\}$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

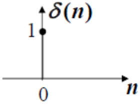
只对 n 为整数时有定义！

序列的运算

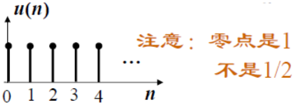
1. 相加：$z(n) = x(n) + y(n)$
2. 相乘：$z(n) = x(n) \cdot y(n)$
3. 乘系数：$z(n) = ax(n)$
4. 移位：$z(n) = x(n-m)$ 右移 $(m > 0)$
   $z(n) = x(n+m)$ 左移
5. 反摺：$z(n) = x(-n) \Rightarrow z(n) = x(2-n)$ 反摺，移位
6. 差分：$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ 前向差分
   $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$ 后向差分
   $\Rightarrow \nabla^m x(n) = \nabla[\nabla^{m-1} x(n)]$

典型序列

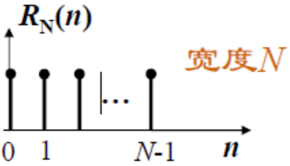
1．单位样值（单位冲激）序列：$\delta(n)$



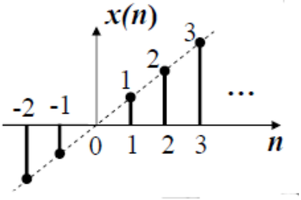
2．单位阶跃序列：$u(n)$



3. 矩形： $R_N(n) = u(n) - u(n-N)$



4. 斜变： $x(n) = n$



几种波形之间的关系　　注意连续信号和离散信号之间的对比

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N)$$

连续函数	求导 积分	离散函数	差分 求和

因果性、稳定性

$$\text{离散}\begin{cases}\text{因果性：} h(n)=h(n)u(n) \quad (\text{单边，n<0 无响应}) \\ \text{稳定性：} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \quad (\text{绝对可和})\end{cases}$$

$$\text{连续}\begin{cases}\text{因果性：} h(t)=h(t)u(t) \quad (\text{单边，t<0 无响应}) \\ \text{稳定性：} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty \quad (\text{绝对可积})\end{cases}$$

都是充分必要条件！

卷积与反卷积

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \qquad \text{信号传输}$$

$$x(n)=\left[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}x(m)h(n-m)\right]/h(0) \qquad \text{信号恢复}$$

$$h(n)=\left[y(n)-\sum_{m=0}^{n-1}h(m)x(n-m)\right]/x(0) \qquad \text{系统辨识}$$

$$\text{连续系统}\begin{cases}\text{适当抽样，转为离散系统处理}\\ \text{对于简单系统，可借助变换域解决}\end{cases}$$

Z 变换类似于连续系统的 L 变换，解差分方程之工具

Z 变换：利用 L 变换引入

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$$L\{x_s(t)\} = \int_0^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right] e^{-st}dt$$

$$\xrightarrow{\text{令} z = e^{sT}} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

$$\xrightarrow{\text{取} T = 1} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \mathcal{Z}[x(n)]$$

NOTE：当此级数收敛时，Z [x(n)] 存在，变换才有意义

单、双边 z 变换 $X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=0,-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

典型序列的 z 变换

1） $\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$

2） $\mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$时收敛

3） $\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$时收敛

4） $\mathcal{Z}[n \cdot u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad |z| > 1$时收敛

抽样信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[x(t)\delta_T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta_T(t)e^{-j\omega t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\omega T}$$

序列的傅里叶变换 (离散时间傅里叶变换)

$$\xrightarrow{\text{取}T=1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \rightarrow DTFT[x(n)]\text{: 以 } 2\pi \text{ 周期重复}$$

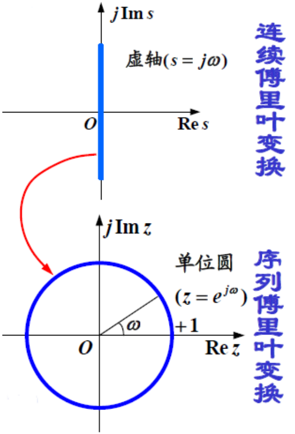
与 z 变换关系:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{令} z = e^{j\omega} \quad \text{即取单位圆上的 z 变换}$$

$$\Rightarrow DTFT[x(n)] = X(z)|_{|z|=1} = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} = X(e^{j\omega})$$

逆变换

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} X(z)z^{n-1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}\cdot e^{-j\omega}d(e^{j\omega}) \\
&= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}\cdot e^{-j\omega}je^{j\omega}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega
\end{aligned}
$$



注意: 序列的离散傅里叶变换另有定义

Note:
1. $DTFT[x(n)]$: 以 2π 周期重复
2. 等价于单位园上的 Z 变换
3. 如果 $x(n)$ 是实序列, 幅值在 [0,2π] 内是偶对称函数, 相位是奇对称函数
4. 离散时间信号的傅里叶变换与连续时间信号的傅里叶变换之间的差别: 前者是以 2π 为周期的 ω 的连续函数, 后者是角频率的非周期连续函数
5. 只有当 $x(n)$ 序列绝对可和时, 序列 $x(n)$ 的傅里叶变换才存在