Fourier-Analyse Aufgaben

Zur Berechnung der Frequenzanteile eines rechteckförmigen Signales gibt es einerseits die Fourier-Reihen (siehe Tabellenbücher oder Formelblatt) andererseits die Spektraldichtefunktion

Gleichung 1: $$u(n*f_0) = \frac{2U_{SS}*t_i}{T} * \frac{\sin(\pi*n*f_0*t_i)}{\pi*n*f_0*t_i} = \frac{2U_{SS}}{n*\pi} * \sin(\pi*n*f_0*t_i) = \boxed{\frac{2U_{SS}}{n*\pi} * \sin\left(\pi*n*\frac{t_i}{T}\right)}$$

Mit den Fourier-Reihen können Signale mit $t_i = t_p$, mit der Spektraldichtefunktion Signale mit $t_i = t_p$ und $t_i \neq t_p$ analysiert werden. In der Laboraufgabe 1.2 wird das Signal mit $t_i = t_p$ sowohl mit der Fourier-Reihe als auch der Spektraldichtefunktion berechnet.

Übung zur Fourier-Synthese/Fourier-Reihe (mit PSPICE-Simulation):

Schalten Sie 6 Sinusgeneratoren (VSIN) in Reihe, und tragen Sie folgende Werte ein:
1. $\hat{u}_1$ = 12 V; 1 kHz   2. $\hat{u}_2$ = – 4 V; 3 kHz   3. $\hat{u}_3$ = 2,4 V; 5 kHz   4. $\hat{u}_4$= –1,7 V; 7 kHz
5. $\hat{u}_5$ = 1,33 V; 9 kHz   6. $\hat{u}_6$ = – 1,1 V; 11 kHz.

Alle Generatoren bekommen noch eine Phasenverschiebung von 90° => PHASE = 90.

Ergebnis: Sie erhalten eine rechteckähnliche Spannungsform.

Die von Ihnen eingetragenen Generator-Werte sind die Koeffizienten der Fourier-Reihe. Mit der Fourier-Reihe könnte man also auch Rechteckspannungen erzeugen (Synthese), oder anders herum: Wenn ein Rechteck aus unendlich vielen Sinusspannungen besteht, kann man diese nach Frequenz und Amplitude analysieren.

Aufgaben

1. Bild 1: Signal mit ti/T = 0,5 $T: \frac{t_i}{T} = 0{,}5 \Rightarrow T = \frac{t_i}{0{,}5} = 2 \cdot t_i = 200\mu s$

Mit den Werten: ti = 100 µs; ti/T = 0,5; û = 1V, u_{ss} = 4V.

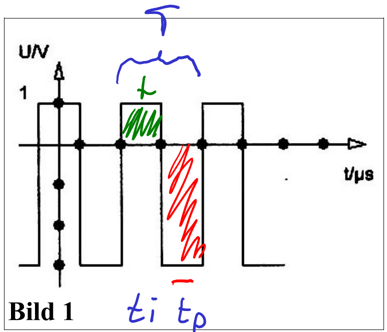

Bild 1

1.1 Berechnen Sie den DC-Anteil.
1.2 Berechnen Sie 5 Linien des Spektrums mit der Fourier-Reihe und der Spektraldichtefunktion, und skizzieren Sie das Spektrum.
Vergessen Sie bei der Berechnung nicht, den Taschenrechner auf den Modus: Rad zu stellen !
1.3 Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit PSPICE-Simulation. (Bemerkung: Je mehr Perioden Sie bei der Berechnung zulassen (Final-Time), desto genauer wird das Spektrum). Wählen Sie z. B.: Final Time >> 2 ms, und beachten Sie, dass PSPICE im Spektrum den Betrag der Spannung wiedergibt!
1.4 Wie ändert sich das Spektrum, wenn bei gleichem t1 und t das Signal mit einem Offset von +3 V beaufschlagt wird?

$T = 5 \cdot t_i = 20\mu s$

2. Bild 2: Zeitfunktion mit ti/T < 0,5

Bild 2 stellt ein mehrfach gesendetes Bitwort: 1000010000100... dar.

Die Bitdauer beträgt ti = 4 µs; û = 4V.

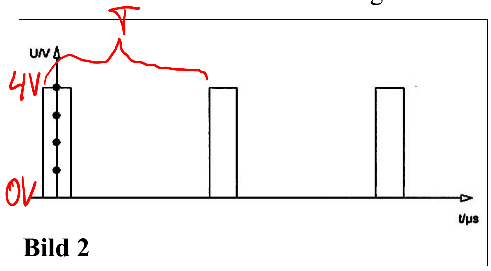

Bild 2

2.1 Berechnen Sie das Spektrum bis zur 1. Nullstelle.
2.2 Berechnen Sie die Nullstellen.
2.3 Ermitteln Sie das Spektrum.

3. Analyse eines Bitmusters

3.1 Ermitteln Sie den DC-Anteil, und berechnen Sie einige Linien des Spektrums des folgenden periodisch wiederkehrenden Bitmusters: 10000001000000100000001..., wenn û = 5 V und die Übertragungsrate 2 Mbit/s beträgt.
3.2 Welche Bandbreite muss das Kabel besitzen, wenn bis zur 1. Nullstelle übertragen werden soll?
3.3 Wie ändert sich das Spektrum, wenn nun laufend das Datenwort: ...1010101010101010... gesendet wird?

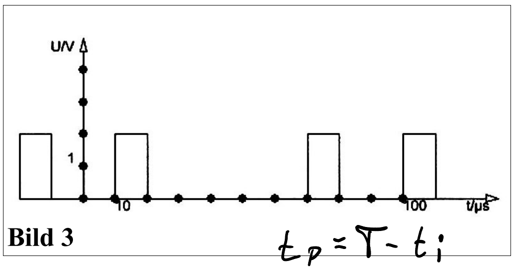

Bild 3

$t_p = T - t_i$

4. Signal 3

4.1 Zerlegen Sie das Signal in Bild 3 in zwei Signale, so dass diese mit Hilfe der Gleichung (1) analysiert werden könnten.
4.2 Ermitteln Sie den DC-Wert des Signals.

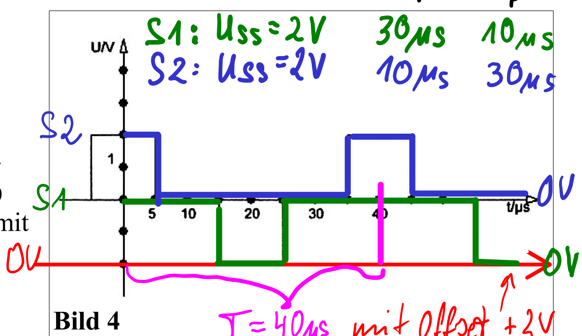

Bild 4

$f_0 = \frac{1}{T} = 25kHz$

5. Signal 4

5.1 Das Signal in Bild 4 ist das AMI- codierte Binärsignal: 1,0,1,0,1,.... Da hier ti = tp ist, dürften nur die ungeradzahligen Vielfache von f_0 auftauchen. Zerlegen Sie das Signal in zwei Signale, so dass diese mit Hilfe der Gleichung (1) analysiert werden können.
5.2 Ermitteln Sie den DC-Wert des Signals, und berechnen Sie einige Linien des Spektrums.

$f_{Null\,1} = \frac{1}{30\mu s} = 33{,}3kHz$

$f_{Null\,2} = \frac{1}{10\mu s} = 100kHz$

Fourier-Analyse Lösungen

1. Signal mit ti/T = 0,5

1.1

$$U_{DC} = \frac{t_i * \hat{u}_i + t_p * \hat{u}_p}{T} \quad => \quad \frac{100\mu s * 1V + 100\mu s * (-3V)}{200\mu s} = -1V$$

1.2

$$u(t) = U_{DC} + \frac{2U_{SS}}{\pi}\left[\frac{1}{1}*\cos(1\omega_0 t) - \frac{1}{3}*\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}*\cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{7}*\cos(7\omega_0 t)....\right]$$

T = 200 µs => f_0 = 5kHz	U_{DC} = -1V
Linien: 1 f_0 = 5kHz (Grundwelle) =>	$U_0 = (2*4V)/\pi = 2{,}54V$
3 f_0 = 15kHz (1. Oberwelle) =>	$U_3 = -(2*4V)/3\pi = -0{,}848V$
5 f_0 = 25kHz (2. Oberwelle) =>	$U_5 = (2*4V)/5\pi = 0{,}508V$ usw.

Mit Gleichung1:

$$U(1*f_0) = 2*4V*0{,}5 * \frac{\sin(\pi*1*0{,}5)}{\pi*1*0{,}5} = 2{,}54\,V \quad \left(\frac{t_i}{T} = f_0 t_i = 0{,}5\right)$$

$$U(2*f_0) = 4V*\frac{\sin(\pi*2*0{,}5)}{\pi*2*0{,}5} = 0V \quad (1.\text{Nullstelle})$$

$$U(3*f_0) = 4V*\frac{\sin(\pi*3*0{,}5)}{\pi*3*0{,}5} = -0{,}848\,V$$

$$U(4*f_0) = 4V*\frac{\sin(\pi*4*0{,}5)}{\pi*4*0{,}5} = 0V \quad (2.\text{Nullstelle})$$

$$U(5*f_0) = 4V*\frac{\sin(\pi*5*0{,}5)}{\pi*5*0{,}5} = 0{,}51\,V$$

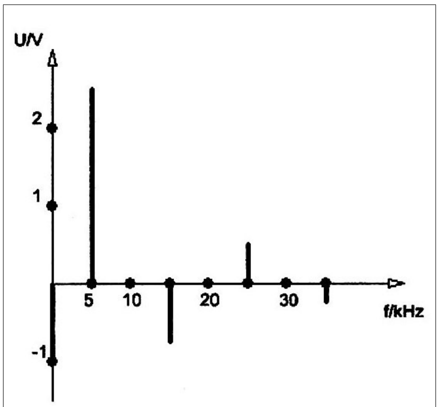

Bild 5

Aus der Fourier-Reihe ist zu ersehen, dass es nur ungeradzahlige Vielfache von f_0 gibt.
Die geradzahligen Vielfache sind die Nullstellen, d.h. diese Linien gibt es nicht.

1.3

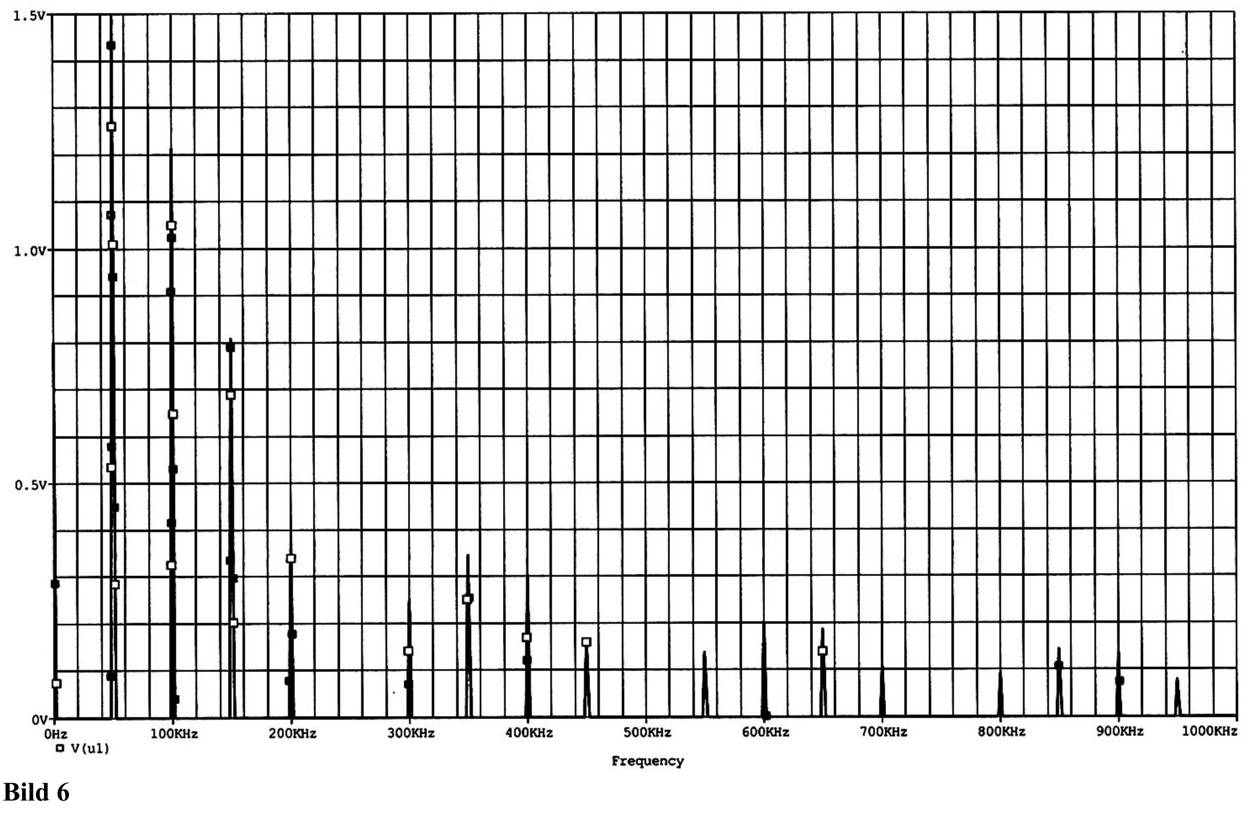

Bild 6

1.4 Ein Offset bewirkt keine Spektrallinie; es ändert sich nur der DC-Anteil.

Fourier-Analyse Lösungen

2. Zeitfunktion mit ti/T < 0,5

2.1 $T = 5 \cdot ti = 20\mu s \Rightarrow f_0 = 50kHz$
$ti / T = 1/5 = f_0\, ti$
Mit Gleichung1:

$$U(1*f_0) = 2*4V*\cancel{0,2} * \frac{\sin(\pi*1*0{,}2)}{\pi*1*\cancel{0,2}} = 1{,}49\,V \quad (50kHz) \leftarrow \frac{2\cdot U_{ss}}{\pi\cdot n}\cdot \sin\left(\pi\cdot n\cdot \frac{t_i}{T}\right)$$

$U(2\ f_0) = 1{,}21V$ (100kHz)
$U(3\ f_0) = 0{,}81V$ (150kHz)
$U(4\ f_0) = 0{,}375V$ (200kHz) usw.

2.2 Die Nullstellen ergeben sich, wenn: $n\ f_0 * t = 1;2;3;...$ wird (ganzzahliges π).
=> Die 1. Nullstelle liegt bei $f_1 = 1/ti = 250$ kHz (dabei wurde: $1f_0 = f_1$ gesetzt)
=> Die 2. Nullstelle liegt bei $f_2 = 2/ti = 500$ kHz (dabei wurde: $2f_0 = f_2$ gesetzt), usw. siehe Bild 6 (PSPICE)

Bemerkung: Die Übertragungssysteme (z. B. Kabel etc.) müssen für Datenübetragung eine Bandbreite mindestens bis zur 1. Nullstelle zur Verfügung stellen. Daher ist 1/ti ein Maß für die Bandbreite eines Signales => Hohe Bitrate (ti ↓↓), hohe Bandbreite! Beispiel: Ein Zündfunken, Blitz mit ti --> 0 besitzt ∞ Bandbreite (stört alle Frequenzbänder).

3. Analyse eines Bitmusters

3.1 2 Mbit in 1s: $t_{Bit} = 1s/2M = 0{,}5\mu s$ $\qquad U_{DC} = \frac{5V*10ns+0}{70ns} = 0{,}714\,V$

3.2 $f_1 = 1/ti = 2Mhz$
3.3 $T' = 1\mu s \Rightarrow f_0' = 1Mhz$
innerhalb f_1 liegt nur die Linie der Grundwelle , davor lagen mit $f_0 = 285{,}7kHz$ 7 Linien (Grundwelle + 6 Oberwellen)

4. Signal 3

4.1 siehe Bild 7
4.2 $U_{DC} = 444{,}4mV$

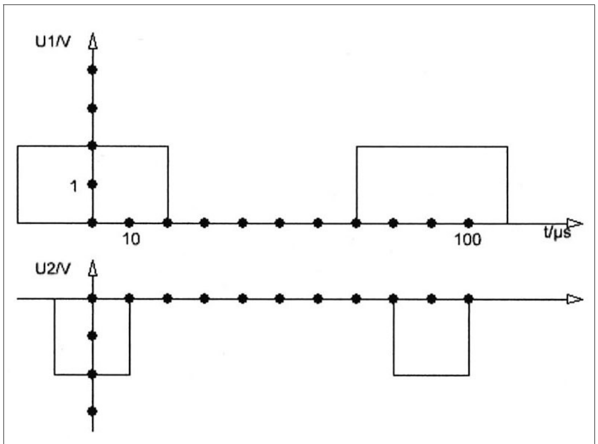

Bild 7

5. Signal 4

5.1 Eine mögliche Zerlegung s. Bild 8

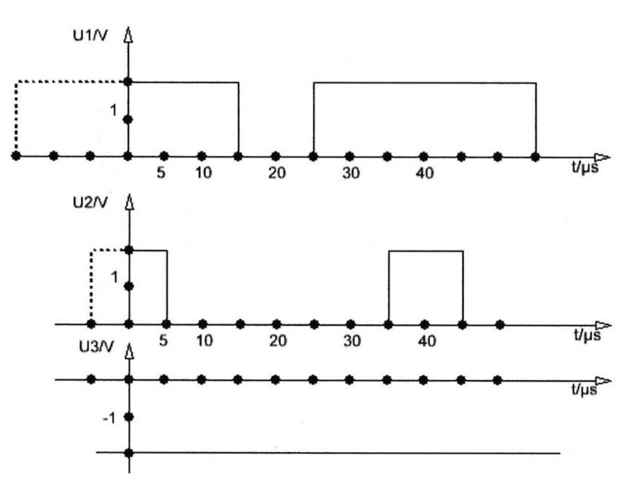

Bild 8

5.2 $U_{DC} = 0V$

U1	U2	Uges
$U_1(1f_0) = 0{,}9V$	$U_2(1f_0) = 0{,}9V$	1,8V
$U_1(2f_0) = -0{,}636\ V$	$U_2(2f_0) = 0{,}636\ V$	0V
$U_1(3f_0) = 0{,}3\ V$	$U_2(3f_0) = 0{,}3\ V$	0,6V
$U_1(4f_0) = 0$	$U_2(4f_0) = 0$	0V
$U_1(5f_0) = -0{,}18\ V$	$U_2(5f_0) = -0{,}18\ V$	- 0,36V
$U_1(6f_0) = 0{,}212\ V$	$U_2(6f_0) = -0{,}212\ V$	0V