

利用逆矩阵法解 γ 谱

钱思天 2001112187

2021 年 4 月 28 日

摘要

本实验通过逆矩阵法，根据对已知 ^{60}Co , ^{137}Cs 源的测量，对未知混合源中的各核素活度进行了测量，并进行了误差分析。

关键词：逆矩阵、 γ 射线谱、能量刻度

1 实验介绍

1.1 实验原理

用逆矩阵法解析复杂 γ 能谱时，对各种成分放射性含量比较相近的样品，解谱误差可达 2% 左右。对弱成分误差显著增大。

利用逆矩阵法解谱，要能得到准确的结果，必须满足下列条件：(1). 混合样品中核素都是已知的。(2). 测量标准谱和混合样品谱时，谱仪的测量条件一致，仪器要求稳定。(3). 各单一核素放射性线性叠加情况下，探测系统的脉冲幅度不随计数率改变。(4). 混合样品中各核素具有各自的 γ 能谱，并能够选出表征各自能量的特征峰。现混合样品由多种核素组成，这些核素含有 ^{137}Cs , ^{60}Co 。在混合样品的 γ 射线谱中，对这两种核素选择一个能够表征各自能量的特征峰。又能区别于其他核素的全能峰，成为该核素的特征全能峰。在这个全能峰上选择一个对应于最高计数处的道域称为特征道域。测量每个核素标准谱时，不仅要测量它在本身的特征道域中的计数，而且要测出它在其它特征道域中的计数，由此来确定各种核素对每个道域计数的贡献，这个贡献用响应系数 a_{ij} 来表示， a_{ij} 为谱仪 i 道对第 j 种核素的响应系数。定义为：

$$a_{ij} = \frac{\text{第 } j \text{ 种核素标准谱在第 } i \text{ 道上的计数率}}{\text{第 } j \text{ 种核素标准样品的衰变率}} \quad (1)$$

此响应系数取决于第 j 种成分各 γ 射线的相对强度和谱仪的测量条件。其意义是第 j 种核素的衰变率在 i 道域上引起的计数率。

对混合样品，要测量在各个特征道域中引起的计数。如果第 j 道域上的计数率为 m_1, m_2 ，各核素对任一道域上的计数都有贡献。因此，混合样品在任一道域中的计数率可以分解为各个核素分别在该道域中引起的计数率之和。

$$\sum_{j=1,2} a_{ij} x_j = m_i, i = 1, 2 \quad (2)$$

这样就得到一个由三个方程组成的联立方程组。此方程组可以用逆矩阵法求解。将方程组改写成矩阵形式

$$A \cdot X = M; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

从而可得：

$$X = A^{-1} \cdot M \quad (4)$$

因此，由实验测定 A ，求得 A^{-1} 。再把测得各特征道域上的计数率 m_i 代入，即可算出该混合样品中各核素的活度 x_j 。

被测样品在各特征道域上的计数和谱仪本底都会有统计涨落，并通过逆矩阵计算相互传递。假如标准谱的测量精度足够高，使响应系数的误差可以忽略。根据误差理论可以推算出第 j 成分含量 x_j 的标准误差 σ_{x_j} 为¹

$$\begin{aligned}\sigma_{x_j} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{(\Delta \cdot X)_j + B_j} \\ \Delta &= \left\{ \sum_{j'} (A_{ij'}^{-1})^2 A_{j'j} \right\} \\ B_j &= 2 \sum_{j'} (A_{ji}^{-1})^2 b_i\end{aligned}\tag{5}$$

其中 b_i 为 i 道域的本底计数率。 t 为样品测量时间。

1.2 实验目的

1. 了解逆矩阵法解析复杂 γ 谱的基本原理。
2. 测量混合样品中各核素的未知活度。

2 实验器材与步骤

2.1 实验器材

1. FJ374 闪烁探头 1 个；
2. BH1324 多道分析器 1 台；
3. 标准样品一套 (^{60}Co , ^{137}Cs)；
4. 混合样品一个；

2.2 实验步骤

1. 检查仪器连接，预热 10 分钟。打开微机。
2. 调整 NaI(Tl) γ 谱仪参量工作电压推荐值 650V。
3. 测量 ^{137}Cs , ^{60}Co 标准样品的 γ 谱，测量时间 1200 秒，做出能量刻度曲线。用 ^{137}Cs 全能峰 (0.662MeV) 确定谱仪能量分辨率。
4. 分别测量混合样品 (未知活度) 能谱及本底谱。
5. 合理选择特征道域 (20 40 道)。列联立方程，自编程序用逆矩阵法解方程，求出混合源中各组分现在的活度 x_j ，并计算误差 σ_{x_j} 。

3 实验数据

实验中测量得到的能谱图见附录。

¹推导见附录

3.1 能谱峰测量及刻度

实验中对已知源的刻度测量结果如表1。

表 1: 实验中利用已知源的刻度结果

Element	Peak Energy[KeV]	Channel	Count	Live time[s]
⁶⁰ Co	1332.5	815	16035	1011
	1173.2	720	21507	
¹³⁷ Cs	661.7	403	53748	1100

刻度结果为

$$E = 1.6245 * Ch + 6.3869$$

(6)

回归结果如图1。

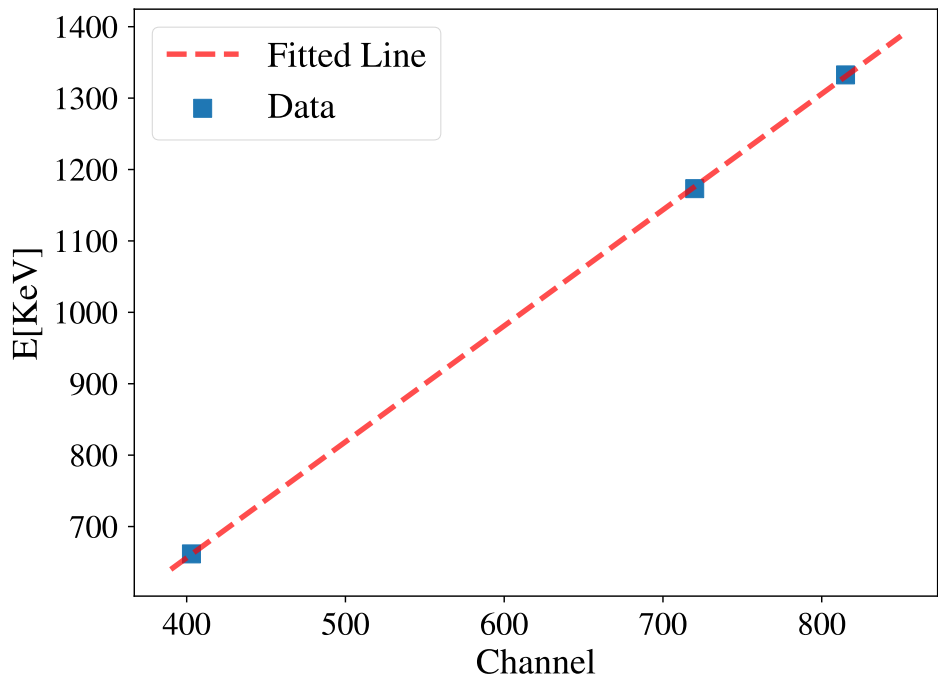


图 1: 实验中利用已知源的刻度结果

3.2 能量分辨率

利用 ¹³⁷Cs 源的全能峰，可以对实验装置的分辨率做出评价：

- 1. 峰位道址：403
- 2. FWHM：36.7
- 3. 能量分辨率：9.1%

3.3 利用逆矩阵法解 γ 谱

首先利用半衰期与活度的关系

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{t}{T} \ln 2\right) \quad (7)$$

计算实验当日的已知源活度如表2

表 2: 实验当日的活度信息

Element	Half life time/d	Ref. Activity/Bq	Ref. Date	Time to Exp./d	Activity/Bq
Co	11012.0	238000.0	1995-10-16	9320	132,428.92
Cs	1925.2	85300.0	2015-09-24	2037	40,967.33

对于实验采用的 ^{60}Co , ^{137}Cs 源, 在其峰位左右对称选取 30 道, 其峰的道址范围分别如表3。

表 3: 道址的选取范围

Label	Element	Peak	Left	Right
1	Co	815	800	830
2	Cs	403	388	418

得到计数分别如表4。

表 4: 各区域各样品计数

	R1 Count	R2 Count	Live Time/s
Co	467669.0	335005.0	1011.0
Cs	781.0	1456700.0	1110.0
Unknown	290688.0	1142768.0	1023.0
BKG	132.0	665.0	1200.0

可以计算出

$$A = \begin{pmatrix} 3.4922 \times 10^{-3} & 1.4489 \times 10^{-5} \\ 2.4979 \times 10^{-3} & 3.2020 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

故有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 286.4437 & -0.1296 \\ -22.3462 & 31.2403 \end{pmatrix} \quad (9)$$

根据

$$M = \begin{pmatrix} 284.0425 \\ 1116.5211 \end{pmatrix} \quad (10)$$

得到

$$X = \begin{pmatrix} 81217 \\ 28533 \end{pmatrix} \quad (11)$$

根据误差传递公式，得到：

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 146 \\ 33 \end{pmatrix} \quad (12)$$

得到最终结果

$$X + \sigma_X = \begin{pmatrix} 81217 \pm 146 \\ 28533 \pm 33 \end{pmatrix} \quad (13)$$

4 致谢

感谢许金艳老师的指导，也感谢张轩豪同学和蒋沛成同学一起进行实验。

附录

A 思考题

1. 主对角线上的数越高，探测效率约高。其余元素越低，探测效率越高。在实验中，因为要换源，几种源可能会相互影响，降低探测效率。
2. 利用逆矩阵法解谱，要能得到准确的结果，必须满足下列条件:(1). 混合样品中核素都是已知的。(2). 测量标准谱和混合样品谱时，谱仪的测量条件一致，仪器要求稳定。(3). 各单一核素放射性线性叠加情况下，探测系统的脉冲幅度不随计数率改变。(4). 混合样品中各核素具有各自的能谱，并能够选出表征各自能量的特征峰。本次实验中混合源已知为 ^{137}Cs 和 ^{60}Co 的混合，它们的全能峰都比较突出且不重叠。实验时高压和放大倍数不变，测量时间也保持不变，在放置样品时尽量保持位置不变，因此满足了利用逆矩阵方法解谱的条件。
3. 以某一特征峰的峰址为中心，左右对称选择 20-40 道范围。道域太窄，系统的统计涨落的影响比较大; 道域太宽，低统计量的部分会受到本底及康普顿平台的影响。

B 误差公式的推导

记 \tilde{M} 为总计数，则：

$$M = \tilde{M} - b \quad (14)$$

那么，在忽略 A 的误差的情况下，有：

$$\begin{aligned} \sigma_{x_j}^2 &= \frac{1}{t} \sum_{j'} (A_{ji}^{-1})^2 \sigma_{m_j}^2 \\ &= \frac{1}{t} \sum_{j'} (A_{ji}^{-1})^2 (\tilde{M}_j + b_j) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{j'} (A_{ji}^{-1})^2 (M_j + 2b_j) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{j'} (\delta_{jj'} x_{j'} + B_j) \end{aligned} \quad (15)$$