实验十四 直流电桥测量电阻 实验报告

钱思天 1600011388 No.8

2017 年 12 月 11 日

1 实验数据与处理

1.1 平衡电桥测量结果

表 1: 不同 R_x 不同 R_1/R_2(均 $E = 4.0V$ & $R_h = 0\Omega$) 测量结果

测量值 \ 各待测项 (R_x & $\frac{R_1}{R_2}$)		$R_0(\Omega)$	$R_0'(\Omega)$	Δn(格)	$R_x(\Omega)$	$\Delta R_0(\Omega)$	S
R_{x1}	500/500	47.9	47.8	4.0	47.9	0.1	1.9×10^3
R_{x2}	50/500	3600	3575	4.0	360.0	25	5.8×10^2
	500/500	360.0	361.0	4.0	360.0	1.0	1.4×10^3
	500/500(交换)	360.0	361.0	4.0	360.0	1.0	1.4×10^3
R_{x3}	500/500	4059	4005	4.0	4059.0	54	3.0×10^2

表 2: R_{x2} 不同测量条件测量结果

测量值 \ 各待测项 (各测量条件)	$R_0(\Omega)$	$R_0'(\Omega)$	Δn(格)	$R_x(\Omega)$	$\Delta R_0(\Omega)$	S
$E = 4.0V$ & $R_h = 0\Omega$ & $R_1/R_2 = 500/500$	360.0	361.0	4.0	360.0	1.0	1.4×10^3
$E = 2.0V$ & $R_h = 0\Omega$ & $R_1/R_2 = 500/500$	360.0	362.0	4.0	360.0	2.0	7.2×10^2
$E = 4.0V$ & $R_h = 0\Omega$ & $R_1/R_2 = 500/5000$	3600	3650	4.0	360.0	50.0	2.9×10^2
$E = 4.0V$ & $R_h = 3.0k\Omega$ & $R_1/R_2 = 500/500$	360	340	5.5	360.0	10.0	2.0×10^2

关于灵敏度 S 的计算，利用公式

$$S = \frac{\Delta n}{\Delta R_x / R_x} = \frac{\Delta n}{\Delta R_0 / R_0}$$

可计算出各 S 的实测值，已附于数据表内。

至于 S 的理论值，根据公式

$$S = \frac{S_G E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + (R_g + R_h)(2 + \frac{R_1}{R_x} + \frac{R_0}{R_2})}$$

将 $S_G^{-1} = 1.3 \times 10^{-6}(A/格)$ 及 $R_g = 47\Omega$ 代入，得下表：

表 3: 不同 R_x 不同 R_1/R_2(均 $E = 4.0V$ & $R_h = 0\Omega$)S 理论值计算结果

R_x	R_{x1}		R_{x2}		R_{x3}
R_1/R_2	500/500	50/500	500/500	500/500(交换)	500/500
S	1.8×10^3	6.2×10^2	1.6×10^3	1.6×10^3	3.2×10^2

下计算交换桥臂法测得的 R_{x2} 及其不确定度 σ_{x2}:

利用公式

$$R = \sqrt{R_{01} \cdot R_{02}}$$

$$\sigma = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial R_{01}})^2 \sigma_{R_{01}}^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_{02}})^2 \sigma_{R_{02}}^2 + (\delta R)^2}$$

$$(\frac{\partial R}{\partial R_{01}})^2 \sigma_{R_{01}}^2 = \frac{R_{02}}{4R_{01}} \cdot (\frac{0.1\% \times R_{01}}{\sqrt{3}})^2 = 0.011$$

$$(\frac{\partial R}{\partial R_{02}})^2 \sigma_{R_{02}}^2 = \frac{R_{01}}{4R_{02}} \cdot (\frac{0.1\% \times R_{02}}{\sqrt{3}})^2 = 0.011$$

$$(\delta R_x)^2 = (\frac{0.2 R_x}{S})^2 = 0.0026$$

得

$$R_{x2} = \sqrt{R_{01} \cdot R_{02}} = 360.0(\Omega)$$

$$\sigma_{x2} = \sqrt{(\frac{\partial R}{\partial R_{01}})^2 \sigma_{R_{01}}^2 + (\frac{\partial R}{\partial R_{02}})^2 \sigma_{R_{02}}^2 + (\delta R)^2} = 0.2(\Omega)$$

$$R_{x2} \pm \sigma_{x2} = (360.0 \pm 0.2)\Omega$$

表 4: 所测金属丝直径

所测直径	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}
读数 d_i/mm	0.325	0.320	0.321	0.320	0.318	0.317	0.319	0.317	0.316	0.314

表 5: 逐个依次添加砝码所得卡丝位置

次数 i	本次添加砝码质量 $\Delta m_i/g$	砝码总重量 m_i/g	正向位置 r/cm	反向位置 r'/cm	平均位置 $\bar{r}/cm$	逐差长度 $\delta L/cm$
0	99.97	99.97	2.86	2.87	2.87	0.60
1	199.94	299.91	2.97	2.98	2.98	0.60
2	200.00	499.91	3.09	3.1	3.10	0.59
3	199.98	699.89	3.23	3.23	3.23	0.58
4	199.98	899.87	3.36	3.35	3.36	0.57
5	199.91	1099.78	3.47	3.46	3.47	–
6	199.92	1299.70	3.57	3.58	3.58	–
7	200.05	1499.75	3.68	3.69	3.69	–
8	199.50	1699.25	3.80	3.81	3.81	–
9	200.07	1899.32	3.92	3.92	3.92	–

1.1.1 梁的弯曲测量杨氏模量

表 6: 实验所用砝码组

砝码编号 i	1	2	3	4	5	6
砝码质量 $\Delta m_i/g$	200.11	200.81	200.03	200.11	200.57	200.14

表 7: 梁的宽度

宽度 a_i/mm	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
读数	9.94	9.92	9.90	9.84	9.86	9.84

表 8: 梁的厚度

厚度 h_i/mm	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
读数	1.499	1.521	1.532	1.519	1.541	1.539

表 9: 逐个依次添加砝码所得梁最低点位置

次数 i	本次添加砝码质量 $\Delta m_i/g$	砝码总重量 m_i/g	正向位置 λ/mm	反向位置 λ'/mm	平均位置 $\bar{\lambda}/mm$	逐差长度 $\delta\Lambda/mm$
1	200.11	200.11	37.585	37.460	37.523	-2.458
2	200.81	400.92	36.770	36.692	36.731	-2.503
3	200.03	600.95	35.932	35.827	35.880	-2.503
4	200.11	801.06	35.111	35.018	35.065	–
5	200.57	1001.63	34.271	34.185	34.228	–
6	200.14	1201.77	33.422	33.332	33.377	–

1.2 一次测量物理量测量数值及其不确定度

1.2.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

在本实验中，一次测量物理量分别是铁丝的长度，以及螺旋测微计的零点位置。利用公式：

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

及实际测量数据可得下表：

表 10: 本实验中一次测量物理量及其不确定度

物理量	铁丝长度 $L \pm \sigma_L/cm$	螺旋测微计零点读数 $d_0 \pm \sigma_d/mm$
值	80.41 ± 0.06	−0.003±0.002

1.2.2 利用光杠杆测量金属的杨氏模量

在本实验中，一次测量物理量分别是铁丝的长度，螺旋测微计的零点位置，光杠杆臂长以及望远镜的工作距离。利用公式：

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

及实际测量数据可得下表：

表 11: 本实验中一次测量物理量及其不确定度

物理量	铁丝长度 $L \pm \sigma_L/cm$	螺旋测微计零点读数 $d_0 \pm \sigma_d/mm$	工作距离 $R \pm \sigma_R/cm$	光杠杆臂长 $D \pm \sigma_D/cm$
数值	77.60±0.06	−0.003±0.002	136.49 ± 0.06	9.20±0.01

1.2.3 梁的弯曲测量杨氏模量

在本实验中，一次测量物理量分别是金属梁的有效长度及螺旋测微计的零点位置。利用公式：

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

及实际测量数据可得下表：

表 12: 本实验中一次测量物理量及其不确定度

物理量	金属梁有效长度 $L \pm \sigma_L/cm$	螺旋测微计零点读数 $h_0 \pm \sigma_h/mm$
数值	23.32±0.01	−0.021±0.02

1.3 用逐差法和最小二乘法处理数据

1.3.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

根据前文所展示的实验数据，可作 $\bar{r}$ 与 m 关系图如下:

从图中可以看出，$\bar{r}$ 与 m 成基本呈线性关系，计算得 $r \approx 0.999$, 故确实存在线性关系，下面分别用逐差法和最小二乘法进行数据处理。

逐差法 之前的数据处理中已经计算了各次逐差的值，列表如下：

表 13: 逐差结果数据表

逐差次数	$\bar{r}_5 - \bar{r}_0$	$\bar{r}_6 - \bar{r}_1$	$\bar{r}_7 - \bar{r}_2$	$\bar{r}_8 - \bar{r}_3$	$\bar{r}_9 - \bar{r}_4$
逐差长度 $\delta L_i/mm$	0.60	0.60	0.59	0.58	0.57

利用公式，有：

$$\delta L = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\delta L_i = 0.588(mm)$$

下计算不确定度：A 类：

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(\delta L_i - \overline{\delta L})^2}{5\times 4}} = 0.006(mm)$$

B 类：

$$e_L = \sum_{i=1}^{5}\frac{e+e}{5} = 0.02(mm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.012(mm)$$

总不确定度：

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\bar{L}}^2} = 0.013(mm)$$

综上，得;

$$\delta L \pm \sigma_L = 0.588 \pm 0.013(mm)$$

最小二乘法 设

$$\bar{r} = k\times m + b$$

考虑到需要计算的物理量，我们对截距进行分析：

$$k = \frac{\sum\limits_{i=0}^{9}(\bar{r}_i - \bar{r})(m_i - \bar{m})}{\sum\limits_{i=0}^{9}(m_i - \bar{m})^2} = 5.88 \times 10^{-4}(mm/g)$$

下计算不确定度：首先计算 $\bar{r}$ 的不确定度：A 类：

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{10 - 2}\sum_{i=0}^{9}(\bar{r}_i - \bar{r})^2} = 0.009(mm)$$

B 类：

$$\sigma = \frac{e + e}{\sqrt{3}} = 0.012(mm)$$

总不确定度：

$$\sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_r^2} = 0.015(mm)$$

得 k 的不确定度：

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{9}(m_i - \bar{m})^2}} = 6 \times 10^{-6}(mm/g)$$

故：

$$k \pm \sigma_k = (5.88 \pm 0.06) \times 10^{-4}(mm/g)$$

1.3.2 利用光杠杆测量金属的杨氏模量

根据前文所展示的实验数据，可作 $\bar{r}$ 与 m 关系图如下:

从图中可以看出，$\bar{r}$ 与 m 成基本呈线性关系，计算得 $r \approx 0.999$, 故确实存在线性关系，下面分别用逐差法和最小二乘法进行数据处理。

逐差法 之前的数据处理中已经计算了各次逐差的值，列表如下：

表 14: 逐差结果数据表

逐差次数	$\bar{r}_5 - \bar{r}_0$	$\bar{r}_6 - \bar{r}_1$	$\bar{r}_7 - \bar{r}_2$	$\bar{r}_8 - \bar{r}_3$	$\bar{r}_9 - \bar{r}_4$
逐差长度 $\delta L/cm$	1.58	1.52	1.54	1.52	1.54

利用公式，有：

$$\delta L=\sum_{i=1}^{5}\delta L_i=1.540(cm)$$

下计算不确定度：A 类：

$$\sigma_{\bar{L}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(\delta L_i-\overline{\delta L})^2}{5\times 4}}=0.011(cm)$$

B 类：

$$e_L=\sum_{i=1}^{5}\frac{e+e}{5}=0.02(cm)\Rightarrow\sigma=\frac{e}{\sqrt{3}}=0.012(cm)$$

总不确定度：

$$\sigma_L=\sqrt{\sigma^2+\sigma_{\bar{L}}^2}=0.016(cm)$$

综上，得；

$$\delta L\pm\sigma_L=1.540\pm 0.016(cm)$$

最小二乘法 设

$$\bar{r}=k\times m+b$$

考虑到需要计算的物理量，我们对截距进行分析：

$$k=\frac{\sum\limits_{i=0}^{9}(\bar{r}_i-\bar{r})(m_i-\bar{m})}{\sum\limits_{i=0}^{9}(m_i-\bar{m})^2}=1.545\times 10^{-3}(cm/g)$$

下计算不确定度：首先计算 $\bar{r}$ 的不确定度：A 类：

$$\sigma_r=\sqrt{\frac{1-r^2}{10-2}\sum_{i=0}^{9}(\bar{r}_i-\bar{r})^2}=0.016(cm)$$

B 类：

$$\sigma=\frac{e+e}{\sqrt{3}}=0.012(cm)$$

总不确定度：

$$\sigma_{\bar{r}}=\sqrt{\sigma^2+\sigma_r^2}=0.020(cm)$$

得 k 的不确定度：

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{9}(m_i - \bar{m})^2}} = 1.1 \times 10^{-5}(cm/g)$$

故：

$$k \pm \sigma_k = (1.545 \pm 0.011) \times 10^{-3}(cm/g)$$

1.3.3 梁的弯曲测量金属的杨氏模量

根据前文所展示的实验数据，可作 $\bar{\lambda}$ 与 m 关系图如下: 从图中可以看出，$\bar{\lambda}$ 与 m 成基本呈线性关系，计算得 $\lambda \approx -0.9999$, 故确实存在线性关系，下面分别用逐差法和最小二乘法进行数据处理。

逐差法 之前的数据处理中已经计算了各次逐差的值，列表如下：

表 15: 逐差结果数据表

逐差次数	$r_0 - r_3$	$r_1 - r_4$	$r_2 - r_5$
逐差长度 $\delta\Lambda_i/mm$	2.458	2.503	2.503

利用公式，有：

$$\delta\Lambda = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\delta\Lambda_i = 2.488(mm)$$

下计算不确定度：A 类：

$$\sigma_{\bar{\Lambda}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}(\delta\Lambda_i - \overline{\delta\Lambda})^2}{3 \times 2}} = 0.015(mm)$$

B 类：

$$e_\Lambda = \sum_{i=1}^{3}\frac{e+e}{3} = 0.008(mm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.005(mm)$$

总不确定度：

$$\sigma_\Lambda = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\bar{\Lambda}}^2} = 0.016(mm)$$

综上，得；

$$\delta\Lambda \pm \sigma_\Lambda = 2.488 \pm 0.016(mm)$$

最小二乘法 设

$$\bar{\lambda} = k \times m + b$$

考虑到需要计算的物理量，我们对截距进行分析：

$$k = \frac{\sum_{i=0}^{5} (\bar{r}_i - \bar{r})(m_i - \bar{m})}{\sum_{i=0}^{5} (m_i - \bar{m})^2} = -4.14 \times 10^{-3} (mm/g)$$

下计算不确定度：首先计算 $\bar{\lambda}$ 的不确定度：A 类：

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{6-2} \sum_{i=0}^{9} (\bar{r}_i - \bar{r})^2} = 0.017(mm)$$

B 类：

$$\sigma = \frac{e+e}{\sqrt{3}} = 0.005(mm)$$

总不确定度：

$$\sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_r^2} = 0.018(mm)$$

得 k 的不确定度：

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=0}^{9} (m_i - \bar{m})^2}} = 2 \times 10^{-5} (mm/g)$$

故：

$$k \pm \sigma_k = (-4.14 \pm 0.02) \times 10^{-3} (mm/g)$$

1.4 分别计算金属的杨氏模量

1.4.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

原理公式：

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \Delta r}$$

逐差法计算 由于相隔 5 项逐差，可以将公式改写如下：

$$E = \frac{4\bar{m}gL}{\pi \bar{d}^2 (\frac{\delta L}{5})} = 1.68 \times 10^{11} (Pa)$$

各量不确定度如下：

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{9}(m_i - \bar{m})^2}{9 \times 8}} = 0.05(g)$$

$$\sigma_L = 0.06(cm)$$

对于金属丝直径：

$$\bar{d} = \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} d_i) - d_0 = \bar{d}_{read} - d_0$$

得：

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{d_{read}}^2 + \sigma_{d_0}^2}$$

由于 σ_{d_0} 已知，下求 $\sigma_{d_{read}}$：

A 类：

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(d_{read\,i} - \bar{d}_{read})^2}{10 \times 9}} = 0.0005(mm)$$

B 类：

$$e_d = \sum_{i=1}^{3} \frac{e}{3} = 0.004(mm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.002(mm)$$

得总不确定度：

$$\sigma_{d_{read}} = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \sigma^2} = 0.002(mm)$$

得：

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{d_{read}}^2 + \sigma_{d_0}^2} = 0.003(mm)$$

从而：

$$\sigma_E = \sqrt{(\frac{\partial E}{\partial \bar{m}})^2\sigma_m^2 + (\frac{\partial E}{\partial L})^2\sigma_L^2 + (\frac{\partial E}{\partial \bar{d}})^2\sigma_d^2(\frac{\partial E}{\partial(\frac{\delta L}{5})})^2\sigma_{(\frac{\delta L}{5})}^2} = 0.03 \times 10^{11}(Pa)$$

故：

$$E \pm \sigma_E = (1.68 \pm 0.03) \times 10^{11}(Pa)$$

最小二乘法计算 由于斜率已知，可将公式改写如下：

$$E = \frac{4gL}{\pi \bar{d}^2 k} = 1.69 \times 10^{11}(Pa)$$

不确定度计算如下：

$$\sigma_L = 0.06(cm)$$

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{d_{read}}^2 + \sigma_{d_0}^2} = 0.003(mm)$$

从而：

$$\sigma_E = \sqrt{(\frac{\partial E}{\partial L})^2 \sigma_L^2 + (\frac{\partial E}{\partial \bar{d}})^2 \sigma_d^2 + (\frac{\partial E}{\partial k})^2 \sigma_k^2} = 0.01 \times 10^{11}(Pa)$$

故：

$$E \pm \sigma_E = (1.69 \pm 0.01) \times 10^{11}(Pa)$$

1.4.2 利用光杠杆测量金属的杨氏模量

原理公式：

$$E = \frac{8FLR}{\pi d^2 D \Delta r}$$

逐差法计算 由于相隔 5 项逐差，可以将公式改写如下：

$$E = \frac{8\bar{m}gLR}{\pi \bar{d}^2 (\frac{\delta L}{5}) D} = 1.66 \times 10^{11}(Pa)$$

最小二乘法计算 由于斜率已知，可将公式改写如下：

$$E = \frac{8gLR}{\pi \bar{d}^2 k D} = 1.65 \times 10^{11}(Pa)$$

1.4.3 梁的弯曲测量金属的杨氏模量

原理公式：

$$E = \frac{Gl^3}{4\lambda a h^3}$$

逐差法计算 由于相隔 3 项逐差，可以将公式改写如下：

$$E = \frac{\bar{m}gl^3}{4ah^3(\frac{\delta \Delta}{3})} = 2.14 \times 10^{11}(Pa)$$

最小二乘法计算 由于斜率已知，可将公式改写如下：

$$E = \frac{gl^3}{4ah^3|k|} = 2.14 \times 10^{11}(Pa)$$

2 分析与讨论

2.1 Δr 偏大

考虑到开始时钢丝没有拉直，因此，最初的一两个砝码会将金属丝拉直，而在这过程中，相应的 Δr 也会偏大。

2.2 Δr 偏小

若开始时，装置的调节未做好，使得下端圆柱与限转螺丝存在摩擦，则最初时刻的 Δr 会因存有摩擦力而较小。

3 收获和感想

在课下准备本次实验的时候，我其实并没有感到非常紧张。一来，室友已做过这个实验，可以向他取经；二来，我自己在高中也做过这个实验。

但是，真正实际操作的时候，我却并没有像想象中那般轻松。

一来，进行实验的时候，有一些长度的测量对“身材”提出了要求；二来，我的 CCD 似乎对我有一些意见……

当然了，结束实验进行总结时，我不由的感叹实验设计的精妙。

在我看来，测量杨氏模量的重要一环，在于将微小的形变放大。无论是搭配了显微镜的 CCD，光杆杆还是读数显微镜，都是为了完成这一目标。推而广之，许多实验中，实验设计里都存在着这些将不可观测量转化为可观测量的精妙构想。

在实验课程的学习中，我也要培养自己的实验设计能力，培养自己设计将无法直接测量的物理量进行转化，将低精度测量量转化为高精度的测量量的能力。