

# 实验八：测量金属的杨氏模量 实验报告

钱思天 1600011388 No.8

2017 年 12 月 10 日

## 1 实验数据与处理

### 1.1 多次测量物理量数据处理

#### 1.1.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

表 1: 所用砝码组质量

砝码编号 $i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
砝码质量 $m_i/g$	99.97	199.94	200.00	199.98	199.98	199.91	199.92	200.05	199.50	200.07

表 2: 所测金属丝直径

所测直径	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$
读数 $d_i/mm$	0.315	0.316	0.312	0.316	0.312	0.315	0.316	0.315	0.316	0.317

表 3: 逐个依次添加砝码所得横线位置

次数 $i$	增加砝码质量 $\Delta m_i/g$	砝码总质量 $m_i/g$	增添位置 $r/mm$	减少位置 $r'/mm$	平均位置 $\bar{r}/mm$	逐差长度 $\delta L/mm$
0	99.97	99.97	2.86	2.87	2.87	0.60
1	199.94	299.91	2.97	2.98	2.98	0.60
2	200.00	499.91	3.09	3.1	3.10	0.59
3	199.98	699.89	3.23	3.23	3.23	0.58
4	199.98	899.87	3.36	3.35	3.36	0.57
5	199.91	1099.78	3.47	3.46	3.47	—
6	199.92	1299.70	3.57	3.58	3.58	—
7	200.05	1499.75	3.68	3.69	3.69	—
8	199.50	1699.25	3.80	3.81	3.81	—
9	200.07	1899.32	3.92	3.92	3.92	—

1.1.2 利用光杠杆法测量杨氏模量

表 4: 所用砝码组质量

砝码编号 $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
砝码质量 $\Delta m_i/g$	195.46	200.26	199.72	199.65	199.71	199.83	199.88	199.80	199.86	200.03

表 5: 所测金属丝直径

所测直径	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$
读数 $d_i/mm$	0.325	0.320	0.321	0.320	0.318	0.317	0.319	0.317	0.316	0.314

表 6: 逐个依次添加砝码所得卡丝位置

次数 $i$	本次添加砝码质量 $\Delta m_i/g$	砝码总重量 $m_i/g$	正向位置 $r/cm$	反向位置 $r'/cm$	平均位置 $\bar{r}/cm$	逐差长度 $\delta L/cm$
0	99.97	99.97	2.86	2.87	2.87	0.60
1	199.94	299.91	2.97	2.98	2.98	0.60
2	200.00	499.91	3.09	3.1	3.10	0.59
3	199.98	699.89	3.23	3.23	3.23	0.58
4	199.98	899.87	3.36	3.35	3.36	0.57
5	199.91	1099.78	3.47	3.46	3.47	-
6	199.92	1299.70	3.57	3.58	3.58	-
7	200.05	1499.75	3.68	3.69	3.69	-
8	199.50	1699.25	3.80	3.81	3.81	-
9	200.07	1899.32	3.92	3.92	3.92	-

1.1.3 梁的弯曲测量杨氏模量

表 7: 实验所用砝码组

砝码编号 $i$	1	2	3	4	5	6
砝码质量 $\Delta m_i/g$	200.11	200.81	200.03	200.11	200.57	200.14

表 8: 梁的宽度

宽度 $a_i/mm$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
读数	9.94	9.92	9.90	9.84	9.86	9.84

表 9: 梁的厚度

厚度 $h_i/mm$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$
读数	1.499	1.521	1.532	1.519	1.541	1.539

表 10: 逐个依次添加砝码所得梁最低点位置

次数 $i$	本次添加砝码质量 $\Delta m_i/g$	砝码总重量 $m_i/g$	正向位置 $\lambda/mm$	反向位置 $\lambda'/mm$	平均位置 $\bar{\lambda}/mm$	逐差长度 $\delta\lambda/mm$
1	200.11	200.11	37.585	37.460	37.523	-2.458
2	200.81	400.92	36.770	36.692	36.731	-2.503
3	200.03	600.95	35.932	35.827	35.880	-2.503
4	200.11	801.06	35.111	35.018	35.065	—
5	200.57	1001.63	34.271	34.185	34.228	—
6	200.14	1201.77	33.422	33.332	33.377	—

## 1.2 一次测量物理量测量数值及其不确定度

### 1.2.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

在本实验中，一次测量物理量分别是铁丝的长度，以及螺旋测微计的零点位置。利用公式：

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

及实际测量数据可得下表：

表 11: 本实验中一次测量物理量及其不确定度

物理量	铁丝长度 $L \pm \sigma_L/cm$	螺旋测微计零点读数 $d_0 \pm \sigma_d/mm$
值	$80.41 \pm 0.06$	$-0.003 \pm 0.002$

### 1.2.2 利用光杠杆测量金属的杨氏模量

在本实验中，一次测量物理量分别是铁丝的长度，螺旋测微计的零点位置，光杠杆臂长以及望远镜的工作距离。利用公式：

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

及实际测量数据可得下表：

表 12: 本实验中一次测量物理量及其不确定度

物理量	铁丝长度 $L \pm \sigma_L/cm$	螺旋测微计零点读数 $d_0 \pm \sigma_d/mm$	工作距离 $R \pm \sigma_R/cm$	光杠杆臂长 $D \pm \sigma_D/cm$
数值	$77.60 \pm 0.06$	$-0.003 \pm 0.002$	$136.49 \pm 0.06$	$9.20 \pm 0.01$

### 1.2.3 梁的弯曲测量杨氏模量

在本实验中，一次测量物理量分别是金属梁的有效长度及螺旋测微计的零点位置。利用公式：

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

及实际测量数据可得下表：

表 13: 本实验中一次测量物理量及其不确定度

物理量	金属梁有效长度 $L \pm \sigma_L/cm$	螺旋测微计零点读数 $h_0 \pm \sigma_h/mm$
数值	$23.32 \pm 0.01$	$-0.021 \pm 0.02$

## 1.3 用逐差法和最小二乘法处理数据

### 1.3.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

根据前文所展示的实验数据，可作  $\bar{r}$  与  $m$  关系图如下：

图 1: 本实验中  $\bar{r}$  与  $m$  数据图

从图中可以看出， $\bar{r}$  与  $m$  成基本呈线性关系，计算得  $r \approx 0.999$ ，故确实存在线性关系，下面分别用逐差法和最小二乘法进行数据处理。

**逐差法** 之前的数据处理中已经计算了各次逐差的值，列表如下：

表 14: 逐差结果数据表

逐差次数	$\bar{r}_5 - \bar{r}_0$	$\bar{r}_6 - \bar{r}_1$	$\bar{r}_7 - \bar{r}_2$	$\bar{r}_8 - \bar{r}_3$	$\bar{r}_9 - \bar{r}_4$
逐差长度 $\delta L_i/mm$	0.60	0.60	0.59	0.58	0.57

利用公式，有：

$$\delta L = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \delta L_i = 0.588(mm)$$

下计算不确定度：A 类：

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\delta L_i - \bar{\delta L})^2}{5 \times 4}} = 0.006(mm)$$

B 类:

$$e_L = \sum_{i=1}^5 \frac{e + e}{5} = 0.02(mm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.012(mm)$$

总不确定度:

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_L^2} = 0.013(mm)$$

综上, 得:

$$\delta L \pm \sigma_L = 0.588 \pm 0.013(mm)$$

最小二乘法 设

$$\bar{r} = k \times m + b$$

考虑到需要计算的物理量, 我们对截距进行分析:

$$k = \frac{\sum_{i=0}^9 (\bar{r}_i - \bar{r})(m_i - \bar{m})}{\sum_{i=0}^9 (m_i - \bar{m})^2} = 5.88 \times 10^{-4}(mm/g)$$

下计算不确定度: 首先计算  $\bar{r}$  的不确定度: A 类:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{10-2} \sum_{i=0}^9 (\bar{r}_i - \bar{r})^2} = 0.009(mm)$$

B 类:

$$\sigma = \frac{e + e}{\sqrt{3}} = 0.012(mm)$$

总不确定度:

$$\sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_r^2} = 0.015(mm)$$

得  $k$  的不确定度:

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=0}^9 (m_i - \bar{m})^2}} = 6 \times 10^{-6}(mm/g)$$

故:

$$k \pm \sigma_k = (5.88 \pm 0.06) \times 10^{-4}(mm/g)$$

### 1.3.2 利用光杠杆测量金属的杨氏模量

根据前文所展示的实验数据，可作  $\bar{r}$  与  $m$  关系图如下：

图 2: 本实验中  $\bar{r}$  与  $m$  数据图

从图中可以看出， $\bar{r}$  与  $m$  成基本呈线性关系，计算得  $r \approx 0.999$ ，故确实存在线性关系，下面分别用逐差法和最小二乘法进行数据处理。

**逐差法** 之前的数据处理中已经计算了各次逐差的值，列表如下：

表 15: 逐差结果数据表					
逐差次数	$\bar{r}_5 - \bar{r}_0$	$\bar{r}_6 - \bar{r}_1$	$\bar{r}_7 - \bar{r}_2$	$\bar{r}_8 - \bar{r}_3$	$\bar{r}_9 - \bar{r}_4$
逐差长度 $\delta L/cm$	1.58	1.52	1.54	1.52	1.54

利用公式，有：

$$\delta L = \sum_{i=1}^5 \delta L_i = 1.540(cm)$$

下计算不确定度：A 类：

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (\delta L_i - \bar{\delta L})^2}{5 \times 4}} = 0.011(cm)$$

B 类：

$$e_L = \sum_{i=1}^5 \frac{e + e}{5} = 0.02(cm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.012(cm)$$

总不确定度：

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\bar{L}}^2} = 0.016(cm)$$

综上，得：

$$\delta L \pm \sigma_L = 1.540 \pm 0.016(cm)$$

**最小二乘法** 设

$$\bar{r} = k \times m + b$$

考虑到需要计算的物理量，我们对截距进行分析：

$$k = \frac{\sum_{i=0}^9 (\bar{r}_i - \bar{r})(m_i - \bar{m})}{\sum_{i=0}^9 (m_i - \bar{m})^2} = 1.545 \times 10^{-3} (cm/g)$$

下计算不确定度：首先计算  $\bar{r}$  的不确定度：A 类：

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{10-2} \sum_{i=0}^9 (\bar{r}_i - \bar{r})^2} = 0.016 (cm)$$

B 类：

$$\sigma = \frac{e+e}{\sqrt{3}} = 0.012 (cm)$$

总不确定度：

$$\sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_r^2} = 0.020 (cm)$$

得  $k$  的不确定度：

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=0}^9 (m_i - \bar{m})^2}} = 1.1 \times 10^{-5} (cm/g)$$

故：

$$k \pm \sigma_k = (1.545 \pm 0.011) \times 10^{-3} (cm/g)$$

### 1.3.3 梁的弯曲测量金属的杨氏模量

根据前文所展示的实验数据，可作  $\bar{\lambda}$  与  $m$  关系图如下：

图 3: 本实验中  $\bar{\lambda}$  与  $m$  数据图

从图中可以看出， $\bar{\lambda}$  与  $m$  成基本呈线性关系，计算得  $\lambda \approx -0.9999$ ，故确实存在线性关系，下面分别用逐差法和最小二乘法进行数据处理。

**逐差法** 之前的数据处理中已经计算了各次逐差的值，列表如下：

表 16: 逐差结果数据表

逐差次数	$r_0 - r_3$	$r_1 - r_4$	$r_2 - r_5$
逐差长度 $\delta \Lambda_i / mm$	2.458	2.503	2.503

利用公式，有：

$$\delta\Lambda = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \delta\Lambda_i = 2.488(mm)$$

下计算不确定度：A 类：

$$\sigma_{\bar{\Lambda}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (\delta\Lambda_i - \bar{\delta\Lambda})^2}{3 \times 2}} = 0.015(mm)$$

B 类：

$$e_{\Lambda} = \sum_{i=1}^3 \frac{e + e}{3} = 0.008(mm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.005(mm)$$

总不确定度：

$$\sigma_{\Lambda} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{\bar{\Lambda}}^2} = 0.016(mm)$$

综上，得：

$$\delta\Lambda \pm \sigma_{\Lambda} = 2.488 \pm 0.016(mm)$$

最小二乘法 设

$$\bar{\lambda} = k \times m + b$$

考虑到需要计算的物理量，我们对截距进行分析：

$$k = \frac{\sum_{i=0}^5 (\bar{r}_i - \bar{r})(m_i - \bar{m})}{\sum_{i=0}^5 (m_i - \bar{m})^2} = -4.14 \times 10^{-3}(mm/g)$$

下计算不确定度：首先计算  $\bar{\lambda}$  的不确定度：A 类：

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{6-2} \sum_{i=0}^9 (\bar{r}_i - \bar{r})^2} = 0.017(mm)$$

B 类：

$$\sigma = \frac{e + e}{\sqrt{3}} = 0.005(mm)$$

总不确定度：

$$\sigma_{\bar{r}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_r^2} = 0.018(mm)$$



得  $k$  的不确定度:

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=0}^9 (m_i - \bar{m})^2}} = 2 \times 10^{-5} (mm/g)$$

故:

$$k \pm \sigma_k = (-4.14 \pm 0.02) \times 10^{-3} (mm/g)$$

## 1.4 分别计算金属的杨氏模量

### 1.4.1 利用 CCD 测量金属的杨氏模量

原理公式:

$$E = \frac{4mgL}{\pi d^2 \Delta r}$$

**逐差法计算** 由于相隔 5 项逐差, 可以将公式改写如下:

$$E = \frac{4\bar{m}gL}{\pi \bar{d}^2 (\frac{\delta L}{5})} = 1.68 \times 10^{11} (Pa)$$

各量不确定度如下:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (m_i - \bar{m})^2}{9 \times 8}} = 0.05 (g)$$

$$\sigma_L = 0.06 (cm)$$

对于金属丝直径:

$$\bar{d} = \frac{1}{10} \left( \sum_{i=1}^{10} d_i \right) - d_0 = \bar{d}_{read} - d_0$$

得:

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{d_{read}}^2 + \sigma_{d_0}^2}$$

由于  $\sigma_{d_0}$  已知, 下求  $\sigma_{d_{read}}$ :

A 类:

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (d_{read i} - \bar{d}_{read})^2}{10 \times 9}} = 0.0005 (mm)$$

B 类:

$$e_d = \sum_{i=1}^3 \frac{e}{3} = 0.004(mm) \Rightarrow \sigma = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.002(mm)$$

得总不确定度:

$$\sigma_{d_{read}} = \sqrt{\sigma_d^2 + \sigma^2} = 0.002(mm)$$

得:

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{d_{read}}^2 + \sigma_{d_0}^2} = 0.003(mm)$$

从而:

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\delta L}{5}\right)}\right)^2 \sigma_{\left(\frac{\delta L}{5}\right)}^2} = 0.03 \times 10^{11}(Pa)$$

故:

$$E \pm \sigma_E = (1.68 \pm 0.03) \times 10^{11}(Pa)$$

**最小二乘法计算** 由于斜率已知, 可将公式改写如下:

$$E = \frac{4gL}{\pi d^2 k} = 1.69 \times 10^{11}(Pa)$$

不确定度计算如下:

$$\begin{aligned} \sigma_L &= 0.06(cm) \\ \sigma_d &= \sqrt{\sigma_{d_{read}}^2 + \sigma_{d_0}^2} = 0.003(mm) \end{aligned}$$

从而:

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial k}\right)^2 \sigma_k^2} = 0.01 \times 10^{11}(Pa)$$

故:

$$E \pm \sigma_E = (1.69 \pm 0.01) \times 10^{11}(Pa)$$

#### 1.4.2 利用光杠杆测量金属的杨氏模量

原理公式:

$$E = \frac{8FLR}{\pi d^2 D \Delta r}$$

**逐差法计算** 由于相隔 5 项逐差, 可以将公式改写如下:

$$E = \frac{8\bar{m}gLR}{\pi d^2 \left(\frac{\delta L}{5}\right) D} = 1.66 \times 10^{11}(Pa)$$

**最小二乘法计算** 由于斜率已知，可将公式改写如下：

$$E = \frac{8gLR}{\pi d^2 k D} = 1.65 \times 10^{11} (Pa)$$

### 1.4.3 梁的弯曲测量金属的杨氏模量

原理公式：

$$E = \frac{Gl^3}{4\lambda ah^3}$$

**逐差法计算** 由于相隔 3 项逐差，可以将公式改写如下：

$$E = \frac{\bar{m}gl^3}{4ah^3(\frac{\delta\Delta}{3})} = 2.14 \times 10^{11} (Pa)$$

**最小二乘法计算** 由于斜率已知，可将公式改写如下：

$$E = \frac{gl^3}{4ah^3|k|} = 2.14 \times 10^{11} (Pa)$$

## 2 分析与讨论

### 2.1 $\Delta r$ 偏大

考虑到开始时钢丝没有拉直，因此，最初的一两个砝码会将金属丝拉直，而在这过程中，相应的  $\Delta r$  也会偏大。

### 2.2 $\Delta r$ 偏小

若开始时，装置的调节未做好，使得下端圆柱与限转螺丝存在摩擦，则最初时刻的  $\Delta r$  会因存有摩擦力而较小。

## 3 收获和感想

在课下准备本次实验的时候，我其实并没有感到非常紧张。一来，室友已做过这个实验，可以向他取经；二来，我自己在高中也做过这个实验。

但是，真正实际操作的时候，我却并没有像想象中那般轻松。

一来，进行实验的时候，有一些长度的测量对“身材”提出了要求；二来，我的 CCD 似乎对我有一些意见……

当然了，结束实验进行总结时，我不由的感叹实验设计的精妙。

在我看来，测量杨氏模量的重要一环，在于将微小的形变放大。无论是搭配了显微镜的 CCD，光杆杆还是读数显微镜，都是为了完成这一目标。推而广之，许多实验中，实验设计里都存在着这些将不可观测量转化为可观测量的精妙构想。

在实验课程的学习中，我也要培养自己的实验设计能力，培养自己设计将无法直接测量的物理量进行转化，将低精度测量量转化为高精度的测量量的能力。