1 测度论

1.1 外测度

定义 1.1 (外测度)**.**

$$m^*E = \inf_{E\subset \cup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

外测度的三条基本性质.

(1) $m^*E \geq 0$, 当 E 为空集时, 则 $m^*E = 0$;

(2) 设 $A \subset B$, 则 $m^*A \leq m^*B$(单调性);

(3) $m^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*A_i$(次可数可加性) .

例. 设 E 为 $[0,1]$ 中的全体有理数, 则 $m^*E = 0$.

例. 对于区间 I 有 $m^*I = |I|$

1.2 可测集

$$m^*I = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c). \tag{1}$$

引理 1.1. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 则(1)对 $\mathbf{R}^n$ 式中任何开区间都成立的充要条件是对 $\mathbf{R}^n$ 中的任何点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c). \tag{2}$$

定义 1.2 (可测集)**.** 设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集, 如果对任一点集 T 都有

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c),$$

则称 E 是 L 可测的. 这时 E 的外测度 m^*E 即称为 E 的 L 测度, 记为 mE.

L 可测集全体记为 $\mathscr{M}$.

定理 1.1. 集合 E 可测的充要条件是对于任意 $A \subset E, B \subset E^c$, 总有

$$m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B.$$

定理 1.2. S 可测的充要条件是 S^c 可测.

定理 1.3. 设 S_1, S_2 都可测, 则 $S_1 \cup S_2$ 也可测, 并且当 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ 时, 对于任意集合 T 总有

$$m^*[T \cap (S_1 \cup S_2)] = m^*(T \cap S_1) + m^*(T \cap S_2).$$

推论. 设 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可测, 则 $\cup_{i=1}^n S_i$ 也可测, 并且当 $S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j)$ 时, 对于任意集合 T 总有

$$m^*(T\cap(\cup_{i=1}^n S_i))=\sum_{i=1}^n m^*(T\cap S_i).$$

定理 1.4. 设 S_1,S_2 都可测, 则 $S_1\cap S_2$ 也可测.

推论. 设 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都可测, 则 $\cap_{i=1}^n S_i$ 也可测.

定理 1.5. 设 S_1,S_2 都可测, 则 S_1-S_2 也可测.

定理 1.6. 设 $\{S_i\}$ 是一列互不相交的可测集合, 则 $\cup_{i=1}^\infty$ 也是可测集, 且

$$m(\cup_{i=1}^\infty S_i)=\sum_{i=1}^\infty mS_i$$

推论. 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\cup_{i=1}^\infty Si$ 也是可测集.

定理 1.7. 设 $\{S_i\}$ 是一列可测集合, 则 $\cap_{i=1}^\infty Si$ 也是可测集.

定理 1.8. 设 $\{S_i\}$ 是一列递增的可测集合:

$$S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_n\cup\cdots,$$

令,$S=\cup_{i=1}^\infty Si=\lim_{n\to\infty}S_n$, 则

$$mS=\lim_{n\to\infty}mS_n.$$

定理 1.9. 设 $\{S_i\}$ 是一列递减的可测集合:

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\cup\cdots,$$

令,$S=\cap_{i=1}^\infty Si=\lim_{n\to\infty}S_n$, 则

$$mS=\lim_{n\to\infty}mS_n.$$

1.3 可测集类

定理 1.10. *(1)* 凡外测度为零之集皆可测, 称为零测度集.

(2) 零测度集之任何子集仍为零测集.

(3) 有限个或可数个零测集之和仍为零测集.

定理 1.11. 区间 I 都是可测集合, 且 $mI=|I|$.

定理 1.12. 凡开集和闭集皆可测.

为了进一步拓广可测集类, 给出下面定义.

定义 1.3. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中某些集合所成的集合类.

2 可测函数

定义 2.1 (可测函数)**.** 设 $f(x)$ 是定义在可测集 $E \in \mathbf{R}^n$ 的实函数. 如果对于任何有限实数 a,$E[f > a]$ 都是可测集, 则称 $f(x)$ 为定义在 E 上的可测函数

定义 2.2. 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实函数, 下列任一条件都是 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件:

(1) 对于任何有限实数 a,$E[f \geq a]$ 都可测;

(2) 对于任何有限实数 a,$E[f < a]$ 都可测;

(3) 对于任何有限实数 a,$E[f \leq a]$ 都可测;

(4) 对于任何有限实数 a, b,$E[a \leq f < b]$ 都可测 (充分性要假设 $f(x)$ 是有限函数);

推论. 设 $f(x)$ 在 E 上可测, 则 $E[f = a]$ 总可测, 不论 a 是有限实数或 $\pm\infty$.

例. 区间 $[a, b]$ 上的连续函数和单调函数都是可测函数.

定理 2.1. 可测集 $E \in \mathbf{R}^n$ 上的连续函数是可测函数.

定理 2.2. *(1)* 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 而 $E_1 \subset E$ 为 E 的可测子集, 则 $f(x)$ 看作定义在 E_1 上的函数时, 它是 E_1 上的可测函数;

(2) 设 $f(x)$ 是定义在有限个可测集 $E_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 的并集 $E = \sum_{i=1}^{s}$ 上且 $f(x)$ 在每个 E_i 上都可测, 则 $f(x)$ 在 E 上也可测.

定义 2.3 (简单函数)**.** 设 $f(x)$ 的定义域 E 可分为有限个互不相交的可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_s, E = \cup_{i=1}^{s}$, 使 $f(x)$ 在每个 E_i 上都等于某个常数 c_i, 则称 $f(x)$ 为简单函数.

可见,$[0, 1]$ 区间上的狄利克雷函数就是简单函数.

引理 2.1. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为 E 上的可测函数, 则 $E[f > g]$ 与 $E[f \geq g]$ 都是可测集.

定理 2.3. 设$f(x)$, $g(x)$ 在 E 上可测, 则下列函数 (假定它们在 E 上有意义) 皆在 E 上可测:

(1) $f(x) + g(x)$;

(2) $|f(x)|$;

(3) $1/f(x)$;

(4) $f(x) \cdot g(x)$.

定理 2.4. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一列 (或有限个) 可测函数, 则 $\mu(x) = \inf_n f_n(x)$ 与 $\lambda(x) = \sup_n f_n(x)$ 都在 E 上可测.

定理 2.5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一列可测函数, 则 $F(x) = \underline{\lim}_n f_n(x)$,$G(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)$ 也在 E 上可测, 特别的当 $F(x) = \lim_n f_n(x)$ 存在时, 它也在 E 上可测.

2.1 一些常用的推理

$$\cup_{n=1}^{\infty} E[f \geq a + \frac{1}{n}] = \cup_{n=1}^{\infty} E[f > a + \frac{1}{n}] \tag{3}$$

$$E[f \geq a] = \cap_{i=1}^{\infty} E[f > a - \frac{1}{n}] \tag{4}$$