泛函分析课后习题

HaoNan Qian

2021 年 12 月 26 日

目录

1 定理

定理 1.1 (里斯定理 (Riesz))**.** 设 X 是希尔伯特空间,f 是 X 上的连续线性泛函, 那么存在唯一的 $z \in X$, 使得对每个 $x \in X$, 有

$$f(x) = \langle x, z \rangle,$$

并且 $\|f\| = \|z\|$.

定理 1.2 (Banach 逆算子定理)**.** 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B 空间. 若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 它既是单射又是满射, 那么 $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$.

定理 1.3 (开映像定理)**.** 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B 空间. 若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 是一个满射, 则 T 是开映像.

定义 1.1 (闭算子)**.** 设 T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的线性算子,$D(T)$ 是其定义域. 若 $x_n \in D(T), x_n \to x$, 以及 $Tx_n \to y$, 能推出 $x \in D(T)$, 而且 $y = Tx$. 则 T 是闭算子

定理 1.4 (B.L.T)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间,$\mathscr{Y}$ 是 B 空间,$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 则 T 可以唯一的延拓到 $\overline{D(T)}$ 上成为线性算子 T_1, 使得 $T_1|_{D(T)} = T$, 且 $\|T_1\| = \|T\|$.

推论 (等价范数定理)**.** 设线性空间 $\mathscr{X}$ 上有两个模,$\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 如果 $\mathscr{X}$ 关于这两个模都构成 B 空间, 而且 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

定理 1.5 (闭图像定理)**.** 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ 是 B 空间. 若 T 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 的闭线性算子, 并且 $D(T)$ 是闭的, 则 T 连续

定理 1.6 (共鸣定理)**.** $\mathscr{X}$ 是 B 空间,$\mathscr{Y}$ 是 B^* 空间, 如果

$$W \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}),\ 使得\ \sup_{A \in W} \|Ax\| < \infty (\forall x \in (X))$$

那么存在常数 M, 使得 $\|A\| \leq M\ (\forall A \in W)$.

定理 1.7 (Hahn-Banach)**.** 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间, $\mathscr{X}_0$ 是 $\mathscr{X}$ 的线性子空间,f_0 是定义在 $\mathscr{X}_0$ 上的有界线性泛函, 则在 $\mathscr{X}$ 上必有有界线性泛函 f , 满足:

(1) $f(x) = f_0(x)$ *(*$\forall x \in \mathscr{X}_0$*)*

(2) $\|f\| = \|f_0\|_0$,

其中 $\|f_0\|_0$ 表示 f_0 在 $\mathscr{X}_0$ 的范数

推论. 设 $\mathscr{X}$ 是 B^* 空间,$\forall x \in \mathscr{X} \setminus \{0\}$ 必 $\exists f \in \mathscr{H}^*$*(或许是* $\mathscr{X}^*$*)* 使得

$$f(x_0) = \|x_0\|, \quad \text{且}, \|f\| = 1.$$

定理 1.8. *Hilbert* 空间 X 是可分的, 当且仅当它至多有可数的正交基 S. 若 S 的元素个数 $N < \infty$, 则 X 同构与 $\mathbb{K}^N$, 若 S 的元素个数 $N = \infty$, 则 X 同构于 l^2.

定理 1.9 (Schauder)**.** 设 C 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个**闭凸子集**,$T : C \to C$ 连续且 $T(C)$ 列紧, 则 T 在 C 上必有一个不动点.

2 不动点

问题 2.1. 证明完备空间的闭子集是一个完备的子空间, 而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集.

问题 2.2. 设 T 是度量空间中的压缩映射, 求证 T 是连续的.

问题 2.3. 设 T 是压缩映射, 证明 $T^n (n \in \mathbb{N})$ 也是压缩映射, 并且说明逆命题不一定成立.

3 完备性

问题 3.1. 在一个度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中, 求证: 基本列是收敛列, 当且仅当其中存在一个收敛子列.

问题 3.2. 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体, 在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geq 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中 $x=\{\xi_n\}\in F, y=\{\eta_n\}\in F$, 求证 (F,ρ) 不完备, 并指出它的完备化空间.

问题 3.3. 求证:$[0,1]$ 上的多项式全体按距离 $\rho(p,q)=\int_0^1|p(x)-q(x)|dx$ (p,q 是多项式) 是不完备的, 并指出它的完备化空间.

问题 3.4. 在完备的度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 中各处点列 $\{x_n\}$, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在基本列 $\{y_n\}$, 使得

$$\rho(x_n,y_n)<\varepsilon(n\in\mathbb{N})$$

求证 $\{x_n\}$ 收敛.

4 列紧集

问题 4.1. 在完备的度量空间中求证: 为了子集 A 是列紧的, 其充分必要条件是对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 A 的列紧的 $\varepsilon-$ 网

问题 4.2. 在度量空间中求证: 紧集上的连续函数必是有界的, 并且达到它的上、下确界.

问题 4.3. 在度量空间中求证: 完全有界的集合是有界的, 并通过考虑 l^2 的子集 $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$e_k = \{0, 0, \cdots, 1, \cdots\},$$

说明一个集合可以是有界但是不完全有界.

问题 4.4. 设 $(\mathscr{X}, \rho)$ 是度量空间,F_1, F_2 是它的两个紧子集, 求证 $\exists x_i \in F_i (i = 1, 2)$, 使得 $\rho(F_1, F_2) = \rho(x_1, x_2)$, 其中

$$\rho(F_1, F_2) \triangleq \inf\{\rho(x_1, x_2) | x \in F_1, y \in F_2\}.$$

5 线性空间

先看书 *39* 页.

问题 5.1. 设 $BC[0,\infty)$ 表示 $[0,\infty)$ 上连续且有界的函数 $f(x)$ 全体, 对于每一个 $f\in BC[0,\infty)$ 及 $a>0$, 定义

$$\|f\|_a=\Big(\int_0^\infty e^{-ax}|f(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

(1) 求证 $\|f\|_a$ 是 $BC[0,\infty)$ 上的范数.

(2) 若 $a,b>0,a\neq b$, 求证 $\|f\|_a,\|f\|_b$ 作为 $BC[0,\infty)$ 上的范数是不等价的.

问题 5.2. 设 C_0 表示以 0 为极限的实数全体, 并在 C_0 中赋以范数

$$\|x\|=\max_{n\geq 1}|\xi_n|\quad(\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in C_0).$$

又设 $M\triangleq\big\{x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\in C_0|\sum_{n=1}^\infty\frac{\xi_n}{2^n}=0\big\}$.

(1) 求证: M 是 C_0 的闭线性子空间.

(2) 设 $x_0=(2,0,\cdots,0,\cdots)$, 求证:

$$\inf_{z\in M}\|x_0-z\|=1,$$

但 $\forall y\in M$ 有 $\|x_0-y\|>1$.

6 凸集

问题 6.1. 设 C 是 B^* 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个紧凸集, 映射 $T: C \to C$ 连续, 求证 T 在 C 上有一个不动点.

问题 6.2. 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 其元素 $a_{ij} > 0 (1 \leq i, j \leq n)$, 求证: 存在 $\lambda > 0$ 及各分量非负但不全为零的向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$Ax = \lambda x.$$

7 内积

问题 7.1. 求证在 $C[a,b]$ 上不可能引进一种内积 $(\cdot,\cdot)$, 使其满足

$$(f,f)^{\frac{1}{2}} = \max_{a\le x\le b}|f(x)| \quad (\forall f\in C[a,b])$$

解. 令 $f(x)=1, g(x)=\frac{x-a}{b-a}$, 则 $\|f\|=\|g\|=1$,

$$\begin{aligned}
&f(x)+g(x)=1+\frac{x-a}{b-a}, f(x)-g(x)=1-\frac{x-a}{b-a},\\
&\|f(x)+g(x)\|=2, \|f(x)-g(x)\|=1,\\
&\|f(x)+g(x)\|^2+\|f(x)-g(x)\|^2=5,\\
&2(\|f(x)\|^2+\|g(x)\|^2)=4.
\end{aligned}$$

因为 $2(\|f(x)\|^2+\|g(x)\|^2)\ne\|f(x)+g(x)\|^2+\|f(x)-g(x)\|^2$, 不符合平行四边形等式, 所以不能够引入这样的内积.

问题 7.2. 设 M,N 是内积空间中的两个子集, 求证:

$$M\subset N\Longrightarrow N^\perp\subset M^\perp$$

解. 因为 $x\in N^\perp$, 则 $x\perp N$, 而 $M\subset N$, 所以 $x\perp M$, 所以 $x\in M^\perp$

问题 7.3. 设 X 是 *Hilbert* 空间 X 的子集, 求证:

$$(M^\perp)^\perp=\overline{\operatorname{span} M}$$

问题 7.4. 在 $L^2[-1,1]$ 中, 问偶函数集合的正交补是什么? 证明你的结论.

8 线性算子

问题 8.1. 求证:$T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ 的充要条件是 T 为线性算子并将 $\mathscr{X}$ 中的有界集映为 $\mathscr{Y}$ 中的有界集.

问题 8.2. 设 $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 求证:

1. $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} = \|Ax\|$;
2. $\|A\| = \sup_{\|x\|< 1} = \|Ax\|$;

问题 8.3. 设 $f \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, 求证:

1. $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x)$;
2. $\sup_{\|x\|<\delta} f(x) = \delta\|f\|(\forall\delta > 0)$.

问题 8.4. 设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的非零线性有界泛函, 令 $d = \inf\{\|x\||f(x) = 1\}$, 求证:$\|f\| = 1/d$.

问题 8.5. 设 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ 是线性的, 令

$$N(T) \triangleq \{X \in \mathscr{X}|Tx = \theta\}.$$

1. 若 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, 求证:$N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间.
2. 问若 $N(T)$ 是 $\mathscr{X}$ 的闭线性子空间能否推出 $T \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$?
3. 若 f 是线性泛函, 求证:

$$f \in \mathscr{X}^* \Longleftrightarrow N(f)\text{是闭线性子空间}.$$

问题 8.6. 设 f 是 $\mathscr{X}$ 上的线性泛函, 记

$$H_f^\lambda \triangleq \{x \in \mathscr{X}|f(x) = \lambda\}(\forall\lambda \in \mathbb{K}).$$

如果 $f \in \mathscr{X}^*$, 并且 $\|f\| = 1$, 求证:

1. $|f(x)| = \inf\{\|x - z\||\forall z \in H_f^0\}$;
2. $\forall\lambda \in \mathbb{K}, H_f^\lambda$ 上的任意一点 x 到 H_f^0 的距离都等于 $|\lambda|$, 并对 $\mathscr{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}^1$ 的情况解释 (1) 和 (2) 的几何意义.