线性回归

某城市的电网系统需要升级，以应对日益增长的用电需求。电网系统需要考虑最高温度对城市的峰值用电量的影响。项目负责人需要预测明天城市的峰值用电量，他搜集了以往的数据。现在，负责人提供了他搜集到的数据，并请求你帮他训练出一个模型，这个模型能够很好地预测明天城市的峰值用电量。

1- 准备

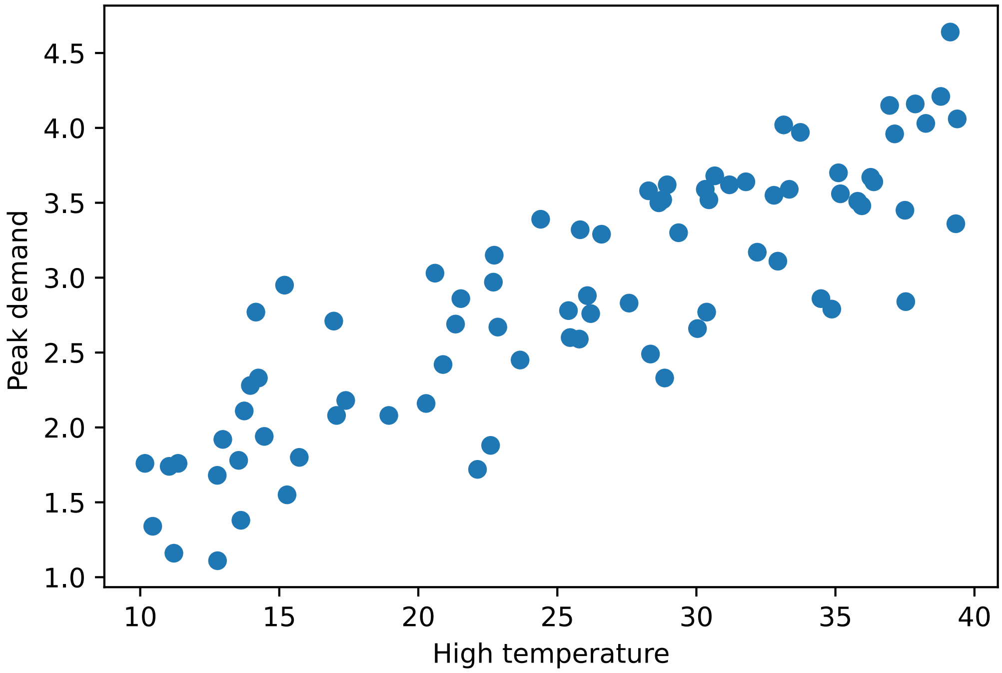
先导入必要的python包

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
%matplotlib inline
```

```
导入负责人提供的数据，并可视化数据
```

```
data = np.loadtxt('data.txt')
#data 第一列为温度信息 第二列为人口信息
X = data[:,0].reshape(-1,1)
#data 第三列为用电量信息
Y = data[:,2].reshape(-1,1)
plt.xlabel('High temperature')
plt.ylabel('Peak demand ')
plt.scatter(X,Y)
print('X shape:',X.shape)
print('Y shape:',Y.shape)
print('some X[:5]:',X[:5])
print('some Y[:5]:',Y[:5])
```

```
X shape: (80, 1)
Y shape: (80, 1)
some X[:5]: [[38.79]
 [37.53]
 [32.93]
 [25.82]
 [20.89]]
some Y[:5]: [[4.21]
 [2.84]
 [3.11]
 [3.32]
 [2.42]]
```



2- 单变量线性回归

你决定使用回归算法来训练一个模型，用来预测明天城市的峰值用电量。

单变量线性回归模型表示

$Peak\ demand \approx \theta_0 + \theta_1 \cdot (High\ temperature)$
functions
单变量线性回归的模型由两个参数θ_0,θ_1来表示一条直线。我们的目标也就是找到一个"最符合"的直线或者说参数θ_i如何选择。

设输入的特征——最高温度(F)为$x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n+1}$，$i = 1, \cdots, m$。$m$为样本总数，在该例子中为$m = 80$。$n$为特征的个数，这里为$1$。

$$x^{(i)} \in \mathbb{R}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{high temperature for day i} \end{bmatrix} \tag{1}$$

设输出为$y^{(i)} \in \mathbb{R}$，表示第i天的峰值用电量。

参数为$\theta \in \mathbb{R}^{n+1} = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$

在该例子中，模型应该为一条直线，假设模型为：
$h_\theta(x) = \theta^T x = \theta_0 + \theta_1 x$
注意：这里的θ^T是一个向量，θ_0, θ_1是标量。使用向量化的表示原因（1）简化数学公式的书写（2）与程序代码中的表示可以一致，使用向量化的代码表示可以加速运算，因此一般能不用`for`循环的地方都不用`for`循环。

下面一个简单的例子说明向量化的代码运算更快

```
# 随机初始化两个向量，计算它们的点积
x = np.random.rand(10000000,1)
y = np.random.rand(10000000,1)
```

```python
ans = 0
start = time.time()
for i in range(10000000):
    ans += x[i,0]*y[i,0]
end = time.time()
print('for循环的计算时间%.2fs'%(end - start))
print('计算结果：%.2f'%(ans))
start = time.time()
ans = np.dot(x.T,y)
end = time.time()
print('向量化的计算时间%.2fs'%(end - start))
print('计算结果：%.2f'%(ans))
```

```
for循环的计算时间9.25s
计算结果：2501610.22
向量化的计算时间0.01s
计算结果：2501610.22
```

因为$\theta_0+\theta_1 x=\begin{bmatrix}\theta_0 & \theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}$
因此，为了方便编程，我们需要给每一个$x^{(i)}$的前面再加一行1。使得每一个$x^{(i)}$成为了一个2维向量

损失函数

模型的预测结果和实际结果有差距，为了衡量它们之间的差距，或者说使用这个模型产生的损失，我们定义损失函数$l(h_\theta(x),y)$。这里我们使用平方损失：

$$l(h_\theta(x),y)=(h_\theta(x)-y)^2 \tag{2}$$

上述损失函数表示一个样本的损失，训练集的损失使用$J(\theta)$表示：

$$\begin{aligned}J(\theta)&=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}l(h_\theta(x^{(i)}),y^{(i)})\\&=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta(x^{(i)})-y^{(i)}\right)^2\\&=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\theta^T x^{(i)}-y^{(i)}\right)^2\end{aligned}$$

（其中数字2的作用是方便求导时的运算）

为了使模型的预测效果好，需要最小化训练集上的损失，$\underset{\theta}{\operatorname{minimize}} J(\theta)$。

梯度下降法

为了得到使得损失函数$J(\theta)$最小化的θ，可以使用梯度下降法。

损失函数$J(\theta)$的函数图像如下
损失函数J

损失函数$J(\theta)$关于参数向量θ中的一个参数比如θ_1的函数图是
theta-J 函数图

假设一开始$J(\theta)$的值在紫色点上，为了降低$J(\theta)$值，需要θ_1往右变移动，这个方向是$J(\theta)$在θ_1上的负梯度。只要θ不断往负梯度方向移动，$J(\theta)$一定可以降到最低值。梯度下降法就是使参数θ不断往负梯度移动，经过有限次迭代(更新θ值)之后，损失函数$J(\theta)$达到最低值。

梯度下降法的过程：

1. 初始化参数向量θ。
2. 开始迭代：
3. 计算损失函数$J(\theta)$，
4. 计算θ的梯度，
5. 更新参数θ。

现在，我们开始实现 Regression 学习算法。

任务1： 首先在X前面加上一列1，表示参数θ_0的系数，方便运算。X是形状为$(m,1)$的矩阵，一共m行数据，我们需要为每一行数据的前面加一列1，也就是像这样

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x^{(0)} \\ 1 & x^{(1)} \\ & \vdots \\ 1 & x^{(m-1)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

提示：可以使用`np.hstack`把两个矩阵水平合在一起。用1初始化向量或矩阵的函数是`np.ones`。(函数详情使用python的帮助函数`help`，比如`help(np.ones)`，或者百度。)

```python
def preprocess_data(X):
    """输入预处理 在X前面加一列1
    参数：
        X:原始数据，shape为 mx1
    返回：
        X_train: 在X加一列1的数据，shape为 mx2
    """

    m = X.shape[0]    # m 是数据X的行数
    ### START CODE HERE ###
    temp=np.ones((m,1))
    #print(temp)
    X_train = None
    X_train=np.hstack((temp,X))
    #print(X_train)
    ### END CODE HERE ###
    return X_train
```

```python
X = preprocess_data(X)
print('new X shape:',X.shape)
print('Y shape:',Y.shape)
print('new X[:10,:]=',X[:5,:])
```

```
new X shape: (80, 2)
Y shape: (80, 1)
new X[:10,:]= [[ 1.   38.79]
 [ 1.   37.53]
 [ 1.   32.93]
 [ 1.   25.82]
 [ 1.   20.89]]
```

任务2： 接着，初始化参数向量θ。θ的shape是$(2,1)$，我们随机初始化θ。

提示：numpy的随机函数是`np.random.rand`。

```python
def init_parameter(shape):
    """初始化参数
    参数:
        shape: 参数形状
    返回:
        theta_init: 初始化后的参数

    """
    np.random.seed(0)
    m, n = shape
    ### START CODE HERE ###

    theta_init = None
    theta_init=np.random.rand(m,n)
    ### END CODE HERE ###

    return theta_init
```

```python
theta = init_parameter((2,1))
print('theta shape is ',theta.shape)
print('theta = ',theta)
```

```
theta shape is  (2, 1)
theta =  [[0.5488135 ]
 [0.71518937]]
```

任务3： 实现计算损失函数$J(\theta)$的函数。
从公式

$$J(\theta)=\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}\left(\theta^T x^{(i)}-y^{(i)}\right)^2$$

我们可以看到有个求和。由于使用`for`循环效率不高，因此我们需要用向量化的方法去掉`for`循环。X大小为$m\times(n+1)$(n表示特征数量，对于这里$n=1$)，每行是一条样本特征向量，θ 大小为$(n+1)\times 1$，可以使用$X\theta$计算所有样本的预测结果,大小为$m\times 1$，接着$(X\theta-Y)^2$计算所有样本的损失值，最后求和并除以$2m$得到$J(\theta)$的值。因此，这里的线性模型就可以表示为
$h_\theta(X)=X\theta$ $h_\theta(X)$的大小为$m\times 1$，$J(\theta)$应该是一个标量
提示：矩阵乘法运算可使用`np.dot`函数，平方运算可使用`np.power(data, 2)`函数，求和运算可使用`np.sum`。

```python
def compute_J(X, Y, theta):
    """计算损失函数J
```

```
    参数：
        X: 训练集数据特征，shape: (m, 2)
        Y: 训练集数据标签，shape: (m, 1)
        theta: 参数，shape: (2, 1)

    返回：
        loss: 损失值
    """

    m = X.shape[0]

    ### START CODE HERE ###
    h_theta=np.dot(X,theta)
    loss=np.sum(np.power(h_theta-Y,2))/(2*m)
    ### END CODE HERE ###

    return loss
```

```
first_loss = compute_J(X, Y, theta)
print("first_loss = ", first_loss)
```

```
first_loss =  145.4723573288773
```

任务4:计算参数θ的梯度。

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\theta^T x^{(i)}-y\right)x_j^{(i)} \tag{4}$$

向量化公式为

$$\text{gradients}=\frac{1}{m}X^T(X\theta-Y) \tag{5}$$

提示：矩阵A的转置表示为`A.T`

```
def compute_gradient(X, Y, theta):
    """计算参数theta的梯度值
    参数：
        X: 训练集数据特征，shape: (m, 2)
        Y: 训练集数据标签，shape: (m, 1)
        theta: 参数，shape: (2, 1)

    返回：
        gradients: theta的梯度列表 shape:(2,1)
    """

    m = X.shape[0]
    gradients = None

    ### START CODE HERE ###

    gradients = np.dot(X.T,np.dot(X,theta)-Y )
    gradients /= m

    ### END CODE HERE ###

```

```
    return gradients
```

```
gradients_first = compute_gradient(X, Y, theta)
print("gradients_first shape : ", gradients_first.shape)
print("gradients_first = ", gradients_first)

```

```
gradients_first shape :  (2, 1)
gradients_first =  [[ 16.10362006]
 [464.4922825 ]]
```

任务5:用梯度下降法更新参数θ
实现`update_parameters`函数。

```
def update_parameters(theta, gradients, learning_rate=0.01):
    """更新参数theta
    参数:
        theta: 参数, shape: (2, 1)
        gradients: 梯度, shape: (2, 1)
        learning_rate: 学习率, 默认为0.01

    返回:
        parameters: 更新后的参数
    """
    ### START CODE HERE ###

    parameters = theta-learning_rate*gradients

    ### END CODE HERE ###

    return parameters
```

```
theta_one_iter = update_parameters(theta, gradients_first)

print("theta_one_iter = ", theta_one_iter)
```

```
theta_one_iter =  [[ 0.3877773 ]
 [-3.92973346]]
```

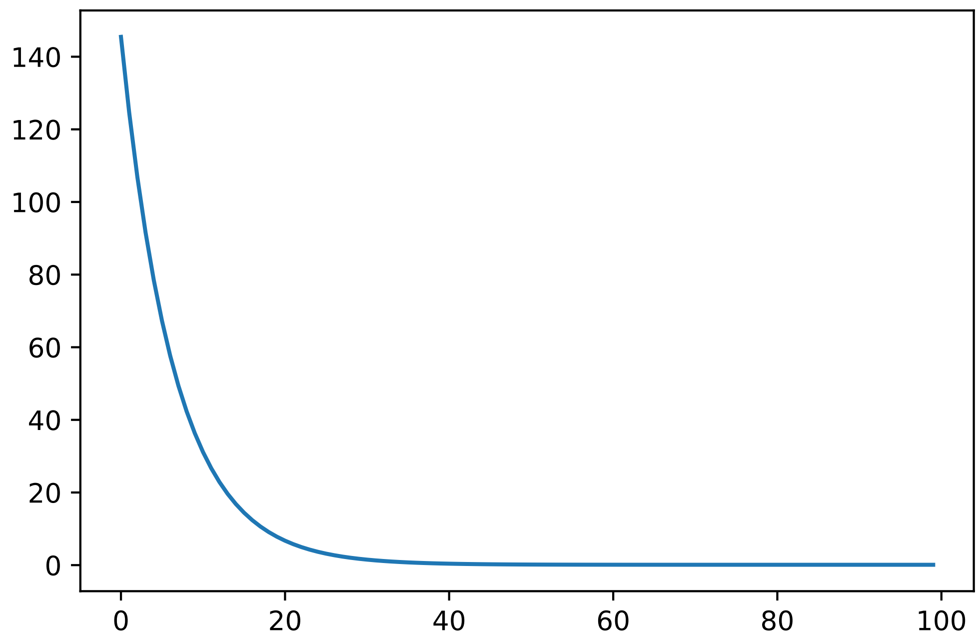
任务6：将前面定义的函数整合起来，实现完整的模型训练函数。迭代更新θ `iter_num`次。迭代次数参数`iter_num`也是一个超参数，如果`iter_num`太小，损失函数$J(\theta)$还没有收敛；如果`iter_num`太大，损失函数$J(\theta)$早就收敛了，过多的迭代浪费时间。

```
def model(X, Y, theta, iter_num = 100, learning_rate=0.0001):
    """梯度下降函数
    参数:
        X: 训练集数据特征, shape: (m, n+1)
        Y: 训练集数据标签, shape: (m, 1)
        iter_num: 梯度下降的迭代次数
        theta: 初始化的参数, shape: (n+1, 1)
    返回:
        loss_history: 每次迭代的损失值
        theta_history: 每次迭代更新后的参数
```

```python
            theta: 训练得到的参数
        """

        loss_history = []
        theta_history = []

        for i in range(iter_num):

            ### START CODE HERE ###

            loss = compute_J(X,Y,theta)
            gradients = compute_gradient(X,Y,theta)
            theta = update_parameters(theta,gradients,learning_rate)

            ### END CODE HERE ###

            loss_history.append(loss)
            theta_history.append(theta)

        return loss_history, theta_history, theta
```

```python
# 尝试不同的学习率和迭代次数
# 提交作业之前要把学习效率改为0.0001，然后重新运行一遍

loss_history, theta_history, theta = model(X, Y, theta, learning_rate=0.0001)

print("theta = ", theta)

plt.plot(loss_history)
print("loss = ", loss_history[-1])
```

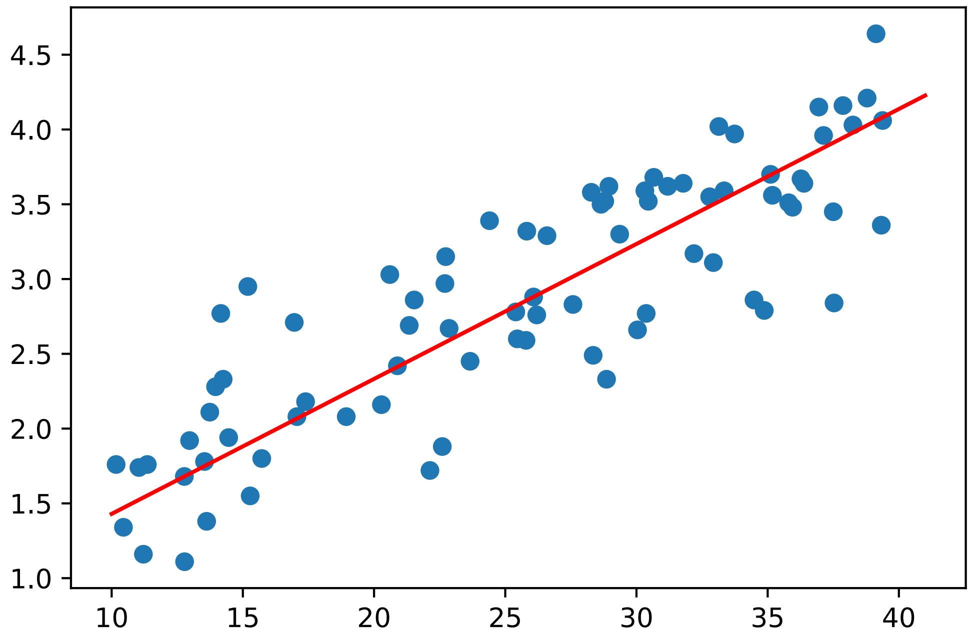
```
theta =  [[0.52741588]
 [0.09023805]]
loss =  0.0930181186193844
```



下面是学习到的线性模型与原始数据的关系

```
plt.scatter(X[:,1],Y)
x = np.arange(10,42)
plt.plot(x,x*theta[1][0]+theta[0][0],'r')
```

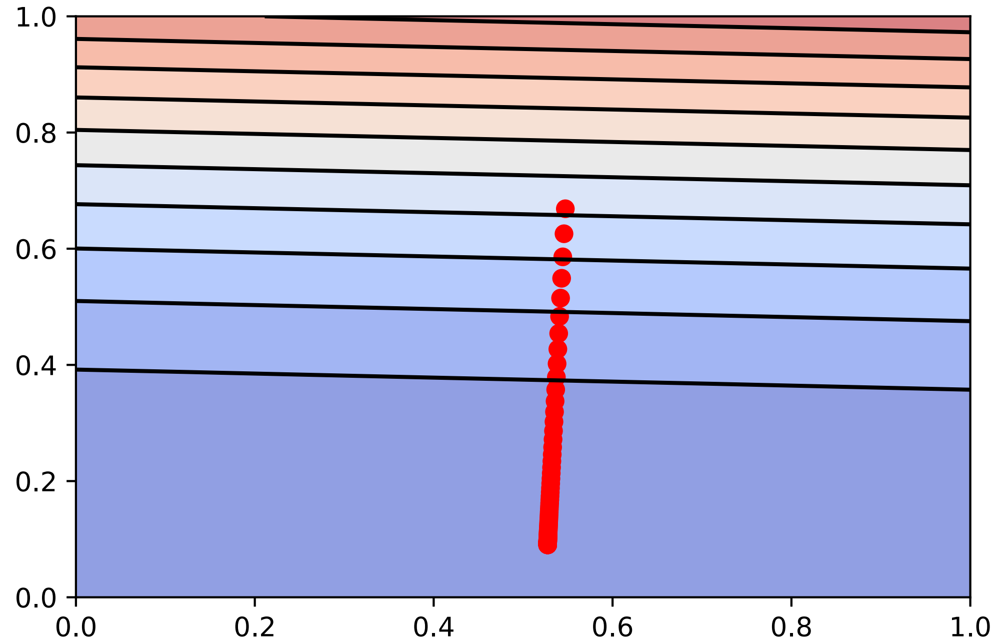
```
[&lt;matplotlib.lines.Line2D at 0x1cd2b5b7a60&gt;]
```



现在直观地了解一下梯度下降的过程。

```
theta_0 = np.linspace(0, 1, 50)
theta_1 = np.linspace(0, 1, 50)
theta_0, theta_1 = np.meshgrid(theta_0,theta_1)
J = np.zeros_like(theta_0)

for i in range(50):
    for j in range(50):
        J[i,j] = compute_J(X, Y, np.array([[theta_0[i,j]],[theta_1[i,j]]]))

plt.contourf(theta_0, theta_1, J, 10, alpha = 0.6, cmap = plt.cm.coolwarm)
C = plt.contour(theta_0, theta_1, J, 10, colors = 'black')

# 画出损失函数J的历史位置
history_num = len(theta_history)
theta_0_history = np.zeros(history_num)
theta_1_history = np.zeros(history_num)
for i in range(history_num):
    theta_0_history[i],theta_1_history[i] = theta_history[i][0,0],theta_history[i][1,0]
plt.scatter(theta_0_history, theta_1_history, c="r")
```

```
&lt;matplotlib.collections.PathCollection at 0x1cd209cdbe0&gt;
```



可以看到，$J(\theta)$的值不断地往最低点移动。在y轴，$J(\theta)$下降的比较快，在x轴，$J(\theta)$下降的比较慢。

多变量线性回归

上述例子时单变量回归的例子，样本的特征只有一个一天的最高温度。负责人进过分析后发现，城市一天的峰值用电量还与城市人口有关系，因此，他在回归模型中添加城市人口变量x_2，你的任务是训练这个多变量回归方程：

$$h(x) = \theta^T x = \theta_0 * 1 + \theta_1 * x_1 + \theta_2 * x_2 \tag{6}$$

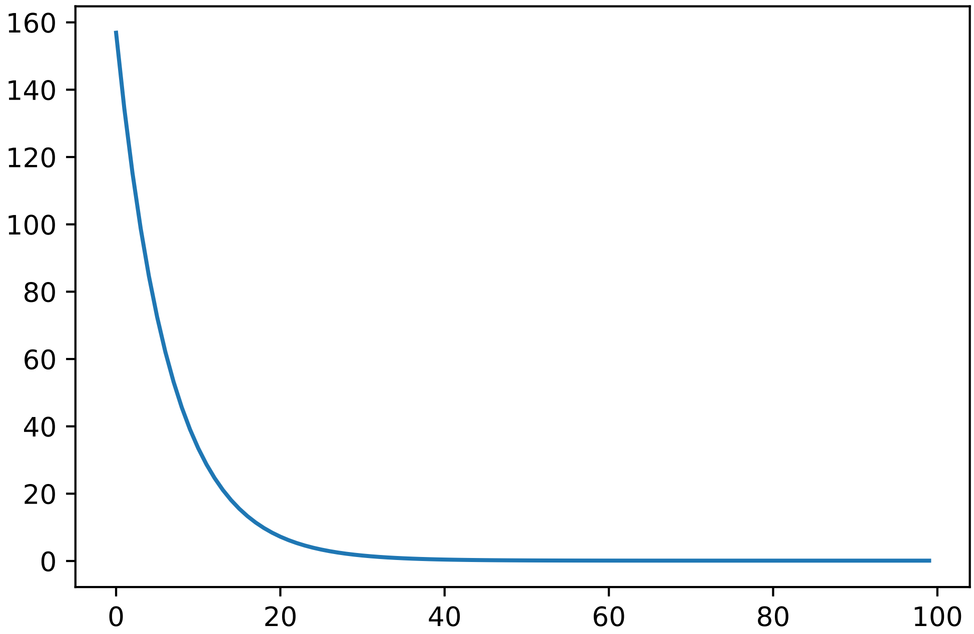
之前实现的梯度下降法使用的对象是θ和X向量，所示实现的梯度下降函数适用单变量回归和多变量回归。这里可以看到使用向量化的公式在多变量回归里依然不变，因此代码也基本一样,直接调用前面实现的函数即可。

任务7： 现在，训练一个多变量回归模型。

```
#读取数据，X的前两列
X = data[:,0:2].reshape(-1, 2)
Y = data[:,2].reshape(-1, 1)

### START CODE HERE ###

# 同样为X的前面添加一列1,使得X的shape从100x2 -> 100x3
m = X.shape[0]
tmp=np.ones((m,1))
X = np.hstack((tmp,X))
# 初始化参数theta ,theta的shape应为 3x1
theta = init_parameter((3,1))
#传入模型训练 learning_rate设为0.0001
loss_history, theta_history, theta =model(X,Y,theta,learning_rate=0.0001)

### END CODE HERE ###
print("theta = ", theta)

```

```
plt.plot(loss_history)
print("loss = ", loss_history[-1])
```

```
theta =  [[0.526022  ]
 [0.06720419]
 [0.57591482]]
loss =  0.10571180408810799
```



特征归一化

特征归一化可以确保特征在相同的尺度，加快梯度下降的收敛过程。

任务8： 对数据进行零均值单位方差归一化处理。零均值单位方差归一化公式：

$$x_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{7}$$

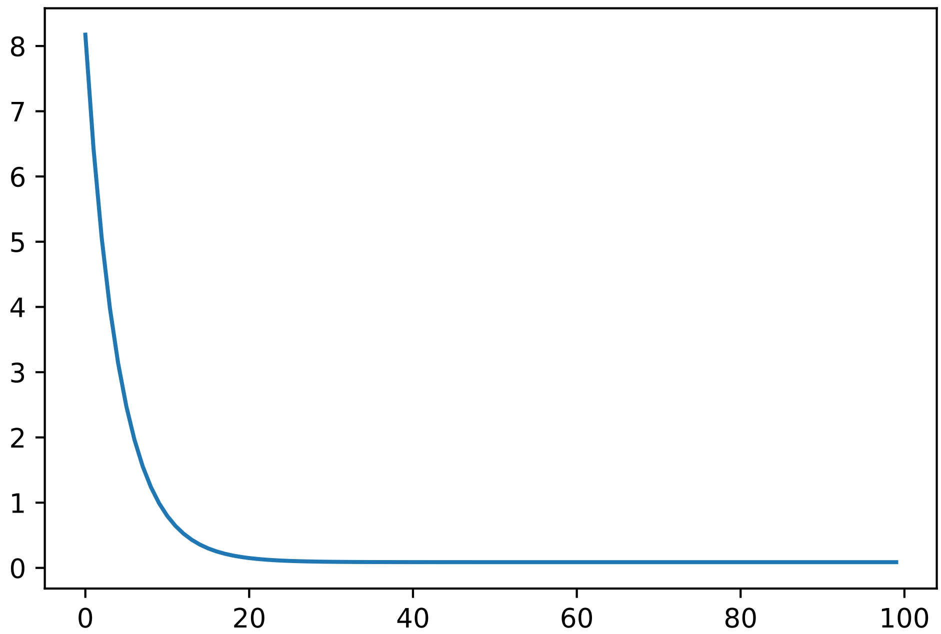
其中i表示第i个特征，μ_i表示第i个特征的均值，σ_i表示第i个特征的标准差。进行零均值单位方差归一化处理后，数据符合标准正态分布，即均值为0，标准差为1。
注意，使用新样本进行预测时，需要对样本的特征进行相同的缩放处理。

提示：求特征的均值，使用numpy的函数`np.mean`，求特征的标准差，使用numpy的函数`np.std`，需要注意对哪个维度求均值和标准差。比如，对矩阵A对每一行求均值`np.mean(A,axis=0)`

```
X = data[:,0:2].reshape((-1, 2))
Y = data[:,2].reshape((-1, 1))

### START CODE HERE ###

# 计算特征的均值 mu
mu = np.mean(X,axis=0)
# 计算特征的标准差 sigma
sigma = np.std(X,axis=0)
# 零均值单位方差归一化
X_norm = (X-mu)/sigma

```

```
### END CODE HERE ###

# 训练多变量回归模型
# X_norm前面加一列1
X = preprocess_data(X_norm)

theta = np.array([3,3,3]).reshape(3,1)#init_parameter((3,1))

# 学习率使用0.1
loss_history, theta_history, theta = model(X, Y, theta, learning_rate=0.1)



print("mu = ", mu)
print("sigma = ", sigma)

print("theta = ", theta)

plt.plot(loss_history)
print("loss = ", loss_history[-1])
```

```
mu =  [25.77175  1.1355 ]
sigma =  [8.82317046 0.35648247]
theta =  [[2.87687827]
 [0.69766231]
 [0.03497325]]
loss =  0.08778900945492227
```

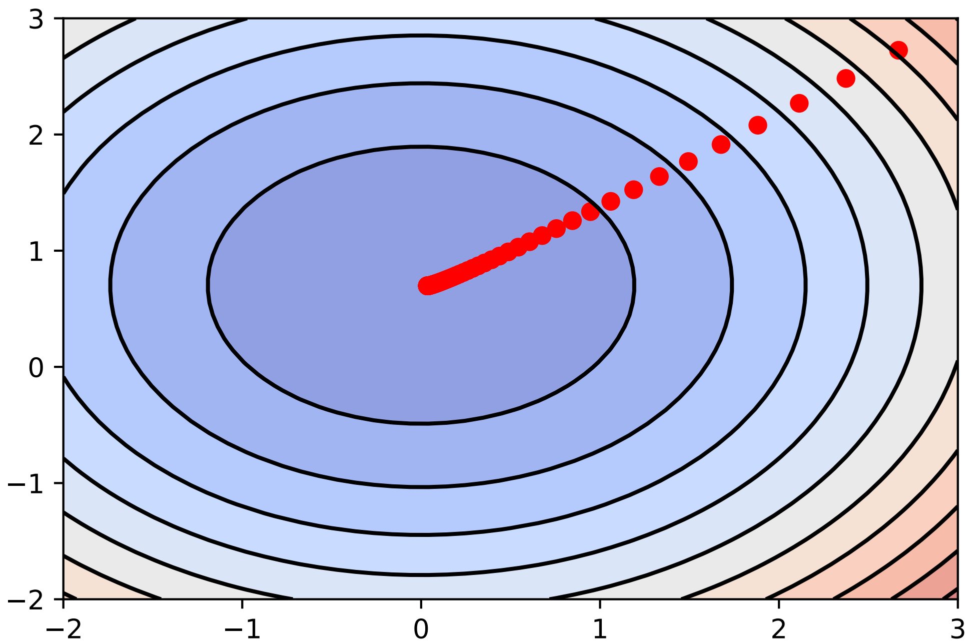


我们来直观地了解特征尺度归一化的梯度下降的过程。这里只展示单变量回归梯度下降过程。

```
X_show = X[:,0:2]
X_show = preprocess_data(X_show)

theta_0 = np.linspace(-2, 3, 50)
theta_1 = np.linspace(-2, 3, 50)
theta_0, theta_1 = np.meshgrid(theta_0,theta_1)
```

```python
J = np.zeros_like(theta_0)

for i in range(50):
    for j in range(50):
        J[i,j] = compute_J(X_show, Y, np.array([[2.877],[theta_0[i,j]],[theta_1[i,j]]]))

plt.contourf(theta_0, theta_1, J, 10, alpha = 0.6, cmap = plt.cm.coolwarm)
C = plt.contour(theta_0, theta_1, J, 10, colors = 'black')

# 画出损失函数J的历史位置
history_num = len(theta_history)
theta_0_history = np.zeros(history_num)
theta_1_history = np.zeros(history_num)
for i in range(history_num):
    theta_0_history[i],theta_1_history[i] = theta_history[i][2,0],theta_history[i][1,0]
plt.scatter(theta_0_history, theta_1_history, c="r")
```

```
&lt;matplotlib.collections.PathCollection at 0x1cd223378e0&gt;
```



可以看到，$J(\theta)$的值不断地往最低点移动。与没有进行特征尺度归一化的图相比，归一化后，每个维度的变化幅度大致相同，这有助于$J(\theta)$的值快速下降到最低点。

正规方程

对于求函数极小值问题，可以使用求导数的方法，令函数的导数为0，然后求解方程，得到解析解。正规方程正是使用这种方法求的损失函数$J(\theta)$的极小值，而线性回归的损失函数$J(\theta)$是一个凸函数，所以极小值就是最小值。

正规方程的求解过程就不详细推导了，正规方程的公式是：

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{8}$$

如果$m \leq n+1$，那么X^TX是奇异矩阵，即X^TX不可逆。
X^TX不可逆的原因可能是：

- 特征之间冗余，比如特征向量中两个特征是线性相关的。
- 特征太多，删去一些特征再进行运算。

正规方程的缺点之一就是X^TX不可逆的情况，可以通过正则化的方式解决。另一个缺点是，如果样本的个数太多，特征数量太多($n > 10000$)，正规方程的运算会很慢（求逆矩阵的运算复杂）。

任务9： 下面来实现正规方程。
提示：Numpy 求逆矩阵的函数是`np.linalg.inv`。

```
def normal_equation(X, Y):
    """正规方程求线性回归方程的参数 theta
    参数：
        X: 训练集数据特征，shape: (m, n+1)
        Y: 训练集数据标签，shape: (m, 1)
    返回：
        theta: 线性回归方程的参数
    """

    ### START CODE HERE ###

    theta = np.dot(np.dot(np.linalg.inv(np.dot(X.T,X)),X.T),Y)

    ### END CODE HERE ###

    return theta
```

```
theta = normal_equation(X, Y)

print("theta = ", theta)
```

```
theta =  [[2.876875  ]
 [0.69769608]
 [0.0349138 ]]
```

恭喜，你已经帮助项目负责人计算出了一个线性模型。

任务10： 假设明天的最高温度是$x_1 = 40°C$，人口$x_2 = 3.3$百万，使用通过正规方程计算得到的θ预测明天的城市的峰值用电量（单位：GW）吧！
注意，x要进行同样的特征尺度归一化处理。

```
def predict(theta,x):

    ### START CODE HERE ###
    # 将数据x尺度归一化
    x = (x -mu)/sigma
    # 在x前面加一列
    x=np.hstack(([[1]],x)).T
    #预测
    prediction = np.dot(theta.T,x)
    ### END CODE HERE ###

    return prediction

```

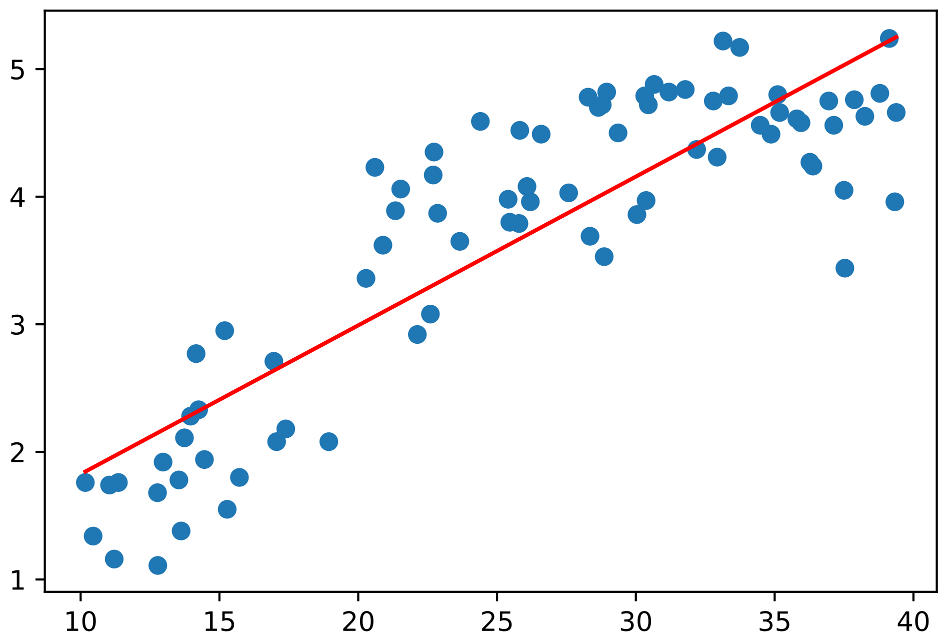
```
x = np.array([[40,3.3]])
print('预计明天的峰值用电量为：%.2f GW'%(predict(theta,x)[0]))
```

```
预计明天的峰值用电量为：4.21 GW
```

以上都是线性模型，当我们数据的特征X与Y的关系没有明显的线性关系，而且又找不到合适的映射函数时，可以尝试多项式回归。
下面导入另一组最高气温与用电量数据，我们用线性模型试一试看看效果发现并不太好。

```
data1 = np.loadtxt('data1.txt')
X = data1[:,0].reshape(-1,1)
Y = data1[:,1].reshape(-1,1)

plt.scatter(X,Y)
X = np.hstack((np.ones((X.shape[0],1)),X))
theta = normal_equation(X,Y)
plt.plot(np.sort(X[:,1]),np.dot(X,theta)[np.argsort(X[:,1])],'r')
```

```
[&lt;matplotlib.lines.Line2D at 0x1cd23622d00&gt;]
```



多项式回归

多项式回归的最大优点就是可以通过增加X的高次项对实测点进行逼近，直至满意为止。事实上，多项式回归可以处理相当一类非线性问题，它在回归分析中占有重要的地位，因为任一函数都可以分段用多项式来逼近。因此，在通常的实际问题中，不论依变量与其他自变量的关系如何，我们总可以用多项式回归来进行分析。假设数据的特征只有一个a，多项式的最高次数为K，那么多项式回归方程为：

$$h(x) = \theta^T x = \theta_0 * a^0 + \theta_1 * a^1 + \theta_2 * a^2 + \cdots + \theta_K * a^K \tag{9}$$

若令$x = [a^0, a^1, a^2, \cdots, a^K]^T$，那么

$$h(x) = \theta^T x = \theta_0 * x_0 + \theta_1 * x_1 + \theta_2 * x_2, \cdots, \theta_K * x_K \tag{10}$$

这就变为多变量线性回归了。

任务11：现在训练一个多项式模型，$K=2$,直接用上面的正规方程得到模型。

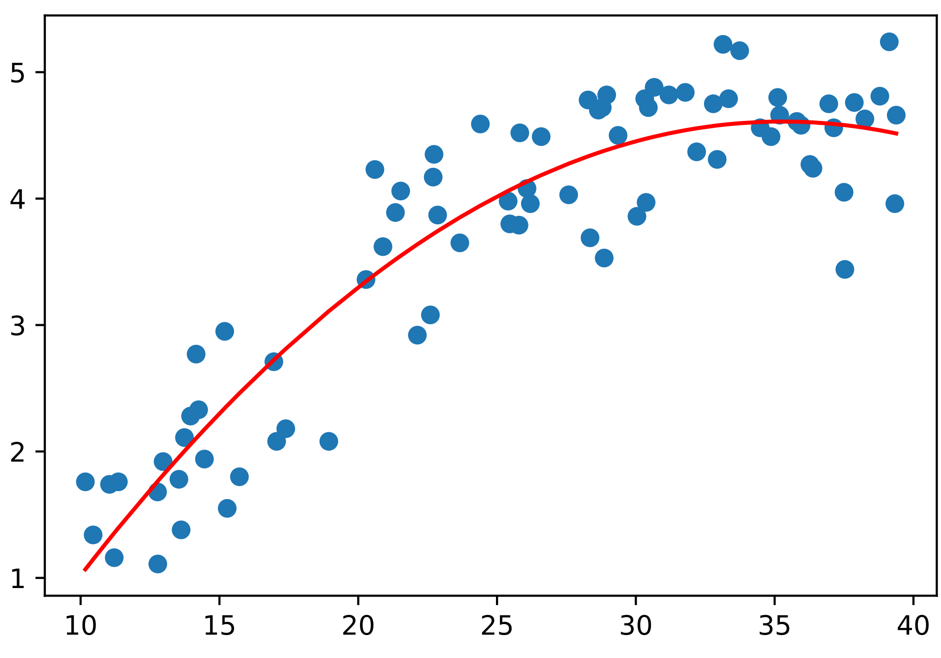
$$h(x)=\theta^T x=\theta_0*1+\theta_1*x+\theta_2*x^2 \tag{11}$$

所以输入数据X应该变成这样

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(m-1)} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x^{(0)} & {x^{(0)}}^2 \\ 1 & x^{(1)} & {x^{(1)}}^2 \\ & \vdots & \\ 1 & x^{(m-1)} & {x^{(m-1)}}^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

```python
data1 = np.loadtxt('data1.txt')
X = data1[:,0].reshape(-1,1)
Y = data1[:,1].reshape(-1,1)

### START CODE HERE ###

# 对X 前面加1， 后面加平方，变为 m x 3 的矩阵
tmp_1=np.ones((X.shape[0],1))
tmp_2=np.power(X,2)
X =np.hstack((np.hstack((tmp_1,X)),tmp_2))

# 用正规方程求解theta
theta = normal_equation(X,Y)

### END CODE HERE ###
plt.scatter(X[:,1],Y)
plt.plot(np.sort(X[:,1]),np.dot(X,theta)[np.argsort(X[:,1])],'r')
```

```
[&lt;matplotlib.lines.Line2D at 0x1cd2200f310&gt;]
```



所有任务到这里就结束了，下面是对上面的数据进行任意多项式拟合的结果，你可以通过多次改变K的值来调整多项式的阶数来看看模型的效果(但不设的太大,$K \leq 193$)。可以看到，越复杂的模型，虽然拟合数据效果很好，但是其泛化能力就会很差，所以模型应该要尽量简单。

```
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.preprocessing import PolynomialFeatures
from sklearn.pipeline import Pipeline
from sklearn.preprocessing import StandardScaler

def PolynomialRegression(degree):
    return Pipeline([
        ("poly",PolynomialFeatures(degree=degree)),
        ("std_scaler",StandardScaler()),
        ("lin_reg",LinearRegression())
    ])
X = data1[:,0].reshape(-1,1)
Y = data1[:,1].reshape(-1,1)
K = 60  #试试193

poly_reg = PolynomialRegression(degree=K)
poly_reg.fit(X,Y.squeeze())
y_predict = poly_reg.predict(X)
plt.scatter(X,Y)
plt.plot(np.sort(X[:,0]),y_predict[np.argsort(X[:,0])],color='r')
```

```
[&lt;matplotlib.lines.Line2D at 0x1cd24537af0&gt;]
```