1η Υποχρεωτική Εργασία
Στο Μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης

2 Δεκεμβρίου 2016

Οδηγίες: Η εργασία είναι ατομική. Θα πρέπει να γραφεί παραδοτέο σε LaTeX ή σε οποιονδήποτε επεξεργαστή κειμένου στο οποίο να περιγράφονται οι λύσεις των ασκήσεων, να δίνονται και να σχολιάζονται τα αποτελέσματα, να περιγράφεται η εκτέλεση του κώδικα. Θα πρέπει το αρχείο του παραδοτέου (σε .pdf) μαζί με τα αρχεία του κώδικα (σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού επιθυμείτε) να συμπιεστούν σε ένα αρχείο το οποίο θα υποβληθεί μέσω του elearning μέχρι και την ημερομηνία παράδοσης:

28 Δεκεμβρίου 2016, ώρα 24:00

Για κάθε ημέρα αργοπορημένης υποβολής της εργασίας και για 5 ημέρες μειώνεται η βαθμολογία κατά 10%. Μετά από την παράδοση όλων των εργασιών θα ακολουθήσει προφορική εξέταση ή παρουσίαση πάνω στις εργασίες, στην οποία θα περιλαμβάνεται και προφορική εξέταση του κώδικα για τις περιπτώσεις πιθανής αντιγραφής.

Για οποιαδήποτε απορία σχετικά με τις εργασίες μπορείτε να επικοινωνείτε μέσω email με τους βοηθούς μαθήματος στην διεύθυνση : natutor@aiia.csd.auth.gr.

Άσκηση 1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 14xe^{x-2} - 12e^{x-2} - 7x^3 + 20x^2 - 26x + 12$ στο διάστημα $[0, 3]$. Κάντε την γραφική παράσταση της συνάρτησης σε αυτό το διάστημα. Έπειτα υπολογίστε με πρόγραμμα και τις ρίζες της με ακρίβεια 6ου δεκαδικού ψηφίου χρησιμοποιώντας τις εξής μεθόδους: (α) τη μέθοδο της διχοτόμησης, (β) τη μέθοδο Newton-Raphson και (γ) τη μέθοδο της τέμνουσας. Για κάθε ρίζα να συγκρίνετε το πλήθος των επαναλήψεων που έγιναν. Για τη μέθοδο Newton-Raphson να δείξετε για ποιες ρίζες συγκλίνει τετραγωνικά και για ποιες όχι. Ποιο είναι το χαρακτηριστικό των ριζών για τις οποίες η μέθοδος Newton-Raphson δεν συγκλίνει τετραγωνικά (αιτιολογήστε)·

Άσκηση 2

Υλοποιήστε (α) μια τροποποιημένη μέθοδο Newton-Raphson όπου:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{f'(x_n)^3}$$

(β) μια τροποποιημένη μέθοδο διχοτόμησης όπου η εκτίμηση για την ρίζα δεν είναι το μέσο του διαστήματος αναζήτησης σε κάθε βήμα αλλά ένα τυχαίο σημείο που επιλέγεται με την χρήση μιας συνάρτησης παραγωγής τυχαίων αριθμών (π.χ. rand()) εντός του διαστήματος αναζήτησης.
(γ) Μια τροποποιημένη μέθοδο της τέμνουσας η οποία χρειάζεται 3 αρχικά σημεία x_n, x_{n+1}, x_{n+2} και υπολογίζει την επόμενη εκτίμηση για την ρίζα με βάση τον τύπο:

$$x_{n+3} = x_{n+2} - \frac{r(r-q)(x_{n+2}-x_{n+1}) + (1-r)s(x_{n+2}-x_n)}{(q-1)(r-1)(s-1)}$$

όπου $q = \frac{f(x_n)}{f(x_{n+1})}$, $r = \frac{f(x_{n+2})}{f(x_{n+1})}$ και $s = \frac{f(x_{n+2})}{f(x_n)}$. Το νέο σημείο x_{n+3} αντικαθιστά κάθε φορά το παλαιότερο σημείο x_n και ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται μέχρι την σύγκλιση στο επιθυμητό λάθος. Η μέθοδος αυτή πρακτικά βρίσκει μια παραβολή που περνάει από τα τρία σημεία και ακολούθως την τομή της παραβολής με τον άξονα x.

1. Να βρείτε όλες τις ρίζες της συνάρτησης $f(x) = 94\cos^3 x - 24\cos x + 177\sin^2 x - 108\sin^4 x - 72\cos^3 x\sin^2 x - 65$ στο διάστημα $[0,3]$ με ακρίβεια 6ου δεκαδικού ψηφίου χρησιμοποιώντας τις παραπάνω μεθόδους και επιλέγοντας κατάλληλες αρχικοποιήσεις.

2. Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο (β) 10 φορές και να διαπιστώσετε αν συγκλίνει πάντα σε ίδιο αριθμό επαναλήψεων.

3. Να συγκρίνετε ως προς την ταχύτητα σύγκλισης πειραματικά τις τροποιημένες μεθόδους σε σχέση με τις κλασικές.

Άσκηση 3

Έστω ότι έχουμε προς επίλυση το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

1. Προγραμματίστε σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού επιθυμείτε μια συνάρτηση η οποία θα παίρνει σαν είσοδο τον πίνακα $\mathbf{A}$ και το διάνυσμα $\mathbf{b}$ του παραπάνω γραμμικού συστήματος και θα επιστρέφει σαν έξοδο το διάνυσμα των αγνώστων $\mathbf{x}$ (e.g.,`[x] = gauss(A, b)`). Η λύση του συστήματος πρέπει να γίνει με την μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$.

2. Προγραμματίστε σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού επιθυμείτε μια συνάρτηση η οποία θα παίρνει σαν είσοδο έναν συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $\mathbf{A}$ και θα επιστρέφει έναν κάτω τριγωνικό πίνακα $\mathbf{L}$ που αποτελεί την αποσύνθεση Cholesky του πίνακα $\mathbf{A}$ (e.g., `[L] = cholesky(A)`).

3. Προγραμματίστε σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού την μέθοδο Gauss-Seidel και χρησιμοποιείστε την για να επιλύσετε με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων (ως προς την άπειρη νόρμα στο σφάλμα της λύσης) το $n \times n$ αραιό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ για $n = 10$ και $n = 10000$, με $A(i,i) = 5$, $A(i+1,i) = A(i,i+1) = -2$ και $\mathbf{b} = [3,1,1,\ldots,1,1,3]^T$.

$$
\begin{bmatrix}
5 & -2 & & & \\
-2 & 5 & -2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -2 & 5 & -2 \\
 & & & -2 & 5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
3 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 3
\end{bmatrix}
$$

Υπόδειξη: Δεν πρέπει να γίνει χρήση built in συναρτήσεων (e.g., chol(), lu(), left division operator, etc.).