

2.13 - Únic MST

(CLRS 23.1-6)

Demostreu que un graf G té un únic MST si, per a tot tall C de G , existeix una única aresta $e \in C$ amb valor mínim. Demostreu que el el recíproc no és cert, i.e. pot ser el cas de que per un o més talls C tinguem més d'una aresta mínim pes, però que el MST sigui únic.

Una solució (prof. Maria J. Blesa):

Si per a tot tall C a G hi ha una única aresta amb pes mínim, considerem dos MST T i T' a G , demostrarem que per a tot $e \in E(T)$ tenim que $e' \in E(T')$ i per tant $T = T'$. Considerem qualsevol $e = (u, v) \in T$. Si eliminem (u, v) de T , aleshores T es desconnecta en un tall $C' = S \cup (V - S)$ amb (u, v) l'aresta amb menys pes a C' . Considerem una aresta $(x, y) \in E(T')$ tal que també $(x, y) \in C'$. També (x, y) ha de ser de pes mínim a C' , però per hipòtesi del problema cada tall té una única aresta de pes mínim, per tant $(x, y) = (u, v)$, i $(u, v) \in E(T)$. Com que hem escollit (u, v) de manera arbitrària, aleshores tota aresta a T també és a T' .

El recíproc no és cert. Considerem el següent contraexemple: Sigui G el graf amb $V(G) = \{x, y, z\}$ i $E(G) = \{(x, y), (x, z)\}$ amb $w(x, y) = 1 = w(x, z)$. L'únic tall d'aquest graf té dues arestes mínimes, però G únicament té un únic tall mínim.

Una solució (prof. Maria J. Serna):

Suposem que G té dos MSTs: T i T' . Considerem un vèrtex u ; el tall $(\{u\}, V - \{u\})$ té una única aresta $e = (u, v_1)$ amb pes mínim. Per la regla blava, aquesta aresta ha de pertànyer a tots dos arbres T i T' . Si definim $S = \{u, v_1\}$, aleshores tenim que T i T' coincideixen en S . Si considerem el tall $(S, V - S)$, de nou només hi ha una aresta (v, v') , $v \in S$ i $v' \notin S$, amb pes mínim. Per la regla blava, aquesta aresta pertany a T i a T' . Si afegim v' a S , aleshores T i T' coincideixen en aquest conjunt ampliat. Repetint aquest procés, arribarem a reintroduir tots els vèrtexos de V a S , i conclourem que els dos MSTs són idèntics.

Per a demostrar que el contrarecíproc és fals, n'hi ha prou amb trobar un contraexemple. Per exemple, el següent:

