Exercici 4 (3 punts). El RACC està interessat a trobar un mecanisme per poder suggerir als seus clients rutes alternatives per fugir dels embussaments de trànsit al centre de Barcelona. El Servei Català de Trànsit (SCT) els hi ha proporcionat un model simplificat del centre de Barcelona, que està format per un graf $G = (V, E)$ amb un vèrtex per cada cruïlla, i una aresta per cada parell de cruïlles connectades perquè hi ha un carrer que les uneix. A més coneixen el subconjunt de cruïlles $B \subseteq V$ que donen accés a carrers que surten del centre de la ciutat.

Dels telèfons mòbils dels clients, el RACC pot obtenir informació sobre el conjunt $C \subseteq V$ format per les cruïlles més rellevants als llocs on es troben els cotxes dels seus clients. L'SCT proporciona també el conjunt de trams de carrers $E' \subseteq E$ amb un nivell baix de saturació de trànsit i el conjunt $D \subseteq V$ de cruïlles crítiques que vol evitar.

El RACC vol determinar si és possible trobar un conjunt de camins disjunts (que no comparteixen arestes) que faci servir només trams amb baix nivell de saturació tals que, per cada cruïlla $c \in C$ tinguem un camí que comença a c i que acaba a alguna de les cruïlles de B. A més cal que una cruïlla crítica (de D) aparegui com a molt a 2 d'aquests camins.

Doneu un algorisme tan eficient com pugueu que, donats G, E', B, C i D, determini si és possible obtenir els camins requerits i que, en cas que ho sigui, retorni, per a cada $c \in C$, el camí que comença a c i acaba a alguna cruïlla de B.

Una solució:

Una solución: Lo resolveremos mediante un problema de flujo con restricciones. Tenemos restricciones en el flujo en algunos nodos y en los inicios y finales de los caminos. Además solo podemos utilizar las aristas en E' con capacidad 1 para garantizar que no se usan más de una vez. Para limitar la capacidad de los cruces en D desdoblaremos los vértices correspondientes en dos, uno recibirá las aristas de entrada y del otro saldrán las de salida, la arista conectando las dos copias tendrá capacidad 2.

La entrada es $G = (V, E)$, E', y C, B, D,. A patir de G consideramos la siguiente red de flujo. La red $\mathcal{N}$ tiene

- Nodos: s, t, V, $D' = \{d' \mid d \in D\}$ una copia de D,
- Aristas y capacidades:

$$
\begin{array}{rl}
\{(s,c) \mid c \in C\} & \text{capacidad } 1 \\
\{(b,t) \mid b \in B\} & \text{capacidad } |C| \\
\{(d,d') \mid d \in D\} & \text{capacidad } 2 \\
\{(d',u) \mid d \in D, u \in V - D, (d,u) \in E' & \text{capacidad } 1 \\
\{(u,d) \mid d \in D, u \in V - D, (u,d) \in E' & \text{capacidad } 1 \\
\{(u,v) \mid u \notin D, v \notin D, (u,v) \in E' & \text{capacidad } 1
\end{array}
$$

Un camino de s a t tiene la forma $s \to c \to \cdots \to d \to t$, si transporta una unidad de flujo interpretaremos que hay una ruta desde $c \in C$ a $d \in D$. La capacidad de las aristas aseguran que, en un flujo con valor máximo, en ningún caso se utiliza una arista de E' más de una vez ni se supera el límite de tráfico por los vértices de D.

Para resolver el problema primero obtendremos un flujo con valor máximo en la red, esto nos proporcionará el número máximo de caminos que cumplen las restricciones de seguridad. Si este valor coincide con $|C|$ el problema tiene solución. En este caso podemos extraer los caminos utilizando el grafo formado por las aristas con flujo 1. Con un BFS podemos extraer un camino, restar una unidad de flujo en las aristas de este camino. Repetimos el proceso hasta extraer los $|C|$ caminos.

Algorítmo:

```
Construir 𝒩
F = MaxFlow(𝒩)
if (|F| < |C|) then
    return No hay solución
else
    Obtener caminos desde C
end if
```

El número de vértices en la red es $N = |V| + |D| + 2$, el número de aristas es $M = |M'| + |C| + |D| + |B|$. Como el flujo máximo está acotado por $|C|$, utilizando el análisis de FF el coste es $O(|C|(N + M) = O(m^2 n)$. La última parte tiene también este coste.