1.20. Donat un graf no dirigit $G = (V, E)$ i un subconjunt de vèrtex V_1, el subgraf induït per V_1, $G[V_1]$ té com a vèrtex V_1 i con a arestes totes les arestes a E que connecten vèrtexs en V_1. Un clique és un subgraf indiut per un conjunt C on tots els vèrtexs estan connectats entre ells.

Considereu el següent algorisme de dividir-i-vèncer per al problema de *trobar un clique* en un graf no dirigit $G = (V, A)$.

CliqueDV(G)

Enumereu els vèrtexs V com $1, 2, \ldots, n$, on $n = |V|$
Si $n = 1$ tornar V
Dividir V en $V_1 = \{1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ i $V_2 = \{\lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n\}$
Sigui $G_1 = G[V_1]$ i $G_2 = G[V_2]$
C_1= CliqueDV(G_1) i C_2= CliqueDV(G_2)
$C_1^+ = C_1$ i $C_2^+ = C_2$
for $u \in C_1$ **do**
    if u està connectat a tots els vèrtexs a C_2^+ **then**
        $C_2^+ = C_2^+ \cup \{u\}$
for $u \in C_2$ **do**
    if u està connectat a tots els vèrtexs a C_1^+ **then**
        $C_1^+ = C_1^+ \cup \{u\}$
Retorneu el més gran d'entre C_1^+ i C_2^+

Contesteu les següents preguntes:

(a) Demostreu que l'algorisme CliqueDV sempre retorna un subgraf de G que és un clique.
(b) Doneu una expressió asimptòtica del nombre de passos de l'algorisme CliqueDV.
(c) Doneu un exemple d'un graf G on l'algorisme CliqueDV retorna un clique que no és de grandària màxima.
(d) Creieu que és fàcil modificar CliqueDV de manera que sempre done el clique màxim, sense incrementar el temps pitjor de l'algorisme? Expliqueu la vostra resposta.

a)

Inducció sobre n = |V|

Si n = 1 retorna un clique (el subgraf induït per un sol vèrtex és un clique). Es compleix el cas base.

Si n > 1 :
Suposem cert per valors < n
$|V_1| < n$ i $|V_2| < n$, així que podem aplicar la hipòtesi d'inducció a les crides recursives i suposar que a C_1 i C_2 hi tenim dos cliques. Si afegim un vèrtex a un dels dos conjunts és perquè està connectat a tots els seus vèrtexs, per tant segueixen sent cliques.

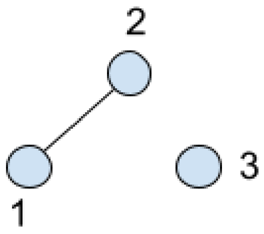
b)

$T(n) = 2T(n/2) + O(n^2) = O(n^2)$ on $n = |V|$

Es fan dos crides recursives amb grafs amb la meitat de vèrtexs i el cost de la resta de l'algorisme ve marcat pel que costa generar els subgrafs induïts per la meitat dels vèrtexs ($O(n^2)$ amb la representació amb matrius d'adjacència) i el cost dels dos bucles que miren per cada vèrtex d'un conjunt si està connectat a tots els de l'altre ($O(n)$ elements a cadascun dels dos conjunts, per tant $O(n^2)$) .

c)

L’execució de l’algorisme sobre aquest graf retorna un clique de mida 1 que no és de grandària màxima perquè els vèrtexs 1 i 2 en formen un de mida 2.



d)

El problema decisional del clique de mida k és NP-complet. Si hi hagués un algorisme polinòmic per resoldre el d’obtenir el de mida màxima es podria fer servir per resoldre en el mateix temps el decisional (comparant la k i la mida del clique màxim), la qual cosa implicaria que P = NP.