

5.12 Problema 2.18

Considerad un camino rural en el Pirineo con casas muy dispersadas a lo largo de él. Por motivos de seguridad se quieren colocar estaciones de SOS en algunos puntos de la carretera. Los expertos indican que, teniendo en cuenta las condiciones climáticas de la zona, se debería garantizar que cada casa se encuentre como máximo a una distancia de 15km, siguiendo la carretera, de una de las estaciones de SOS.

Proporcionad un algoritmo eficiente que consiga este objetivo utilizando el mínimo número de estaciones de SOS posibles. Justificad la corrección y el coste de vuestro algoritmo e indicad la complejidad en tiempo de la solución propuesta.

Primerament aplicarem el algorisme de Kruskal, el qual serveix per trobar l'arbre generador amb el menor pes que connecta tots els punts d'un graf. A partir d'aquí hauriem de transformar l'arbre generat per l'algorisme de Kruskal, en un bosc, mantenint la condició que $\forall u, v \in V : d(\{u, v\}) \leq 30$. Llavors, un cop tinguem el bosc, haurem de col·locar una estació de SOS al centre de cada sub-arbre.

Podriem demostrar la correctesa d'aquest algorisme de la següent forma, de l'aplicació del algorisme de Kruskal obtindrem tots els arbres d'expansió mínims. És a dir, és a dir, entre tot parell de vèrtexs tindrem el camí més curt entre els dos, sempre evitant tenir cicles. A partir d'aquí podrem recorre el arbre mínim d'expansió intentant formar clusters, d'aquells nodes que és trobin a menys de 30 km. Llavors, com que no tenim cicles, i entre tots parell de vèrtexs dins del cluster tenim una distancia màxima de 30 km, podrem situar una estació de SOS en aquell punt, el qual no estarà a més de 15 km, d'una casa.

El cost de l'algorisme de Kruskal és de $\Theta(E \cdot \log V)$, a aquest cost li hem d'afegir dividir el arbre d'expansió mínim en clusters, el qual tindrà un cost de V , per tant, podriem dir que el cost d'aplicació d'aquest algorisme és de $\Theta(E \cdot \log V + V)$.