

4.5. Una gran part del potencial d'empreses com Yahoo!, Google, Amazon, etc. es basa en el fet que milions de persones visiten cada dia les seves pàgines, (en anglès aquest fet s'anomena "eyeballs"). Un cop una persona visita una pàgina web d'aquestes companyes, de manera subliminal (o no tant) se intenta convèncer per a que deixin informació personal, la qual cosa permet que en el futur, si la mateixa persona torna a visitar la mateixa pàgina web, rebí informació i anuncis extremadament personalitzats i adreçats a l'usuari. Per exemple, si l'usuari ha transmès informació a Yahoo!, que té 20 anys i estudia a la UPC, a Barcelona, rebrà tota mena d'informació sobre lloguers d'habitacions a Barcelona, acadèmies etc. D'altra banda, si l'usuari és un alt executiu rebrà anuncis sobre cotxes de luxe, creuers per illes exòtiques o vacances a la lluna. Una tasca algorísmica interessant és personalitzar els anuncis seleccionant els més adients a cada persona.

Suposem que els administradors d'una web popular han identificat  $k$  grups de característiques diferents (perfils)  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , que no són necessàriament disjunts, per exemple  $G_i$  pot ser viure a l'Hospitalet,  $G_j$  ser dona i  $G_k$  que estudia a la UPC. La companyia propietària de la web té contractes amb  $m$  empreses anunciadores per mostrar un nombre determinat de còpies dels seus anuncis als usuaris de les seves pàgines web. El contracte que la companyia  $i$ -èsima fa amb Yahoo! és del tipus:

- Per a un subconjunt  $X_i \subseteq \{G_1, \dots, G_k\}$  dels grups demogràfics,  $i$  vol que els seus anuncis apareguin únicament a grups que són a  $X_i$ .
- Donat un enter  $r_i$  l'anunciant vol que els seus anuncis es mostren al menys a  $r_i$  usuaris.

Suposem que en un moment donat, hi ha  $n$  usuaris visitant la web. Com que tenim la informació de cadascun d'aquests usuaris, és fàcil conèixer el perfil de l'usuari  $j$  (per  $j = 1, 2, \dots, n$ ), es dir a quin subconjunt  $U_j \subseteq \{G_1, \dots, G_k\}$ , pertanyé Voldríem dissenyar un mecanisme tal que cada usuari vegi un únic anunci (d'uns pocs segons) de manera que per se satisfan restriccions imposades per els  $m$  anunciants? És dir, per a cada  $i = 1, 2, \dots, m$  com a mínim  $r_i$  usuaris, on cadascun pertanyé a almenys a un grup a  $X_i$ , veu un anunci proporcionat per l'anunciant  $i$ . Donar un algorisme eficient (polinòmic) per decidir si això és possible, i si és així, per a triar un anunci que aparegui per a cada usuari.

Tenim  $a$  anunciants,  $u$  usuaris i  $g$  grups.

Construïm una xarxa  $\mathcal{N}$  amb:

- Nodes  $V = \{s, t, a_1, \dots, a_m, g_1, \dots, g_k, u_1, \dots, u_n\}$
- Arestes i capacitats:

per  $i \in [n]$ ,  $(s, a_i)$  amb capacitat  $r_i$   
per  $i, x \in [n]$ ,  $(a_i, g_x)$  amb capacitat  $r_i$  si  $g_x \in X_i$   
per  $x, j \in [n]$ ,  $(g_x, u_j)$  amb capacitat 1 si  $g_x \in U_j$   
per  $j \in [n]$ ,  $(u_j, t)$  amb capacitat 1

Una unitat de flux transmesa de  $s$  a  $t$  passarà a través d'un camí  $s \rightarrow a_i \rightarrow g_x \rightarrow u_j \rightarrow t$  representant que l'usuari  $u_j$  veu l'anunci de l'anunciant  $a_i$ . Les primeres arestes i capacitats permeten que es vegin els anuncis requerits per cada anunciant i les últimes garanteixen que cada usuari veu com a molt un anunci. Les altres asseguren que només usuaris pertanyents a un grup dels que interessen a un anunciant podran veure un anunci seu.

Veiem que existeix una solució al problema sii el valor del flux màxim és  $\sum_{i=1}^m r_i$ . Aquest valor no pot ser superior per les capacitats de les arestes i si és menor vol dir que per algun anunciant  $i$  no es mostren els anuncis a  $r_i$  usuaris. A més, si el valor del flux màxim és aquest sabem gràcies a la configuració de les arestes que es compleix l'altra restricció.

Arriben al node  $t$   $u$  arestes amb capacitat 1. El valor del flux és, per tant,  $\mathcal{O}(u)$ . Hi ha  $N = a + u + g + 2$  vèrtexs i  $M \leq a + ag + gu + u$  arestes a la xarxa, i executar FF per trobar el flux màxim té cost  $\mathcal{O}(uM) = \mathcal{O}(u(a + ag + gu + u))$ . Aquest serà el cost de l'algorisme ja que la creació de la xarxa té cost  $\mathcal{O}(N + M)$  i la tria d'un anunci per cada usuari és  $\mathcal{O}(uM)$  si es busquen  $\sum_{i=1}^m r_i$  camins de  $s$  a  $t$  i s'associen l'anunciant i l'usuari d'un mateix camí.