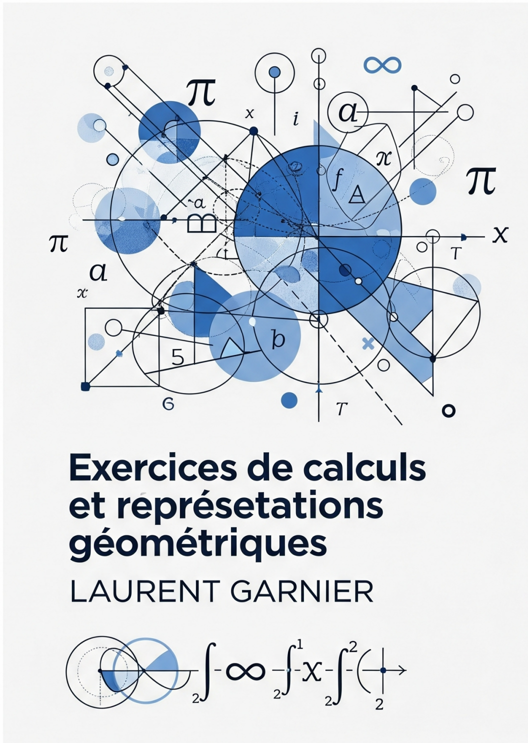

Exercices de calculs
et représetations
géométriques
LAURENT GARNIER

Sommaire succint

— **Un peu de culture historique**

— **Niveau primaire**

— **Niveau secondaire : collège**

— **Niveau secondaire : lycée**

— **Solutions des exercices**

— **Et maintenant ?**

Chapitre 1

Un peu de culture historique

1.1 Introduction

Ce livre a pour but de vous faire faire des mathématiques. On commence par du calcul mental afin d'échauffer l'esprit. Oui, même au XXI^{e} siècle, alors que nous avons des calculatrices, des ordinateurs, des téléphones et même des intelligences artificielles, il est encore utile d'exercer son cerveau sur ce genre de tâches. Loin de moi l'idée de vous prendre pour des calculateurs prodiges, ni d'essayer de vous entraîner à le devenir : je n'en suis pas un, et j'aurais du mal à vous aider pour ce genre de compétitions. Mais, de la même façon que les humains n'ont pas cessé de marcher et de courir après l'invention de la voiture, de l'ascenseur et des autres moyens de transport, il en va de même pour l'exercice cérébral. Sans être médecin, il me semble que le bon sens nous dicte que, si l'on reste assis sur le canapé à manger de la malbouffe sans faire de sport, il y a de gros risques de rencontrer des problèmes de surpoids et de santé en général. L'exercice cérébral est une gymnastique de l'esprit : c'est une hygiène mentale [1].

1. https://www.youtube.com/watch?v=qrA5HgFIjJE

Néanmoins, il serait vain — et surtout ennuyeux — de se cantonner aux calculs. L'activité mathématique est bien plus riche que cela. Il ne s'agit pas de comptabilité. Même si l'arithmétique et le calcul algébrique restent des outils cruciaux dans l'architecture des mathématiques, les maths ne se résument pas à des calculs. D'un autre côté, oublier cet aspect serait une carence aussi flagrante que celle d'un sportif de haut niveau (footballeur, nageur, judoka... choisissez votre sport favori) qui ne ferait pas de musculation. Les sportifs font de la musculation parce que leurs muscles sont leurs outils pour accomplir leur art. En mathématiques, c'est pareil : les calculs et la capacité à les conduire sont utiles pour résoudre des problèmes mathématiques.

Ce livre s'articule en trois parties principales, en plus de cette introduction.

La première partie doit être faite par tous les lecteurs en guise d'échauffement. Il s'agit de calculs « *purs et durs* », de niveau primaire. En effet, l'école primaire a pour but de faire acquérir la maîtrise des quatre opérations de l'arithmétique de base, à savoir : addition, soustraction, multiplication et division. Cela peut paraître simple, mais derrière ces « *simples* » opérations se cachent les structures algébriques que nous aborderons dans un prochain ouvrage consacré à l'enseignement supérieur.

Dans la seconde partie, on passe au niveau collège, en ajoutant des calculs de carrés, des programmes de calculs, le calcul littéral, les liens entre géométrie et calcul, et des probabilités de base en termes de rapports d'aires de figures élémentaires.

Enfin, dans la troisième partie, on passe au niveau lycée : configurations de nombres, vecteurs, statistiques et situations concrètes. Mais les choses sont présentées avec un vocabulaire et des connaissances accessibles à un collégien.

Le souhait de cet ouvrage est de fournir des exercices faisables directement, sans avoir à *réviser le cours*. Trop souvent aujourd'hui, les élèves sont traumatisés par la crainte de ne pas connaître « *la phrase du cours* », comme s'il s'agissait d'une incantation magique. Aucun cours de mathématiques n'est tombé du ciel, telles les tables de la Loi. L'activité mathématique s'est développée au cours des siècles à travers des problèmes qui, une fois résolus, ont donné lieu à des généralisations, lesquelles sont ensuite devenues des cours. Alors bien sûr, on ne peut pas se permettre le luxe de tout redémontrer à partir de zéro, sinon chaque génération aurait à refaire tout ce qu'a fait la précédente. Néanmoins, il me semble beaucoup plus intéressant, et surtout utile et efficace, de s'exercer d'abord ; et, à force de pratique, le cours pourra alors être vu comme quelque chose d'intéressant... un nouveau genre d'exercice.

Ma critique première est que les enseignements primaires et secondaires (surtout primaire et collège) manquent cruellement de démonstrations (alors que des démonstrations géométriques sont accessibles très tôt comme par exemple la démonstration de la 1ère identité remarquable[2]), au profit d'un apprentissage par cœur dénué de raisonnement et de réflexion, destiné à créer des « *automatismes* ». À l'époque de l'intelligence artificielle, il me semble d'autant plus absurde de vouloir former des générations d'automates, déjà dépassés par les véritables automates. Nous, humains, faisons des erreurs et avons la capacité d'apprendre de nos erreurs. C'est précisément pour cette raison qu'il faut cultiver l'art de se tromper intelligemment.

L'art de se tromper intelligemment signifie prendre le risque de pousser un raisonnement jusqu'à son terme, pour se rendre compte s'il fonctionne ou non. Comprendre signifie prendre un risque : sans prise de risque, vous ne pourrez jamais comprendre ; sans erreur, vous ne pourrez jamais comprendre.

Ici, tous les exercices sont corrigés, donc vous pouvez les faire en toute honnêteté, en prenant véritablement le risque de vous tromper. De plus, pour la plupart des exercices (en dehors de ceux de calculs purs), il y a souvent plusieurs façons de les

2. `https://youtu.be/IL55ftyJQHI`

résoudre. Il ne faut donc pas chercher à mémoriser les corrections. Les exercices sont presque tous originaux ou des adaptations de classiques.

Pour toutes remarques, suggestions, ou demandes d'aide personnelles merci de remplir ce formulaire[3] : https://forms.gle/x7fAce7GqiJAGbsC7. Si vous souhaitez obtenir la version numérique de ce livre c'est aussi ce même formulaire qu'il faut remplir afin que nous puissions entrer en contact.

3. https://forms.gle/x7fAce7GqiJAGbsC7

1.1.1 Origine étymologique du mot calcul

Le mot « calcul » vient du latin ***calculus***, qui signifiait littéralement « petit caillou ». Ce terme dérive de ***calx***, ***calcis*** (chaux, pierre calcaire). Les Romains utilisaient effectivement de petits cailloux ou jetons pour effectuer leurs opérations arithmétiques sur l'abaque, d'où cette étymologie concrète qui reflète une pratique réelle.

1.1.2 Premières traces de calculs

Les plus anciennes traces de calculs remontent à la préhistoire :

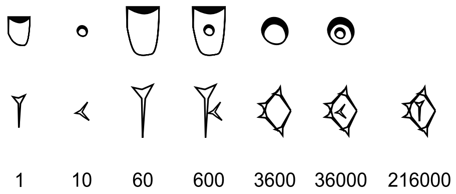
Os d'Ishango (République démocratique du Congo, 20 000 ans) :

Les os d'Ishango, également appelés bâtons d'Ishango, sont considérés comme le plus ancien outil de calcul jamais mis au jour. Ils ont été découverts au sein de vestiges archéologiques découverts dans l'ancien Congo belge. Le site est daté de plus de 20 000 ans. Selon certains auteurs, il pourrait s'agir de la plus ancienne attestation de la pratique de l'arithmétique dans l'histoire de l'humanité. Ils ont été considérés, dans un premier temps, comme des bâtons de comptage.

Jetons d'argile mésopotamiens (8000-3000 av. J.-C.) :

Ces petits objets en forme de cônes, sphères ou disques servaient à compter les biens (bétail, céréales) avant l'invention de l'écriture. Les jetons d'argile mésopotamiens ont joué un rôle important dans le développement des systèmes de comptabilité et de commerce dès 8000 avant J.-C. Ces objets, dont la forme variait en fonction de l'objet qu'ils représentaient, étaient utilisés pour désigner et quantifier des marchandises.

Tablettes cunéiformes babyloniennes (3000 av. J.-C.) :



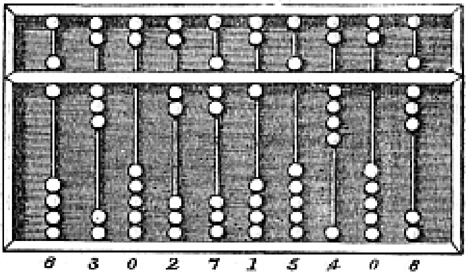
Les premières traces écrites de calculs arithmétiques, avec un système sexagésimal (base 60) encore utilisé aujourd'hui pour mesurer le temps (1 heure = 60 minutes, 1 minute = 60 secondes, ...) et les angles (60 minutes = 1 degré).

Papyrus de Rhind (2000 av. J.-C.) :

Le papyrus Rhind, copié par Ahmès (Deuxième Période intermédiaire), synthétise les maths égyptiennes. Acheté par Rhind en 1858 à Louxor, il est au British Museum depuis 1865. Ce rouleau de 5 m (87 problèmes) couvre arithmétique, algèbre et géométrie, inspiré du Moyen Empire (2000 av. J.-C.). Son écriture hiératique en fait un document unique.

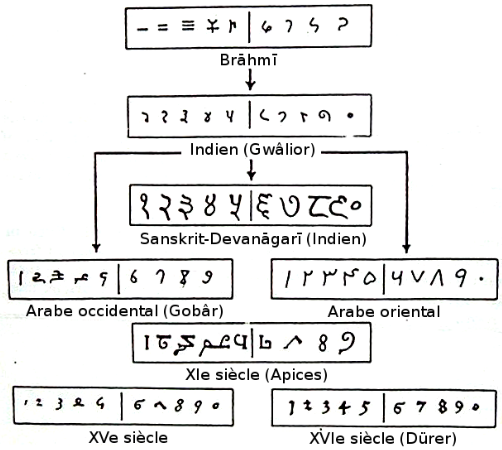
1.1.3 Premières techniques de calcul

L'ABAQUE :



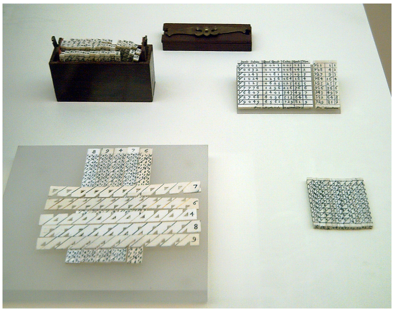
Apparu vers 2700-2300 av. J.-C. en Mésopotamie, puis perfectionné par les Grecs et les Romains. Il permettait d'effectuer les quatre opérations fondamentales en déplaçant des jetons sur des lignes ou dans des colonnes.

Le système décimal positionnel :



Le système de numération indo-arabe est un système de numération de base dix employant une notation positionnelle et dix chiffres, allant de zéro à neuf, dont le tracé est indépendant de la valeur représentée. Dans ce système, la représentation d'un nombre correspond à son développement décimal. Le système doit son nom au fait qu'il est apparu en Inde et qu'il est parvenu en Europe par l'intermédiaire de mathématiciens et comptables de langue arabe. La variante graphique la plus répandue sont les chiffres utilisés en Europe, communément appelés chiffres arabes. Ce système tend aujourd'hui à s'imposer dans le monde.

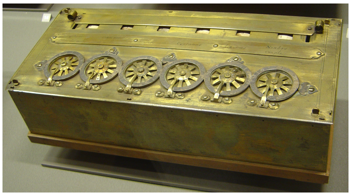
Les bâtons de Napier (1617) :



Le bâton de Napier, ou réglette de Neper est un abaque facilitant le calcul des produits, quotients, puissances et racines, inventé par le mathématicien écossais John Napier (en français Neper) en 1617.

L'abaque est constitué d'un plateau à rebord sur lequel peuvent être placées des réglettes gravées. Le bord gauche du plateau est gravé lui aussi, divisé en neuf cases numérotées de 1 à 9. Les dix types de réglettes, qui ont donné leur nom à l'ensemble du dispositif, étaient originellement en os, d'où le nom anglais de *Napier's bones*. Elles sont divisées en neuf cases. La case supérieure porte un nombre de 0 à 9. Les huit autres cases sont divisées en deux par un trait diagonal.

La pascaline (1642) :

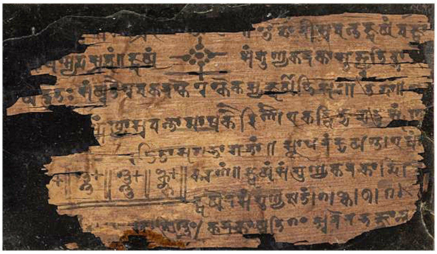


La pascaline, initialement dénommée machine d'arithmétique puis roue pascaline, est une calculatrice mécanique inventée par Blaise Pascal et considérée comme la première machine à calculer.

1.1.4 Les premières traces de géométrie

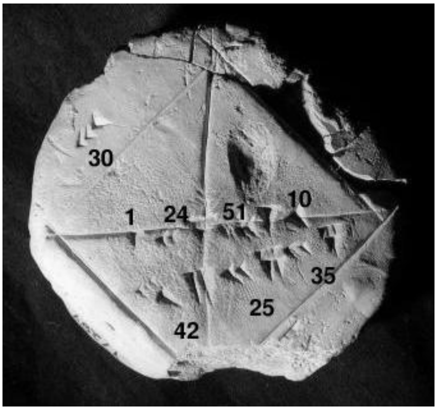
Si les Grecs sont souvent vus comme les fondateurs de la géométrie en tant que science, de nombreuses connaissances en géométrie ont émergé bien avant eux, notamment vers 3000 av. J.-C., en Égypte ancienne, en Mésopotamie et dans l'Inde antique, pour répondre à des besoins pratiques en agriculture, astronomie, architecture et topographie.

Manuscript de Bakhshali (Civilisation de la vallée de l'Indus) :



La civilisation de la vallée de l'Indus, attestée dès environ -3300, livre les premiers indices d'une activité mathématique en Inde. Les découvertes effectuées à Harappa, Mohenjo-daro et dans leur environnement révèlent un système de poids et mesures précis et décimal datant d'environ 2600 avant J.-C., une technologie de fabrication de briques basée sur des proportions rigoureuses, ainsi qu'une attention aux formes géométriques.

Tablette babylonienne YBC 7289 (Babylone) :



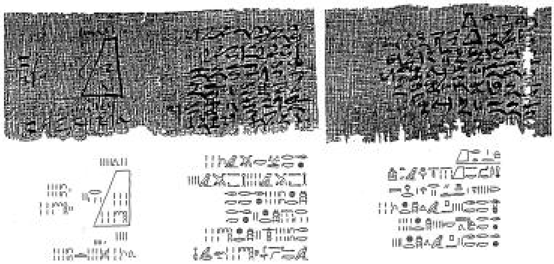
La tablette YBC 7289 a probablement été rédigée par un scribe babylonien de la première dynastie, entre 1900 et 1600 avant J.-C. Elle aurait été écrite dans le sud de l'actuel Irak, vraisemblablement par un apprenti utilisant des valeurs tirées d'une liste connue. De forme ronde et compacte (8 à 12 cm environ), elle était facile à tenir en main.

La suite de nombres est à interpréter de la façon suivante :

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \simeq \sqrt{2}$$

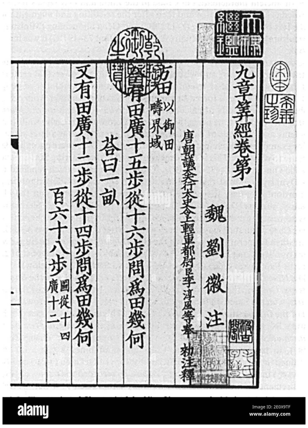
$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \simeq 30\sqrt{2}$$

Papyrus de Moscou (Civilisation Egyptienne) :



Écrit vers 1850 av. J.-C., pendant la XIe dynastie, le papyrus de Moscou est un exemple ancien d'étude mathématique utilisant le système unaire. Long d'environ 5,40 mètres et large de 4 à 7 cm, il contient 25 problèmes résolus, dont certains portent sur la surface d'une demi-sphère et le volume d'une pyramide tronquée.

Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique (Civilisation Chinoise après les Grecs) :


九章算經卷第一　魏劉徽注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問為田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問為田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique forment un ouvrage chinois anonyme compilé entre le IIe et le Ier siècle av. J.-C., au début de la dynastie Han. Reprenant des textes antérieurs, il propose une approche méthodique des mathématiques à travers des techniques générales de résolution de problèmes. Connu grâce aux copies des scribes puis à l'imprimerie, il fut commenté notamment par Liu Hui en 263.

Chapitre 2

Niveau primaire

2.1 Calculs niveau primaire

Pour les séries de calculs ci-dessous, essayez de les faire de tête. Si vous n'y arrivez pas alors posez-les à la main. Et si vous n'y arrivez toujours pas vérifiez avec une calculatrice.

2.1.1 Exercice 1 (primaire) : Additions simples

C1) $5 + 3 =$ _____

C2) $9 + 2 =$ _____

C3) $7 + 6 =$ _____

C4) $4 + 8 =$ _____

C5) $3 + 9 =$ _____

C6) $1 + 7 =$ _____

C7) $2 + 3 =$ _____

C8) $3 + 4 =$ _____

C9) $4 + 5 =$ _____

C10) $5 + 6 =$ _____

C11) $1 + 9 =$ _____

C12) $9 + 2 =$ _____

C13) $2 + 8 =$ _____

C14) $8 + 3 =$ _____

C15) $3 + 9 =$ _____

C16) $9 + 7 =$ _____

C17) $7 + 8 =$ _____

C18) $8 + 5 =$ _____

C19) $5 + 9 =$ _____

C20) $5 + 7 =$ _____

Voir solutions des additions page 49.

2.1.2 Exercice 2 (primaire) : Soustractions

C1) 15 - 7 = _____

C2) 18 - 9 = _____

C3) 12 - 4 = _____

C4) 20 - 11 = _____

C5) 17 - 8 = _____

C6) 30 - 15 = _____

C7) 49 - 26 = _____

C8) 58 - 37 = _____

C9) 67 - 48 = _____

C10) 76 - 59 = _____

C11) 51 - 17 = _____

C12) 81 - 29 = _____

C13) 21 - 14 = _____

C14) 30 - 11 = _____

C15) 47 - 18 = _____

C16) 50 - 15 = _____

C17) 94 - 62 = _____

C18) 85 - 73 = _____

C19) 76 - 48 = _____

C20) 67 - 59 = _____

Voir solutions des soustractions page 50.

2.1.3 Exercice 3 (primaire) : Multiplications à 1 chiffre

C1) $3 \times 4 =$ _____

C2) $6 \times 7 =$ _____

C3) $8 \times 5 =$ _____

C4) $9 \times 3 =$ _____

C5) $2 \times 6 =$ _____

C6) $6 \times 5 =$ _____

C7) $7 \times 6 =$ _____

C8) $8 \times 9 =$ _____

C9) $2 \times 8 =$ _____

C10) $7 \times 3 =$ _____

C11) $2 \times 2 =$ _____

C12) $3 \times 3 =$ _____

C13) $4 \times 4 =$ _____

C14) $5 \times 5 =$ _____

C15) $6 \times 6 =$ _____

C16) $7 \times 7 =$ _____

C17) $8 \times 8 =$ _____

C18) $9 \times 9 =$ _____

C19) $5 \times 7 =$ _____

C20) $7 \times 8 =$ _____

Voir solutions des multiplications à 1 chiffre page 51.

2.1.4 Exercice 4 (primaire) : Multiplications à 2 chiffres par 11

C1) $11 \times 12 =$ _____

C2) $11 \times 23 =$ _____

C3) $11 \times 34 =$ _____

C4) $11 \times 45 =$ _____

C5) $11 \times 56 =$ _____

C6) $11 \times 67 =$ _____

C7) $11 \times 78 =$ _____

C8) $11 \times 89 =$ _____

C9) $11 \times 13 =$ _____

C10) $11 \times 24 =$ _____

C11) $99 \times 11 =$ _____

C12) $89 \times 11 =$ _____

C13) $78 \times 11 =$ _____

C14) $65 \times 11 =$ _____

C15) $54 \times 11 =$ _____

C16) $46 \times 11 =$ _____

C17) $37 \times 11 =$ _____

C18) $29 \times 11 =$ _____

C19) $19 \times 11 =$ _____

C20) $91 \times 11 =$ _____

Voir solutions des multiplications à 2 chiffres par 11 page 52.

2.1.5 Exercice 5 (primaire) : Divisions à 1 chiffre

C1) $9 \div 3 =$ _____

C2) $8 \div 2 =$ _____

C3) $6 \div 3 =$ _____

C4) $4 \div 2 =$ _____

C5) $6 \div 2 =$ _____

C6) $8 \div 4 =$ _____

C7) $9 \div 9 =$ _____

C8) $8 \div 1 =$ _____

C9) $5 \div 5 =$ _____

C10) $7 \div 7 =$ _____

C11) $18 \div 9 =$ _____

C12) $18 \div 6 =$ _____

C13) $18 \div 3 =$ _____

C14) $16 \div 2 =$ _____

C15) $16 \div 4 =$ _____

C16) $16 \div 8 =$ _____

C17) $12 \div 2 =$ _____

C18) $12 \div 3 =$ _____

C19) $12 \div 4 =$ _____

C20) $12 \div 6 =$ _____

Voir solutions des divisions à 1 chiffre page 53.

2.1.6 Exercice 6 (primaire) : Divisions à 2 chiffres

C1) $99 \div 11 =$ _____

C2) $84 \div 12 =$ _____

C3) $72 \div 18 =$ _____

C4) $64 \div 16 =$ _____

C5) $56 \div 28 =$ _____

C6) $42 \div 14 =$ _____

C7) $36 \div 12 =$ _____

C8) $24 \div 12 =$ _____

C9) $39 \div 13 =$ _____

C10) $45 \div 15 =$ _____

C11) $54 \div 27 =$ _____

C12) $63 \div 21 =$ _____

C13) $74 \div 37 =$ _____

C14) $82 \div 41 =$ _____

C15) $98 \div 49 =$ _____

C16) $80 \div 20 =$ _____

C17) $92 \div 23 =$ _____

C18) $93 \div 31 =$ _____

C19) $69 \div 23 =$ _____

C20) $55 \div 11 =$ _____

Voir solutions des divisions à 2 chiffres page 54.

Chapitre 3

Niveau secondaire : collège

3.1 Calculs niveau collège

Dans cette partie, on commence dans la continuité de la partie précédente avec des calculs purs et durs mais déjà vous devriez pouvoir trouver des astuces de calculs. Cela signifie que le raisonnement commence à jouer un rôle utile. Ensuite, on passera au calcul littéral, puis sa liaison avec la géométrie. Et de la géométrie on en viendra aux probabilités.

3.1.1 Exercice 7 (secondaire : collège) : carrés

C1) $11^2 = 11 \times 11 =$ _____

C2) $12^2 = 12 \times 12 =$ _____

C3) $13^2 = 13 \times 13 =$ _____

C4) $14^2 = 14 \times 14 =$ _____

C5) $15^2 = 15 \times 15 =$ _____

C6) $16^2 = 16 \times 16 =$ _____

C7) $17^2 = 17 \times 17 =$ _____

C8) $18^2 = 18 \times 18 =$ _____

C9) $19^2 = 19 \times 19 =$ _____

C10) $20^2 = 20 \times 20 =$ _____

C11) $25^2 = 25 \times 25 =$ _____

C12) $35^2 = 35 \times 35 =$ _____

C13) $45^2 = 45 \times 45 =$ _____

C14) $55^2 = 55 \times 55 =$ _____

C15) $65^2 = 65 \times 65 =$ _____

C16) $75^2 = 75 \times 75 =$ _____

C17) $85^2 = 85 \times 85 =$ _____

C18) $95^2 = 95 \times 95 =$ _____

C19) $111^2 = 111 \times 111 =$ _____

C20) $1111^2 = 1111 \times 1111 =$ _____

Voir solutions des calculs de carrés page 56.

3.1.2 Exercice 8 (secondaire : collège) : carrés avec des 1 et une calculatrice

C1) $1^2 = 1 \times 1 =$ _____

C2) $11^2 = 11 \times 11 =$ _____

C3) $111^2 = 111 \times 111 =$ _____

C4) $1111^2 = 1111 \times 1111 =$ _____

C5) $11111^2 = 11111 \times 11111 =$ _____

C6) $111111^2 = 111111 \times 111111 =$ _____

C7) $1111111^2 = 1111111 \times 1111111 =$ _____

C8) $11111111^2 = 11111111 \times 11111111 =$ _____

C9) $111111111^2 = 111111111 \times 111111111 =$ _____

C10) $1111111111^2 = 1111111111 \times 1111111111 =$ _____

Voir solutions des calculs de carrés page 57.

3.1.3 Exercice 9 (secondaire : collège) : Un programme de calcul particulier

Considérons le programme de calcul suivant :

P1) Choisir un nombre entier strictement supérieur à 1 ($m > 1$ par exemple 2, 3, 4...)

P2) Choisir un autre nombre entier strictement positif n strictement inférieur à $m \quad n < m$

P3) Calculer le nombre a comme la différence du carré de m avec le carré de n, concrètement $a = m^2 - n^2$

P4) Calculer le nombre b comme le double du produit de m et de n, concrètement $b = 2mn$

P5) Calculer le nombre c comme la somme du carré de m avec le carré de n, concrètement $c = m^2 + n^2$

P6) Calculer le carré de a

P7) Calculer le carré de b

P8) Calculer le carré de c

P9) Calculer la somme du carré de a et celui de b

P10) Comparer cette somme avec le carré de c

Appliquons le programme de calcul ci-dessus avec les nombres $m = 2$ et $n = 1$:

C1) $m^2 = 2 \times 2 =$ _____

C2) $n^2 = 1 \times 1 =$ _____

C3) $a = m^2 - n^2 =$ _____

C4) $b = 2 \times m \times n =$ _____

C5) $c = m^2 + n^2 =$ _____

C6) $a^2 =$ _____

C7) $b^2 =$ _____

C8) $c^2 =$ _____

C9) Vérifiez que $a^2 + b^2 = c^2$

C10) Est-ce valable pour n'importe quelles valeurs de m et n ?

Voir solutions des calculs du programme page 58.

3.1.4 Exercice 10 (secondaire : collège) : Un programme de construction géométrique, Pythagore

G1) Dans un repère orthonormé placer le point A de coordonnées $(-1; -2)$ c'est-à-dire d'abscisse $x_A = -1$ et d'ordonnée $y_A = -2$

G2) Placer le point B de coordonnées $(2; -2)$ c'est-à-dire d'abscisse $x_B = 2$ et d'ordonnée $y_B = -2$

G3) Placer le point C de coordonnées $(2; 2)$ c'est-à-dire d'abscisse $x_C = 2$ et d'ordonnée $y_C = 2$

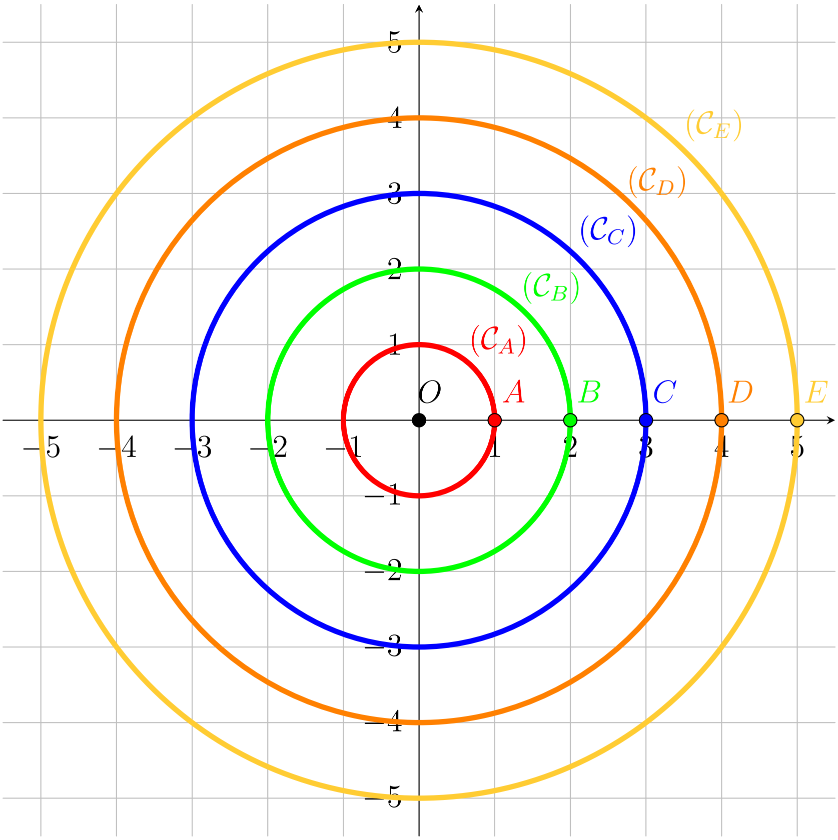
G4) En utilisant le théorème de Pythagore vérifier que le carré ABC est rectangle en B.

Voir solution du programme de construction géométrique page 59.

3.1.5 Exercice 11 (secondaire : collège) : Un cible circulaire, probabilités

Considérons la cible définie par les cercles concentriques sur le schéma ci-dessous :

Figure 3.1 – Cible de cercles concentriques



On considère que les joueurs atteignent toujours la cible c'est-à-dire le cercle $(\mathcal{C}_E)$.

G1) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne l'intérieur du cercle $(\mathcal{C}_A)$?

G2) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_A)$ et $(\mathcal{C}_B)$?

G3) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_B)$ et $(\mathcal{C}_C)$?

G4) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_C)$ et $(\mathcal{C}_D)$?

G5) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_D)$ et $(\mathcal{C}_E)$?

Voir solutions page 60.

3.1.6 Exercice 12 (secondaire : collège) : carrés de Fibonacci

G1) Dans un repère orthonormé construire le carré passant par les points $O(0\,;\,0)$, $A(1\,;\,0)$, $B(1\,;\,1)$, $C(0\,;\,1)$. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G2) Placer les points $D(2\,;\,0)$ et $E(2\,;\,1)$ et tracer le carré ADEB. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G3) Construire le carré passant par $F(2\,;\,3)$, $G(0\,;\,3)$, $C(0\,;\,1)$, $E(2\,;\,1)$. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G4) Placer les points $H(-3;3)$, $I(-3;0)$ et tracer le carré GHIO. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G5) Construire le carré passant par $J(-3;-5)$, $K(2;-5)$, $D(2;0)$, $I(-3;0)$. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G6) Placer les points $L(10;-5)$, $M(10;3)$ et tracer le carré KLMF. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G7) Construire le carré passant par $N(10;16)$, $P(-3;16)$ et tracer le carré MNPH. Quelle est la longueur du côté de carré ?

G8) Placer les points $Q(-24;16)$, $R(-24;-5)$ et tracer le carré PQRJ. Quelle est la longueur du côté de carré ?

Voir solutions page 62.

3.1.7 Exercice 13 (secondaire : collège) : aire des carrés de Fibonacci

Dans cet exercice on reprend la figure des carrés de Fibonacci voir page 62.

G1) Quelle est l'aire du carré OABC ?

G2) Quelle est l'aire du carré ADEB ?

G3) Quelle est l'aire du carré FGCE ?

G4) Quelle est l'aire du carré GHIO ?

G5) Quelle est l'aire du carré IJKD ?

G6) Quelle est l'aire du carré KLMF ?

G7) Quelle est l'aire du carré MNPH ?

G8) Quelle est l'aire du carré PQRJ ?

Voir solutions page 64.

3.1.8 Exercice 14 (secondaire : collège) : une cible avec des carrés de Fibonacci

Dans cet exercice on continue avec la figure des carrés de Fibonacci voir page 62. On la considère comme une cible particulière et on admet que le joueur atteint forcément le grand rectangle.

G1) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré OABC ?

G2) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré FGCE ?

G3) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré GHIO ?

G4) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré IJKD ?

G5) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré KLMF ?

G6) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré MNPH ?

G7) Quelle est la probabilité que le joueur atteigne le carré PQRJ ?

Voir solutions page 65.

Chapitre 4

Niveau secondaire : lycée

4.1 Calculs niveau lycée

Désormais il faudrait raisonner et alterner les registres. Tantôt vous utiliserez le langage symbolique avec les formules et le calcul littéral, tantôt vous utiliserez le langage verbal qui est votre langage naturel et tantôt vous utiliserez le langage visuel. Faire des mathématiques consiste principalement à passer d'un registre à un autre afin de s'assurer que l'on comprenne et maîtrise tous les aspects d'un problème. Parfois les choses sembleront abstraites mais il y aura toujours des applications concrètes.

Courage, la bravoure est une qualité nécessaire pour faire des mathématiques.

4.1.1 Exercice 15 (secondaire : lycée) : nombres triangulaires

On considère un repère orthonormé :

G1) Construire le triangle passant par les points O(0 ; 0) , A(1 ; 0) , B(0 ; 1). Quelle est la nature de ce triangle ? Quelle est l'aire de ce triangle ?

G2) Construire le triangle passant par les points O(0 ; 0) , C(2 ; 0) , E(0 ; 2). Quelle est la nature de ce triangle ? Quelle est l'aire de ce triangle ? Le point D(1 ; 1) est-il sur le segment [CE] ?

G3) Construire le triangle passant par les points O(0 ; 0) , F(3 ; 0) , I(0 ; 3). Quelle est la nature de ce triangle ? Quelle est l'aire de ce triangle ? Les points G(2 ; 1) et H(1 ; 2) sont-ils sur le segment [FI] ?

G4) Construire le triangle passant par les points O(0 ; 0) , J(4 ; 0) , N(0 ; 4). Quelle est la nature de ce triangle ? Quelle est l'aire de ce triangle ? Les points K(3 ; 1), L(2 ; 2) et M(1 ; 3) sont-ils sur le segment [JN] ?

G5) Combien faudra-t-il ajouter de points pour la prochaine étape si on suit ce même schéma ? Quelle sera la nature de ce nouveau triangle ? Quelle sera son aire ? Les points entre les axes du repère seront-ils alignés ?

Voir solutions page 67.

4.1.2 Exercice 16 (secondaire : lycée) : divisions par 7

C1) Effectuer la division décimale de 1 par 7. Combien de décimales avez-vous besoin de calculer pour approcher la fraction $\frac{1}{7}$ de la façon la plus juste qui soit ?

C2) Même question avec la fraction $\frac{2}{7}$.

C3) Même question avec la fraction $\frac{3}{7}$.

C4) Même question avec la fraction $\frac{4}{7}$.

C5) Même question avec la fraction $\frac{5}{7}$.

C6) Même question avec la fraction $\frac{6}{7}$.

Voir solutions page 71.

4.1.3 Exercice 17 (secondaire : lycée) : comment choisir le milieu d'une série statistique ?

On considère la série statistique $S_0 = \{1; 1; 1; 1; 10\}$

C1) Quelle est la médiane de la série S_0 ?

C2) Quel est le mode de la série S_0 ?

C3) Quelle est la moyenne de la série S_0 ?

C4) Reprendre les 3 questions initiales avec la nouvelle série $S_1 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10\}$.

C5) Reprendre les 3 questions initiales avec la nouvelle série $S_2 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10; 11\}$.

C6) Reprendre les 3 questions initiales avec la nouvelle série $S_3 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10; 11; 15; 15; 15\}$.

C7) Reprendre les 3 questions initiales avec la nouvelle série $S_4 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10; 11; 15; 15; 15; 15; 15; 16; 16; 18; 18\}$.

C8) Peut-on ajouter 1 valeur à la série S_4 de sorte que la médiane augmente et la moyenne diminue ? Expliquez la démarche.

C9) Peut-on ajouter 1 valeur à la série S_5 de sorte que la médiane diminue et la moyenne augmente ? Expliquez la démarche.

C10) Peut-on ajouter 1 valeur à la série S_6 de sorte que la médiane égale le mode ? Que se passerait-il pour la moyenne ? Expliquez la démarche.

Voir solutions page 73.

4.1.4 Exercice 18 (secondaire : lycée) : comment contribuer efficacement à un projet collaboratif ?

Considérons deux contributeurs de Wikipédia : Alice et Bob. La semaine 1, Alice modifie 60% des articles qu'elle consulte alors que Bob modifie 90% des articles qu'il lit. La semaine 2, Alice ne modifie que 10% des articles lus et Bob 30%.

C1) Qui a le taux de modifications le plus élevé de la semaine 1 ?

C2) Qui a le taux de modifications le plus élevé de la semaine 2 ?

C3) La semaine 1, Alice lit 100 articles et en modifie 60. Pendant ce temps, Bob modifie 9 des 10 articles qu'il consulte. La semaine 2, Alice modifie 1 article sur les 10 lus et Bob 30 sur 100.

Sur les deux semaines qui a modifié le plus d'articles ?

C4) Ranger les informations dans un tableau avec 3 colonnes : semaine 1, semaine 2, total et deux lignes : Alice, Bob.

C5) On appelle $S_A(1)$ le taux de modification d'Alice la semaine 1 et $S_A(2)$ son taux de modification la semaine 2. On fait de même pour Bob avec les notations $S_B(1)$ et $S_B(2)$. Vérifier que $S_A(1) < S_B(1)$ et que $S_A(2) < S_B(2)$.

C6) On note les taux sur les deux semaines de la façon suivante :

$$S_A = \frac{100}{110} S_A(1) + \frac{10}{110} S_A(2)$$
$$S_B = \frac{10}{110} S_B(1) + \frac{100}{110} S_B(2)$$

Justifiez les valeurs des fractions utilisées.

Voir solutions page 78.

4.1.5 Exercice 19 (secondaire : lycée) : une interprétation géométrique du paradoxe de Simpson

C1) Placer les points O(0 ; 0) et A(1 ; 0) et tracer en bleu le vecteur

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}$$

C2) Placer le point B(3 ; 1) et tracer en rouge le vecteur

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OB}$$

C3) Placer les points C(0 ; 3) et D(2 ; 7) et tracer en bleu le vecteur

$$\vec{u}_2 = \overrightarrow{CD}$$

C4) Placer le point E(0 ; 4) et tracer en rouge le vecteur

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{CE}$$

C5) Vérifier que le pente de $\vec{u}_1$ est supérieure à celle de $\vec{v}_1$.

C6) Vérifier que le pente de $\vec{u}_2$ est supérieure à celle de $\vec{v}_2$.

C7) Placer les points F(4 ; 2) et G(7 ; 4) et tracer en rouge le vecteur

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \overrightarrow{FG}$$

C8) Placer le point H(7 ; 6) et tracer en bleu le vecteur

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \overrightarrow{FH}$$

C9) Comparer les pentes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Que remarquez-vous ?

Voir solutions page 81.

4.1.6 Exercice 20 (secondaire : lycée) : constructions et comparaisons de moyennes

C1) Placer les points O(0 ; 0), A(4 ; 0) et B(-4 ; 0) puis tracer le demi-cercle de centre O passant par A et B.

C2) Placer le point C(2 ; 0) puis le point D d'abscisse 2 sur le demi-cercle. Tracer le segment [CD].

C3) On pose $a = BC$ et $b = CA$. Ainsi le demi-cercle a pour diamètre $a + b$. Placer le point E(0 ; 4). Montrer que

$$OE = \frac{a+b}{2}$$

C4) Montrer que le triangle ADB est rectangle en D.

C5) Exprimer AD en fonction CD et b.

C6) Exprimer BD en fonction de CD et a.

C7) En déduire une expression de CD en fonction de a et b.

C8) On appelle moyenne géométrique de a et b le nombre $\sqrt{ab}$ et moyenne arithmétique le nombre $\frac{a+b}{2}$. Utilisez ce qui précède pour démontrer qu'on a :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

C9) Tracer OD puis la hauteur issue de C qui coupe (OD) en F.

C10) Exprimer OC en fonction de a et b.

C11) Calculer l'aire du triangle DOC de deux façons différentes. D'une part en utilisant OC comme base et CD comme hauteur, d'autre part en utilisant OD comme base et FC comme hauteur. En déduire une expression de FC en fonction de a et b.

C12) Montrer

$$FD = \frac{2ab}{a+b}$$

c'est ce qu'on appelle la moyenne harmonique de a et b.

C13) Tracer EC et calculer sa longueur. Montrer que

$$EC = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

On l'appelle moyenne quadratique de a et b.

C14) Classer les différentes moyennes dans l'ordre croissant en utilisant uniquement la géométrie.

C15) Faire de même en utilisant uniquement les calculs algébriques.

Voir solutions page 82.

Chapitre 5

Solutions des exercices

5.1 Solutions niveau primaire

5.1.1 Solutions exercice 1 (primaire) : Additions

S1) $5 + 3 = 8$

S2) $9 + 2 = 11$

S3) $7 + 6 = 13$

S4) $4 + 8 = 12$

S5) $3 + 9 = 12$

S6) $1 + 7 = 8$

S7) $2 + 3 = 5$

S8) $3 + 4 = 7$

S9) $4 + 5 = 9$

S10) $5 + 6 = 11$

S11) $1 + 9 = 10$

S12) $9 + 2 = 11$

S13) $2 + 8 = 10$

S14) $8 + 3 = 11$

S15) $3 + 9 = 12$

S16) $9 + 7 = 16$

S17) $7 + 8 = 15$

S18) $8 + 5 = 13$

S19) $5 + 9 = 14$

S20) $5 + 7 = 12$

Calculs d'additions page 20.

5.1.2 Solutions exercice 2 (primaire) : Soustractions

S1) $15 - 7 = 8$

S2) $18 - 9 = 9$

S3) $12 - 4 = 8$

S4) $20 - 11 = 9$

S5) $17 - 8 = 9$

S6) $30 - 15 = 15$

S7) $49 - 26 = 23$

S8) $58 - 37 = 21$

S9) $67 - 48 = 19$

S10) $76 - 59 = 17$

S11) $51 - 17 = 34$

S12) $81 - 29 = 52$

S13) $21 - 14 = 7$

S14) $30 - 11 = 19$

S15) $47 - 18 = 29$

S16) $50 - 15 = 35$

S17) $94 - 62 = 32$

S18) $85 - 73 = 12$

S19) $76 - 48 = 28$

S20) $67 - 59 = 8$

Calculs des soustractions page 21.

5.1.3 Solutions exercice 3 (primaire) : Multiplications à 1 chiffre

S1) $3 \times 4 = 12$

S2) $6 \times 7 = 42$

S3) $8 \times 5 = 40$

S4) $9 \times 3 = 27$

S5) $2 \times 6 = 12$

S6) $6 \times 5 = 30$

S7) $7 \times 6 = 42$

S8) $8 \times 9 = 72$

S9) $2 \times 8 = 16$

S10) $7 \times 3 = 21$

S11) $2 \times 2 = 4$

S12) $3 \times 3 = 9$

S13) $4 \times 4 = 16$

S14) $5 \times 5 = 25$

S15) $6 \times 6 = 36$

S16) $7 \times 7 = 49$

S17) $8 \times 8 = 64$

S18) $9 \times 9 = 81$

S19) $5 \times 7 = 35$

S20) $7 \times 8 = 56$

Calculs des multiplications à 1 chiffre page 22.

5.1.4 Solutions exercice 4 (primaire) : Multiplications à 2 chiffres par 11

S1) $11 \times 12 = 132$

S2) $11 \times 23 = 253$

S3) $11 \times 34 = 374$

S4) $11 \times 45 = 495$

S5) $11 \times 56 = 616$

S6) $11 \times 67 = 737$

S7) $11 \times 78 = 858$

S8) $11 \times 89 = 979$

S9) $11 \times 13 = 143$

S10) $11 \times 24 = 264$

S11) $99 \times 11 = 1089$

S12) $89 \times 11 = 979$

S13) $78 \times 11 = 858$

S14) $65 \times 11 = 715$

S15) $54 \times 11 = 594$

S16) $46 \times 11 = 506$

S17) $37 \times 11 = 407$

S18) $29 \times 11 = 319$

S19) $19 \times 11 = 209$

S20) $91 \times 11 = 1001$

Calculs des multiplications à 2 chiffres page 23.

5.1.5 Solutions exercice 5 (primaire) : Divisions à 1 chiffre

C1) $9 \div 3 = 3$

C2) $8 \div 2 = 4$

C3) $6 \div 3 = 2$

C4) $4 \div 2 = 2$

C5) $6 \div 2 = 3$

C6) $8 \div 4 = 2$

C7) $9 \div 9 = 1$

C8) $8 \div 1 = 8$

C9) $5 \div 5 = 1$

C10) $7 \div 7 = 1$

C11) $18 \div 9 = 2$

C12) $18 \div 6 = 3$

C13) $18 \div 3 = 6$

C14) $16 \div 2 = 8$

C15) $16 \div 4 = 4$

C16) $16 \div 8 = 2$

C17) $12 \div 2 = 6$

C18) $12 \div 3 = 4$

C19) $12 \div 4 = 3$

C20) $12 \div 6 = 2$

Calculs des divisions à 1 chiffre page 24.

5.1.6 Solutions exercice 6 (primaire) : Divisions à 2 chiffres

C1) $99 \div 11 = 9$

C2) $84 \div 12 = 7$

C3) $72 \div 18 = 4$

C4) $64 \div 16 = 4$

C5) $56 \div 28 = 2$

C6) $42 \div 14 = 3$

C7) $36 \div 12 = 3$

C8) $24 \div 12 = 2$

C9) $39 \div 13 = 3$

C10) $45 \div 15 = 3$

C11) $54 \div 27 = 2$

C12) $63 \div 21 = 3$

C13) $74 \div 37 = 2$

C14) $82 \div 41 = 2$

C15) $98 \div 49 = 2$

C16) $80 \div 20 = 4$

C17) $92 \div 23 = 4$

C18) $93 \div 31 = 3$

C19) $69 \div 23 = 3$

C20) $55 \div 11 = 5$

Calculs des divisions à 2 chiffres page 25.

5.2 Solutions niveau secondaire : collège

5.2.1 Solutions exercice 7 (secondaire : collège) : carrés

C1) $11^2 = 11 \times 11 = 121$

C2) $12^2 = 12 \times 12 = 144$

C3) $13^2 = 13 \times 13 = 169$

C4) $14^2 = 14 \times 14 = 196$

C5) $15^2 = 15 \times 15 = 225$

C6) $16^2 = 16 \times 16 = 256$

C7) $17^2 = 17 \times 17 = 289$

C8) $18^2 = 18 \times 18 = 324$

C9) $19^2 = 19 \times 19 = 361$

C10) $20^2 = 20 \times 20 = 400$

C11) $25^2 = 25 \times 25 = 625$

C12) $35^2 = 35 \times 35 = 1225$

C13) $45^2 = 45 \times 45 = 2025$

C14) $55^2 = 55 \times 55 = 3025$

C15) $65^2 = 65 \times 65 = 4225$

C16) $75^2 = 75 \times 75 = 5625$

C17) $85^2 = 85 \times 85 = 7225$

C18) $95^2 = 95 \times 95 = 9025$

C19) $111^2 = 111 \times 111 = 12321$

C20) $1111^2 = 1111 \times 1111 = 1234321$

Calculs des carrés page 28.

5.2.2 Solutions exercice 8 (secondaire : collège) : carrés avec des 1 et une calculatrice

C1) $1 \times 1 = 1$

C2) $11 \times 11 = 121$

C3) $111 \times 111 = 12321$

C4) $1111 \times 1111 = 1234321$

C5) $11111 \times 11111 = 123454321$

C6) $111111 \times 111111 = 12345654321$

C7) $1111111 \times 1111111 = 1234567654321$

C8) $11111111 \times 11111111 = 123456787654321$

C9) $111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$

C10) $1111111111 \times 1111111111 = 1234567900987654321$

Calculs avec des 1 page 29.

Pour des exercices en ligne vous pouvez essayer ce QCM sur les nombres [1].

1. https://didaskalosmanthanon.github.io/qcm-numbers/

5.2.3 Solutions exercice 9 (secondaire : collège) : Un programme de calcul particulier

C1) $m^2 = 2^2 = 4$

C2) $n^2 = 1^2 = 1$

C3) $a = m^2 - n^2 = 4 - 1 = 3$

C4) $b = 2 \times m \times n = 2 \times 2 \times 1 = 4$

C5) $c = m^2 + n^2 = 4 + 1 = 5$

C6) $a^2 = 3^2 = 9$

C7) $b^2 = 4^2 = 16$

C8) $c^2 = 5^2 = 25$

C9) Vérifions que $a^2 + b^2 = c^2 = 9 + 16 = 25$

C10) Est-ce valable pour n'importe quelles valeurs de m et n ? Oui pour toutes les valeurs qui vérifient les contraintes énoncées $1 \leq n < m$ car

$$\begin{aligned}
a^2 &= (m^2 - n^2)^2 = (m^2)^2 - 2 \times (m^2) \times (n^2) + (n^2)^2 \\
a^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 \\
b^2 &= (2mn)^2 = 2^2m^2n^2 = 4m^2n^2 \\
c^2 &= (m^2 - n^2)^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\
a^2 + b^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\
a^2 + b^2 &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\
&\boxed{a^2 + b^2 = c^2}
\end{aligned}$$

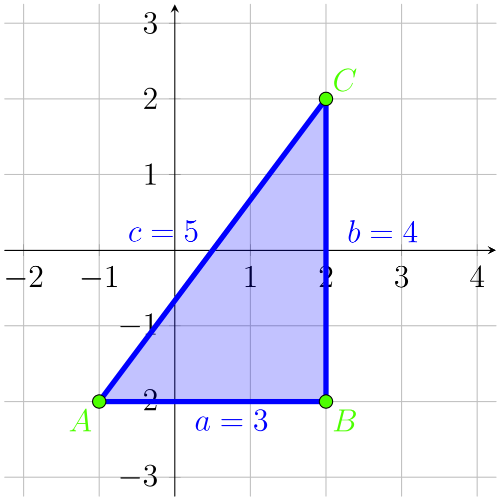
Calculs avec le programme page 30.

Vous pouvez voir une illustration géométrique de la 3$^{\text{ème}}$ identité remarquable[2] dans cette vidéo.

2. https://youtu.be/6Nnv3K7k2No?si=y7Hmvb5IwpIsHaWW

5.2.4 Solutions exercice 10 (secondaire : collège) : Un programme de construction géométrique, Pythagore

FIGURE 5.1 – Construction du triangle rectangle 3, 4, 5



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$
$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Voir le programme de construction géométrique page 32

Pour voir une démonstration du théorème de Pythagore[3] consultez cette vidéo.

3. https://youtube.com/shorts/80C0794dwco

5.2.5 Solutions exercice 11 (secondaire : collège) : Un cible circulaire, probabilités

On considère que les joueurs atteignent toujours la cible c'est-à-dire le cercle $(\mathcal{C}_E)$ (voir figure avec les cercles concentriques page 33).

G1) L'aire de l'intérieur du cercle $(\mathcal{C}_A)$ est celle du disque de centre O et de rayon 1 soit $\pi \times 1^2 = \pi$ ainsi

$$\mathcal{D}_A = \pi$$

L'aire de l'intérieur du cercle $(\mathcal{C}_E)$ est celle du disque de centre O et de rayon 5 soit $\pi \times 5^2 = 25\pi$ ainsi

$$\mathcal{D}_E = 25\pi$$

Par conséquent la probabilité recherchée est

$$P = \frac{\mathcal{D}_A}{\mathcal{D}_E} = \frac{\pi}{25\pi} = \frac{1}{25} = 4\%$$

G2) Pour calculer la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_A)$ et $(\mathcal{C}_B)$ il faut calculer l'aire de la couronne c'est-à-dire la différence entre l'aire du disque de centre O de rayon 2, $\mathcal{D}_B = 4\pi$ et du disque $\mathcal{D}_A = \pi$ soit $4\pi - \pi = 3\pi$. Ensuite on calcule le rapport d'aires :

$$P = \frac{3\pi}{25\pi} = \frac{3}{25} = 12\%$$

G3) Pour calculer la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_B)$ et $(\mathcal{C}_C)$ il faut calculer l'aire de la couronne c'est-à-dire la différence entre l'aire du disque de centre O de rayon 3, $\mathcal{D}_C = 9\pi$ et du disque $\mathcal{D}_B = 4\pi$ soit $9\pi - 4\pi = 5\pi$. Ensuite on calcule le rapport d'aires :

$$P = \frac{5\pi}{25\pi} = \frac{1}{5} = 20\%$$

G4) Pour calculer la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_C)$ et $(\mathcal{C}_D)$ il faut calculer l'aire de la couronne c'est-à-dire la différence entre l'aire du disque de centre O de rayon 4, $\mathcal{D}_D = 16\pi$ et du disque $\mathcal{D}_C = 9\pi$ soit $16\pi - 9\pi = 7\pi$. Ensuite on calcule le rapport d'aires :

$$P = \frac{7\pi}{25\pi} = \frac{7}{25} = 28\%$$

G5) Pour calculer la probabilité que le joueur atteigne la couronne entre les cercles $(\mathcal{C}_D)$ et $(\mathcal{C}_E)$ il faut calculer l'aire de la couronne c'est-à-dire la différence entre l'aire du disque de centre O de rayon 5, $\mathcal{D}_E = 25\pi$ et du disque $\mathcal{D}_D = 16\pi$ soit $25\pi - 16\pi = 9\pi$. Ensuite on calcule le rapport d'aires :

$$P = \frac{9\pi}{25\pi} = \frac{9}{25} = 45\%$$

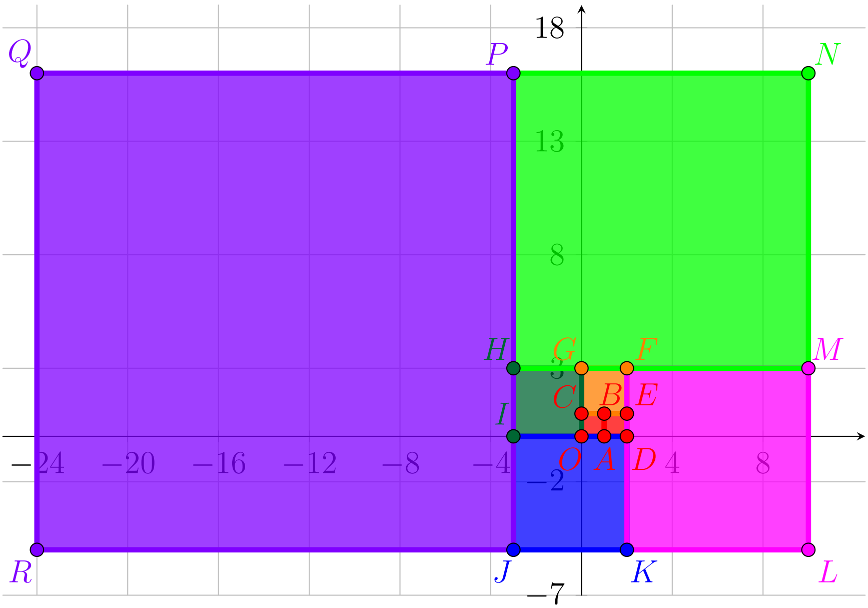
Voir figure avec les cercles concentriques page 33.

Pour des exercices en ligne vous pouvez essayer ce QCM sur les probabilités [4].

4. https://didaskalosmanthanon.github.io/qcm-proba/

5.2.6 Solutions exercice 12 (secondaire : collège) : Fibonacci

Figure 5.2 – Carrés de Fibonacci



G1) Le carré OABC a pour côté 1.

G2) Le carré ADEB a pour côté 1.

G3) Le carré FGCE a pour côté 2.

G4) Le carré GHIO a pour côté 3.

G5) Le carré IJKD a pour côté 5.

G6) Le carré KLMF a pour côté 8.

G7) Le carré MNPH a pour côté 13.

G8) Le carré PQRJ a pour côté 21.

Voir les questions page 35.

Pour voir comment construire la suite de Fibonacci avec un programme Python [5] consultez cette vidéo.

5. https://youtu.be/y5DSNeBfzFs?si=Ehuap02-Lg_sETAH

5.2.7 Solutions exercice 13 (secondaire : collège) : aire des carrés de Fibonacci

Voir figure avec les carrés de Fibonacci page 62.

G1) L'aire du carré OABC est $1^2 = 1$.

G2) L'aire du carré ADEB est $1^2 = 1$.

G3) L'aire du carré FGCE est $2^2 = 4$.

G4) L'aire du carré GHIO est $3^2 = 9$.

G5) L'aire du carré IJKD est $5^2 = 25$.

G6) L'aire du carré KLMF est $8^2 = 54$.

G7) L'aire du carré MNPH est $13^2 = 169$.

G8) L'aire du carré PQRJ est $21^2 = 441$.

Voir questions page 36.

5.2.8 Solutions exercice 14 (secondaire : collège) : aire des carrés de Fibonacci

Pour tout l'exercice il faut considérer les dimensions de la cible c'est-à-dire le grand rectangle LNQR de largeur 21 et longueur $21 + 13 = 34$ et a donc pour aire $21 \times 34 = 714$.

Voir figure avec les carrés de Fibonacci page 62.

G1) La probabilité que le joueur atteigne le carré OABC est

$$\frac{OABC}{LNQR} = \frac{1}{714} \simeq 0,14\%$$

G2) La probabilité que le joueur atteigne le carré FGCE est

$$\frac{FGCE}{LNQR} = \frac{4}{714} = \frac{2}{357} \simeq 0,56\%$$

G3) La probabilité que le joueur atteigne le carré GHIO est

$$\frac{GHIO}{LNQR} = \frac{9}{714} = \frac{3}{238} \simeq 1,26\%$$

G4) La probabilité que le joueur atteigne le carré IJKD est

$$\frac{IJKD}{LNQR} = \frac{25}{714} = \simeq 3,5\%$$

G5) La probabilité que le joueur atteigne le carré KLMF est

$$\frac{KLMF}{LNQR} = \frac{64}{714} = \frac{32}{357} \simeq 8,96\%$$

G6) La probabilité que le joueur atteigne le carré MNPH est

$$\frac{MNPH}{LNQR} = \frac{169}{714} \simeq 23,67\%$$

G7) La probabilité que le joueur atteigne le carré PQRJ est

$$\frac{PQRJ}{LNQR} = \frac{441}{714} = \frac{147}{238} \simeq 61,76\%$$

Voir questions page 37.

5.3 Solutions niveau secondaire : lycée

5.3.1 Solution exercice 15 (secondaire : lycée) : nombres triangulaires

On considère le repère orthonormé de la figure page 70.

G1) Le triangle passant par les points O(0 ; 0) , A(1 ; 0) , B(0 ; 1) est isorectangle car OA = OB et $(OA) \perp (OB)$.

L'aire de ce triangle est

$$\frac{OA \times OB}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

unités d'aire.

G2) Le triangle passant par les points O(0 ; 0) , C(2 ; 0) , E(0 ; 2) est isorectangle car OC = OE et $(OC) \perp (OE)$.

L'aire de ce triangle est

$$\frac{OC \times OE}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

unités d'aire.

Le point D(1 ; 1) est sur le segment [CE] car c'est son milieu.

G3) Le triangle passant par les points O(0 ; 0) , F(3 ; 0) , I(0 ; 3) est isorectangle car OF = OI et $(OF) \perp (OI)$.

L'aire de ce triangle est

$$\frac{OF \times OI}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4,5$$

unités d'aire.

Les points G(2 ; 1) et H(1 ; 2) sont sur le segment [FI] car $(EH) \parallel (BG) \parallel (OF)$ donc on peut utiliser Thalès dans les triangles IEH et IBG puis dans les triangles IBG et IOF par exemple.

G4) Le triangle passant par O(0; 0), J(4; 0) et N(0; 4) est isorectangle en O.

L'aire de ce triangle est

$$\frac{OJ \times ON}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

unités d'aire.

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} x_K - x_J \\ \\ y_K - y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} x_L - x_J \\ \\ y_L - y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 2 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{JK}$$

$$\overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} x_M - x_J \\ \\ y_M - y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \\ 3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{JK}$$

$$\overrightarrow{JN} \begin{pmatrix} x_N - x_J \\ \\ y_N - y_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \\ 4 \end{pmatrix} = 4\overrightarrow{JK}$$

Ainsi K, L, M sont sur [JN] car les vecteurs sont colinéaires. Géométriquement :

(a) L est l'image de K par la translation qui transforme J en K donc K est le milieu de [JL]

(b) M est l'image de L par la translation qui transforme J en K donc L est le milieu de [KM]

(c) N est l'image de M par la translation qui transforme J en K donc M est le milieu de [LN]

G5) Il faudra ajouter 6 points pour la prochaine étape si on suit ce même schéma. Le nouveau triangle obtenu (OPU) sera encore isorectangle en O.

Son aire sera

$$\frac{OP \times OU}{2} = \frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$

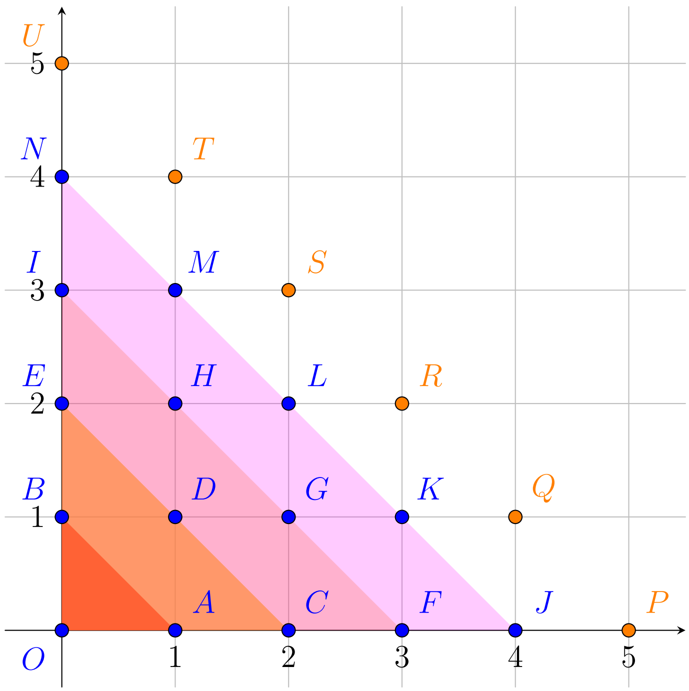
unités d'aire.

Les points entre les axes du repère seront alignés. On pourra le vérifier en utilisant le calcul vectoriel ou Thalès (au choix).

Si vous voulez d'autres exercices sur les vecteurs avec coordonnées[6] consultez cette vidéo.

6. https://youtu.be/qjJ84nor6DE?si=kEnLaxRkw9qRPLj4

Figure 5.3 – Nombres triangulaires



Voir questions page 40.

Pour une explication complète de la construction des nombres triangulaires[7] consultez cette vidéo.

7. https://youtu.be/dqJIKHeBRio?si=nNHWJ5m8al-MAUfy

5.3.2 Solution exercice 16 (secondaire : lycée) : divisions par 7

C1) On a besoin de 6 décimales pour approcher la fraction

$$\frac{1}{7} \simeq 0,142857\cdots = 0,\overline{142857}$$

car cette suite de 6 chiffres se répètent indéfiniment, on l'appelle la période du développement décimal.

C2) On a besoin de 6 décimales pour approcher la fraction

$$\frac{2}{7} \simeq 0,285714\cdots = 0,\overline{285714}$$

car cette suite de 6 chiffres se répètent indéfiniment, on l'appelle la période du développement décimal.

C3) On a besoin de 6 décimales pour approcher la fraction

$$\frac{3}{7} \simeq 0,428571\cdots = 0,\overline{428571}$$

car cette suite de 6 chiffres se répètent indéfiniment, on l'appelle la période du développement décimal.

C4) On a besoin de 6 décimales pour approcher la fraction

$$\frac{4}{7} \simeq 0,571428\cdots = 0,\overline{571428}$$

car cette suite de 6 chiffres se répètent indéfiniment, on l'appelle la période du développement décimal.

C5) On a besoin de 6 décimales pour approcher la fraction

$$\frac{5}{7} \simeq 0,714285\cdots = 0,\overline{714285}$$

car cette suite de 6 chiffres se répètent indéfiniment, on l'appelle la période du développement décimal.

C6) On a besoin de 6 décimales pour approcher la fraction

$$\frac{6}{7} \simeq 0,857142\cdots = 0,\overline{857142}$$

car cette suite de 6 chiffres se répètent indéfiniment, on l'appelle la période du développement décimal.

Voir questions page 41.

5.3.3 Solution exercice 17 (secondaire : lycée) : comment choisir le milieu d'une série statistique ?

C1) La médiane de la série $S_0 = \{1; 1; 1; 1; 10\}$ est 1.

C2) Le mode de la série S_0 est 1.

C3) La moyenne de la série S_0 est 2,8.

C4) La médiane et le mode de la série $S_1 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10\}$ est toujours 1. Par contre la moyenne de la série S_1 est désormais 4.

C5) La médiane et le mode de la série $S_2 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10; 11\}$ est toujours 1. Par contre la moyenne de la série S_2 est désormais 5.

C6) La médiane de la série $S_3 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10; 11; 15; 15; 15\}$ vaut désormais 10 ; le mode vaut toujours 1 et la moyenne vaut 8.

C7) La série

$$S_4 = \{1; 1; 1; 1; 10; 10; 11; 15; 15; 15; 15; 15; 16; 16; 18; 18\}$$

a désormais pour médiane 13 ; mode 15 et moyenne 11,125.

C8) Oui c'est possible en ajoutant 1 à la série S_4 on obtient la série

$$S_5 = \{1; 1; 1; 1; 1; 10; 10; 11; 15; 15; 15; 15; 15; 16; 16; 18; 18\}$$

qu'on peut rendre plus compacte avec un tableau :

Figure 5.4 – Version traitée de la série S_5

x_i	1	10	11	15	16	18
n_i	5	2	1	5	2	2
ECC	5	7	8	13	15	17
FCC	29%	41%	47%	76%	88%	100%

— ECC signifie Effectifs Cumulés Croissants

— FCC signifie Fréquences Cumulées Croissants

Ainsi la médiane vaut 15, le mode est double 1 et 15 (on dit que la série est bimodale) et la moyenne vaut environ $10,53 < 11,125$. Ici il suffisait d'ajouter une valeur inférieure à la moyenne pour augmenter la médiane car la moyenne se trouvait entre les deux bornes de la série S_4 à savoir 11 et 15.

C9) Oui c'est possible en ajoutant 11 à la série S_5 on obtient la série

$$S_6 = \{1; 1; 1; 1; 1; 10; 10; 11; 11; 15; 15; 15; 15; 15; 16; 16; 18; 18\}$$

qu'on peut rendre plus compacte avec un tableau :

Figure 5.5 – Version traitée de la série S_6

x_i	1	10	11	15	16	18
n_i	5	2	2	5	2	2
ECC	5	7	9	14	16	18
FCC	28%	39%	50%	78%	89%	100%

— ECC signifie Effectifs Cumulés Croissants

— FCC signifie Fréquences Cumulées Croissants

Ainsi la médiane vaut $13 < 15$, le mode est double 1 et 15 (la série est encore bimodale) et la moyenne vaut environ $10,56 > 10,53$. Ici il suffisait d'ajouter une valeur supérieure à la moyenne et inférieure à la médiane pour augmenter la moyenne et diminuer la médiane.

C10) Oui c'est possible en ajoutant 15 à la série S_6 on obtient la série

$$S_7 =$$

$$\{$$

$$01; 01; 01; 01; 01;$$

$$10; 10;$$

$$11; 11;$$

$$15; 15; 15; 15; 15; 15;$$

$$16; 16;$$

$$18; 18$$

$$\}$$

qu'on peut rendre plus compacte avec un tableau :

FIGURE 5.6 – Version traitée de la série S_7

x_i	1	10	11	15	16	18
n_i	5	2	2	6	2	2
ECC	5	7	9	15	17	19
FCC	26%	37%	47%	79%	89%	100%

— ECC signifie Effectifs Cumulés Croissants

— FCC signifie Fréquences Cumulées Croissants

Ainsi la médiane vaut 15, le mode vaut 15 (la série est n'est plus bimodale) et la moyenne vaut environ $10, 79$. Ici il suffisait d'ajouter 15 mais ça ne marchait pas avec 1 (la médiane aurait été 11).

Voir questions page 42.

Si vous aimez les défis voici une vidéo qui propose une énigme statistique contre-intuitive[8].

8. https://youtu.be/S-0xF0nh4KU?si=7EByNEsU6KD-v2RA

5.3.4 Solution exercice 18 (secondaire : lycée) : comment contribuer efficacement à un projet collaboratif ?

C1) La semaine 1, Bob a un taux de 90% > 60% pour Alice. Donc Bob a un taux supérieur.

C2) La semaine 2, Bob a un taux de 30% > 10% pour Alice. Donc Bob a un taux supérieur.

C3) Alice a modifié 60 articles la semaine 1, puis 1 la semaine 2, soit un total de 61 articles alors que Bob en a modifié 9 la semaine 1, puis 30 la semaine 2, soit un total de 39 articles. Ainsi Alice a modifié plus d'articles que Bob sur les deux semaines.

C4)

	Semaine 1	Semaine 2	Total
Alice	$\frac{60}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{61}{110}$
Bob	$\frac{9}{10}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{39}{110}$

C5)

$$S_A(1) = \frac{60}{100} = 60\% \qquad < \qquad S_B(1) = \frac{9}{10} = 90\%$$
$$S_A(2) = \frac{1}{10} = 10\% \qquad < \qquad S_B(2) = \frac{30}{100} = 30\%$$

C6) La semaine 1, Alice a consulté 100 articles sur les 110 articles qu'elle a lu au total donc le poids de son taux de modifications cette semaine par rapport à l'ensemble est $\frac{100}{110}$.

Et pour la semaine 2, c'est $\frac{10}{110}$.

Pour Bob, il a consulté 10 articles la semaine 1 donc le poids de son taux de modifications cette semaine-là est $\frac{10}{110}$.
Alors que pour la semaine 2, il a lu 100 articles d'où le poids $\frac{100}{110}$.

Ce paradoxe connu sous le nom de paradoxe de Simpson[9] vient du fait que Bob a un taux de modification supérieur sur chaque semaine alors qu'Alice a modifié plus d'articles que lui sur les quinze jours. Le truc c'est que l'on ne compte pas la même chose dans les deux cas, pour les semaines individuelles on considère les taux de modifications alors que pour le calcul des deux semaines on compte le nombre d'articles modifiés. On pourrait à première vue se dire qu'Alice est plus efficace que Bob puisqu'elle a modifié plus d'articles. Néanmoins on pourrait affiner l'analyse en se posant la question de l'impact de ses modifications (corrections orthographiques ou apport sur le fond...). Le résultat dépend donc de ce qu'on cherche à mesurer.

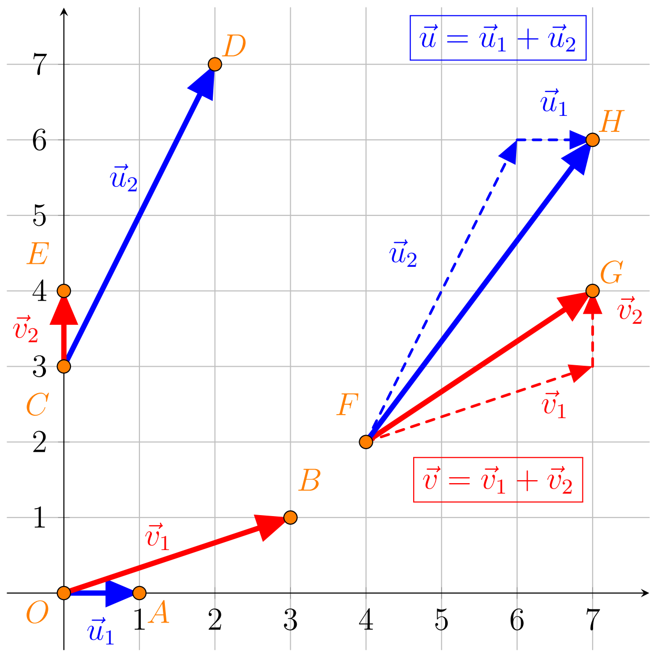
Cet exemple montre l'importance du contexte, de la question posée et de ce qu'on cherche à mesurer car les chiffres à eux seuls ne peuvent pas parler.

Voir questions page 43.

9. https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Simpson

5.3.5 Solution exercice 19 (secondaire : lycée) : une interprétation géométrique du paradoxe de Simpson

FIGURE 5.7 – Paradoxe de Simpson version géométrique



On remarque que la somme des vecteurs de pentes inférieures ($\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$) donne un vecteur de pente supérieure à la somme des vecteurs de pentes supérieures ($\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$).

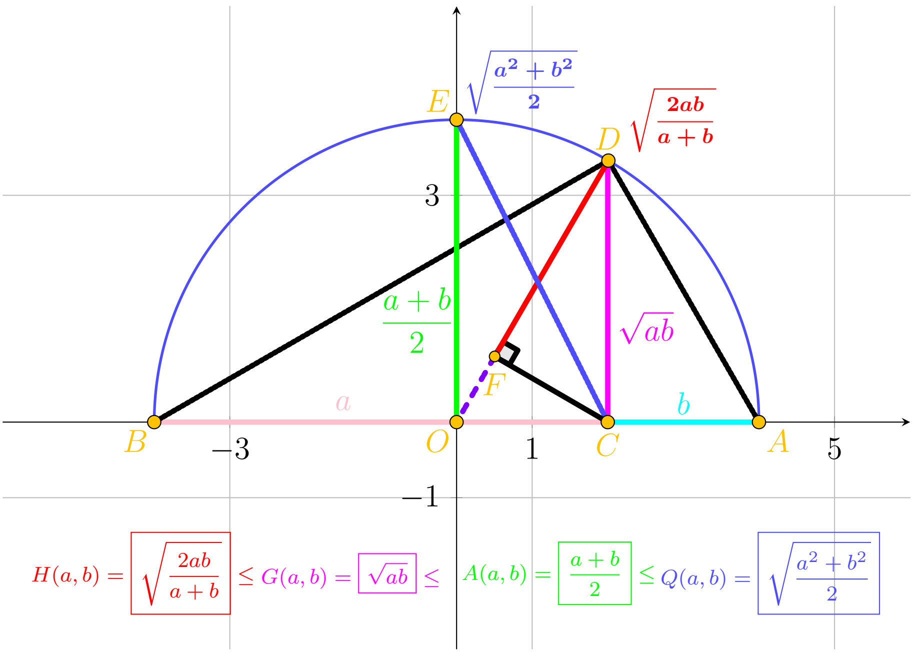
Voir questions page 44.

Pour d'autres exercices faisant intervenir les vecteurs sur un quadrillage [10] consultez cette vidéo.

10. https://youtu.be/cqzUqKlPXxA?si=Fi0eR0XronkjrIPp

5.3.6 Solution exercice 20 (secondaire : lycée) : constructions et comparaisons de moyennes

FIGURE 5.8 – Comparaison visuelle des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique



Pour voir une animation de la comparaison des moyennes [11] consultez cette vidéo.

11. https://youtu.be/NbcGUclj8sk?si=_sJ8iSSMd1OkOpDg

C1) Voir figure ci-dessus page 82.

C2) Voir figure ci-dessus page 82.

C3)

$$OE = \frac{a+b}{2}$$

car O est le centre du cercle de diamètre $a + b$ et E est un point de ce cercle donc OE est un rayon (donc un demi-diamètre).

C4) Le triangle ADB est rectangle en D car les points A, D et B sont cocycliques (sur le même cercle) de centre O donc il s'agit de son cercle circonscrit et O est le milieu de [AB] puisque c'est un diamètre. Tout triangle inscrit dans un cercle dont l'un des côtés est un diamètre est un triangle rectangle.

C5) Appliquons Pythagore dans le triangle ACD :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 \\ AD^2 &= b^2 + CD^2 \\ AD &= \sqrt{b^2 + CD^2} \end{aligned}$$

C6) Appliquons Pythagore dans le triangle BCD :

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 \\ BD^2 &= a^2 + CD^2 \\ BD &= \sqrt{a^2 + CD^2} \end{aligned}$$

C7) Appliquons Pythagore dans le triangle ABD :

$$\begin{aligned}
AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\
AB^2 &= a^2 + b^2 + 2CD^2 \\
2CD^2 &= AB^2 - (a^2 + b^2) \\
2CD^2 &= (a+b)^2 - (a^2 + b^2) \\
2CD^2 &= a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 \\
2CD^2 &= 2ab \\
&\Rightarrow \boxed{CD = \sqrt{ab}}
\end{aligned}$$

C8) Sur la figure on peut voir que $CD = \sqrt{ab}$ est une corde donc est inférieure au rayon $OE = \dfrac{a+b}{2}$ par conséquent

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

C9) Voir figure ci-dessus page 82.

C10) Sur la figure on peut voir :

$$\begin{aligned}
OC &= OA - CA \\
OC &= \left(\frac{a+b}{2}\right) - b \\
OC &= \frac{a+b-2b}{2} \\
OC &= \frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

C11) Calculons l'aire du triangle DOC de deux façons différentes. D'une part en utilisant OC comme base et CD comme hauteur,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{DOC} &= \frac{OC \times DC}{2} \\
\mathcal{A}_{DOC} &= \frac{\left(\dfrac{a-b}{2}\right) \times \sqrt{ab}}{2} \\
\mathcal{A}_{DOC} &= \frac{(a-b)\sqrt{ab}}{4}
\end{aligned}$$

d'autre part en utilisant OD comme base et FC comme hauteur :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{DOC} &= \frac{FC \times DO}{2} \\
\mathcal{A}_{DOC} &= \frac{FC \times \left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{2} \\
\mathcal{A}_{DOC} &= FC \times \frac{(a+b)}{4}
\end{aligned}$$

O en déduirt une expression de FC en fonction de a et b :

$$\begin{aligned}
FC \times \frac{(a+b)}{4} &= \frac{(a-b)\sqrt{ab}}{4} \\
FC &= \sqrt{ab} \times \frac{a-b}{a+b}
\end{aligned}$$

C12) Appliquons Pythagore dans CDF :

$$FD^2 = CD^2 - FC^2$$
$$FD^2 = ab - ab \times \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$
$$FD^2 = ab\left(1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)$$
$$FD^2 = ab\left(\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2}\right)$$
$$FD^2 = ab\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}\right)$$
$$FD^2 = \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$$
$$\Rightarrow \boxed{FD = \frac{2ab}{a+b}}$$

C13) Appliquons Pythagore dans le triangle CEO :

$$EC^2 = OC^2 + EO^2$$
$$EC^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$EC^2 = \frac{2(a^2+b^2)}{4}$$
$$EC^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{EC = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

C14) Sur la figure on peut voir que

$$FD < CD < OE < EC$$

C15) Faisons les calculs : Commençons par la gauche :

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \iff ab \geq \frac{2ab}{a+b}$$
$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \iff a+b \geq 2$$

Nous venons d'aboutir à une relation toujours vraie puisque nous avons choisis a et b tels que le diamètre du cercle est $a+b=8$ donc toujours supérieur à 2. Ainsi

$$\boxed{\sqrt{\frac{2ab}{a+b}} \leq \sqrt{ab}}$$

Poursuivons avec celle du milieu :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

Nous venons d'aboutir à une inégalité toujours puisque le carré d'un nombre réel est toujours positif donc l'inégalité initiale est toujours vraie

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}}$$

Il reste la dernière inégalité à établir :

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{2(a^2+b^2)-(a^2+b^2+2ab)}{4} \geq 0$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a^2+b^2-2ab}{4} \geq 0$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$$

Nous venons d'aboutir à une inégalité toujours vraie ainsi

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

Voir questions page 45.

Chapitre 6

Et maintenant ?

6.1 Que faire une fois que vous avez fait tous les exercices ?

6.1.1 Vous en voulez encore ?

Voilà, c'est terminé vous avez achevé tous les exercices de cet ouvrage. Bravo ! Maintenant, que faire ?

Vous avez plusieurs possibilités. Si vous êtes créatif et curieux vous pouvez commencer par modifier les exercices proposés ici. C'est un très bon moyen d'approfondir. Ensuite vous pouvez aller voir du côté de mes exercices en ligne :

— Comprendre la notion de fonction affine [1]

— Calcul de l'image par une fonction affine [2]

— Antécédent par une fonction affine [3]

1. https://didaskalosmanthanon.github.io/fct-affine/
2. https://didaskalosmanthanon.github.io/image-fonction-affine/index.html
3. https://didaskalosmanthanon.github.io/antecedent-fonction-affine/index.html

— QCM sur divers thèmes [4] : trigonométrie, identités remarquables...

— QCM sur les statistiques en 3ème [5]

— QCM sur les nombres en 3ème [6]

— QCM sur les fonctions en classe de 3ème [7]

— Exercices de géométrie niveau 3ème - 2de [8]

— Ce que mes élèves pensent de mes cours [9]

6.1.2 D'autres livres du même auteur

Vous pouvez également vous procurez mes autres ouvrages disponibles sur Amazon :

— Apprendre Python en moins de 5 heures [10] un livre pour vous mettre toute suite en action (évidemment que vous ne maîtriserez pas le langage en seulement 5 heures)

— Comment devenir autonome en anglais en 3 mois [11] aujourd'hui l'anglais est un outil indispensable que ça soit pour travailler, pour les sciences, pour voyager, pour de la documentation technique et même pour explorer les mathématiques de façon internationale

4. https://didaskalosmanthanon.github.io/quizz/index.html
5. https://didaskalosmanthanon.github.io/quizz-stats-3eme/index.html
6. https://didaskalosmanthanon.github.io/qcm-numbers/
7. https://didaskalosmanthanon.github.io/quizz-fonctions-3eme/index.html
8. https://didaskalosmanthanon.github.io/geometry/exercice1.html
9. https://didaskalosmanthanon.github.io/testimonial-slider/index.html
10. https://amzn.to/40n8rdI
11. https://amzn.to/3THL1Mq

6.1.3 Pour allez plus loin

Pour toutes remarques, suggestions, ou demandes d'aide personnelles merci de remplir ce formulaire[12] : `https://forms.gle/x7fAce7GqiJAGbsC7`

En remplissant ce formulaire vous me permettrez de vous contacter pour vous faire part de mes actualités et de l'aide que je pourrais vous apportez si vous en avez besoin. Et vous pourrez également obtenir la version numérique de ce livre.

À très bientôt pour de nouvelles aventures et encore merci d'avoir acheté ce livre et de l'avoir lu jusqu'au bout.

12. `https://forms.gle/x7fAce7GqiJAGbsC7`

Table des matières détaillée

1 Un peu de culture historique **1**

1.1 Introduction 1

Introduction **1**

1.1.1 Origine étymologique du mot calcul 6

1.1.2 Premières traces de calculs 7

1.1.3 Premières techniques de calcul 11

1.1.4 Les premières traces de géométrie 15

2 Niveau primaire **19**

2.1 Calculs niveau primaire 19

Calculs niveau primaire **19**

2.1.1 Exercice 1 (primaire) : Additions simples . 20

2.1.2 Exercice 2 (primaire) : Soustractions . . . 21

2.1.3 Exercice 3 (primaire) : Multiplications à 1 chiffre 22

2.1.4 Exercice 4 (primaire) : Multiplications à 2 chiffres par 11 23

2.1.5 Exercice 5 (primaire) : Divisions à 1 chiffre 24

2.1.6 Exercice 6 (primaire) : Divisions à 2 chiffres 25

3 Niveau secondaire : collège **27**
3.1 Calculs niveau collège 27

Calculs niveau collège **27**
3.1.1 Exercice 7 (secondaire : collège) : carrés . 28
3.1.2 Exercice 8 (secondaire : collège) : carrés avec des 1 et une calculatrice 29
3.1.3 Exercice 9 (secondaire : collège) : Un programme de calcul particulier 30
3.1.4 Exercice 10 (secondaire : collège) : Un programme de construction géométrique, Pythagore 32
3.1.5 Exercice 11 (secondaire : collège) : Un cible circulaire, probabilités 33
3.1.6 Exercice 12 (secondaire : collège) : carrés de Fibonacci 35
3.1.7 Exercice 13 (secondaire : collège) : aire des carrés de Fibonacci 36
3.1.8 Exercice 14 (secondaire : collège) : une cible avec des carrés de Fibonacci 37

4 Niveau secondaire : lycée **39**
4.1 Calculs niveau lycée 39

Calculs niveau lycée **39**
4.1.1 Exercice 15 (secondaire : lycée) : nombres triangulaires 40
4.1.2 Exercice 16 (secondaire : lycée) : divisions par 7 41
4.1.3 Exercice 17 (secondaire : lycée) : comment choisir le milieu d'une série statistique ? . . 42
4.1.4 Exercice 18 (secondaire : lycée) : comment contribuer efficacement à un projet collaboratif ? 43

4.1.5 Exercice 19 (secondaire : lycée) : une interprétation géométrique du paradoxe de Simpson . . . 44
4.1.6 Exercice 20 (secondaire : lycée) : constructions et comparaisons de moyennes 45

5 Solutions des exercices **47**
5.1 Solutions niveau primaire . . . 48

Solutions niveau primaire **48**
5.1.1 Solutions exercice 1 (primaire) : Additions 49
5.1.2 Solutions exercice 2 (primaire) : Soustractions . . . 50
5.1.3 Solutions exercice 3 (primaire) : Multiplications à 1 chiffre . . . 51
5.1.4 Solutions exercice 4 (primaire) : Multiplications à 2 chiffres par 11 . . . 52
5.1.5 Solutions exercice 5 (primaire) : Divisions à 1 chiffre . . . 53
5.1.6 Solutions exercice 6 (primaire) : Divisions à 2 chiffres . . . 54
5.2 Solutions niveau secondaire : collège . . . 55

Solutions niveau secondaire : collège **55**
5.2.1 Solutions exercice 7 (secondaire : collège) : carrés . . . 56
5.2.2 Solutions exercice 8 (secondaire : collège) : carrés avec des 1 et une calculatrice 57
5.2.3 Solutions exercice 9 (secondaire : collège) : Un programme de calcul particulier 58
5.2.4 Solutions exercice 10 (secondaire : collège) : Un programme de construction géométrique, Pythagore . . . 59
5.2.5 Solutions exercice 11 (secondaire : collège) : Un cible circulaire, probabilités . . . 60

5.2.6 Solutions exercice 12 (secondaire : collège) : Fibonacci . . . 62
5.2.7 Solutions exercice 13 (secondaire : collège) : aire des carrés de Fibonacci . . . 64
5.2.8 Solutions exercice 14 (secondaire : collège) : aire des carrés de Fibonacci . . . 65
5.3 Solutions niveau secondaire : lycée . . . 66

Solutions niveau secondaire : lycée **66**
5.3.1 Solution exercice 15 (secondaire : lycée) : nombres triangulaires . . . 67
5.3.2 Solution exercice 16 (secondaire : lycée) : divisions par 7 . . . 71
5.3.3 Solution exercice 17 (secondaire : lycée) : comment choisir le milieu d'une série statistique ? . . . 73
5.3.4 Solution exercice 18 (secondaire : lycée) : comment contribuer efficacement à un projet collaboratif ? . . . 78
5.3.5 Solution exercice 19 (secondaire : lycée) : une interprétation géométrique du paradoxe de Simpson . . . 81
5.3.6 Solution exercice 20 (secondaire : lycée) : constructions et comparaisons de moyennes 82

6 Et maintenant ? **89**
6.1 Que faire une fois que vous avez fait tous les exercices ? . . . 89

Que faire une fois que vous avez fait tous les exercices ? **89**
6.1.1 Vous en voulez encore ? . . . 89
6.1.2 D'autres livres du même auteur . . . 90
6.1.3 Pour allez plus loin . . . 91

Annexe des URLs **101**

Liste des figures

3.1 Cible de cercles concentriques 33

5.1 Construction du triangle rectangle 3, 4, 5 59
5.2 Carrés de Fibonacci 62
5.3 Nombres triangulaires 70
5.4 Version traitée de la série S_5 74
5.5 Version traitée de la série S_6 75
5.6 Version traitée de la série S_7 76
5.7 Paradoxe de Simpson version géométrique 81
5.8 Comparaison visuelle des moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique 82

Annexe des URLs

hygiène mentale https://www.youtube.com/watch?v=qrA5HgFIjJE (voir page 1)

démonstration de la 1ère identité remarquable https://youtu.be/IL55ftyJQHI (voir page 3)

ce formulaire https://forms.gle/x7fAce7GqiJAGbsC7 (voir page 5)

QCM sur les nombres https://didaskalosmanthanon.github.io/qcm-numbers/ (voir page 57)

illustration géométrique de la 3ème identité remarquable https://youtu.be/6Nnv3K7k2No?si=y7Hmvb5IwpIsHaWW (voir page 58)

démonstration du théorème de Pythagore https://youtube.com/shorts/80C0794dwco (voir page 59)

QCM sur les probabilités https://didaskalosmanthanon.github.io/qcm-proba/ (voir page 61)

construire la suite de Fibonacci avec un programme Python https://youtu.be/y5DSNeBfzFs?si=Ehuap02-Lg_sETAH (voir page 63)

exercices sur les vecteurs avec coordonnées https://youtu.be/qjJ84nor6DE?si=kEnLaxRkw9qRPLj4 (voir page 69)

construction des nombres triangulaires https://youtu.be/dqJIKHeBRio?si=nNHWJ5m8al-MAUfy (voir page 70)

énigme statistique contre-intuitive https://youtu.be/S-0xF0nh4KU?si=7EByNEsU6KD-v2RA (voir page 77)

paradoxe de Simpson https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Simpson (voir page 80)

exercices faisant intervenir les vecteurs sur un quadrillage https://youtu.be/cqzUqKlPXxA?si=Fi0eR0XronkjrIPp (voir page 81)

animation de la comparaison des moyennes https://youtu.be/NbcGUclj8sk?si=_sJ8iSSMd1OkOpDg (voir page 82)

Comprendre la notion de fonction affine https://didaskalosmanthanon.github.io/fct-affine/ (voir page 89)

Calcul de l'image par une fonction affine https://didaskalosmanthanon.github.io/image-fonction-affine/index.html (voir page 89)

Antécédent par une fonction affine https://didaskalosmanthanon.github.io/antecedent-fonction-affine/index.html (voir page 89)

QCM sur divers thèmes https://didaskalosmanthanon.github.io/quizz/index.html (voir page 89)

QCM sur les statistiques en 3ème https://didaskalosmanthanon.github.io/quizz-stats-3eme/index.html (voir page 90)

QCM sur les nombres en 3ème https://didaskalosmanthanon.github.io/qcm-numbers/ (voir page 90)

QCM sur les fonctions en classe de 3ème https://didaskalosmanthanon.github.io/quizz-fonctions-3eme/index.html (voir page 90)

Exercices de géométrie niveau 3ème - 2de https://didaskalosmanthanon.github.io/geometry/exercice1.html (voir page 90)

Ce que mes élèves pensent de mes cours https://didaskalosmanthanon.github.io/testimonial-slider/index.html (voir page 90)

Apprendre Python en moins de 5 heures https://amzn.to/40n8rdI (voir page 90)

Comment devenir autonome en anglais en 3 mois https://amzn.to/3THL1Mq (voir page 90)

ce formulaire https://forms.gle/x7fAce7GqiJAGbsC7 (voir page 91)