

# Manipuler les nombres réels (avec solutions)

Laurent Garnier

## Table des matières

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b>À qui s'adresse ce livre</b>             | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Contenus</b>                             | <b>2</b> |
| 2.1      | Contenu 1 : Nombres réels, droite numérique | 2        |
| 2.1.1    | Savez-vous compter sur vos doigts ?         | 2        |
| 2.1.2    | Tout est relatif                            | 3        |
| 2.1.3    | Les ordinateurs s'en contentent             | 3        |
| 2.1.4    | Êtes-vous rationnels ?                      | 4        |
| 2.1.5    | Au-delà du réel                             | 5        |
| 2.1.6    | Raisonnement par contraposition             | 9        |
| 2.1.7    | Exercice                                    | 9        |
| 2.1.8    | Exercice Python                             | 9        |
| 2.2      | Contenu 2 : Intervalles de nombres réels    | 10       |
| 2.2.1    | Introduction de la notion d'intervalle      | 10       |
| 2.2.2    | Exercice                                    | 15       |
| 2.2.3    | Exercice                                    | 16       |
| 2.2.4    | Petit jeu                                   | 16       |
| 2.3      | Contenu 3 : Distances                       | 17       |
| 2.3.1    | Introduction de la notion de distance       | 17       |
| 2.3.2    | Exercice                                    | 19       |
| 2.3.3    | Exercice                                    | 20       |
| 2.4      | Contenu 4 : Disques sur la droite réelle    | 20       |
| 2.4.1    | Introduction du concept d'intervalle centré | 20       |
| 2.4.2    | Exercice                                    | 22       |
| 2.4.3    | Une autre perspective                       | 22       |
| 2.4.4    | Faisons un peu de programmation Python      | 22       |
| 2.4.5    | Exercice                                    | 23       |
| 2.5      | Contenu 5 : Nombres décimaux                | 24       |
| 2.5.1    | Introduction sur les nombres décimaux       | 24       |
| 2.5.2    | Exercice                                    | 25       |
| 2.5.3    | Souvenirs souvenirs                         | 25       |
| 2.6      | Contenu 6 : Nombres rationnels              | 28       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.6.1    | Introduction aux nombres rationnels . . . . .          | 28        |
| 2.6.2    | Exercice . . . . .                                     | 28        |
| 2.6.3    | Petite astuce . . . . .                                | 29        |
| 2.6.4    | Les nombres irrationnels . . . . .                     | 29        |
| 2.6.5    | Exercice . . . . .                                     | 31        |
| 2.6.6    | Généralisation . . . . .                               | 31        |
| 2.6.7    | Exercice . . . . .                                     | 31        |
| 2.6.8    | Probablement irrationnel . . . . .                     | 31        |
| <b>3</b> | <b>Capacités attendues</b>                             | <b>32</b> |
| 3.1      | Rappels concernant les capacités attendues . . . . .   | 32        |
| 3.2      | Capacité attendue numéro 1 . . . . .                   | 33        |
| 3.2.1    | Code pour construire les points . . . . .              | 33        |
| 3.2.2    | Exercice . . . . .                                     | 34        |
| 3.3      | Capacité attendue numéro 2 . . . . .                   | 34        |
| 3.3.1    | Placement des abscisses sur la droite réelle . . . . . | 34        |
| 3.3.2    | Exercice . . . . .                                     | 35        |
| 3.4      | Capacité attendue numéro 3 . . . . .                   | 36        |
| 3.4.1    | Exercice . . . . .                                     | 36        |
| 3.4.2    | Exercice . . . . .                                     | 37        |
| 3.5      | Capacité attendue numéro 4 . . . . .                   | 38        |
| 3.5.1    | Exemple . . . . .                                      | 39        |
| 3.5.2    | Exercice . . . . .                                     | 40        |
| <b>4</b> | <b>Démonstrations</b>                                  | <b>40</b> |
| 4.1      | Rappels des éléments du programme officiel . . . . .   | 40        |
| 4.2      | Démonstration numéro 1 . . . . .                       | 41        |
| 4.2.1    | À la main . . . . .                                    | 41        |
| 4.2.2    | Avec Python . . . . .                                  | 41        |
| <b>5</b> | <b>Exemple d'algorithme</b>                            | <b>43</b> |
| 5.1      | Rappel des éléments du programme officiel . . . . .    | 43        |
| 5.2      | Petites explications . . . . .                         | 43        |
| 5.3      | Le code . . . . .                                      | 44        |
| <b>6</b> | <b>Approfondissements possibles</b>                    | <b>44</b> |
| 6.1      | Rappel des éléments du programme officiel . . . . .    | 45        |
| 6.2      | Petit bilan . . . . .                                  | 45        |
| 6.3      | Et pour quelques exemples de plus . . . . .            | 45        |
| <b>7</b> | <b>Après ce livre</b>                                  | <b>46</b> |
| 7.1      | Conclusion . . . . .                                   | 46        |
| <b>8</b> | <b>Solutions des exercices de la section : 2</b>       | <b>47</b> |
| 8.1      | Solutions des exercices de la section : 2.1 . . . . .  | 47        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 8.1.1    | Solution de l'exercice 2.1.7 . . . . .                | 47        |
| 8.1.2    | Solution Python de l'exercice 2.1.8 . . . . .         | 47        |
| 8.2      | Solutions des exercices de la section : 2.2 . . . . . | 49        |
| 8.2.1    | Solutions de l'exercice 2.2.2 . . . . .               | 49        |
| 8.2.2    | Solutions de l'exercice 2.2.3 . . . . .               | 51        |
| 8.2.3    | Solution du petit jeu 2.2.4 . . . . .                 | 52        |
| 8.3      | Solutions des exercices de la section : 2.3 . . . . . | 54        |
| 8.3.1    | Solution de l'exercice 2.3.2 . . . . .                | 54        |
| 8.3.2    | Solution de l'exercice 2.3.3 . . . . .                | 55        |
| 8.4      | Solutions des exercices de la section : 2.4 . . . . . | 56        |
| 8.4.1    | Solution de l'exercice 2.4.2 . . . . .                | 56        |
| 8.4.2    | Solution de l'exercice 2.4.5 . . . . .                | 57        |
| 8.5      | Solutions des exercices de la section : 2.5 . . . . . | 59        |
| 8.5.1    | Solution avec Python de l'exercice 2.5.2 . . . . .    | 59        |
| 8.6      | Solutions des exercices de la section : 2.6 . . . . . | 60        |
| 8.6.1    | Solution de l'exercice 2.6.2 . . . . .                | 60        |
| 8.6.2    | Solution de l'exercice 2.6.5 . . . . .                | 61        |
| 8.6.3    | Solution de l'exercice 2.6.7 . . . . .                | 61        |
| <b>9</b> | <b>Solutions des exercices de la section : 3</b>      | <b>62</b> |
| 9.1      | Solutions des exercices de la section : 3.2 . . . . . | 62        |
| 9.1.1    | Solution de l'exercice 3.2.2 . . . . .                | 62        |
| 9.2      | Solutions des exercices de la section : 3.3 . . . . . | 63        |
| 9.2.1    | Solution de l'exercice 3.3.2 . . . . .                | 63        |
| 9.3      | Solutions des exercices de la section : 3.4 . . . . . | 65        |
| 9.3.1    | Solution de l'exercice 3.4.1 . . . . .                | 65        |
| 9.3.2    | Solution de l'exercice 3.4.2 . . . . .                | 65        |
| 9.4      | Solutions des exercices de la section : 3.5 . . . . . | 66        |
| 9.4.1    | Solution de l'exercice 3.5.2 . . . . .                | 66        |

## 1 À qui s'adresse ce livre

Mathematics is a language.

Josiah Willard Gibbs

Ce livre s'adresse initialement aux élèves de seconde du système scolaire français. Mais il sera probablement très utile à un élève de fin de collège qui voudrait assurer son entrée au lycée. Il sera également très utile à un élève de première qui voudrait s'assurer qu'il maîtrise bien les notions de la classe de seconde. Enfin un quatrième public qui pourrait directement être visé est celui des enseignants, profs particuliers ou encore tuteurs (professionnels ou amateurs) qui souhaiteraient consulter des ressources utiles et utilisables

pour aider les lycéens.

De façon plus générale, même si je reprends exactement la structure du programme officiel que vous pouvez consulter ici : <https://eduscol.education.fr/document/24553/download>, il me semble que ce livre pourrait être utile à quiconque souhaite approcher les mathématiques de façon honnête, rigoureuse et avec un souci de compréhension. Tout en respectant le niveau du programme j'essaierai dès que possible de prolonger la perspective.

Vous pouvez d'ores et déjà mettre en pratique de façon interactive toutes les notions abordées grâce aux codes Python accessible sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

Si vous constatez une erreur que ça soit une erreur de calcul, une faute de frappe ou quoique ce soit merci de me contacter à l'adresse indiquée dans le formulaire afin de me la signaler et que je puisse la corriger. Idem si vous avez des suggestions d'amélioration.

Bonne lecture.

## 2 Contenus

Mathematics has beauty and romance. It's not a boring place to be, the mathematical world. It's an extraordinary place; it's worth spending time there.

Marcus du Sautoy

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Contenu 1 : Nombres réels, droite numérique . . . . . | 2  |
| 2.2 | Contenu 2 : Intervalles de nombres réels . . . . .    | 10 |
| 2.3 | Contenu 3 : Distances . . . . .                       | 17 |
| 2.4 | Contenu 4 : Disques sur la droite réelle . . . . .    | 20 |
| 2.5 | Contenu 5 : Nombres décimaux . . . . .                | 24 |
| 2.6 | Contenu 6 : Nombres rationnels . . . . .              | 28 |

### 2.1 Contenu 1 : Nombres réels, droite numérique

Tout l'univers repose sur l'ensemble des entiers naturels.

Pythagore de Samos

|       |  |   |
|-------|--|---|
| 2.1.1 | Savez-vous compter sur vos doigts? . . . . . | 2 |
|-------|--|---|

|       |   |   |
|-------|---|---|
| 2.1.2 | Tout est relatif . . . . .                | 3 |
| 2.1.3 | Les ordinateurs s'en contentent . . . . . | 3 |
| 2.1.4 | Êtes-vous rationnels ? . . . . .          | 4 |
| 2.1.5 | Au-delà du réel . . . . .                 | 5 |
| 2.1.6 | Raisonnement par contraposition . . . . . | 9 |
| 2.1.7 | Exercice . . . . .                        | 9 |
| 2.1.8 | Exercice Python . . . . .                 | 9 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, droite numérique" dans le [programme officiel](#).

### 2.1.1 Savez-vous compter sur vos doigts ?

Savez-vous résoudre l'équation  $x - 1 = 0$  ? Je vous laisse réfléchir et je vous donnerai la solution plus tard.

Imaginez que vous êtes en train de jouer à votre jeu vidéo préféré. Il vous reste 3 points de vie, combien pouvez-vous en perdre avant de mourir (dans le jeu) ? Idem, je vous laisse réfléchir.

En général, lorsque vous entrez en seconde vous êtes âgé de 15 ans, du coup combien d'années vous séparent de votre majorité ?

Ces trois questions traitent du même genre de problèmes, la résolution des équations algébriques du premier degré impliquant les nombres les plus simples que vous connaissez à savoir les nombres entiers naturels. Pour la faire simple il s'agit des nombres utiles pour compter le nombre de doigts que vous possédez, le nombre d'enfants dans une famille et toutes les choses qu'on peut dénombrer de zéro à l'infini.

On note l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{N}$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N}$$

$$15 + x = 18 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N}$$

### 2.1.2 Tout est relatif

Mais ces nombres sont insuffisants pour exprimer des températures par exemple dans une ville d'Europe du Nord comme Saint Pétersbourg en Russie ou Oslo

en Norvège. En fait, même en France métropolitaine si vous allez en Savoie vous observerez des températures négatives en hiver et positive en été. Le signe de ces températures est *relatif* à la position du zéro.

Les nombres entiers relatifs sont constitués des nombres entiers naturels (les nombres positifs qu'on a vu précédemment) auxquels on ajoute leurs symétriques par rapport à zéro.

On les note  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Ce sont également ces nombres qu'on utilise dans un ascenseur pour indiquer si on va au sous-sol (nombre négatif) ou aux étages supérieurs (nombres positifs).

Dans le langage de programmation Python les nombres entiers relatifs sont représentés par le type `int` pour *integer* (qui veut dire entier relatif en anglais).

### 2.1.3 Les ordinateurs s'en contentent

Mais ces nombres sont encore en nombre insuffisant pour exprimer par exemple les unités monétaires. Quand vous achetez une baguette, du carburant, des fournitures scolaires ou quoique ce soit ; la plupart du temps vous utilisez des nombres à virgules qu'on appelle les nombres décimaux.

Contrairement aux deux ensembles précédents, l'ensemble des nombres décimaux ne peut pas être représenté de façon explicite avec des points de suspension, il doit être défini en *compréhension*. Définir un ensemble en compréhension signifie que vous devez expliquer la règle de construction.

On note

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid (a, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

l'ensemble des nombres décimaux avec le symbole  $\mid$  qui se lit *tel(s) que* et le symbole  $\in$  qui se lit *appartient à*.

Commençons par la fin  $(a, n) \in \mathbb{Z}^2$  signifie que  $a$  et  $n$  sont tous les deux des entiers relatifs. Ainsi, les décimaux sont les nombres fractionnaires dont le numérateur est un entier relatif et le dénominateur une puissance de 10.

Donnons quelques exemples :

$$\begin{aligned}(a, n) = (1, 2) &\Rightarrow \frac{1}{10^2} = 0,01 \\(a, n) = (3, 4) &\Rightarrow \frac{3}{10^4} = 0,0003 \\(a, n) = (2, -1) &\Rightarrow \frac{2}{10^{-1}} = 20 \\(a, n) = (3, 0) &\Rightarrow \frac{3}{10^0} = 3 \\(a, n) = (-1, 2) &\Rightarrow \frac{-1}{10^2} = -0,01\end{aligned}$$

Dans la programmation Python on parle du type `float` pour *floating point number* ou nombre à virgule flottante en bon français (puisque les anglosaxons utilisent un point comme séparateur décimal). En prenant  $n = 0$  on obtient tous les entiers relatifs. Mais ce n'est pas suffisant pour décrire le réel (en théorie, parce qu'en pratique les ordinateurs s'en contentent).

#### 2.1.4 Êtes-vous rationnels ?

Imaginez que vous avez un budget pour une semaine et que vous souhaitiez allouer une part équitable pour chaque jour. Et bien sachez que le nombre  $\frac{1}{7}$  n'est pas un décimal, pas plus que le nombre  $\frac{1}{6}$ . En effet si vous posez la division ou que vous utilisez une machine (calculatrice, ordinateur, tablette ou téléphone peu importe) vous verrez que  $\frac{1}{7} \simeq 0,142857\dots$  et que cette séquence 142857... se répètent à l'infini. De même, de façon plus simple, si vous prenez  $\frac{1}{6} \simeq 0,16\dots$  les 6 se répètent à l'infini.

Posons  $x = 0,16\dots6\dots$  où les 6 se répètent à l'infini. Multiplions par 100 ainsi on obtient  $100x = 16,6\dots6\dots$ . Multiplions par 10 ainsi on obtient  $10x = 1,6\dots6\dots$ . Faisons maintenant la soustraction  $90x = 15$  d'où  $x = \frac{15}{90} = \frac{3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{1}{6}$ . Le nombre  $\frac{1}{6}$  est bien un nombre qui sort de la définition des décimaux et justifie une nouvelle classe de nombres, les nombres rationnels (ratio en latin veut dire quotient).

Les nombres rationnels sont notés

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

Ici le numérateur  $a$  est un entier relatif et le dénominateur  $b$  est un entier naturel strictement positif parce qu'on ne peut pas diviser par zéro.

Prouvons ce dernier résultat. Imaginez que l'on puisse trouver un nombre entier  $a$  qui soit divisible par zéro. Alors il existerait un entier  $q$  tel que

$a = 0 \times q$ . Le problème c'est que zéro est un élément absorbant, tel le trou noir de la multiplication, tout nombre multiplié par zéro donne zéro. La division par zéro n'a donc pas de sens.

Donnons quelques exemples de nombre rationnels :

$$\begin{aligned}(a, b) = (1, 2) &\Rightarrow \frac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{D} \\(a, b) = (8, 9) &\Rightarrow \frac{8}{9} = 0,8 \dots 8 \dots \in \mathbb{Q} \\(a, b) = (3, 4) &\Rightarrow \frac{3}{4} = 0,75 \in \mathbb{D} \\(a, b) = (19, 11) &\Rightarrow \frac{19}{11} = 1,72 \dots \in \mathbb{Q} \\(a, b) = (2, 7) &\Rightarrow \frac{2}{7} = 0,285714 \dots \in \mathbb{Q}\end{aligned}$$

### 2.1.5 Au-delà du réel

Les nombres rationnels sont très intéressants mais ils restent insuffisants pour capturer le réel. Imaginez que l'écran de votre ordinateur portable soit un rectangle de longueur 16 cm pour une largeur de 9 cm (c'est le fameux format 16/9). Alors pour calculer la diagonale nous allons utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}d^2 &= 16^2 + 9^2 \\d^2 &= 256 + 81 \\d^2 &= 337 \\d &= \sqrt{337} \simeq 18,36\end{aligned}$$

Tout d'abord le nombre 337 est un nombre premier (prouvez-le, c'est un bon exercice). Et ensuite la racine carrée d'un nombre premier ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre rationnel.

Pour des raisons de concordance avec le programme de seconde je vous propose de démontrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel et pour le résultat (plus général) énoncé précédemment, je vous renvoie aux approfondissements (mais vous pouvez déjà commencer à chercher).

Pour démontrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel on va utiliser plusieurs types de raisonnement. Tout d'abord nous allons utiliser le raisonnement par l'absurde. Le raisonnement par l'absurde repose sur un principe de la logique classique qui dit qu'une affirmation est soit vraie soit fausse. En logique mathématique on ne s'occupe que de ce genre d'affirmation donc



nous sommes dans un système **beaucoup** plus simple que la réalité. Du coup, si le contraire de ce que je veux montrer est faux alors ce que je veux montrer est vrai. Prenons un exemple concret un peu simpliste, si ce n'est pas le matin alors c'est l'après-midi. Si vous n'êtes pas majeur alors vous êtes mineur. Ce genre de logique fonctionne bien avec les systèmes binaires.

Revenons à nos moutons, on veut montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel donc on va supposons le contraire et montrer que ce contraire est faux donc que notre affirmation sera vraie.

Supposons donc par l'absurde que  $\sqrt{2}$  soit rationnel donc d'après la définition de  $\mathbb{Q}$  il devrait exister un entier relatif  $a$  et un entier naturel strictement positif  $b$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ . Comme toute fraction peut se ramener (après simplification) à une fraction irréductible on peut donc considérer que  $a$  et  $b$  n'ont pas de diviseurs communs et que la fraction est irréductible. Dire que  $a$  et  $b$  n'ont pas de diviseurs communs revient à dire que leur pgcd vaut un c'est-à-dire  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Le PGCD est le Plus Grand Commun Diviseur. Bon on devrait l'appeler le PGDC parce qu'en français on dit diviseur commun car l'adjectif vient après le nom mais en anglais ils disent *greatest common divisor* et bien souvent les gens importent les concepts anglophones en oubliant les règles du français c'est pour ça que sur certaines calculatrices et logiciels vous pouvez voir GCD ou gcd.

Faisons un bref récapitulatif :

- Objectif : Montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel
- Méthode : Raisonnement par l'absurde, on pose  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  et avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$

Du coup, on va élever au carré ce qui nous donne  $2 = \frac{a^2}{b^2}$  et qu'on peut mettre sous la forme  $a^2 = 2b^2$ .

On peut classer les nombres entiers en deux catégories :

1. Les nombres pairs de la forme  $p = 2n$  où  $n$  est un entier.
2. Les nombres impairs de la forme  $i = 2n + 1$  où  $n$  est un entier.

On en déduit que le nombre  $a^2 = 2b^2$  appartient à la première catégorie avec  $n = b^2$ .

Désormais on va avoir besoin d'un résultat intermédiaire qui va faire intervenir un autre type de raisonnement (pour voir les différents types de raisonnement consulter la playlist éponyme en cliquant [ici](#)).

Voici le résultat intermédiaire qu'on veut montrer : *si le carré d'un nombre est pair alors le nombre initial est aussi pair.*

On va formaliser cette affirmation :

1. A = "le carré d'un nombre est pair"
2. B = "le nombre initial est pair"

$$3. P = A \Rightarrow B$$

Le nouveau type de raisonnement qu'on va utiliser s'appelle le raisonnement par contraposée.

Prenons un exemple concret fictif (et simpliste). Imaginez que chaque fois qu'il pleut je prenne mon parapluie (sans **aucune** exception). Si vous me croisez **sans** parapluie alors vous en déduirez qu'il ne pleut pas. C'est une proposition logiquement équivalente à la première formulation.

1.  $A = \text{"Il pleut"}$
2.  $B = \text{"Je prend mon parapluie"}$
3.  $P = A \Rightarrow B$
4.  $\text{non } B = \text{"Je n'ai pas de parapluie"}$
5.  $\text{non } A = \text{"Il ne pleut pas"}$
6.  $CP(P) = \text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$

Revenons à nos nombres entiers. La contraposée de : "Si le carré d'un nombre est pair alors le nombre initial est aussi pair." est "Si le nombre initial est impair alors son carré aussi."

Décomposons :

1.  $A = \text{"le carré d'un nombre est pair"}$
2.  $B = \text{"le nombre initial est pair"}$
3.  $P = A \Rightarrow B$
4.  $\text{non}(B) = \text{"le nombre initial est impair"}$
5.  $\text{non}(A) = \text{"le carré est impair"}$
6.  $CP(P) = \text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$

Ce raisonnement nous permet de ramener la proposition à montrer à une proposition plus simple et qu'on peut montrer directement.

Si le nombre initial est impair alors il est de la forme  $i = 2n + 1$ . Il vient que son carré satisfait :

$$\begin{aligned} i^2 &= (2n + 1)^2 \\ i^2 &= (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 \\ i^2 &= 2(2n^2 + 2n) + 1 \end{aligned}$$

On a bien obtenu un nombre impair. Par équivalence logique la proposition initiale est vraie.

Faisons un bilan d'étape.

1. Objectif final : Montrer que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel
2. Méthode : Raisonnement par l'absurde, on pose  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  et avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$
3. Objectif intermédiaire :  $a^2 = 2b^2$  est pair donc  $a$  est pair.
4. Méthode pour l'objectif intermédiaire : raisonnement par contraposée, si  $a$  est impair alors  $a^2$  aussi

À ce stade nous avons bien montré que  $a^2 = 2b^2$  entraîne que  $a = 2n$ . De cette nouvelle écriture on tire  $a^2 = 4n^2$  et on peut établir une nouvelle égalité  $2b^2 = 4n^2$  qui donne  $b^2 = 2n^2$ . Par conséquent, en utilisant notre résultat intermédiaire, on constate que  $b$  est aussi pair.

Mais si  $a$  et  $b$  sont pairs alors ils sont divisibles par deux ce qui contredit  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Ce résultat est absurde donc l'hypothèse initiale aussi et finalement  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel. CQFD

Bravo à vous si vous avez tout compris. Pour les autres, rassurez-vous, c'est normal que ça chauffe dans votre tête. Vous pouvez déjà revoir cette démonstration en vidéo ici : [https://youtu.be/R\\_L4NEgIxPM](https://youtu.be/R_L4NEgIxPM)

Le raisonnement par l'absurde consiste à partir d'une hypothèse contraire à celle qu'on souhaite montrer et ensuite à enchaîner des déductions logiques parfaitement valides jusqu'à aboutir à une contradiction. La chaîne de déductions peut parfois s'avérer (très) longue et impliquer des résultats intermédiaires nécessitant à leur tour (éventuellement) d'autres types de raisonnement.

Dans certains ouvrages, certaines personnes préfèrent admettre les résultats intermédiaires. Dans l'absolu il serait impossible de tout démontrer parce qu'on ne pourrait jamais avancer. Néanmoins il est utile de garder à l'esprit qu'en mathématiques le but du jeu est de démontrer les affirmations sans jamais les prendre pour argent comptant.

Finalement, puisque  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel il doit bien appartenir à un ensemble de nombre et cet ensemble est l'ensemble des nombres réels et on le note  $\mathbb{R}$ .

Nous avons ainsi la chaîne d'inclusions ensemblistes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Cet ensemble de nombres correspond à l'infinité des points sur une droite et c'est pour cette raison qu'on représentera souvent les nombres réels par une droite graduée qu'on appellera la droite des réels avec 0 au milieu et qui se prolonge vers  $+\infty$  à droite et  $-\infty$  à gauche.

$$-\infty--\left(-\frac{5}{3}\right)-(-\sqrt{2})--(-1)--(0)--(+1)--(+\Phi)--(+\pi)-->+\infty$$

### 2.1.6 Raisonnement par contraposition

Revenons un petit instant sur la mécanique du raisonnement par contraposée. Pour cela on va décortiquer l'implication logique.

$$\begin{aligned} A &= "x > 2" \\ B &= "2x > 4" \\ P &= A \Rightarrow B \\ \neg B &= "2x \leq 4" \\ \neg A &= "x \leq 2" \\ CP(P) &= (\neg B) \Rightarrow (\neg A) \end{aligned}$$

Le symbole  $\neg$  est la négation logique.

### 2.1.7 Exercice

Reprennez la même mécanique présentée ci-dessus avec cette fois  $A = "x < -1"$  et  $B = "-3x > 3"$ .

Voir solution [8.1.1](#)

### 2.1.8 Exercice Python

1. Écrire une fonction Python `imply` qui prend deux arguments en entrée et renvoie la phrase logique "A implique B" avec A et B remplacés par leurs valeurs. Par exemple : `imply("x > 1", "x**2 > 1")` renverra `"'x > 1'implique 'x**2 > 1'"`
2. Écrire une autre fonction Python `contrapose` qui prend deux arguments A et B et qui renvoie la contraposée de "A implique B". Donc la fonction devra renvoyer "non B implique non A". Votre programme écrira littéralement "non" suivie de la valeur de la proposition A (ou B) parce que vous ne pouvez pas (en tout cas je ne sais pas) modifier logiquement le contenu d'une chaîne de caractères avec Python.

Voir solutions [8.1.2](#)

## 2.2 Contenu 2 : Intervalles de nombres réels

One of the big misapprehensions about mathematics that we perpetrate in our classrooms is that the teacher always seems to know the answer to any problem that is discussed.

Leon Henkin

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.2.1 | Introduction de la notion d'intervalle . . . . . | 10 |
| 2.2.2 | Exercice . . . . .                               | 15 |
| 2.2.3 | Exercice . . . . .                               | 16 |
| 2.2.4 | Petit jeu . . . . .                              | 16 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Intervalles de  $\mathbb{R}$ . Notations  $+\infty$  et  $-\infty$ " dans le [programme officiel](#).

### 2.2.1 Introduction de la notion d'intervalle

Jusqu'à présent nous avons traité essentiellement des égalités (une équation est une égalité). Mais dans de nombreux cas il est intéressant et utile de traiter des inégalités. Donnons quelques exemples issus du monde réel de la vie de tous les jours :

1. Il faut être âgé de plus de 14 ans pour conduire un véhicule de type mobylette ou scooter.
2. Il faut être âgé entre 12 et 25 ans pour bénéficier du tarif jeune à la SNCF.
3. Les films pornographiques sont interdits aux mineurs donc aux gens qui ont un âge inférieur à 18 ans.
4. En boxe anglaise la catégorie de poids pailles concerne les gens dont le poids est inférieur à 47,128 kg (soit 105 livres, source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Boxe\\_anglaise](https://fr.wikipedia.org/wiki/Boxe_anglaise) )
5. En France, seuls les gens qui ont moins de 10 777€ par an sont exonérés d'impôt (0%), ensuite de 10 778 à 27 478 c'est 11%, puis 30% de 27 479 à 78 570, puis 41% de 78 571 à 168 994 et enfin 45% pour ceux qui ont plus de 168 994 (source : <https://www.service-public.fr/particuliers/vosdroits/F1419> )
6. La limite autorisée du taux d'alcool dans le sang par la loi en 2023 est de 0,5 g/L soit en équivalent 0,25 mg par litre d'air expiré (source : <https://www.legipermis.com/infractions/alcool-permis-conduire.html> )
7. L'IMC (Indice de Masse Corporelle) permet d'établir des catégories pour mesurer l'obésité avec par exemple le début de la surcharge pondérale (surpoids) à partir de 25 kg/m<sup>2</sup> (source : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Indice\\_de\\_masse\\_corporelle](https://fr.wikipedia.org/wiki/Indice_de_masse_corporelle) )

Traduisons ces exemples concrets en inégalités mathématiques. Dans chaque cas on utilisera la lettre  $x$  pour désigner la variable inconnue.

1.  $x \geq 14$
2.  $12 \leq x \leq 25$
3.  $0 < x < 18$
4.  $0 < x < 47,128$
5.  $0 \leq x \leq 10777$
6.  $0 \leq x < 0,5$
7.  $x \geq 25$

Ces inégalités peuvent être représentées graphiquement. On peut les interpréter comme des zones délimitées par des bornes inférieures et supérieures. Lorsqu'il n'y a qu'une seule borne apparente alors ça veut dire que l'autre est du type  $\infty$  avec le signe adéquat.

Traduisons ces inégalités en intervalles :

1.  $x \geq 14 \iff x \in [14; +\infty[$  on parle d'intervalle fermé.
2.  $12 \leq x \leq 25 \iff x \in [12; 25]$  on parle d'intervalle fermé.
3.  $0 < x < 18 \iff x \in ]0; 18[$  on parle d'intervalle ouvert.
4.  $0 < x < 47,128 \iff x \in ]0; 47,128[$  on parle d'intervalle ouvert.
5.  $0 \leq x \leq 10777 \iff x \in [0; 10777]$  on parle d'intervalle fermé.
6.  $0 \leq x < 0,5 \iff x \in [0; 0,5[$  on parle d'intervalle ouvert à droite
7.  $x \geq 25 \iff x \in [25; +\infty[$  on parle d'intervalle fermé.

Alors ici il s'agissait de modéliser à partir du monde réel donc il y a des bornes implicites qui sont apparues :

1. Jusqu'à présent personne n'a dépassé le record de longévité de Jeanne Calmant qui a vécu 122 ans. Mais comme on ne peut pas prédire l'avenir alors j'ai décidé de mettre la borne  $+\infty$  même si c'est une borne théorique. Néanmoins, certains ont prédit **la mort de la mort** (c'est le titre d'un livre de Laurent Alexandre).
2. Ici les bornes étaient claires.
3. Là j'ai considéré que l'âge zéro n'est jamais atteint puisque dès l'instant où l'on naît le temps s'écoule. Mais au regard de l'exemple j'aurais même pu mettre une borne inférieure plus grande.
4. Dans cet exemple c'est la même idée, personne n'a un poids de zéro et encore moins quand on pratique la boxe anglaise.
5. Pour les revenus c'est malheureusement différent, il est hélas possible d'avoir zéro revenu. Et pour information, 10 777 par an ça fait moins de 900€ par mois (environ 898,08).

6. Les gens qui ne boivent pas d'alcool peuvent avoir un taux de zéro gramme dans le sang.
7. Comme pour l'âge, le poids maximal n'est pas figé, d'ailleurs on devrait parler de masse parce que le poids est une force qui dépend du champ gravitationnel (la pesanteur) et donc il peut changer en fonction de l'endroit dans l'espace.

Traduisons ces intervalles en représentations graphiques :

1.  $x \geq 14 \iff x \in [14; +\infty[$  on parle d'intervalle fermé. 14 est compris dans l'intervalle.

$$[14 - - - - - > +\infty$$

2.  $12 \leq x \leq 25 \iff x \in [12; 25]$  on parle d'intervalle fermé. 12 et 25 sont inclus dans l'intervalle.

$$[12 - - - - - 25]$$

3.  $0 < x < 18 \iff x \in ]0; 18[$  on parle d'intervalle ouvert. 0 et 18 sont exclus de l'intervalle.

$$0] - - - - - [18$$

4.  $0 < x < 47,128 \iff x \in ]0; 47,128[$  on parle d'intervalle ouvert. 0 et 47,128 sont exclus de l'intervalle.

$$0] - - - - - [47,128$$

5.  $0 \leq x \leq 10777 \iff x \in [0; 10777]$  on parle d'intervalle fermé. 0 et 10777 sont inclus dans l'intervalle.

$$[0 - - - - - 10777]$$

6.  $0 \leq x < 0,5 \iff x \in [0; 0,5[$  on parle d'intervalle ouvert à droite. 0 est inclu mais 0,5 est exclu de l'intervalle.

$$[0 - - - [0,5$$

7.  $x \geq 25 \iff x \in [25; +\infty[$  on parle d'intervalle fermé. 25 est inclu dans l'intervalle.

$$[25 - - - - - > +\infty$$

Ces exemples concrets avaient pour but de vous montrer pourquoi ce principe de représentation d'ensembles de nombres réels ordonnés peut avoir un intérêt et une utilité.

Les différents types d'intervalles de  $\mathbb{R}$  sont les suivants :

1. Les intervalles ouverts à bornes finies  $]a; b[$ .

$$a] - - - - - [b$$

2. Les intervalles ouverts à gauche à bornes finies  $]a; b]$  (on peut aussi les appeler fermés à droite).

$$a] - - - - - b]$$

3. Les intervalles ouverts à droite à bornes finies  $[a; b[$  (on peut aussi les appeler fermés à gauche).

$$[a - - - - - [b$$

4. Les intervalles ouverts à borne infinie à gauche  $] - \infty; b[$ .

$$-\infty] - - - - - [b$$

5. Les intervalles ouverts à borne infinie à droite  $]a; +\infty[$ .

$$a] - - - - - > +\infty$$

6. Les intervalles fermés à borne infinie à gauche  $] - \infty; b]$ .

$$-\infty] - - - - - b]$$

7. Les intervalles fermés à borne infinie à droite  $[a; +\infty[$ .

$$[a - - - - - > +\infty$$

8. Les intervalles fermés à bornes finies  $[a; b]$ .

$$[a - - - - - b]$$

9. L'intervalle ouvert **ET** fermé de l'ensemble des réels tout entier

$$\mathbb{R} = ] - \infty; +\infty[$$

$$-\infty - - - - - > +\infty$$



Il est important de rappeler qu'un intervalle est forcément ordonné donc la borne supérieure (à droite) est forcément plus grande que la borne inférieure (à gauche) sinon ça n'a strictement aucun sens.

Donnons quelques exemples :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\in ]0; 1[ \\ 1 &\in ]0; 1] \\ -\frac{1}{2} &\in [-0,5; 0[ \\ -1 &\in ]-\infty; 1[ \\ \frac{2}{3} &\in ]0; +\infty[ \\ \pi &\in [3; +\infty[ \\ \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} &\in [1; 2] \\ \tau = 2\pi &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On peut remarquer que l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres réels positifs :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$$

Par contre entre deux entiers naturels il y a une infinité de réels et pour les représenter on utilise un intervalle.

Prenons par exemple les deux plus petits entiers naturels zéro et un. On peut construire un intervalle  $I_0 = [0; 1]$  qui les contient tous les deux. Le centre de cet intervalle  $I_0$  est un nombre décimal  $\frac{1}{2} = 0,5$ . Construisons un nouvel interval  $I_1 = [0; 0,5]$ . Le centre de cet intervalle  $I_1$  est un nombre décimal  $\frac{1}{4} = 0,25$ . On pourrait continuer ainsi à l'infini en construisant des intervalles de la forme

$$I_n = \left[0; \frac{1}{2^n}\right]$$

Mais si au lieu de prendre le centre on prenait le premier tiers ? Et bien cette fois on aurait une borne supérieure qui serait un nombre rationnel.

$$J_n = \left[0; \frac{1}{3^n}\right]$$

Et si au lieu de prendre le tiers on divisait par le nombre  $\pi$  ? Et bien cette fois on aurait une borne supérieure qui serait un nombre réel.

$$K_n = \left[0; \frac{1}{\pi^n}\right]$$

Bon dans ce dernier cas j'ai un peu triché parce que  $\pi$  est déjà un réel alors que pour les  $I_n$  et les  $J_n$  on a pu faire la construction uniquement en utilisant des entiers naturels.

Prenons un peu la mesure de ce que nous faisons. L'intervalle  $[0; 1]$  a pour longueur 1 de même que l'intervalle  $[1; 2]$ . Mais qu'en est-il de l'intervalle  $[-1; 0]$  ?  $[-1; 1]$  ? Et de façon générale, comment mesure-t-on la longueur d'un intervalle ?

C'est très simple, un intervalle étant un ensemble ordonné, on mesure sa longueur en soustrayant la borne inférieure à la borne supérieure (que l'intervalle soit ouvert ou fermé).

Il y a donc deux cas de figure :

1. Les bornes  $a$  et  $b$  sont finies et dans ce cas c'est juste une soustraction normale  $|I| = |b - a|$ .
2. Au moins l'une des bornes est infinie et dans ce cas  $|I| = +\infty$ .

Voici quelques exemples :

$$\begin{aligned} |]-3; 3]| &= 3 - (-3) = 3 + 3 = 6 \\ |[-5; 4]| &= 5 - (-4) = 5 + 4 = 9 \\ |]-\infty; 23]| &= +\infty \\ |[7; +\infty[ &= +\infty \\ |]-\infty; +\infty]| &= +\infty \end{aligned}$$

La longueur d'un intervalle est aussi appelée son amplitude. Par exemple le nombre  $\pi$  appartient à l'intervalle  $[3, 14; 3, 15]$  qui a pour amplitude  $10^{-2} = 0,01$ . Dit autrement, le nombre  $\pi$  est compris entre 3,14 et 3,15 à  $10^{-2}$  près.

### 2.2.2 Exercice

Faisons un petit exercice. Pour les nombres suivants trouver des intervalles d'amplitude  $10^{-1}$  puis  $10^{-2}$  et enfin  $10^{-3}$  auxquels ils appartiennent :

1.  $\frac{1}{3}$
2.  $\sqrt{2}$
3.  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
4.  $\pi$
5.  $\tau = 2\pi$

Jouez le jeu en cherchant par vous même vous progresserez alors que si vous regardez la solution directement il vous progression sera nulle.

Voir solutions [8.2.1](#)

### 2.2.3 Exercice

1. À l'aide d'une machine calculez les 5 premières décimales du nombre d'or

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2. Considérez la suite de nombres :

|            |               |               |            |
|------------|---------------|---------------|------------|
| $F_1 = 1$  | $F_2 = 1$     | $F_3 = 2$     | $F_4 = 3$  |
| $F_5 = 5$  | $F_6 = 8$     | $F_7 = 13$    | $F_8 = 21$ |
| $F_9 = 34$ | $F_{10} = 55$ | $F_{11} = 89$ | ...        |

Calculez les 5 termes suivants.

3. Établir la règle de construction de la suite.
4. Calculer les quotients successifs en prenant comme numérateur le suivant et comme dénominateur le prédécesseur ainsi  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \dots$
5. La suite de nombre de la question 2 est connue sous le nom de **suite de Fibonacci** (mathématicien italien du XII<sup>ème</sup> siècle qui a appris l'usage des chiffres indo-arabes grâce à son père qui commerçait avec des marchands arabes près d'Alger). Combien de termes de cette suite faut-il calculer pour approcher le nombre d'or à  $10^{-5}$  près ? Vous donnerez les intervalles successifs.

Voir solutions [8.2.2](#)

### 2.2.4 Petit jeu

Faisons un petit jeu. Voici une série de nombres particuliers :

1.  $u = 0,1\dots$  avec une infinité de 1
2.  $v = 0,12\dots$  avec une infinité de 12
3.  $w = 0,123\dots$  avec une infinité de 123
4.  $x = 0,1234\dots$  avec une infinité de 1234
5.  $y = 0,12345\dots$  avec une infinité de 12345

Pour chacun de ces nombres on va donner un intervalle d'amplitude égale à la position de la dernière décimale distincte (donc 0,1 pour  $u$ , 0,01 pour  $v$ , 0,001 pour  $w$  et ainsi de suite) et centré en ce nombre. Puis on va déterminer la fraction qui le définit.

Voir solutions [8.2.3](#)

## 2.3 Contenu 3 : Distances

Les maths, ça prend le relais dans les situations où l'intelligence habituelle est en panne. Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.

Jean-Marie Souriau

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.3.1 | Introduction de la notion de distance . . . . . | 17 |
| 2.3.2 | Exercice . . . . .                              | 19 |
| 2.3.3 | Exercice . . . . .                              | 20 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Notation  $|a|$ . Distance entre deux nombres réels" dans le [programme officiel](#).

### 2.3.1 Introduction de la notion de distance

Quelle est la distance entre 0 et 1 ? Facile, c'est 1 ! Quelle est la distance entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{3}$  ? Là déjà c'est plus tout à fait la même histoire. Il va falloir réfléchir un peu à la façon de procéder. Prenons d'abord encore quelques exemples plus simples. Quelle est la distance entre  $-1$  et  $0$  ? Facile, c'est 1 ! Quelle est la distance entre  $-1$  et  $1$  ? Vous avez trouvé ? Oui c'est 2. Quelle la distance entre  $\frac{1}{2}$  et  $1$  ? Oui c'est  $0,5$ .

Bon, avant de donner la règle générale, ramenons les choses à un problème plus simple. Quelle est la distance d'un nombre par rapport à zéro ? Prenons le nombre 5 par exemple, sa distance à zéro est tout simplement 5. Est-ce le seul nombre à cette distance de zéro ? Ben non puisque le nombre  $-5$  est aussi à une distance 5 par rapport à zéro. En fait, chaque nombre positif est exactement à une distance à zéro égale à lui-même et son opposé est aussi à la même distance mais de l'autre côté. Faisons un schéma :

$$-(-5)-(-4)-(-3)-(-2)-(-1)-0-(+1)-(+2)-(+3)-(+4)-(+5)->$$

On notera  $|a|$  la distance du nombre  $a$  par rapport à zéro. On l'appelle aussi la valeur absolue de  $a$ .

Donnons quelques exemples :

$$\begin{aligned}
|-1| &= 1 = |1| \\
|-2| &= 2 = |2| \\
|-3| &= 3 = |3| \\
|-\sqrt{2}| &= \sqrt{2} = |\sqrt{2}| \\
|-\pi| &= \pi = |\pi|
\end{aligned}$$

Une façon simple de décrire la chose est de dire que la valeur absolue d'un nombre c'est le nombre sans le signe.

On peut désormais définir proprement la valeur absolue d'un nombre réel  $a$  :

$$|a| = s(a)a$$

avec  $s(a) = 1$  si  $a \in [0; +\infty[$  et  $s(a) = -1$  si  $a \in ]-\infty; 0]$ . Autrement dit la fonction  $s$  attribue le signe d'un nombre. Si un nombre est positif il est égal à sa valeur absolue sinon il est égal à son opposé.

Par exemple  $|9| = 9$  et  $|-7| = -(-7) = 7$ .

Mais revenons à notre problème initial. Et concrétisons-le un peu d'abord. Si vous parcourez 5 km vers l'Est puis que vous parcourez 3 km vers l'Ouest alors vous vous retrouverez 2 km à l'Est de votre position initiale. Mais vous aurez parcouru 8 km ( $5 + 3$ ). Si on considère votre position initiale comme le zéro et le sens vers l'Est comme le sens positif et le sens vers l'Ouest comme le sens négatif alors le calcul de la position finale devient  $5 - 3 = 2$ . Pour fixer les idées on va nommer les différents points. Posons  $O$  l'origine de cet axe horizontal (Est-Ouest). Soit  $A$  le point d'abscisse  $x_A = 5$  et  $B$  le point d'abscisse  $x_B = -3$ . La distance entre  $A$  et  $B$  s'obtient en faisant le calcul  $x_A - x_B = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8$ . Mais pourquoi devrions-nous commencer par  $A$ ? Une distance n'a pas d'orientation. Que vous fassiez 100 km à l'Est ou 100 km à l'Ouest dans les deux cas la distance parcourue sera de 100 km. Donc on devrait retrouver le même résultat que le considère le point  $A$  ou le point  $B$  comme point de départ. Pourtant  $x_B - x_A = -3 - 5 = -8$ ... aïe! On dirait que ça coince... Ben pas tant que ça si on se souvient que la valeur absolue c'est le nombre sans le signe. OK mais pourquoi utiliser la valeur absolue? Qu'est-ce qui justifie son usage ici? Pour aller du point  $B$  au point  $A$  il y a trois possibilités :

1. Soit le point  $O$  est avant le point  $B$  qui lui-même est avant le point  $A$  et dans ce cas il faut d'abord parcourir la distance de  $O$  à  $A$  puis retrancher celle de  $B$  à  $O$ . Donc si on schématise on obtient un axe horizontal orienté comme ceci

$$- - - O - - - B - - - - - A - - - - >$$

Ici on a  $AB = OA - OB = |x_A| - |x_B| = x_A - x_B = d_{AB}$

2. Soit le point  $B$  est avant  $O$  et dans ce cas vous devez d'abord parcourir la distance de  $B$  à  $O$  puis celle de  $A$  à  $O$ . Donc si on schématise on obtient un axe horizontal orienté dans ce sens

$$- - - - - B - - - O - - - - - A - - - - - >$$

Ici on a  $AB = BO + OA = |x_B| + |x_A| = -x_B + x_A = x_A - x_B = d_{AB}$

3. Soit le point  $O$  est après le point  $A$  qui lui-même est après le point  $B$ . Donc si on schématise on obtient un axe horizontal orienté de cette façon

$$- - B - - - - A - - - O - - - - >$$

Ici on a  $AB = BO - OA = |x_B| - |x_A| = -x_B - (-x_A) = x_A - x_B = d_{AB}$

Dans les 3 cas on aboutit au même calcul final la différence entre le grand moins le petit.

À l'issue de cette concrétisation on pourrait se dire que pour calculer la distance entre deux nombres réels il suffit de calculer la valeur absolue de leur différence. Spoiler alert, c'est exactement ça ! La distance entre les nombres réels  $a$  et  $b$  vaut :

$$d(a; b) = |a - b| = |b - a| = \max(a; b) - \min(a; b)$$

Donnons quelques exemples :

$$(a; b) = (1; 2) \Rightarrow d(1; 2) = |1 - 2| = |-1| = 1$$

$$(a; b) = (2; 1) \Rightarrow d(2; 1) = |2 - 1| = |1| = 1$$

$$(a; b) = (1, 5; 2, 7) \Rightarrow d(1, 5; 2, 7) = |1, 5 - 2, 7| = |-1, 2| = 1, 2$$

$$(a; b) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

$$(a; b) = (\sqrt{2}; \pi) \Rightarrow d(\sqrt{2}; \pi) = |\sqrt{2} - \pi| = \pi - \sqrt{2}$$

Afin de revenir sur ce qu'on a déjà vu on peut aussi voir la distance entre deux réels  $a$  et  $b$  comme l'amplitude de l'intervalle entre le maximum et le minimum des deux. Ainsi :

$$d(a; b) = |[ \min(a; b); \max(a; b) ]| = \max(a; b) - \min(a; b)$$

### 2.3.2 Exercice

Pour vous entraîner voici un exercice.

1. Calculer la distance entre  $\pi$  et  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Vous donnerez une approximation à 3 chiffres après la virgule.
2. Calculer la distance  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{3}$ . Vous donnerez une approximation à 3 chiffres près.
3. Calculer la distance  $\frac{1}{7}$  et  $\frac{1}{8}$ . Vous donnerez une approximation à 6 chiffres.
4. Calculer la distance entre  $\Phi$  et  $\sqrt{2}$ . Vous donnerez une approximation à 2 chiffres.
5. Calculer la distance entre  $\Phi$  et  $\sqrt{3}$ . Vous donnerez une approximation à 5 chiffres.

Voir solutions [8.3.1](#)

### 2.3.3 Exercice

Faisons un exercice intéressant. Renversons le point de vue. Au lieu de calculer la distance entre deux points, cherchons les points situés à une distance choisie par rapport à un point fixe.

1. Calculer les nombres à une distance 1 de 1.
2. Calculer les nombres à une distance 0,5 de  $-1$ .
3. Calculer les nombres à une distance  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{1}{4}$ .
4. Calculer les nombres à une distance  $\sqrt{2}$  de 1.
5. Calculer les nombres à une distance  $\sqrt{3}$  de  $\sqrt{2}$ .
6. Calculer les nombres à une distance  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  de 1.
7. Calculer les nombres à une distance  $\tau = 2\pi$  de  $\pi$ .

Voir solutions [8.3.2](#)

## 2.4 Contenu 4 : Disques sur la droite réelle

Une bonne partie des mathématiques devenues utiles se sont développées sans aucun désir d'être utiles, dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quels domaines elles deviendraient utiles. Il n'y avait aucune indication générale qu'elles deviendraient utiles. C'est vrai de toute la science.

Neumann János Lajos (connu sous son nom américanisé John Von Neumann)

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.4.1 | Introduction du concept d'intervalle centré . . . . . | 20 |
| 2.4.2 | Exercice . . . . .                                    | 22 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.4.3 | Une autre perspective . . . . .                  | 22 |
| 2.4.4 | Faisons un peu de programmation Python . . . . . | 22 |
| 2.4.5 | Exercice . . . . .                               | 23 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Représentation de l'intervalle  $[a - r; a + r]$  puis caractérisation par la condition  $|x - a| \leq r$ " dans le [programme officiel](#).

### 2.4.1 Introduction du concept d'intervalle centré

Si vous avez essayé de comprendre ce qui s'est passé dans le dernier exercice de la partie précédente alors vous vous êtes probablement aperçu d'une chose, sur un axe horizontal graduée déterminer les nombres à une distance fixe d'un nombre donné revient à construire les bornes d'un intervalle du type

$$[a - r; a + r]$$

avec  $a$  le nombre donné et  $r$  la distance fixe.

Donnons quelques exemples pour bien comprendre :

1. Prenons  $(a, r) = (1, 1)$  alors on obtient l'intervalle  $[0; 2]$  en effet  $1 - 1 = 0$  et  $1 + 1 = 2$  d'où

$$-- [0 - -1 - -2] -- >$$

Par conséquent, tous les nombres qui sont dans cet intervalle à une distance inférieure ou égale à 1 de 1. En effet, si  $x \in [0; 2]$  alors  $0 \leq x \leq 2$  donc si on retranche 1 à chaque membre on obtient  $-1 \leq x - 1 \leq 1$ . On en déduit que soit  $x - 1 \geq 0$  et dans ce cas  $|x - 1| = x - 1 \leq 1$  soit  $x - 1 \leq 0$  et dans ce cas  $|x - 1| = 1 - x$  et comme  $-1 \leq x - 1$  alors  $1 - x \leq 1$  donc on a bien

$$|x - 1| \leq 1$$

2. Prenons  $(a, r) = (-1, \frac{1}{2})$  alors on obtient l'intervalle  $I = [-1 - 0,5; -1 + 0,5] = [-1,5; -0,5]$ . D'où la représentation graphique :

$$-- -[(-1,5) - -(-1) - -(-0,5)] - - - >$$

Pour tout nombre  $x \in I$  on a alors  $-1 - 0,5 \leq x \leq -1 + 0,5$  donc  $-0,5 \leq x - (-1) \leq 0,5$  et finalement

$$|x - (-1)| \leq 0,5$$



3. Prenons  $(a, r) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$  alors on obtient l'intervalle  $J = [\frac{1}{4} - \frac{1}{3}; \frac{1}{4} + \frac{1}{3}] = [-\frac{1}{12}; \frac{7}{12}]$ . D'où la représentation graphique :

$$- - \left[ \left( -\frac{1}{12} \right) - -\frac{1}{4} - -\frac{7}{12} \right] - - >$$

Pour tout nombre  $x \in J$  on a alors  $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$  donc  $\frac{1}{3} \leq x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$  et finalement

$$\left| x - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{3}$$

Une autre manière de voir les choses consiste à considérer que si

$$I = [a - r; a + r]$$

alors  $|I| = a + r - (a - r) = a + r - a + r = 2r$  par conséquent tout nombre de l'intervalle est nécessairement dans l'une des deux moitiés d'où la majoration par  $r$ .

Pour que ça rentre je vous propose un petit exercice.

#### 2.4.2 Exercice

Poursuivre ce que j'ai commencé. À savoir, pour chaque couple  $(a, r)$  calculer l'intervalle  $D_a = [a - r; a + r]$ , faites sa représentation graphique et démontrez que  $x \in D_a \iff |x - a| \leq r$ .

1.  $(a, r) = (1, \sqrt{2})$
2.  $(a, r) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$
3.  $(a, r) = (1, \Phi)$  pour rappel  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
4.  $(a, r) = (\pi, \tau)$  pour rappel  $\tau = 2\pi$

Voir solutions [8.4.1](#)

#### 2.4.3 Une autre perspective

Une autre façon de voir les choses c'est de considérer que les intervalles du type  $D_a = [a - r; a + r]$  sont des encadrements de  $a$  à  $r$  près. Par exemple si vous construisez un intervalle centré en  $a = \sqrt{2}$  avec  $r = 0,1$  vous obtenez un encadrement à plus ou moins  $0,1$  près. Bon, pour être rigoureux ça va être difficile de centrer un intervalle sur un nombre dont on ne connaît pas la valeur exacte. Vous savez que  $1,4 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$  néanmoins  $\sqrt{2} \neq 1,45$  mais vous sentez bien venir que plus  $r$  sera petit plus cela réduira l'erreur d'approximation.

Sinon pour revenir avec rigueur l'intervalle exact  $D_a = [a - r; a + r]$  vous pouvez visualisez ça comme un *voisinage* du nombre  $a$ .

#### 2.4.4 Faisons un peu de programmation Python

Écrivons une fonction Python qui prend trois paramètres :

1.  $a$  le centre de l'intervalle
2.  $r$  le rayon de l'intervalle (ou la demi-amplitude)
3.  $h$  le pas de la subdivision

Cette fonction renverra une liste de réels (bon numériquement ça sera des *float* donc des décimaux) contenu dans l'intervalle espacés régulièrement par pas de  $h$ .

Par exemple si on fournit les arguments :

1.  $a = 3$
2.  $r = 2$
3.  $h = 0.4$

La sortie sera [1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3, 3.4, 3.8, 4.2, 4.6, 5.0]

```
def disque(a, r, h):
    """
    + a: le centre de l'intervalle
    + r: le rayon de l'intervalle (ou la demi-amplitude)
    + h: le pas de la subdivision
    Cette fonction renverra une liste de réels (bon numériquement ça
    sera des float donc des décimaux) contenu dans l'intervalle
    espacés régulièrement par pas de $h$.
    """
    borne_inf, borne_sup = a - r, a + r
    x = borne_inf
    disk = [x]
    nb_digits = round(1/h)
    while x <= borne_sup - h:
        x += h
        disk.append(round(x, nb_digits))
    return disk

# Tests
a, r, h = 3, 2, 0.4
print(disque(a, r, h))
# Sortie
# [1, 1.4, 1.8, 2.2, 2.6, 3.0, 3.4, 3.8, 4.2, 4.6, 5.0]
a, r, h = 3, 2, 0.5
print(disque(a, r, h))
# Sortie
# [1, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0]
a, r, h = 0, 1, 0.25
```

```
print(disque(a, r, h))
# Sortie
# [-1, -0.75, -0.5, -0.25, 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0]
```

### 2.4.5 Exercice

1. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un nombre réel  $a$  (donc un *float*) et un nombre positif  $r$ . La fonction devra renvoyer un message d'erreur si on lui donne  $r$  négatif. Le but de cette fonction est de renvoyer les bornes supérieures et inférieures de l'intervalle centré en  $a$ .

Vous testerez votre fonction avec  $(a, r) = (2, \sqrt{2})$  pour faire la racine carrée il est plus pratique d'utiliser la puissance 0.5.

2. Proposer une amélioration pour contrôler le nombre de décimales à l'affichage. Votre nouvelle fonction doit permettre d'afficher 1, 2, 3 ou autant de décimales qu'on veut mais exactement le nombre souhaité à chaque fois.
3. Écrire une fonction distance qui prend deux nombres réels en entrée et renvoie la distance entre les deux.

Voir solutions [8.4.2](#)

## 2.5 Contenu 5 : Nombres décimaux

Les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir.

Carl Friedrich Gauss

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.5.1 | Introduction sur les nombres décimaux . . . . . | 24 |
| 2.5.2 | Exercice . . . . .                              | 25 |
| 2.5.3 | Souvenirs souvenirs . . . . .                   | 25 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Ensemble  $\mathbb{D}$  des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à  $10^{-n}$  près" dans le [programme officiel](#).

### 2.5.1 Introduction sur les nombres décimaux

Pour rappel on a déjà vu dans la première section qu'on note

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid (a, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

l'ensemble des nombres décimaux avec le symbole  $|$  qui se lit *tel(s) que* et le symbole  $\in$  qui se lit *appartient à*.

Et que  $(a, n) \in \mathbb{Z}^2$  signifie que  $a$  et  $n$  sont tous les deux des entiers relatifs. Ainsi, les décimaux sont les nombres fractionnaires dont le numérateur est un entier relatif et le dénominateur une puissance de 10.

On a déjà vu également que Python (et tous les langages de programmation) utilisent abondamment les nombres décimaux avec le type *float*. Précisément parce que les décimaux ont la particularité d'avoir un nombre fini de chiffres après la virgule. Et les ordinateurs, aussi puissants qu'ils soient, sont tous soumis aux contraintes physiques de leur capacité de stockage qui est nécessairement finie.

De toute façon, nous vivons dans un monde physique limité donc nous sommes bien obligés de manipuler des nombres finis de décimales. Même si en théorie on peut traiter des nombres réels à chaque fois qu'on les utilise concrètement on manipule en fait des décimaux bien finis. On fait des approximations à  $10^{-n}$  près.

Encadrer un nombre réel  $a$  à  $10^{-n}$  près revient à construire un intervalle d'amplitude  $10^{-n}$  contenant  $a$ .

Donnons quelques exemples :

$$(a, n) = (\sqrt{2}, 1) \Rightarrow [1, 4; 1, 5]$$

$$(a, n) = (\sqrt{2}, 2) \Rightarrow [1, 41; 1, 42]$$

$$(a, n) = (\sqrt{2}, 3) \Rightarrow [1, 414; 1, 415]$$

$$(a, n) = (\sqrt{2}, 4) \Rightarrow [1, 4142; 1, 4143]$$

$$(a, n) = (\sqrt{2}, 5) \Rightarrow [1, 41421; 1, 41422]$$

### 2.5.2 Exercice

Pour les nombres suivants construire 5 encadrements décimaux à  $10^{-n}$  pour  $n$  variant de 1 à 5 (comme montré ci-dessus avec  $\sqrt{2}$ ) :

1.  $\tau = 2\pi$
2.  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
3.  $\sqrt{3}$
4.  $\sqrt{5}$
5.  $\sqrt{7}$

Vous pouvez le faire sur papier ou en programmant avec Python.

Voir solutions [8.5.1](#)

### 2.5.3 Souvenirs souvenirs

Souvenez-vous lorsque vous avez appris comment se structure le système positionnel décimal. Prenons des nombres d'années particuliers : 1212, 1515, 1999, 2002, 2020, 2022.

1. Dans le nombre 1212 il y a deux fois le chiffre 1 et deux fois le chiffre 2. Mais ils n'ont pas la même *valeur* à chaque fois. La *magie* du système positionnel décimal c'est que la *position* d'un chiffre dans un nombre indique sa *puissance* ou plutôt la puissance de 10 par laquelle on va le multiplier. Concrètement  $1212 = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0$ . Si on change l'ordre des chiffres on change complètement de nombre.
2. Pour 1515 c'est le même constat.  $1515 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ .
3. Avec 1999 il y a carrément trois fois le même chiffre !  $1999 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 9 \times 10^0$ . Et si vous ajoutez 1 vous aurez un effet domino qui conduira à 2000.
4. Le nombre 2002 fait partie de la catégorie des palindromes c'est-à-dire les nombres qui peuvent être lus de gauche à droite ou inversement sans changer leur valeur. D'ailleurs profitons-en pour rappeler que lorsqu'on écrit la décomposition en puissances de 10 on peut le faire dans l'ordre des puissances croissantes si on en a envie.  $2002 = 2 \times 10^0 + 0 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$ .
5. Pour 2020 c'est comme pour 1515 ou 1212.  $2020 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0$ .
6. Enfin pour 2022 on retrouve un triplet mais espacé par un zéro qui permet justement de le différencier de 222 qui est de l'ordre de 10 fois moins.  $2022 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$ .

Mais qu'en est-il des nombres à virgules ? Et bien c'est la même chose mais avec des puissances d'exposants négatifs. Reprenons les nombres précédents et divisons les par 100 de sorte à obtenir une virgule au milieu.

$$12,12 = 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

$$15,15 = 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

$$19,99 = 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2}$$

$$20,02 = 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 0 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

$$20,20 = 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2}$$

$$20,22 = 2 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

D'une certaine manière on pourrait interpréter les nombres comme des suites de chiffres (donc les nombres de 0 à 9 inclus). Pour la partie entière il s'agit de

sommer le produit de chaque chiffre avec sa puissance de 10 positive associée. Et pour la partie décimale il s'agit de sommer le produit de chaque chiffre avec sa puissance de 10 négative associée.

Prenons par exemple le nombre  $x = 12345,6789$  on pourrait le réécrire :

$$x = \sum_{k=0}^4 e_k \times 10^k + \sum_{k=1}^4 d_k \times 10^{-k}$$

Où les  $e_k$  désignent les chiffres qui composent la partie entière donc  $e_0 = 5$ ,  $e_1 = 4$ ,  $e_2 = 3$ ,  $e_3 = 2$ ,  $e_4 = 1$ . Et les  $d_k$  désignent les chiffres composant la partie décimale (on dit aussi fractionnaire) donc  $d_1 = 6$ ,  $d_2 = 7$ ,  $d_3 = 8$ ,  $d_4 = 9$ .

$$\begin{array}{ccccc} e_0 = 5 & e_1 = 4 & e_2 = 3 & e_3 = 2 & e_4 = 1 \\ & d_1 = 6 & d_2 = 7 & d_3 = 8 & d_4 = 9 \end{array}$$

On sépare d'une part la partie entière de  $x$  :

$$\lfloor x \rfloor = 5 \times 10^0 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^3 + 1 \times 10^4$$

et d'autre part la partie décimale (ou fractionnaire, les deux se disent) :

$$\{x\} = 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 9 \times 10^{-4}$$

Avec naturellement :

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$$

Vous remarquerez la symétrie, pour la partie entière on lit de droite à gauche dans l'ordre croissant des puissances alors que pour la partie fractionnaire on lit bien de gauche à droite dans l'ordre décroissant des puissances.

Notez qu'on pourrait unifier tout ça en lisant tout de gauche à droite selon les puissances décroissantes.

$$x = \sum_{k=4}^{-4} c_k \times 10^k$$

Cette fois-ci  $c_k$  désigne le chiffre associé à  $10^k$  peu importe que  $k$  soit positif ou négatif.

$$\begin{array}{ccccc} c_4 = 1 & c_3 = 2 & c_2 = 3 & c_1 = 4 & c_0 = 5 \\ c_{-1} = 6 & c_{-2} = 7 & c_{-3} = 8 & c_{-4} = 9 & \end{array}$$

Ici on peut écrire  $x$  en un seul développement décimal selon les puissances décroissantes de 10 :

$$x = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \\ + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} + 9 \times 10^{-4} \quad (1)$$

Cette façon de faire est peu habituelle voire inexistante au lycée. C'est à vous de voir si ça vous aide ou pas. D'un côté ça unifie les notations mais d'un autre ça demande un effort d'abstraction supplémentaire.

Dans tous les cas, comme toujours en mathématiques, ce qui compte c'est qu'il faut toujours chercher à comprendre les différents angles de vue possibles et leurs liaisons.

Ici, dans la rubrique sur l'encadrement à  $10^{-n}$  près, ce qui nous intéresse c'est la partie décimale. Plus précisément, le fait que les nombres réels peuvent s'interpréter comme les nombres dont la partie décimale est infinie. Dans  $\pi$  se cache l'infini tout comme dans  $\Phi$ ,  $\sqrt{2}$  et une infinité de nombres...

Mais souvenez-vous, dès la première section nous avons remarqué que  $\frac{1}{3}$  renfermait déjà sa part d'infini. Alors quelle est la différence entre d'un côté  $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \dots$  et de l'autre  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \dots$

Les premiers sont rationnels alors que les seconds sont irrationnels.

## 2.6 Contenu 6 : Nombres rationnels

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

Henri Poincaré

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.6.1 | Introduction aux nombres rationnels . . . . . | 28 |
| 2.6.2 | Exercice . . . . .                            | 28 |
| 2.6.3 | Petite astuce . . . . .                       | 29 |
| 2.6.4 | Les nombres irrationnels . . . . .            | 29 |
| 2.6.5 | Exercice . . . . .                            | 31 |
| 2.6.6 | Généralisation . . . . .                      | 31 |
| 2.6.7 | Exercice . . . . .                            | 31 |
| 2.6.8 | Probablement irrationnel . . . . .            | 31 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Nombres irrationnels; exemples fournis par la géométrie, par exemple  $\sqrt{2}$  et  $\pi$ " dans le [programme officiel](#).

### 2.6.1 Introduction aux nombres rationnels

Dans la première partie on a déjà vu que les nombres rationnels sont notés

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

Ici le numérateur  $a$  est un entier relatif et le dénominateur  $b$  est un entier naturel strictement positif parce qu'on ne peut pas diviser par zéro.

Nous avons également remarqué que les nombres dont les décimales infinies qui suivaient une structure répétitive (on parle de période) pouvaient être *capturés* sous la forme d'une fraction.

Rien que pour le plaisir du jeu, en voici quelques autres en exercice.

### 2.6.2 Exercice

Trouver l'écriture fractionnaire des nombres suivants :

1.  $x = 0,07 \dots 7 \dots$  avec des 7 à l'infini.
2.  $y = 0,076923 \dots$  avec la période 076923 qui se répète à l'infini.
3.  $z = 0,0588235294117647$  avec la période 0588235294117647 qui se répète à l'infini.

Voir solutions [8.6.1](#)

### 2.6.3 Petite astuce

Si vous voulez augmenter votre maîtrise des nombres rationnels alors amusez-vous avec eux. Prenez la suite de chiffres qui vous plaît que ça soit votre date de naissance ou l'année de la première victoire en coupe du monde ou ce que vous voulez et cherchez la fraction associée. Par exemple, prenons la première de victoire la France en coupe du monde. Posons  $x = 0,1998 \dots$  où l'on considère que 1998 correspond à la période qui va se répéter à l'infini. Alors il ne reste plus qu'à décaler de 4 crans ce qui veut dire multiplier par  $10^4$ . Ainsi  $x \times 10^4 = 1998,1998 \dots$ . Maintenant pour se débarrasser de la période il suffit de soustraire  $x$ . Ainsi puisque  $10^4 - 1 = 9999$  on obtient  $9999x = 1998$  et maintenant on a plus qu'à poser la fraction  $x = \frac{1998}{9999}$  enfin on regarde si on peut simplifier. Déjà on peut simplifier par 9 parce que la somme des chiffres est un multiple de 9. Il vient  $x = \frac{9 \times 222}{9 \times 1111}$ . Maintenant 222 et 1111 ont l'air de bien s'entendre mais il faut se méfier des apparences. En effet,  $222 = 2 \times 3 \times 37$  et  $1111 = 11 \times 101$  sont premiers entre eux ça veut



dire qu'ils n'ont pas de diviseurs communs (ou encore  $\text{pgcd}(222, 1111) = 1$ . Par conséquent on ne peut pas faire mieux que

$$x = \frac{222}{1111} = 0,1998\dots$$

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

Sur Google Colab vous trouverez une fonction Python `get_fraction` qui prend en entrée la troncature du nombre avant la période et la période et qui renvoie en sortie le numérateur et le dénominateur de la fraction irréductible associée. Par exemple si vous appelez la fonction avec les arguments `before_period = 0.123` et `period = 4` vous obtiendrez `num = 1111` et `denom = 9000`. Vous pouvez vérifier que  $\frac{1111}{9000} \simeq 0,1234\dots4$ .

#### 2.6.4 Les nombres irrationnels

Prenez un carré ABCD de côté 1. Alors le triangle ABC est isorectangle en B (isocèle ET rectangle). Par Pythagore :

$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 \\ CA^2 &= 1^2 + 1^2 \\ CA^2 &= 2 \\ CA &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc vous voyez bien que le nombre  $\sqrt{2}$  est bien réel puisqu'il apparaît naturellement dès lors qu'on trace une figure géométrique ultra basique. Qui dit géométrie dit physique. Toute construction physique s'appuie nécessairement sur la géométrie. Donc le nombre  $\sqrt{2}$  a bien une existence physique. Et pourtant, nous avons vu dans la première section qu'il n'est pas rationnel.

Voyons ensemble deux nouvelles preuves de ce résultat (vues sur [Wikipédia](#)).

##### 1. Preuve par parité

Nous allons procéder avec raisonnement par l'absurde. Considérons  $a$  le plus petit entier strictement positif tel que  $a^2$  soit le double d'un carré, et soit  $b$  l'entier positif tel que  $a^2 = 2b^2$ . Tout d'abord on en déduit que  $a > b$  puisque  $a^2 > b^2$  entraîne  $a^2 - b^2 > 0$  qui entraîne  $(a-b)(a+b) > 0$  or  $a$  et  $b$  sont strictement positif donc nécessairement  $a - b > 0$  et donc  $a > b$ . D'après le lemme que nous avons utilisé

et démontré dans la première section, si  $a^2 = 2b^2$  alors  $a$  est pair (nous allons redémontrer ce résultat dans la section démonstration). Ainsi  $a = 2n$  et donc  $a^2 = 2b^2$  équivaut à  $4n^2 = 2b^2$  par conséquent  $b^2 = 2n^2$ . Problème, cela signifie que  $b$  est un entier dont le carré soit le double d'un carré ce qui contredit la minimalité de  $a$ . CQFD

## 2. Preuve géométrique

Démontrer l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  revient à démontrer que, pour une unité donnée, il n'existe pas de triangle isocèle rectangle dont les côtés sont chacun de longueur un nombre entier d'unité.

Si un tel triangle existe, alors il en existe nécessairement un plus petit dont les côtés sont aussi de longueur entière (sa construction est donnée sur le dessin et détaillée ci-dessous). Or si un tel triangle existe, il en existe nécessairement un minimal ayant cette propriété (celui dont le côté de l'angle droit, par exemple, est minimal) d'où une contradiction.

Soit ABC un triangle isorectangle en B et de côtés entiers. Alors, le cercle de centre A et de rayon AB coupe l'hypoténuse [AC] en B' tel que B'C soit encore de longueur entière, puisque AC et AB' le sont. La perpendiculaire à l'hypoténuse [AC] passant par B' coupe [BC] en A'. Le triangle A'B'C est isocèle rectangle en B', puisque l'angle en B est droit et l'angle en C est celui du triangle d'origine. Les droites (A'B) et (A'B') sont les tangentes issues de A' au cercle de centre A et de rayon AB = AB', et donc A'B = A'B', donc A'B = A'B' = B'C, et A'C est de longueur entière. On peut aussi interpréter la construction comme le pliage du triangle ABC selon la bissectrice de l'angle A.

Figure de la preuve géométrique

### 2.6.5 Exercice

Considérons un cube d'arête 1.

1. Montrer que la diagonale principale (reliant deux sommets opposés en traversant le cube) vaut exactement  $\sqrt{3}$ .
2. Montrer que  $\sqrt{3}$  est irrationnel.

Voir solutions [8.6.2](#)

### 2.6.6 Généralisation

Montrons par l'absurde que si  $p$  est un nombre premier alors  $\sqrt{p}$  est irrationnel.  $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Il vient  $a^2 = pb^2$  or  $a^2$  et  $b^2$  n'ont pas de diviseur commun donc  $p$  divise  $a^2$  et donc  $a$ . Ainsi  $a = pk$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent  $a^2 = p^2k^2$  et d'autre part  $a^2 = pb^2$  d'où  $b^2 = pk^2$ . Puisque  $a^2$  et

$b^2$  n'ont pas de diviseur commun  $k^2$  ne divise pas  $b^2$ . Donc c'est forcément  $p$  d'où la contradiction.

En fait, que l'on choisisse  $k^2$  ou  $p$  comme diviseur de  $b^2$  dans les deux cas on aboutit à une contradiction.

De plus, il y a un passage subtil ici, c'est parce que  $p$  est premier (comme 2 et 3) que  $p$  divise  $a^2$  entraîne  $p$  divise  $a$ . Prenez le nombre 4, il divise  $2^2$  mais ne divise pas 2. Ou encore 9 divise  $6^2$  mais ne divise pas 6. Donc la primalité de  $p$  est importante sinon la démonstration est invalide.

### 2.6.7 Exercice

1. Trouver 5 contre-exemples de  $k$  divise  $a^2$  mais  $k$  ne divise pas  $a$ .
2. Montrer que  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est irrationnel.

Voir solutions [8.6.3](#)

### 2.6.8 Probablement irrationnel

Aussi surprenant que cela puisse paraître il y a infiniment plus de nombres irrationnels que de rationnels. Si vous lanciez un couteau au hasard sur une planche en bois graduée... vous tomberiez probablement sur un nombre irrationnel. Malheureusement les mathématiques nécessaires pour montrer ce résultat dépasse largement le cadre de cet ouvrage et du lycée en général. Il faudrait invoquer des arguments d'analyse topologique à propos de la notion de densité. Tout ça pour vous dire que l'aventure avec les nombres réels (et les nombres en général) continue bien au-delà des limites de ce livres. Et c'est avec regret que je suis contraint de vous laissez sans preuve pour l'irrationalité de  $\pi$ . Voyez-vous, les arguments requis font appels aux concepts de dérivée (que vous verrez en première), d'intégrale (que vous verrez en terminale) et d'autres plus sophistiqués qui interviendront dans les mathématiques du supérieur.

Espérons tout de même que la lecture de ce livre vous aura fait découvrir la richesse des nombres réels. Si vous avez la moindre suggestion d'amélioration merci de m'écrire à l'adresse indiquée dans le formulaire avec pour **objet Amazon Manipuler les réels**.

## 3 Capacités attendues

To me, mathematics, computer science, and the arts are insanely related. They're all creative expressions.

Sebastian Thrun

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | Rappels concernant les capacités attendues . . . . . | 32 |
| 3.2 | Capacité attendue numéro 1 . . . . .                 | 33 |
| 3.3 | Capacité attendue numéro 2 . . . . .                 | 34 |
| 3.4 | Capacité attendue numéro 3 . . . . .                 | 36 |
| 3.5 | Capacité attendue numéro 4 . . . . .                 | 38 |

### 3.1 Rappels concernant les capacités attendues

Il n’y a guère de discipline plus mal connue et plus mal décrite que la mathématique. Combien pourraient répondre à la question : les mathématiques ça parle de quoi ? ça porte sur quoi ? ça propose quel but ?

Michel Demazure

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l’adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C’est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

- Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement.
- Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné.
- Donner un encadrement, d’amplitude donnée, d’un nombre réel par des décimaux.
- Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée.

Tout ça se trouve sur Google Colab de façon interactive.

### 3.2 Capacité attendue numéro 1

Un mathématicien est une personne capable de trouver des analogies entre les théorèmes ; un meilleur mathématicien peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux capables de déceler des analogies entre des théories. Mais on peut supposer que le mathématicien ultime est celui

qui peut voir des analogies entre les analogies.

Stephan Banach

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 3.2.1 | Code pour construire les points . . . . . | 33 |
| 3.2.2 | Exercice . . . . .                        | 34 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : " $C_1$  : Associer à chaque point de la droite graduée un unique nombre réel et réciproquement." dans le [programme officiel](#).

### 3.2.1 Code pour construire les points

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour construire les points :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

c_1 = "Associer à chaque point de la droite graduée "
c_1 += "un unique nombre réel et réciproquement."
print(c_1)
numbers = [-2, -0.5, 0, 1, np.sqrt(2), np.pi]
labels = ['P_0', 'P_1', 'P_2', 'P_3', 'P_4', 'P_5']

plt.figure(figsize=(10, 1))

# Ploter une ligne horizontale
plt.plot([min(numbers), max(numbers)], [0, 0], 'k')

# Placer les nombres sur la ligne graduée
plt.scatter(numbers, np.zeros_like(numbers), color='red')

# Ajouter des étiquettes aux nombres
for i, label in enumerate(labels):
    plt.text(numbers[i], 0.02, label, ha='center')
```

```
# Masquer les axes
plt.axis('off')
```

```
plt.show()
```

### 3.2.2 Exercice

Voici le code pour lancer l'exercice :

```
from math import pi

nombres = {2**0.5, -2, -0.5, 1, pi, 0}
points = {'P_0': 0, 'P_1': 0, 'P_2': 0, 'P_3': 0, 'P_4': 0, 'P_5': 0}
print("Voici la liste des points dont tu vas déterminer les abscisses")
print(points)

for nb in nombres:
    p = input(f"{round(nb, 4)} correspond à l'abscisse de quel point ? ")
    points[p] = round(nb, 4)
```

Voir solution [9.1.1](#)

## 3.3 Capacité attendue numéro 2

Le but de la rigueur mathématique est de sanctionner et de légitimer les conquêtes de l'intuition, et il n'y a jamais eu d'autre raison de la développer.

Jacques Hadamard

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 3.3.1 | Placement des abscisses sur la droite réelle . . . . . | 34 |
| 3.3.2 | Exercice . . . . .                                     | 35 |

Cette partie développe rubrique intitulée : " $C_2$  : Représenter un intervalle de la droite numérique. Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné." dans le [programme officiel](#).

### 3.3.1 Placement des abscisses sur la droite réelle

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière

interactive.

Voici le code :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

c_2 = "Représenter un intervalle de la droite numérique.\n"
c_2 += "Déterminer si un nombre réel appartient à un intervalle donné."
print(c_2)
numbers = [1 + i/10 for i in range(11)]
labels = [str(num) for num in numbers]

plt.figure(figsize=(10, 1))

# Ploter une ligne horizontale
plt.plot([min(numbers), max(numbers)], [0, 0], 'k')

# Placer les nombres sur la ligne graduée
plt.scatter(numbers, np.zeros_like(numbers), color='red')

# Ajouter des étiquettes aux nombres
for i, label in enumerate(labels):
    plt.text(numbers[i], 0.02, label, ha='center')

# Masquer les axes
plt.axis('off')

plt.show()
```

### 3.3.2 Exercice

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer l'exercice :

```
num_to_square = [1 + i/10 for i in range(5)]
list_of_intervals = []
for n2s in num_to_square:
```

```

print(f"Dans quel intervalle appartient {n2s}**2 ?")
interval = []
for borne in ("inf", "sup"):
    msg = f"Borne {borne}érieure au dixième = "
    interval.append(float(input(msg)))
list_of_intervals.append(interval)

print("Voici la liste de tes réponses")
print(list_of_intervals)
print("Voici tes correspondances")
for i in range(len(num_to_square)):
    n2s, interval = num_to_square[i], list_of_intervals[i]
    msg = f"{n2s}**2 = {round(n2s**2, 2)} appartient à "
    msg += f"l'intervalle {interval}"
    print(msg)

```

Voir solution [9.2.1](#)

### 3.4 Capacité attendue numéro 3

La physique est écrite dans cet immense livre qui continuellement se tient ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), mais elle ne peut se comprendre si on ne s'exerce d'abord à comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels elle est écrite. Elle est écrite en langue mathématique, et les caractères sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre le moindre mot, sans lesquelles on s'égare vainement dans un labyrinthe obscur.

Galilée

3.4.1 Exercice . . . . . 36

3.4.2 Exercice . . . . . 37

Cette partie développe la rubrique intitulée : " $C_3$  : Donner un encadrement, d'amplitude donnée, d'un nombre réel par des décimaux." dans le [programme officiel](#).

#### 3.4.1 Exercice

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).



C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer l'exercice :

```
import math

some_primes = [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37, 41]
prime_roots = [math.sqrt(sp) for sp in some_primes]
for i in range(8, len(prime_roots)):
    inf, sup = default(prime_roots[i], i), excess(prime_roots[i], i)
    sqrt_unicode = "\u221A"
    print(f"Un encadrement de {sqrt_unicode}{some_primes[i]} ~", end=" ")
    print(f"{round(prime_roots[i], i)} d'amplitude 10**(-{i}) est :", end=" ")
    print(f"{inf} <= {sqrt_unicode}{some_primes[i]} <= {sup}")
    print(f"Dit autrement, {sqrt_unicode}{some_primes[i]} ~", end=" ")
    print(f"{round(prime_roots[i], i)}", end=" ")
    print(f"appartient à l'intervalle [{inf}; {sup}]")

def exo_amplitude():
    score, method, born = 0, [default, excess], ["inf", "sup"]
    sqrt_unicode = "\u221A"
    motivation = "À toi de jouer !"
    print(motivation)
    instr = "Donne un encadrement à 10**"
    for i in range(5):
        print(f"{instr}(-{some_primes[i]}) près de {sqrt_unicode}{some_primes[i]}")
        for j in range(2):
            t = method[j](prime_roots[i], some_primes[i])
            r = float(input(f"Borne {born[j]}érienne à {some_primes[i]} chiffres = "))
            if r == t:
                print("Bien joué !")
                score += 0.2
            else:
                print(f"La bonne réponse était {t}")
```

Voir solutions [9.3.1](#)

### 3.4.2 Exercice

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer l'exercice :

```
def approx_nums(some_numbers, decimals):
    score, method, born = 0, [default, excess], ["inf", "sup"]
    motivation = "À toi de jouer !"
    print(motivation)
    instr = "Donne un encadrement à 10**"
    for num in some_numbers:
        boundaries = [default(num, decimals), excess(num, decimals)]
        print(f"{instr}{-decimals}) près de {num}")
        for j in range(2):
            t = boundaries[j]
            r = float(input(f"Borne {born[j]}érieure à {decimals} chiffres = "))
            if r == t:
                print("Bien joué !")
                score += 1
            else:
                print(f"La bonne réponse était {t}")
                x_pts, inf, sup, d = num, boundaries[0], boundaries[1], decimals
                step = 10**(-decimals)
                zoom(x_pts, inf, sup, step, decimals, size=(9.75, 1.25))
        print(f"Score final = {score * 10}%")

phi = (1 + 5**0.5) / 2 # nombre d'or
phi_unicode, sqrt_unicode = "\u03A6", "\u221A"
print(f"On appelle nombre d'or et on le note {phi_unicode} = (1 + {sqrt_unicode})/2")
phi2, tau = phi**2, 2 * math.pi
print("Vous pouvez remarquer que {phi_unicode}**2 = 1 + {phi_unicode} (vérifiez-le)")
tau_unicode, pi_unicode = "\u03A4", "\u03C0"
print(f"On appelle {tau_unicode} = 2{pi_unicode} ~ {tau}")
print(f"On ne présente plus {pi_unicode} ~ {math.pi}")
print(f"On appelle constante d'Euler e ~ {math.e}")
some_numbers = [phi, phi2, math.e, math.pi, tau]
decimals = random.randint(2, 5)
approx_nums(some_numbers, decimals)
```

Voir solutions [9.3.2](#)

### 3.5 Capacité attendue numéro 4

Tout mathématicien digne de ce nom a connu, parfois seulement à de rares intervalles, ces états d'exaltation lucide où les pensées s'enchaînent comme par miracle, et où l'inconscient (quel que soit le sens qu'on attache à ce mot) paraît aussi avoir sa part. [...] A la différence du plaisir sexuel, celui-là peut durer plusieurs heures, voire plusieurs jours ; qui l'a connu en désire le renouvellement mais est impuissant à le provoquer, sinon tout au plus par un travail opiniâtre dont il apparaît alors comme la récompense ; il est vrai que le plaisir qu'on en ressent est sans rapport avec la valeur des découvertes auxquelles il s'associe.

André Weil

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 3.5.1 Exemple . . . . .  | 39 |
| 3.5.2 Exercice . . . . . | 40 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : " $C_4$  : Dans le cadre de la résolution de problèmes, arrondir en donnant le nombre de chiffres significatifs adapté à la situation étudiée." dans le [programme officiel](#).

#### 3.5.1 Exemple

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer l'exemple :

```
c = 299_792_458
print(f"La vitesse de la lumière dans le vide est de {c} mètres par seconde.")
e_s = "L'écriture scientifique d'un nombre n = a x 10**k"
e_s += "\na appartient à l'intervalle [1; 10[ donc a < 10"
e_s += "\nk appartient à l'ensemble des entiers relatifs"
a, k = 2.99792458, 8
print(f"Son écriture scientifique est c = {a} x 10**{k} m/s")
print("Pour passer des mètres aux kilomètres il faut diviser par 1 000")
print("Cela revient à multiplier par 10**(-3)")
print(f"D'où c = {a} x 10**{k-3} km/s")
print("Dans 1 heure il y a 60 minutes et dans 1 minute il y a 60 secondes")
```

```

print("Donc dans 1 heure il y 60 x 60 = 3600 secondes")
print("Donc il faut multiplier par 3600")
print("Mais dans ce cas, autant faire d'une pierre, deux coups")
print("Multiplier par 3600 et diviser par 1 000 revient à multiplier par 3.6")
a *= 3.6
if a > 10:
    a /= 10
    k -= 1
print(f"D'où c = {a} x 10**{k} km/h")

```

### 3.5.2 Exercice

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer l'exercice :

```

print("À toi de jouer !")
mile = 1609.344
print(f"Sachant que 1 mile = {mile} mètres")
print("Calcule la vitesse de la lumière en miles par heure.")
msg = "Prend le temps de poser les calculs sur un papier avant de répondre"
print(msg.upper())
user_rep = float(input("Vitesse en miles par heure = "))
print(f"Selon toi c = {user_rep} mph (miles per hour)")

```

## 4 Démonstrations

The pure mathematician, like the musician, is a free creator of his world of ordered beauty.

Bertrand Russell

|  |    |
|--|----|
| 4.1 Rappels des éléments du programme officiel . . . . . | 40 |
| 4.2 Démonstration numéro 1 . . . . .                     | 41 |

## 4.1 Rappels des éléments du programme officiel

Une théorie mathématique ne peut être considérée comme complète tant que l'on ne l'a clarifiée au point de pouvoir l'expliquer au premier homme que l'on croise dans la rue.

David Hilbert

Les deux démonstrations au programme concernent :

- Le nombre rationnel  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal.
- Le nombre réel  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Ces deux démonstrations sont traitées sur Google Colab.

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

## 4.2 Démonstration numéro 1

Quel que soit le temps passé à faire des mathématiques, ce n'est jamais du temps perdu.

Cédric Villani

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| 4.2.1 À la main . . . . .   | 41 |
| 4.2.2 Avec Python . . . . . | 41 |

Cette partie développe la rubrique intitulée : "Le nombre rationnel  $\frac{1}{3}$  n'est pas décimal."

### 4.2.1 À la main

Mais proposons une démonstration utilisant l'astuce des nombres à décimales périodiques vue dans 2.6.3.

Posons  $x = 0,3 \dots 3$  où 3 se répète à l'infini. Multiplions par 10 puis retranchons  $x$ . Ainsi  $9x = 3$  donc  $x = \frac{1}{3}$ . CQFD

Pour  $\sqrt{2}$  consulter Google Colab ou les démonstrations précédentes.

En espérant que la lecture de ce livre vous aura satisfait et fait découvrir la richesse des nombres réels. Si vous avez la moindre suggestion d'amélioration merci de m'écrire à l'adresse indiquée dans le formulaire avec pour **objet Amazon Manipuler les réels**.

### 4.2.2 Avec Python

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

Voici le code pour générer les 3 démonstrations :

```
def read_text(txt):
    for t in txt:
        input(f"{t}\nAppuyez sur une touche pour lire la suite...")

intro = [
    "Le nombre 1/3 est-il décimal ?",
    "Pour que 1/3 soit décimal",
    "il faudrait trouver a et n tels que  $1/3 = a/10^n$ ",
    "En faisant un produit en croix cela revient à  $10^n = 3a$ ",
    "Maintenant le problème devient beaucoup plus simple.",
    "Il suffit de prouver qu'aucune puissance de 10 n'est multiple de 3."
]

read_text(txt=intro)

multiple_of_3 = [3*k for k in range(21)]
print("Voici les multiples de 0 à 60")
print(multiple_of_3)
rem = input("Que remarquez-vous ? ")
more = input("Vous en voulez plus ? 0) Non 1) Oui\n")
if more == "1":
    for k in range(21, 50):
        print(3*k, end=" ")
    print()

div = input("Quels sont les diviseurs (entiers positifs) de 10 ? ")
div = div.split(",")
div = [int(d) for d in div]
print(f"Selon vous, les diviseurs de 10 sont {div}")
prime_proof = [
    "Les diviseurs de 10 sont 2 et 5",
    "Donc les diviseurs de n'importe quelle puissance de 10",
    "sont de la forme  $2^p \times 5^q$ ",
    "avec p et q tels que  $p + q \leq n$ ",
    "Aucune puissance de 2 ne divise 3",
]
```

```

    "car 2 et 3 sont premiers entre eux (ils n'ont pas de diviseurs communs)",
    "il en va de même pour 5 et 3",
    "donc il est impossible d'obtenir  $10^{**}n = 3*a$ ",
    "une autre façon de faire consiste à poser la division de 10 par 3",
    "vous constaterez qu'il y aura toujours un reste non nul",
    "et vous pourriez faire de même à l'infini avec toute puissance de 10"
]

read_text(txt=prime_proof)

div_proof = [f"10**{n} = 3 x {(10**n)//3} + {(10**n) % 3}" for n in range(10)]
read_text(txt=div_proof)

decimal_proof = [f"1/3 ~ {round(1/3, i)} à {i} décimale(s)" for i in range(10)]
read_text(txt=decimal_proof)

magic_proof = [
    "Supposons qu'il existe un nombre noté  $x = 0.333333\dots$ ",
    "Puisqu'il y a une infinité de 3 après la virgule alors",
    " $10x = 3.333333\dots$  avec une infinité de 3 après la virgule",
    " $10x - x = 3$  et donc  $9x = 3$  d'où  $x = 3/9 = 1/3$ ",
    "CQFD"
]
read_text(txt=magic_proof)

```

## 5 Exemple d'algorithme

Just because we can't find a solution, it doesn't mean there isn't one.

Andrew Wiles

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 5.1 | Rappel des éléments du programme officiel . . . . . | 43 |
| 5.2 | Petites explications . . . . .                      | 43 |
| 5.3 | Le code . . . . .                                   | 44 |

### 5.1 Rappel des éléments du programme officiel

Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Un philosophe tel que lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que,

sous ce titre, une question de nombres vaut bien une question de système du monde.

Charles Gustave Jacob Jacobi

Le programme officiel propose un seul exemple d'algorithme :

- Déterminer par balayage un encadrement de  $\sqrt{2}$  d'amplitude inférieure ou égale à  $10^{-n}$ .

## 5.2 Petites explications

Les mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et à diminuer le travail des hommes.

René Descartes

On cherche des réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < \sqrt{2} < b$  avec  $|a - b| \leq 10^{-n}$ .

Comme  $\sqrt{2} \geq 1$  alors on va choisir  $a \geq 1$ .

De sorte que  $a^2 \leq 2 \leq b^2$ .

## 5.3 Le code

Si vous touchez aux maths, vous ne devez être ni pressés, ni cupides, fussiez-vous roi ou reine.

Euclide

Voici le code que vous pouvez retrouver sur Google Colab :

```
def balayage(n):
    """
    Cette fonction renvoie les bornes d'un encadrement par balayage
    d'amplitude inférieure ou égale à 10**(-n)
    """
    a = 1
    b = a + 10**(-n)
    while b**2 < 2:
        a += 10**(-n)
        b = a + 10**(-n)
    return round(a, n), round(b, n)

sqrt_unicode = "\u221A"
```



```
# Tests : attention parce qu'au-delà de n = 7 ça devient très long
for n in range(1, 7):
    infimum, supremum = balayage(n)
    ampli = 10**(-n)
    print(f"{infimum} < {sqrt_unicode}2 < {supremum} est un encadrement d'amplitude {ampli}")
```

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

En espérant que la lecture de ce livre vous aura satisfait et fait découvrir la richesse des nombres réels. Si vous avez la moindre suggestion d'amélioration merci de m'écrire à l'adresse indiquée dans le formulaire avec pour **objet Amazon Manipuler les réels**.

## 6 Approfondissements possibles

Millions saw the apple fall, but Newton asked why.

Bernard Baruch

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 6.1 | Rappel des éléments du programme officiel . . . . . | 45 |
| 6.2 | Petit bilan . . . . .                               | 45 |
| 6.3 | Et pour quelques exemples de plus . . . . .         | 45 |

### 6.1 Rappel des éléments du programme officiel

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie.

Isocrate

D'après le programme officiel les approfondissements possibles sont :

- Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

### 6.2 Petit bilan

Il y a une joie réelle à faire des mathématiques, à apprendre de nouvelles méthodes de pensée qui expliquent, organisent et simplifient. On peut ressentir cette joie en découvrant de nouvelles

mathématiques, (...) ou en trouvant une nouvelle façon d'expliquer (...) une structure mathématique ancienne.

William P. Thurston

Pour le deuxième point on a déjà vu beaucoup d'exemple (cf la petite astuce vue dans 2.6.3).

Mais rien que pour le plaisir en voici encore un. Soit  $x = 0,2023\dots$ . Ici la période est 2023. Donc on va multiplier par  $10^4$  puis retrancher  $x$  d'où  $9999x = 2023$  qui entraîne  $x = \frac{2023}{9999} \simeq 0,2023\dots2023\dots$

### 6.3 Et pour quelques exemples de plus

Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas.

Albert Einstein

Voici quelques développement décimaux illimités de nombres réels :

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\simeq 1,414213562373095\dots \\ \Phi &\simeq 1.618033988749895\dots \\ \sqrt{3} &\simeq 1.7320508075688772\dots \\ \sqrt{5} &\simeq 2.23606797749979\dots \\ \sqrt{7} &\simeq 2.6457513110645907\dots \\ e &\simeq 2.718281828459045\dots \\ \pi &\simeq 3.141592653589793\dots \\ \sqrt{11} &\simeq 3.3166247903554\dots\end{aligned}$$

En espérant que la lecture de ce livre vous aura satisfait et fait découvrir la richesse des nombres réels. Si vous avez la moindre suggestion d'amélioration merci de m'écrire à l'adresse indiquée dans le formulaire avec pour **objet Amazon Manipuler les réels**.

## 7 Après ce livre

I've always been interested in using mathematics to make the world work better.

Alvin E. Roth

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 7.1 Conclusion . . . . . | 46 |
|--------------------------|----|

## 7.1 Conclusion

Without mathematics, there's nothing you can do. Everything around you is mathematics. Everything around you is numbers.

Shakuntala Devi

Bravo à vous si vous avez lu jusqu'au bout.

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

Sur Google Colab vous pourrez expérimenter avec des exercices nouveaux à chaque exécution du code. Cela vous permettra de vous entraîner avec des valeurs différentes à chaque fois. C'est beaucoup plus interactifs que tous les exemples de ce livre.

Le but de ce livre est de vous donner un aperçu du monde merveilleux des nombres réels. Mais il y a encore beaucoup de choses à découvrir que je n'ai même pas pu mentionner ici.

Je vous invite à mettre le maximum d'étoiles sur Amazon et à laisser un commentaire pour aider les gens qui cherchent des ressources utiles.

En espérant que la lecture de ce livre vous aura satisfait et fait découvrir la richesse des nombres réels. Si vous avez la moindre suggestion d'amélioration merci de m'écrire à l'adresse indiquée dans le formulaire avec pour **objet Amazon Manipuler les réels**.

## 8 Solutions des exercices de la section : 2

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

Paul Richard Halmos

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 8.1 | Solutions des exercices de la section : 2.1 . . . . . | 47 |
| 8.2 | Solutions des exercices de la section : 2.2 . . . . . | 49 |
| 8.3 | Solutions des exercices de la section : 2.3 . . . . . | 54 |
| 8.4 | Solutions des exercices de la section : 2.4 . . . . . | 56 |
| 8.5 | Solutions des exercices de la section : 2.5 . . . . . | 59 |
| 8.6 | Solutions des exercices de la section : 2.6 . . . . . | 60 |

## 8.1 Solutions des exercices de la section : 2.1

We will always have STEM with us. Some things will drop out of the public eye and go away, but there will always be science, engineering, and technology. And there will always, always be mathematics.

Creola Katherine Coleman

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 8.1.1 | Solution de l'exercice 2.1.7 . . . . .        | 47 |
| 8.1.2 | Solution Python de l'exercice 2.1.8 . . . . . | 47 |

### 8.1.1 Solution de l'exercice 2.1.7

On reprend le même schéma que dans 2.1.6

$$\begin{aligned}A &= "x < -1" \\B &= "-3x > 3" \\P &= A \Rightarrow B \\\neg B &= "-3x \leq 3" \\\neg A &= "x \geq -1" \\CP(P) &= (\neg B) \Rightarrow (\neg A)\end{aligned}$$

### 8.1.2 Solution Python de l'exercice 2.1.8

Voir énoncé 2.1.8

1. Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

Voici le code de la fonction `imply`

```
def imply(A, B):  
    """  
    Cette fonction prend 2 paramètres A et B en entrée  
    et renvoie la phrase logique A implique B  
    """  
    return f"({A}) implique ({B})"  
  
# Tests
```

```

A = ["x > 2", "x < -1"]
B = ["2*x > 4", "-3*x > 3"]
for i in range(len(A)):
    print(impl(A[i], B[i]))

# Sorties
#(x > 2) implique (2*x > 4)
#(x < -1) implique (-3*x > 3)

```

2. 1. Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

Voici le code de la fonction `contrapose`

```

def contrapose(A, B):
    """
    Cette fonction prend 2 paramètres A et B en entrée
    et renvoie la phrase logique non B implique non A
    """
    return impl("non " + B, "non " + A)

# Tests
A = ["x > 2", "x < -1"]
B = ["2*x > 4", "-3*x > 3"]
for i in range(len(A)):
    print(contrapose(A[i], B[i]))

# Sorties
#(non 2*x > 4) implique (non x > 2)
#(non -3*x > 3) implique (non x < -1)

```

## 8.2 Solutions des exercices de la section : 2.2

Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. Its basic elements are logic and intuition, analysis and construction, generality and individuality.

Richard Courant

|   |    |
|---|----|
| 8.2.1 Solutions de l'exercice 2.2.2 . . . . . | 49 |
|---|----|

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 8.2.2 | Solutions de l'exercice 2.2.3 . . . . . | 51 |
| 8.2.3 | Solution du petit jeu 2.2.4 . . . . .   | 52 |

### 8.2.1 Solutions de l'exercice 2.2.2

Voir énoncé 2.2.2

1.

$$\frac{1}{3} \in I_1 = [0, 3; 0, 4]$$

qui a pour amplitude

$$|I_1| = 0,4 - 0,3 = 0,1 = 10^{-1}$$

$$\frac{1}{3} \in I_2 = [0, 33; 0, 34]$$

qui a pour amplitude

$$|I_2| = 0,34 - 0,33 = 0,01 = 10^{-2}$$

$$\frac{1}{3} \in I_3 = [0, 333; 0, 334]$$

qui a pour amplitude

$$|I_3| = 0,334 - 0,333 = 0,001 = 10^{-3}$$

On peut classer ces intervalles :

$$\frac{1}{3} \in I_3 = [0, 333; 0, 334] \subset I_2 = [0, 33; 0, 34] \subset I_1 = [0, 3; 0, 4]$$

2.

$$\sqrt{2} \in R_1 = [1, 4; 1, 5]$$

qui a pour amplitude

$$|R_1| = 1,5 - 1,4 = 0,1 = 10^{-1}$$

$$\sqrt{2} \in R_2 = [1, 41; 1, 42]$$

qui a pour amplitude

$$|R_2| = 1,42 - 1,41 = 0,01 = 10^{-2}$$

$$\sqrt{2} \in R_3 = [1, 414; 1, 415]$$

qui a pour amplitude

$$|R_3| = 1,415 - 1,414 = 0,001 = 10^{-3}$$

On peut classer ces intervalles :

$$\sqrt{2} \in R_3 = [1, 414; 1, 415] \subset R_2 = [1, 41; 1, 42] \subset R_1 = [1, 4; 1, 5]$$

3.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in F_1 = [1, 6; 1, 7]$$

qui pour amplitude

$$|F_1| = 1, 7 - 1, 6 = 0, 1 = 10^{-1}$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in F_2 = [1, 61; 1, 62]$$

qui pour amplitude

$$|F_2| = 1, 62 - 1, 61 = 0, 01 = 10^{-2}$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in F_3 = [1, 618; 1, 619]$$

qui pour amplitude

$$|F_3| = 1, 619 - 1, 618 = 0, 001 = 10^{-3}$$

On peut classer ces intervalles :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in F_3 = [1, 618; 1, 619] \subset F_2 = [1, 61; 1, 62] \subset F_1 = [1, 6; 1, 7]$$

4.

$$\pi \in P_1 = [3, 1; 3, 2]$$

qui a pour amplitude

$$|P_1| = 3, 2 - 3, 1 = 0, 1 = 10^{-1}$$

$$\pi \in P_2 = [3, 14; 3, 15]$$

qui a pour amplitude

$$|P_2| = 3, 15 - 3, 14 = 0, 01 = 10^{-2}$$

$$\pi \in P_3 = [3, 141; 3, 142]$$

qui a pour amplitude

$$|P_3| = 3, 142 - 3, 141 = 0, 001 = 10^{-3}$$

On peut classer ces intervalles :

$$\pi \in P_3 = [3, 141; 3, 142] \subset P_2 = [3, 14; 3, 15] \subset P_1 = [3, 1; 3, 2]$$

5.

$$\tau = 2\pi \in T_1 = [6, 2; 6, 3]$$

qui a pour amplitude

$$|T_1| = 6, 3 - 6, 2 = 0, 1 = 10^{-1}$$

$$\tau = 2\pi \in T_2 = [6, 28; 6, 29]$$

qui a pour amplitude

$$|T_2| = 6, 29 - 6, 28 = 0, 01 = 10^{-2}$$

$$\tau = 2\pi \in T_3 = [6, 283; 6, 284]$$

qui a pour amplitude

$$|T_3| = 6, 284 - 6, 283 = 0, 001 = 10^{-3}$$

On peut classer ces intervalles :

$$\tau = 2\pi \in T_3 = [6, 283; 6, 284] \subset T_2 = [6, 28; 6, 29] \subset T_1 = [6, 2; 6, 3]$$

## 8.2.2 Solutions de l'exercice 2.2.3

Voir énoncé 2.2.3

1.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1, 61803$$

2. Voici les 16 premiers termes de cette suite de nombres :

|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $F_1 = 1$      | $F_2 = 1$      | $F_3 = 2$      | $F_4 = 3$      |
| $F_5 = 5$      | $F_6 = 8$      | $F_7 = 13$     | $F_8 = 21$     |
| $F_9 = 34$     | $F_{10} = 55$  | $F_{11} = 89$  | $F_{12} = 144$ |
| $F_{13} = 233$ | $F_{14} = 377$ | $F_{15} = 610$ | $F_{16} = 987$ |

3. Pour calculer un nouveau terme on ajoute les deux termes précédents

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Par exemple  $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$  ou encore  $F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$ .



4.

$$\begin{array}{ll}
\frac{F_2}{F_1} = 1 & \frac{F_3}{F_2} = 2 \\
\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} & \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} \simeq 1,67 \\
\frac{F_6}{F_5} = \frac{6}{5} = 1,2 & \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625 \\
\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \simeq 1,615 & \frac{F_9}{F_8} \simeq 1,619 \\
\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \simeq 1,6176 & \frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,6182
\end{array}$$

5. Les 11 premiers termes de la suites de Fibonacci ont permis d'approcher le nombre d'or à 3 chiffres après la virgule. Poursuivons avec ce que nous avons déjà calculer à la question 2.

$$\begin{array}{ll}
\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} \simeq 1,6180 & \frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{233}{144} \simeq 1,61801 \\
\frac{F_{14}}{F_{13}} = \frac{377}{233} \simeq 1,61803 & \frac{F_{15}}{F_{14}} = \frac{610}{377} \simeq 1,61804 \\
\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,61803 \in \left[ \frac{F_{14}}{F_{13}}, \frac{F_{15}}{F_{14}} \right]
\end{array}$$

### 8.2.3 Solution du petit jeu 2.2.4

Voir énoncé 2.2.4

1. Partie 1

Voilà pour la première partie de la question

(a)

$$u = 0,1 \dots \in I_u = [0,09; 0,19]$$

en effet

$$|I_u| = 0,19 - 0,09 = 0,1$$

(b)

$$v = 0,12 \dots \in I_v = [0,118; 0,128]$$

en effet

$$|I_v| = 0,128 - 0,118 = 0,01$$

(c)

$$w = 0,123 \dots \in I_w = [0,1227; 0,1237]$$

en effet

$$|I_w| = 0,1237 - 0,1227 = 0,001$$

(d)

$$x = 0,1234 \dots \in I_x = [0,12336; 0,12346]$$

en effet

$$|I_x| = 0,12346 - 0,12336 = 0,0001$$

(e)

$$y = 0,12345 \dots \in I_y = [0,123455; 0,123465]$$

en effet

$$|I_y| = 0,123465 - 0,123455 = 0,0001$$

## 2. Partie 2

Maintenant occupons-nous de la seconde partie.

(a)

$$10u = 1,1 \dots$$

donc

$$10u - u = 1$$

d'où

$$u = \frac{1}{9} \in I_u = [0,09; 0,19]$$

(b)

$$100v = 12,12 \dots$$

donc

$$100v - v = 12$$

d'où

$$v = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \in I_v = [0,118; 0,128]$$

(c)

$$1000w = 123,123 \dots$$

donc

$$1000w - w = 123$$

d'où

$$w = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} \in I_w = [0,1227; 0,1237]$$

(d)

$$10000x = 1234,1234 \dots$$

donc

$$10000x - x = 1234$$

d'où

$$x = \frac{1234}{9999} \in I_x = [0,12336; 0,12346]$$

(e)

$$100000y = 12345,12345\dots$$

donc

$$100000y - y = 12345$$

d'où

$$y = \frac{12345}{99999} \in I_y = [0, 123455; 0, 123465]$$

### 8.3 Solutions des exercices de la section : 2.3

Mathematics is the music of reason.

James Joseph Sylvester

8.3.1 Solution de l'exercice 2.3.2 . . . . . 54

8.3.2 Solution de l'exercice 2.3.3 . . . . . 55

#### 8.3.1 Solution de l'exercice 2.3.2

Pour voir l'énoncé de l'exercice 2.3.2

1. Calcul de la distance entre  $\pi$  et  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  à 3 chiffres après la virgule.

$$d(\Phi; \pi) = \pi - \Phi \simeq 1,524$$

2. Calcul de la distance  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{3}$  à 3 chiffres près.

$$d\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right) = \left|\frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right| = \frac{1}{12} \simeq 0,083$$

3. Calcul de la distance  $\frac{1}{7}$  et  $\frac{1}{8}$  à 6 chiffres.

$$d\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{8}\right) = \left|\frac{8}{56} - \frac{7}{56}\right| = \frac{1}{56} \simeq 0,017857$$

4. Calcul de la distance entre  $\Phi$  et  $\sqrt{2}$  à 2 chiffres.

$$d(\Phi; \sqrt{2}) = \Phi - \sqrt{2} \simeq 0,20$$

5. Calcul de la distance entre  $\Phi$  et  $\sqrt{3}$  à 5 chiffres.

$$d(\Phi; \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \Phi \simeq 0,11402$$

### 8.3.2 Solution de l'exercice 2.3.3

Voir l'énoncé 2.3.3

1. Calcul des nombres à une distance 1 de 1. Là c'est facile on peut le faire de tête c'est  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 2$ .

$$- - - - 0 - - 1 - - 2 - - - - - >$$

2. Calcul des nombres à une distance 0,5 de -1. Là on peut poser les calculs :  $x_1 = -1 - 0,5 = -1,5$  et  $x_2 = -1 + 0,5 = -0,5$ .

$$- - - - - (-1,5) - - - (-1) - - - (-0,5) - - - - - >$$

3. Calcul des nombres à une distance  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{1}{4}$ . Mettons les fractions au même dénominateur.  $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = -\frac{1}{12}$  et  $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$ .

$$- - - - - \left(-\frac{1}{12}\right) - - - - \left(\frac{3}{12}\right) - - - - \left(\frac{7}{12}\right) - - - - - >$$

4. Calcul des nombres à une distance  $\sqrt{2}$  de 1.  $x_1 = 1 - \sqrt{2} \simeq -0,414$  et  $x_2 = 1 + \sqrt{2} \simeq 2,414$ .

$$- - (1 - \sqrt{2}) - - 1 - - (1 + \sqrt{2}) - - - >$$

5. Calcul des nombres à une distance  $\sqrt{3}$  de  $\sqrt{2}$ . Ici il faut faire appel à une astuce classique pour les racines carrées, la multiplication par la quantité conjuguée (cf l'identité remarquable  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  qui permet d'enlever les racines).

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ x_1 &= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ x_1 &= \frac{2 - 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\ x_2 &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq 3,15 \\ x_1 &\simeq -0,32 \end{aligned}$$

$$- - - - \left(-\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right) - - \sqrt{2} - - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - - - - >$$

6. Calcul des nombres à une distance  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  de 1.

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + \Phi = \frac{2}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\x_1 &= 1 + \Phi = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \simeq 2,618 \\x_2 &= 1 - \Phi = \frac{2}{2} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\x_2 &= 1 - \Phi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq -0,618\end{aligned}$$

$$-----\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) - -1 - -\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) ----- >$$

7. Calcul des nombres à une distance  $\tau = 2\pi$  de  $\pi$ .

$$x_1 = \pi - \tau = \pi - 2\pi = -\pi \text{ et } x_2 = \pi + \tau = \pi + 2\pi = 3\pi.$$

$$-----(-\pi)------\pi----- -3\pi----- >$$

## 8.4 Solutions des exercices de la section : 2.4

There should be no such thing as boring mathematics.

Edsger W. Dijkstra

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 8.4.1 | Solution de l'exercice 2.4.2 . . . . . | 56 |
| 8.4.2 | Solution de l'exercice 2.4.5 . . . . . | 57 |

### 8.4.1 Solution de l'exercice 2.4.2

Voir énoncé 2.4.2

1. Calculs avec  $(a, r) = (1, \sqrt{2})$

$$\begin{aligned}D_a &= [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \\x \in D_a &\Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \\&\Rightarrow -\sqrt{2} \leq x - 1 \leq \sqrt{2} \\&\Rightarrow |x - 1| \leq \sqrt{2}\end{aligned}$$

2. Calculs avec  $(a, r) = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} D_a &= [\sqrt{2} - \sqrt{3}; \sqrt{2} + \sqrt{3}] \\ x \in D_a &\Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ &\Rightarrow -\sqrt{3} \leq x - \sqrt{2} \leq \sqrt{3} \\ &\Rightarrow |x - \sqrt{2}| \leq \sqrt{3} \end{aligned}$$

3. Calculs avec  $(a, r) = (1, \Phi)$

$$\begin{aligned} D_a &= [1 - \Phi; 1 + \Phi] \\ x \in D_a &\Rightarrow 1 - \Phi \leq x \leq 1 + \Phi \\ &\Rightarrow -\Phi \leq x - 1 \leq \Phi \\ &\Rightarrow |x - 1| \leq \Phi \end{aligned}$$

4. Calculs avec  $(a, r) = (\pi, \tau)$

$$\begin{aligned} D_a &= [\pi - \tau; \pi + \tau] \\ x \in D_a &\Rightarrow \pi - \tau \leq x \leq \pi + \tau \\ &\Rightarrow -\tau \leq x - \pi \leq \tau \\ &\Rightarrow |x - \pi| \leq \tau \end{aligned}$$

#### 8.4.2 Solution de l'exercice 2.4.5

Voir énoncé 2.4.5

1. Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVR8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

```
def borne_inf_sup(a, r):
    if r < 0: return False
    else: return a - r, a + r

# Test
a, r = 2, -2**0.5
print(borne_inf_sup(a, r))
# Sortie
#False
```

```

a, r = 2, 2**0.5
print(borne_inf_sup(a, r))
# Sortie
#(0.5857864376269049, 3.414213562373095)

```

2. Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

```

def borne_inf_sup(a, r, precision):
    if r < 0: return False
    else: return round(a - r, precision), round(a + r, precision)

```

```

# Tests
a, r = 2, 2**0.5
for precision in range(1, 10):
    print(borne_inf_sup(a, r, precision))

```

```

# Sorties
#(0.6, 3.4)
#(0.59, 3.41)
#(0.586, 3.414)
#(0.5858, 3.4142)
#(0.58579, 3.41421)
#(0.585786, 3.414214)
#(0.5857864, 3.4142136)
#(0.58578644, 3.41421356)
#(0.585786438, 3.414213562)

```

3. Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

```

def distance(a, b):
    if a < b: return b - a
    else: return a - b

```

```

# Tests
a, b = 1, 2
print(f"d({a}, {b}) = {distance(a, b)}")
a, b = 2**0.5, 1
print(f"d({a}, {b}) = {distance(a, b)}")
#d(1, 2) = 1
#d(1.4142135623730951, 1) = 0.41421356237309515

```

## 8.5 Solutions des exercices de la section : 2.5

‘Obvious’ is the most dangerous word in mathematics.

Eric Temple Bell

### 8.5.1 Solution avec Python de l'exercice 2.5.2 . . . . . 59

#### 8.5.1 Solution avec Python de l'exercice 2.5.2

Voir énoncé 2.5.2

Si vous l'avez fait sur papier vous avez dû utiliser une machine pour calculer les décimales de  $\tau$ , de  $\Phi$  et des racines carrées. Exactement comme je l'avais montré pour  $\sqrt{2}$ . Ici la façon la plus intelligente de procéder consiste à utiliser Python.

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

```
from math import ceil, pi, trunc

def decimal_frame(real, nb_digits):
    """
    Cette fonction prend en entrées :
    real: un nombre réel à encadrer
    nb_digits: le nombre de décimales de l'encadrement
    Elle renvoie en sortie les bornes inférieures et supérieures
    de cet encadrement décimal.
    """
    # on décale la virgule de nb_digits vers la droite
    real_power_nb_digits = real * 10**nb_digits
    # on coupe
    infimum = round(trunc(real_power_nb_digits) * 10**(-nb_digits), nb_digits)
    supremum = round(ceil(real_power_nb_digits) * 10**(-nb_digits), nb_digits)
    return infimum, supremum

# Tests
tau, phi = 2*pi, (1+5**0.5)/2
sqrts = [x**0.5 for x in [2, 3, 5, 7]]
reals = [tau, phi] + sqrts
for real in reals:
    print(f"Encadrement du nombre réel {real} à :")
    for nb_digits in range(1, 6):
```



```
print(f"10**(-{nb_digits}) près :", end=" ")
print(decimal_frame(real, nb_digits))
```

## 8.6 Solutions des exercices de la section : 2.6

Mathematics are the result of mysterious powers which no one understands, and which the unconscious recognition of beauty must play an important part. Out of an infinity of designs a mathematician chooses one pattern for beauty's sake and pulls it down to earth.

Marston Morse

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 8.6.1 | Solution de l'exercice 2.6.2 . . . . . | 60 |
| 8.6.2 | Solution de l'exercice 2.6.5 . . . . . | 61 |
| 8.6.3 | Solution de l'exercice 2.6.7 . . . . . | 61 |

### 8.6.1 Solution de l'exercice 2.6.2

Voir énoncé 2.6.2

Trouvons l'écriture fractionnaire des nombres suivants :

1.  $x = 0,07 \dots 7 \dots$  avec des 7 à l'infini.

$$100x = 7,7 \dots$$

$$10x = 0,7 \dots$$

$$90x = 7$$

$$x = \frac{7}{90}$$

Vous connaissez maintenant la fraction de James Bond !

2.  $y = 0,076923 \dots$  avec la période 076923 qui se répète à l'infini.

$$y \times 10^6 = 76923,076923 \dots$$

$$y = 0,7 \dots$$

$$999999y = 76923$$

$$y = \frac{76923}{999999} = \frac{1 \times 76923}{13 \times 76923}$$

$$y = \frac{1}{13}$$

Le nombre 13 propose une période à 6 chiffres comme le nombre 7.

3.  $z = 0,0588235294117647$  avec la période 0588235294117647 qui se répète à l'infini.

$$z \times 10^{16} = 588235294117647,0588235294117647 \dots$$

$$z = 0,0588235294117647 \dots$$

$$9999999999999999z = 588235294117647$$

$$z = \frac{588235294117647}{9999999999999999}$$

$$9999999999999999 = 17 \times 588235294117647$$

$$z = \frac{1}{17}$$

Le nombre 17 cachait bien son jeu avec sa période à 16 chiffres !

### 8.6.2 Solution de l'exercice 2.6.5

Voir énoncé 2.6.5

1. Chacune des 6 faces du cube d'arête 1 est un carré de côté 1 donc de diagonale  $\sqrt{2}$  (voir les démonstrations précédentes). Si on considère un triangle formé par une diagonale de la face du bas et d'une arête verticale alors l'hypoténuse sera la diagonale cherchée. Nommons ABC ce triangle avec  $AB = 1$  (l'arête verticale),  $BC = \sqrt{2}$  (la diagonale de la face du bas) et  $AC$  l'hypoténuse. Par Pythagore  $CA^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + 2 = 3$  d'où  $CA = \sqrt{3}$  CQFD

#### Cube en 3D

2. Montrons par l'absurde que  $\sqrt{3}$  est irrationnel. Soit  $a$  et  $b$  deux entiers tels que  $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$  et  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Alors  $a^2 = 3b^2$ . Puisque  $a$  et  $b$  n'ont pas de diviseur commun il en va de même pour leurs carrés. Donc 3 est un diviseur de  $a$  puisqu'il divise son carré. Ainsi  $a = 3k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . On peut alors établir que  $a^2 = 9k^2$  ce qui implique  $b^2 = 3k^2$ . Comme  $a^2$  et  $b^2$  n'ont pas de diviseur commun alors  $k^2$  ne divise pas  $b^2$  donc nécessairement c'est 3. Problème, si 3 divise  $b^2$  alors il divise aussi  $b$  ce qui contredit  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . CQFD

### 8.6.3 Solution de l'exercice 2.6.7

Voir énoncé 2.6.7

1. Le nombre 4 divise le carré de 10 mais pas 10. Le nombre 8 divise le carré de 4 mais pas 4. Le nombre 12 divise le carré de 6 mais pas 6.

Le nombre 16 divise le carré de 8 mais pas 8. Le nombre 9 divise le carré de 12 mais pas 12.

2. Supposons par l'absurde que le nombre d'or  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  soit rationnel. Alors  $\Phi = \frac{a}{b}$  avec  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ . Or  $\Phi^2 = 1 + \Phi$  donc  $\Phi^2 = \frac{a+b}{b} \in \mathbb{Q}$  mais alors  $\frac{a+b}{b} = \frac{a^2}{b^2}$  conduit à  $ab + b^2 = a$  soit  $b^2 = a(b+1)$  ce qui est absurde car  $a$  ne divise pas  $b$  donc pas son carré non plus et d'autre par  $b+1$  ne divise pas  $b^2$  non plus. CQFD

## 9 Solutions des exercices de la section : 3

You don't have to be a mathematician to have a feel for numbers.

John Forbes Nash Jr.

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 9.1 | Solutions des exercices de la section : 3.2 . . . . . | 62 |
| 9.2 | Solutions des exercices de la section : 3.3 . . . . . | 63 |
| 9.3 | Solutions des exercices de la section : 3.4 . . . . . | 65 |
| 9.4 | Solutions des exercices de la section : 3.5 . . . . . | 66 |

### 9.1 Solutions des exercices de la section : 3.2

It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul.

Sofya Kovalveskaya

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 9.1.1 | Solution de l'exercice 3.2.2 . . . . . | 62 |
|-------|--|----|

#### 9.1.1 Solution de l'exercice 3.2.2

```
# Solution
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

numbers = [-2, -0.5, 0, 1, np.sqrt(2), np.pi]
pi_unicode, sqrt_unicode = "\u03C0", "\u221A"
labels = ['P_0 (-2)', 'P_1 (-0.5)', 'P_2 (0)', 'P_3 (1)', f'P_4 ({sqrt_unicode}2)', f'P_5 ({pi_unicode})']

plt.figure(figsize=(10, 1))

# Ploter une ligne horizontale
```

```
plt.plot([min(numbers), max(numbers)], [0, 0], 'k')

# Placer les nombres sur la ligne graduée
plt.scatter(numbers, np.zeros_like(numbers), color='red')

# Ajouter des étiquettes aux nombres
for i, label in enumerate(labels):
    plt.text(numbers[i], 0.02, label, ha='center')

# Masquer les axes
plt.axis('off')

plt.show()
```

## 9.2 Solutions des exercices de la section : 3.3

A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician.

Karl Weierstrass

### 9.2.1 Solution de l'exercice 3.3.2 . . . . . 63

#### 9.2.1 Solution de l'exercice 3.3.2

Voir énoncé 3.3.2

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer les solutions de l'exercice 3.3.2 :

```
# Solution
from math import floor, ceil

def default(number, decimals):
    """
    Cette fonction prend 2 paramètres en entrées :
    number: le nombre dont on cherche à faire l'arrondi par défaut
```

```

    decimals: le nombre de chiffres après la virgule
    Elle renvoie le nombre arrondi par défaut à decimals décimales
    """

    num = floor(number * 10**decimals)
    den = 10**decimals
    return num / den

def excess(number, decimals):
    """
    Cette fonction prend 2 paramètres en entrées :
    number: le nombre dont on cherche à faire l'arrondi par excès
    decimals: le nombre de chiffres après la virgule
    Elle renvoie le nombre arrondi par excès à decimals décimales
    """

    if number == int(number):
        num = ceil(number * 10**decimals + 1)
    else: num = ceil(number * 10**decimals)
    den = 10**decimals
    return num / den

def get_boundary(nums, method, decimals):
    """
    Cette fonction prend 3 paramètres en entrées :
    nums: la liste de nombres dont on cherche la borne (inf ou sup)
    method: la fonction utilisée (default ou excess)
    decimals: le nombre de décimales
    Elle renvoie la liste des bornes (que des infs ou que des sups)
    """

    bounds = [method(num, decimals) for num in nums]
    return bounds

num_to_square = [1 + i/10 for i in range(5)]
squares = [round(n2s**2, 2) for n2s in num_to_square]
infs = get_boundary(squares, default, 1)
sups = get_boundary(squares, excess, 1)
list_of_intervals = [[infs[i], sups[i]] for i in range(len(infs))]

nums = []
for i in range(len(squares)):
    nums.extend([infs[i], squares[i], sups[i]])
    n2s, interval = num_to_square[i], list_of_intervals[i]
    msg = f"{n2s}**2 = {squares[i]} appartient à l'intervalle {interval}"
    print(msg)

```

```

plt.figure(figsize=(10, 1))

# Tracer une ligne horizontale
plt.plot([min(nums), max(nums)], [0, 0], 'k')

# Placer les nombres sur la ligne graduée
plt.scatter(squares, np.zeros_like(squares), color='green', marker='x')
plt.scatter(infs, np.zeros_like(infs), color='red', marker='$[$')
plt.scatter(sups, np.zeros_like(sups), color='red', marker='$]$')

infs_labels = [str(inf) for inf in infs]
sqrs_labels = [str(sqr) for sqr in squares]
sups_labels = [str(sup) for sup in sups]
# Ajouter des étiquettes aux nombres
for i, inf_label in enumerate(infs_labels):
    plt.text(infs[i], 0.02, inf_label, ha='center')

for i, sqr_label in enumerate(sqrs_labels):
    plt.text(squares[i], -0.02, sqr_label, ha='center', va='top')

for i, sup_label in enumerate(sups_labels):
    plt.text(sups[i], 0.02, sup_label, ha='center')

# Masquer les axes
plt.axis('off')

plt.show()

```

### 9.3 Solutions des exercices de la section : 3.4

In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

Georg Cantor

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 9.3.1 | Solution de l'exercice 3.4.1 . . . . . | 65 |
| 9.3.2 | Solution de l'exercice 3.4.2 . . . . . | 65 |

#### 9.3.1 Solution de l'exercice 3.4.1

Voir énoncé 3.4.1

Les solutions sont générées automatiquement après la saisie utilisateur.

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

### 9.3.2 Solution de l'exercice 3.4.2

Voir énoncé 3.4.2

Les solutions sont générées automatiquement après la saisie utilisateur.

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

## 9.4 Solutions des exercices de la section : 3.5

It is clear that the chief end of mathematical study must be to make the students think.

John Wesley Young

|  |    |
|--|----|
| 9.4.1 Solution de l'exercice 3.5.2 . . . . . | 66 |
|--|----|

### 9.4.1 Solution de l'exercice 3.5.2

Voir énoncé 3.5.2

Pour rappels tous les codes sont accessibles sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée lorsque vous aurez rempli ce petit formulaire : <https://forms.gle/pT3GVr8PdNYCeVir7> (vous trouverez également les corrections de tous les exercices du livre).

C'est également sur Google Colab que vous pourrez tester tous les programmes qui vous permettent de pratiquer les capacités attendues de manière interactive.

Voici le code pour générer l'exercice :

```
# Solution
print(f"Puisque 1 mile = {mile} alors cela fait {mile/1000} km")
print(f"Ainsi 1 km = {1000/mile} miles")
print(f"Il suffit donc de multiplier la vitesse en km/h par {1000/mile}")
a *= 1000/mile
if a > 10:
    a /= 10
    k -= 1
elif a < 1:
    a *= 10
    k += 1
print(f"D'où c = {a} x 10**{k} mph")
```