Manipuler les nombres réels

Laurent Garnier

August 19, 2023

Contents

1 À qui s'adresse ce livre

Ce livre s'adresse initialement aux élèves de seconde du système scolaire français. Mais il sera probablement très utile à un élève de fin de collège qui voudrait assurer son entrée au lycée. Il sera également très utile à un élève de première qui voudrait s'assurer qu'il maîtrise bien les notions de la classe de seconde. Enfin un quatrième public qui pourrait directement être visé est celui des enseignants, profs particuliers ou encore tuteurs (professionnels ou amateurs) qui souhaiteraient consulter des ressources utiles et utilisables pour aider les lycéens.

De façon plus générale, même si je reprends exactement la structure du programme officiel que vous pouvez consulter ici : `https://eduscol.education.fr/document/24553/download`

Il me semble que ce livre pourrait être utile à quiconque souhaite approcher les mathématiques de façon honnête, rigoureuse et avec un soucis de compréhension. Tout en respectant le niveau du programme j'essaierai dès que possibles de prolonger la perspective.

Vous pouvez d'ores et déjà mettre en pratique de façon interactive toutes les notions abordées grâce aux codes Python accessible sur Google Colab à l'adresse communiquée dans la section concernée.

Bonne lecture.

2 Contenus

2.1 Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique

Savez-vous résoudre l'équation $x - 1 = 0$? Je vous laisse réfléchir et je vous donnerai la solution plus tard.

Imaginez que vous êtes en train de jouer à votre jeu vidéo préféré. Il vous reste 3 points de vie, combien pouvez-vous en perdre avant de mourir (dans le jeu) ? Idem, je vous laisse réfléchir.

En général, lorsque vous entrez en seconde vous êtes âgé de 15 ans, du coup combien d'années vous séparent de votre majorité ?

Ces trois questions traitent du même genre de problèmes, la résolution des équations algébriques du premier degré impliquant les nombres les plus simples que vous connaissez à savoir les nombres entiers naturels. Pour la faire simple il s'agit des nombres utiles pour compter le nombre de doigts que vous possédez, le nombre d'enfants dans une famille et toutes les choses qu'on peut dénombrer de zéro à l'infini.

On note l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N} \tag{2}$$

$$15 + x = 18 \Rightarrow x = 3 \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Mais ces nombres sont insuffisants pour exprimer des températures par exemple dans une ville d'Europe du Nord comme Saint Pétersbourg en Russie ou Oslo en Norvège. En fait, même en France métropolitaine si vous allez en Savoie vous observerez des températures négatives en hiver et positive en été. Le signe de ces températures est *relatif* à la position du zéro.

Les nombres entiers relatifs sont constitués des nombres entiers naturels (les nombres positifs qu'on a vu précédemment) auquels on ajoute leurs symétriques par rapport à zéro.

On les notes $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Ce sont également ces nombres qu'on utilise dans un ascenseur pour indiquer si on va au sous-sol (nombre négatif) ou aux étages supérieurs (nombres positifs).

Dans le langage de programmation Python les nombres entiers relatifs sont représentés par le type `int` pour *integer* (qui veut dire entier relatif en anglais).

Mais ces nombres sont encore en nombre insuffisant pour exprimer par exemple les unités monétaires. Quand vous achetez une baguette, du carburant, des fournitures scolaires ou quoique ce soit ; la plupart du temps vous utilisez des nombres à virgules qu'on appelle les nombres décimaux.

Contrairement aux deux ensembles précédents, l'ensemble des nombres décimaux ne peut pas être représenté de façon explicite avec des points de suspension, il doit être définit en *compréhension*. Définir un ensemble en compréhension signifie que vous devez expliquer la règle de construction.

On note $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid (a, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

Commençons par la fin $(a, n) \in \mathbb{Z}^2$ signifie que a et n sont tous les deux des entiers relatifs. Ainsi, les décimaux sont les nombres fractionnaires dont le numérateur est un entier relatif et le dénominateur un puissance de 10. Donnons quelques exemples :

$$(a, n) = (1, 2) \Rightarrow \frac{1}{10^2} = 0,01 \tag{4}$$

$$(a, n) = (3, 4) \Rightarrow \frac{3}{10^4} = 0,0003 \tag{5}$$

$$(a, n) = (2, -1) \Rightarrow \frac{2}{10^{-1}} = 20 \tag{6}$$

$$(a, n) = (3, 0) \Rightarrow \frac{3}{10^0} = 3 \tag{7}$$

$$(a, n) = (-1, 2) \Rightarrow \frac{-1}{10^2} = -0,01 \tag{8}$$

Dans la programmation Python on parle du type `float` pour *floating point number* ou nombre à virgule flottante en bon français (puisque les anglo-saxons utilisent un point comme séparateur décimal). En prenant $n = 0$ on obtient tous les entiers relatifs. Mais ce n'est pas suffisant pour décrire le réel (en théorie, parce qu'en pratique les ordinateurs s'en contentent).

Imaginez que vous avez un budget pour une semaine et que vous souhaitiez allouer une part équitable pour chaque jour. Et bien sachez que le nombre $\frac{1}{7}$ n'est pas un décimal, pas plus que le nombre $\frac{1}{6}$. En effet si vous posez la division ou que vous utilisez une machine (calculatrice, ordinateur, tablette ou téléphone peu importe) vous verrez que $\frac{1}{7} \simeq 0,142857\dots$ et que cette séquence $142857\dots$ se répètent à l'infini. De même, de façon plus simple, si vous prenez $\frac{1}{6} \simeq 0,16\dots$ les 6 se répètent à l'infini.

Posons $x = 0,16\dots6\dots$ où les 6 se répètent à l'infini. Multiplions par 100 ainsi on obtient $100x = 16,6\dots6\dots$. Multiplions par 10 ainsi on obtient $10x = 1,6\dots6\dots$. Faisons maintenant la soustraction $90x = 15$ d'où $x = \frac{15}{90} = \frac{3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{1}{6}$. Le nombre $\frac{1}{6}$ est bien un nombre qui sort de la définition des décimaux et justifie une nouvelle classe de nombres, les nombres rationnels (ratio en latin veut dire quotient).

Les nombres rationnels sont notés

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

Ici le numérateur a est un entier relatif et le dénominateur b est un entier naturel strictement positif parce qu'on ne peut pas diviser par zéro.

Prouvons ce dernier résultat. Imaginez que l'on puisse trouver un nombre entier a qui soit divisible par zéro. Alors il existerait un entier q tel que $a = 0 \times q$. Le problème c'est que zéro est un élément absorbant, tel le trou noir de la multiplication, tout nombre multiplié par zéro donne zéro. La division par zéro n'a donc pas de sens.

Donnons quelques exemples de nombre rationnels :

$$(a,b) = (1,2) \Rightarrow \frac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{D} \tag{9}$$

$$(a,b) = (8,9) \Rightarrow \frac{8}{9} = 0,8\dots8\dots \in \mathbb{Q} \tag{10}$$

$$(a,b) = (3,4) \Rightarrow \frac{3}{4} = 0,75 \in \mathbb{D} \tag{11}$$

$$(a,b) = (19,11) \Rightarrow \frac{19}{11} = 1,72\dots \in \mathbb{Q} \tag{12}$$

$$(a,b) = (2,7) \Rightarrow \frac{2}{7} = 0,285714\dots \in \mathbb{Q} \tag{13}$$

Les nombres rationnels sont très intéressants mais ils restent insuffisants pour capturer le réel. Imaginez que l'écran de votre ordinateur portable soit un rectangle de longueur 16 cm pour une largeur de 9 cm (c'est le fameux format

16/9). Alors pour calculer la diagonale nous allons utiliser le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} d^2 &= 16^2 + 9^2 \\ d^2 &= 256 + 81 \\ d^2 &= 337 \\ d &= \sqrt{337} \simeq 18,36 \end{aligned}$$

Tout d'abord le nombre 337 est un nombre premier (prouvez-le, c'est un bon exercice). Et ensuite la racine carrée d'un nombre premier ne peut pas s'écrire sous la forme d'un nombre rationnel.

Pour des raisons de concordance avec le programme de seconde je vous propose de démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel et pour le résultat (plus général) énoncé précédemment, je vous renvoie aux approfondissements (mais vous pouvez déjà commencer à chercher).

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel on va utiliser plusieurs types de raisonnement. Tout d'abord nous allons utiliser le raisonnement par l'absurde. Le raisonnement par l'absurde repose sur un principe de la logique classique qui dit qu'une affirmation est soit vraie soit fausse. En logique mathématique on ne s'occupe que de ce genre d'affirmation donc nous sommes dans un système **beaucoup** plus simple que la réalité. Du coup, si le contraire de ce que je veux montrer est faux alors ce que je veux montrer est vrai. Prenons un exemple concret un peu simpliste, si ce n'est pas le matin alors c'est l'après-midi. Si vous n'êtes pas majeur alors vous êtes mineur. Ce genre de logique fonctionne bien avec les systèmes binaires.

Revenons à nos moutons, on veut montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel donc on va supposons le contraire et montrer que ce contraire est faux donc que notre affirmation sera vraie.

Supposons donc par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel donc d'après la définition de $\mathbb{Q}$ il devrait exister un entier relatif a et un entier naturel strictement positif b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Comme toute fraction peut se ramener (après simplification) à une fraction irréductible on peut donc considérer que a et b n'ont pas de diviseurs communs et que la fraction est irréductible. Dire que a et b n'ont pas de diviseurs communs revient à dire que leur pgcd vaut un c'est-à-dire $pgcd(a, b) = 1$. Le PGCD est le Plus Grand Commun Diviseur. Bon on devrait l'appeler le PGDC parce qu'en français on dit diviseur commun car l'adjectif vient après le nom mais en anglais ils disent *greatest common divisor* et bien souvent les gens importent les concepts anglophones en oubliant les règles du français c'est pour ça que sur certaines calculatrices et logiciels vous pouvez voir GCD ou gcd.

Faisons un bref récapitulatif :

- Objectif : Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel
- Méthode : Raisonnement par l'absurde, on pose $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et avec $pgcd(a, b) = 1$

Du coup, on va élever au carré ce qui nous donne $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et qu'on peut mettre sous la forme $a^2 = 2b^2$.

On peut classer les nombres entiers en deux catégories :

1. Les nombres pairs de la forme $p = 2n$ où n est un entier.
2. Les nombres impairs de la forme $i = 2n + 1$ où n est un entier.

On en déduit que le nombre $a^2 = 2b^2$ appartient à la première catégorie avec $n = b^2$.

Désormais on va avoir besoin d'un résultat intermédiaire qui va faire intervenir un autre type de raisonnement.

Voici le résultat intermédiaire qu'on veut montrer : *si le carré d'un nombre est pair alors le nombre initial est aussi pair.*

On va formaliser cette affirmation :

- A = "le carré d'un nombre est pair"
- B = "le nombre initial est pair"
- $P = A \Rightarrow B$

Le nouveau type de raisonnement qu'on va utiliser s'appelle le raisonnement par contraposée.

Prenons un exemple concret fictif (et simpliste). Imaginez que chaque fois qu'il pleut je prenne mon parapluie (sans **aucune** exception). Si vous me croisez **sans** parapluie alors vous en déduirez qu'il ne pleut pas. C'est une proposition logiquement équivalente à la première formulation.

- A = "Il pleut"
- B = "Je prend mon parapluie"

- $P = A \Rightarrow B$
- non B = "Je n'ai pas de parapluie"
- non A = "Il ne pleut pas"
- $CP(P) = non(B) \Rightarrow non(A)$

Revenons à nos nombres entiers. La contraposée de : "si le carré d'un nombre est pair alors le nombre initial est aussi pair" est "Si le nombre initial est impair alors son carré aussi."

Décomposons :

- A = "le carré d'un nombre est pair"
- B = "le nombre initial est pair"
- $P = A \Rightarrow B$
- non B = "le nombre initial est impair"
- non A = "le carré est impair"
- $CP(P) = non(B) \Rightarrow non(A)$

Ce raisonnement nous permet de ramener la proposition à montrer à une proposition plus simple et qu'on peut montrer directement.

Si le nombre initial est impair alors il est de la forme $i = 2n+1$. Il vient que son carré satisfait :

$$\begin{aligned}
i^2 &= (2n+1)^2 \\
i^2 &= (2n)^2 + 2 \times 2n \times 1 + 1^2 \\
i^2 &= 2(2n^2 + 2n) + 1
\end{aligned}$$

On a bien obtenu un nombre impair. Par équivalence logique la proposition initiale est vraie.

Faisons un bilan d'étape.

- Objectif final : Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel
- Méthode : Raisonnement par l'absurde, on pose $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et avec $pgcd(a,b) = 1$
- Objectif intermédiaire : $a^2 = 2b^2$ est pair donc a est pair.

- Méthode pour l'objectif intermédiaire : raisonnement par contraposée, si a est impair alors a^2 aussi

À ce stade nous avons bien montré que $a^2 = 2b^2$ entraîne que $a = 2n$. De cette nouvelle écriture on tire $a^2 = 4n^2$ et on peut établir une nouvelle égalité $2b^2 = 4n^2$ qui donne $b^2 = 2n^2$. Par conséquent, en utilisant notre résultat intermédiaire, on constate que b est aussi pair.

Mais si a et b sont pairs alors ils sont divisibles par deux ce qui contredit $pgcd(a, b) = 1$. Ce résultat est absurde donc l'hypothèse initiale aussi et finalement $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. CQFD

Bravo à vous si vous avez tout compris. Pour les autres, rassurez-vous, c'est normal que ça chauffe dans votre tête. Vous pouvez déjà revoir cette démonstration en vidéo ici : `https://youtu.be/R_L4NEgIxPM`

Le raisonnement par l'absurde consiste à partir d'une hypothèse contraire à celle qu'on souhaite montrer et ensuite à enchaîner des déductions logiques parfaitement valides jusqu'à aboutir à une contradiction. La chaîne de déductions peut parfois s'avérer (très) longue et impliquer des résultats intermédiaires nécessitant à leur tour (éventuellement) d'autres types de raisonnement.

Dans certains ouvrages, certaines personnes préfèrent admettre les résultats intermédiaires. Dans l'absolu il serait impossible de tout démontrer parce qu'on ne pourrait jamais avancer. Néanmoins il est utile de garder à l'esprit qu'en mathématiques le but du jeu est de démontrer les affirmations sans jamais les prendre pour argent comptant.

Finalement, puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel il doit bien appartenir à un ensemble de nombre et cet ensemble est l'ensemble des nombres réels et on le note $\mathbb{R}$.

Nous avons ainsi la chaîne d'inclusions ensemblistes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Cet ensemble de nombres correspond à l'infinité des points sur une droite et c'est pour cette raison qu'on représentera souvent les nombres réels par une droite graduée qu'on appellera la droite des réels avec 0 au milieu et qui se prolonge vers $+\infty$ à droite et $-\infty$ à gauche.

2.2 Intervalles de $\mathbb{R}$. Notions $+\infty$ et $-\infty$.

Jusqu'à présent nous avons traité essentiellement des égalités (une équation est une égalité). Mais dans de nombreux cas il est intéressant et utile de traiter des inégalités. Donnons quelques exemples issus du monde réel de la vie de tous les jours :

1. Il faut être âgé de plus de 14 ans pour conduire un véhicule de type mobilette ou scooter.
2. Il faut être âgé entre 12 et 25 ans pour bénéficier du tarif jeune à la SNCF.
3. Les films pornographiques sont interdits aux mineurs donc aux gens qui ont un âge inférieur à 18 ans.
4. En boxe anglaise la catégorie de poids pailles concerne les gens dont le poids est inférieur à 47,128 kg (soit 105 livres, source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Boxe_anglaise`)
5. En France, seuls les gens qui ont moins de 10 777€ par an sont exonérés d'impôt (0%), ensuite de 10 778 à 27 478 c'est 11%, puis 30% de 27 479 à 78 570, puis 41% de 78 571 à 168 994 et enfin 45% pour ceux qui ont plus de 168 994 (source : `https://www.service-public.fr/particuliers/vosdroits/F1419`)
6. La limite autorisée du taux d'alcool dans le sang par la loi en 2023 est de 0,5 g/L soit en équivalent 0,25 mg par litre d'air expiré (source : `https://www.legipermis.com/infractions/alcool-permis-conduire.html`)
7. L'IMC (Indice de Masse Corporelle) permet d'établir des catégories pour mesurer l'obésité avec par exemple le début de la surcharge pondérale (surpoids) à partir de 25 kg/m^2 (source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Indice_de_masse_corporelle`)

Traduisons ces exemples concrets en inégalités mathématiques. Dans chaque cas on utilisera la lettre x pour désigner la variable inconnue.

1. $x \geq 14$
2. $12 \leq x \leq 25$
3. $0 < x < 18$
4. $0 < x < 47,128$

5. $0 \leq x \leq 10777$
6. $0 \leq x < 0,5$
7. $x \geq 25$

Ces inégalités peuvent être représentées graphiquement. On peut les interpréter comme des zones délimitées par des bornes inférieures et supérieures. Lorsqu'il n'y a qu'une seule borne apparente alors ça veut dire que l'autre est du type ∞ avec le signe adéquat.

Taduisons ces inégalités en intervalles :

1. $x \geq 14 \iff x \in [14; +\infty[$ on parle d'intervalle fermé.
2. $12 \leq x \leq 25 \iff x \in [12; 25]$ on parle d'intervalle fermé.
3. $0 < x < 18 \iff x \in]0; 18[$ on parle d'intervalle ouvert.
4. $0 < x < 47,128 \iff x \in]0; 47,128[$ on parle d'intervalle ouvert.
5. $0 \leq x \leq 10777 \iff x \in [0; 10777]$ on parle d'intervalle fermé.
6. $0 \leq x < 0,5 \iff x \in [0; 0,5[$ on parle d'intervalle ouvert à droite
7. $x \geq 25 \iff \in [25; +\infty[$ on parle d'intervalle fermé.

Alors ici il s'agissait de modéliser à partir du monde réel donc il y a des bornes implicites qui sont apparues :

1. Jusqu'à présent personne n'a dépassé le record de longévité de Jeanne Calmant qui a vécu 122 ans. Mais comme on je ne peux pas prédire l'avenir alors j'ai décidé de mettre la borne $+\infty$ même si c'est une borne théorique. Néanmoins, certains ont prédit la mort de la mort (c'est le titre d'un livre de Laurent Alexandre).
2. Ici les bornes étaient claires.
3. Là j'ai considéré que l'âge zéro n'est jamais atteint puisque dès l'instant où l'on naît le temps s'écoule. Mais au regard de l'exemple j'aurais même pu mettre une borne inférieure plus grande.
4. Dans cette exemple c'est la même idée, personne n'a un poids de zéro et encore moins quand on pratique la boxe anglaise.
5. Pour les revenus c'est malheureusement différent, il est hélas possible d'avoir zéro revenu. Et pour information, 10 777 par an ça fait moins de 900€ par mois (environ 898,08).

6. Les gens qui ne boivent pas d'alcool peuvent avoir un taux de zéro gramme dans le sang.
7. Comme pour l'âge, le poids maximal n'est pas figé, d'ailleurs on devrait parler de masse parce que le poids est une force qui dépend du champ gravitationnel (la pesanteur) et donc il peut changer en fonction de l'endroit dans l'espace.

Ces exemples concrets avaient pour but de vous montrer pourquoi ce principe de représentation d'ensembles de nombres réels ordonnés peut avoir un intérêt et une utilité.

Les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$ sont les suivants :

1. Les intervalles ouverts à bornes finies $]a;b[$
2. Les intervalles ouverts à gauche à bornes finies $]a;b]$ (on peut aussi les appeler fermés à droite).
3. Les intervalles ouverts à droite à bornes finies $[a;b[$ (on peut aussi les appeler fermés à gauche).
4. Les intervalles ouverts à borne infinie à gauche $]-\infty;b[$
5. Les intervalles ouverts à borne infinie à droite $]a;+\infty[$
6. Les intervalles fermés à borne infinie à gauche $]-\infty;b]$
7. Les intervalles fermés à borne infinie à droite $[a;+\infty[$
8. Les intervalles fermés à bornes finies $[a;b]$
9. L'intervalle ouvert **ET** fermé de l'ensemble des réels tout entier $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

Donnons quelques exemples :

$$\frac{1}{2} \in]0;1[\tag{14}$$
$$1 \in]0;1] \tag{15}$$
$$-\frac{1}{2} \in [-0,5;0[\tag{16}$$
$$-1 \in]-\infty;1[\tag{17}$$
$$\frac{2}{3} \in]0;+\infty[\tag{18}$$
$$\pi \in [3;+\infty[\tag{19}$$
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in [1;2] \tag{20}$$
$$\tau = 2\pi \in \mathbb{R} \tag{21}$$

On peut remarquer que l'ensemble des nombres entiers naturels est inclus dans l'ensemble des nombres réels positifs :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$$

Par contre entre deux entiers naturels il y a une infinité de réels et pour les représenter on utilise un intervalle.

Prenons par exemple les deux plus petits entiers naturels zéro et un. On peut construire un intervalle $I_0 = [0;1]$ qui les contient tous les deux. Le centre de cet intervalle I_0 est un nombre décimal $\frac{1}{2} = 0,5$. Construisons un nouvel interval $I_1 = [0;0,5]$. Le centre de cet intervalle I_1 est un nombre décimal $\dfrac{1}{4} = 0,25$. On pourrait continuer ainsi à l'infini en construisant des intervalles de la forme

$$I_n = \left[0;\frac{1}{2^n}\right]$$

Mais si au lieu de prendre le centre on prenait le premier tiers ? Et bien cette fois on aurait une borne supérieure qui serait un nombre rationnel.

$$J_n = \left[0;\frac{1}{3^n}\right]$$

Et si au lieu de prendre le tiers on divisait par le nombre π ? Et bien cette fois on aurait une borne supérieure qui serait un nombre réel.

$$K_n = \left[0;\frac{1}{\pi^n}\right]$$

Bon dans ce dernier cas j'ai un peu triché parce que π est déjà un réel alors que pours les I_n et les J_n on a pu faire la construction uniquement en utilisant des entiers naturels.

Prenons un peu la mesure de ce que nous faisons. L'intervalle $[0;1]$ a pour longueur 1 de même que l'intervalle $[1;2]$. Mais qu'en est-il de l'intervalle $[-1;0]$? $[-1;1]$? Et de façon générale, comment mesure-t-on la longueur d'un intervalle ?

C'est très simple, un intervalle étant un ensemble ordonné, on mesure sa longueur en soustrayant la borne inférieure à la borne supérieure (que l'intervalle soit ouvert ou fermé).

Il y a donc deux cas de figure :

1. Les bornes a et b sont finies et dans ce cas c'est juste une soustraction normale $|I| = |b - a|$.
2. Au moins l'une des bornes est infinie et dans ce cas $|I| = +\infty$.

Voici quelques exemples :

$$|]-3;3]| = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6 \tag{22}$$
$$|[-5;4]| = 5 - (-4) = 5 + 4 = 9 \tag{23}$$
$$|]-\infty;23]| = +\infty \tag{24}$$
$$|[7;+\infty[| = +\infty \tag{25}$$
$$|]-\infty;+\infty]| = +\infty \tag{26}$$

La longueur d'un intervalle est aussi appelée son amplitude. Par exemple le nombre π appartient à l'intervalle $[3,14;3,15]$ qui a pour amplitude $10^{-2} = 0,01$. Dit autrement, le nombre π est compris entre $3,14$ et $3,15$ à 10^{-2} près.

Faisons un petit exercice. Pour les nombres suivants trouver des intervalles d'amplitude 1 puis 2 et enfin 3 auquels ils appartiennent :

1. $\frac{1}{3}$
2. $\sqrt{2}$
3. $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
4. π
5. $\tau = 2\pi$

Jouez le jeu en cherchant par vous même vous progresserez alors que si vous regardez la solution directement il vous progression sera nulle.

1. À l'aide d'une machine calculez les décimales du nombre d'or

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. Considérez la suite de nombres : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...
3. Établir la règle de construction de la suite.
4. Calculer les quotients successifs en prenant comme numérateur le suivant et comme dénominateur le prédécesseur ainsi $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots$.
5. La suite de nombre de la question 2 est connue sous le nom de suite de Fibonacci (mathématicien italien du XIIème siècle qui a appris l'usage des chiffres indo-arabes grâce à son père qui commerçait avec des marchands arabes près d'Alger). Combien de termes de cette suite faut-il calculer pour approcher le nombre d'or à 10^{-5} près ? Vous donnerez les intervalles successifs.

Faisons un petit jeu. Voici une série de nombres particuliers :

1. $u = 0,1\ldots$ avec une infinité de 1
2. $v = 0,12\ldots$ avec une infinité de 12
3. $w = 0,123\ldots$ avec une infinité de 123
4. $x = 0,1234\ldots$ avec une infinité de 1234
5. $y = 0,12345\ldots$ avec une infinité de 12345

Pour chacun de ces nombres on va donner un intervalle d'amplitude égale à la position de la dernière décimale distincte (donc 0,1 pour u, 0,01 pour v, 0,001 pour w et ainsi de suite) et centré en ce nombre. Puis on va déterminer la fraction qui le définit.

Voilà pour la première partie de la question

1. $u = 0,1\cdots \in I_u = [0,09; 0,19]$ en effet $0,19 - 0,09 = 0,1$
2. $v = 0,12\cdots \in I_v = [0,118; 0,128]$ en effet $0,128 - 0,118 = 0,01$
3. $w = 0,123\cdots \in I_w = [0,1227; 0,1237]$ en effet $0,1237 - 0,1227 = 0,001$

4. $x = 0,1234\cdots \in I_x = [0,12336; 0,12346]$ en effet $0,12346 - 0,12336 = 0,0001$

5. $y = 0,12345\cdots \in I_y = [0,123455; 0,123465]$ en effet $0,123465 - 0,123455 = 0,0001$

Maintenant occupons-nous de la seconde partie.

1. $10u = 1,1\dots$ donc $10u - u = 1$ d'où
$$u = \frac{1}{9} \in I_u = [0,09; 0,19]$$

2. $100v = 12,12\dots$ donc $100v - v = 12$ d'où
$$v = \frac{12}{99} = \frac{4}{33} \in I_v = [0,118; 0,128]$$

3. $1000w = 123,123\dots$ donc $1000w - w = 123$ d'où
$$w = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} \in I_w = [0,1227; 0,1237]$$

4. $10000x = 1234,1234\dots$ donc $10000x - x = 1234$ d'où
$$x = \frac{1234}{9999} \in I_x = [0,12336; 0,12346]$$

5. $100000y = 12345,12345\dots$ donc $100000y - y = 12345$ d'où
$$y = \frac{12345}{99999} \in I_y = [0,123455; 0,123465]$$

2.3 Notation |a|. Distance entre deux nombres réels.

2.4 Représentation de l'intervalle $[a-r, a+r]$ puis caractérisation par la condition $|x-a| \leq r$

2.5 Ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux. Encadrement décimal d'un nombre réel à 10^{-n} près

2.6 Ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nombres irrationnels ; exemples fournis par la géométrie, par exemple $\sqrt{2}$ et π

3 Capacités attendues

4 Démonstrations

5 Exemple d'algorithme

6 Approfondissements possibles

7 Après ce livre