

# Aufgabenblatt 1 (Theorie)

wr@isg.cs.uni-magdeburg.de

SoSe 2023

## Allgemeine Hinweise:

- Die Aufgaben sind von jeder/m Studierenden *einzel*n zu bearbeiten und abzugeben (Plagiate werden entsprechend der Studienordnung geahndet).
- Bei allen Aufgaben muss ein nachvollziehbarer und vollständiger Lösungsweg angegeben werden.
- Empfehlenswert ist die Verwendung von LaTeX. Eingescannte handschriftliche (gut lesbare!) Lösungen oder die Verwendung anderer Textsatzsysteme sind auch möglich.
- Bitte reichen Sie Ihre Lösungen in Form eines einzelnen PDF-Dokuments (max. 2MB) über Ihr git repository ein.

## Aufgabe 1: Lineare Gleichungssysteme (5 Punkte)

### Aufgabe 1.1: Gauss-Elimination mit Pivoting (4 Punkte)

Erläutern Sie anhand des folgenden  $2 \times 2$  Gleichungssystems die Notwendigkeit von Pivoting:

$$0.00025 x_1 + 2.32 x_2 = 1.387 \quad (1a)$$

$$10.126 x_1 + 1.257 x_2 = 0.586. \quad (1b)$$

Berechnen Sie dazu die Lösung des Gleichungssystems im Gleitkommazahl-Format  $\mathbb{G}(10, 2, 5)$  (die Abbildung  $G : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{G}(10, 2, 5)$  soll entsprechend der üblichen arithmetischen Regeln für das Runden erfolgen) sowohl mit als auch ohne Pivoting und bestimmen Sie jeweils den relativen Fehler für  $x_1$  und  $x_2$  bzgl. der exakten Lösung dargestellt im Gleitkommazahl-Format.

### Aufgabe 1.2: Lösung von linearen Gleichungssystemen (1 Punkt)

Vergleichen Sie Gauß-Elimination und die Verwendung der Cholesky-Zerlegung zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Geben Sie mindestens zwei Unterschiede an. Ist eines der Verfahren zu bevorzugen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

## Aufgabe 2: Ausgleichsrechnung (5 Punkte)

### Aufgabe 2.1: Normalengleichung (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrix  $A^T A$  in der Normalengleichung die Voraussetzungen für die Cholesky-Zerlegung erfüllt.

### Aufgabe 2.2: Eindeutigkeit der Lösung von linearen Gleichungssystemen (1 Punkt)

Sei  $Ax = b$  ein eindeutig lösbares Gleichungssystem mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b, x \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass die Lösung der Normalengleichung in diesem Fall der Lösung des Gleichungssystems entspricht.

### Aufgabe 2.3: Abstand von Geraden im Raum (2 Punkte)

Gegeben seien zwei Geraden in  $\mathbb{R}^3$ :

$$g_1 : x = b_1 + t r_1 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2a)$$

$$g_2 : x = b_2 + s r_2 = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.7 \\ 1.3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0.35 \\ 1.5 \\ -0.7 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (2b)$$

Stellen Sie mit Hilfe der Ausgleichsrechnung ein lineares Gleichungssystem auf, mit welchem Sie für zwei beliebige Geraden die zwei Punkte auf den Geraden bestimmen können, für welcher ihr Abstand  $d(g_1(t), g_2(s)) = \|g_1(t) - g_2(s)\|$  am geringsten ist. Berechnen Sie anschließend die Punkte und den Abstand für die gegebenen Geraden.