2.1 $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = U \Sigma V^T$$

$$A^{-*} = V \Sigma^{-1} U^T = A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$U \Sigma \cancel{V^T \cdot V} \Sigma^{-1} U^T \stackrel{!}{=} I$$

V ist orthogonal
$V^T V = I$

$$U \cancel{\Sigma \Sigma^{-1}} U^T = I$$

$$\cancel{U U^T} = I$$

auch U ist orthogonal

$$I = I \quad \square$$

2.2

SVD: $A = U\Sigma V^T$

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T \cdot (U\Sigma V^T)$$

$$V\Sigma^T \cancel{U^T U} \Sigma V^T$$

orthogonal

$$V\Sigma^T\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

(da Σ diagonal ist)

Σ^2 enthält die Eigenwerte von $A^T A$

Bei AA^T:

$$A A^T = (U \Sigma V^T) \cdot (U \Sigma V^T)^T$$

$$= U \cdot \Sigma \cdot \cancel{V^T \cdot V} \cdot \Sigma^{\cancel{T}} \cdot U^T$$

$$= U \cdot \Sigma^2 \cdot U^T$$

Σ^2 enthält also die Eigenwerte von AA^T

Eigenschaften:

- $A \cdot A^T$ und $A^T A$ sind immer symmetrisch
  ↳ dadurch sind alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$
- Die Singulärwerte sind $\in \mathbb{R}$ g.d.w. $A^T A$ positiv semi definit ist
  ↳ $A^T A$ ist positiv semidefinit, wenn A nur reelle Einträge hat

- Das Produkt der Singulärwerte von A ist die Wurzel von $\det(AA^T)$

1.1

Sei $M = A^T A \quad M \in R^{n \times n}$

M ist damit immer symmetrisch und alle Eigenwerte von M sind $\in \mathbb{R}$

Die Eigenwerte sind außerdem ≥ 0 g.d.w. $z^T M z \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$

1.2

$A_v = vv^T$

A_v ist somit immer quadratisch und symmetrisch

$A_v = Q \Lambda Q^{-1} = Q \Lambda Q^T$

da $v \in R^n$ ist

wird A_v immer reel-symmetrisch sein und es gilt die Eigenzerlegung

$A_v = Q \Lambda Q^T$