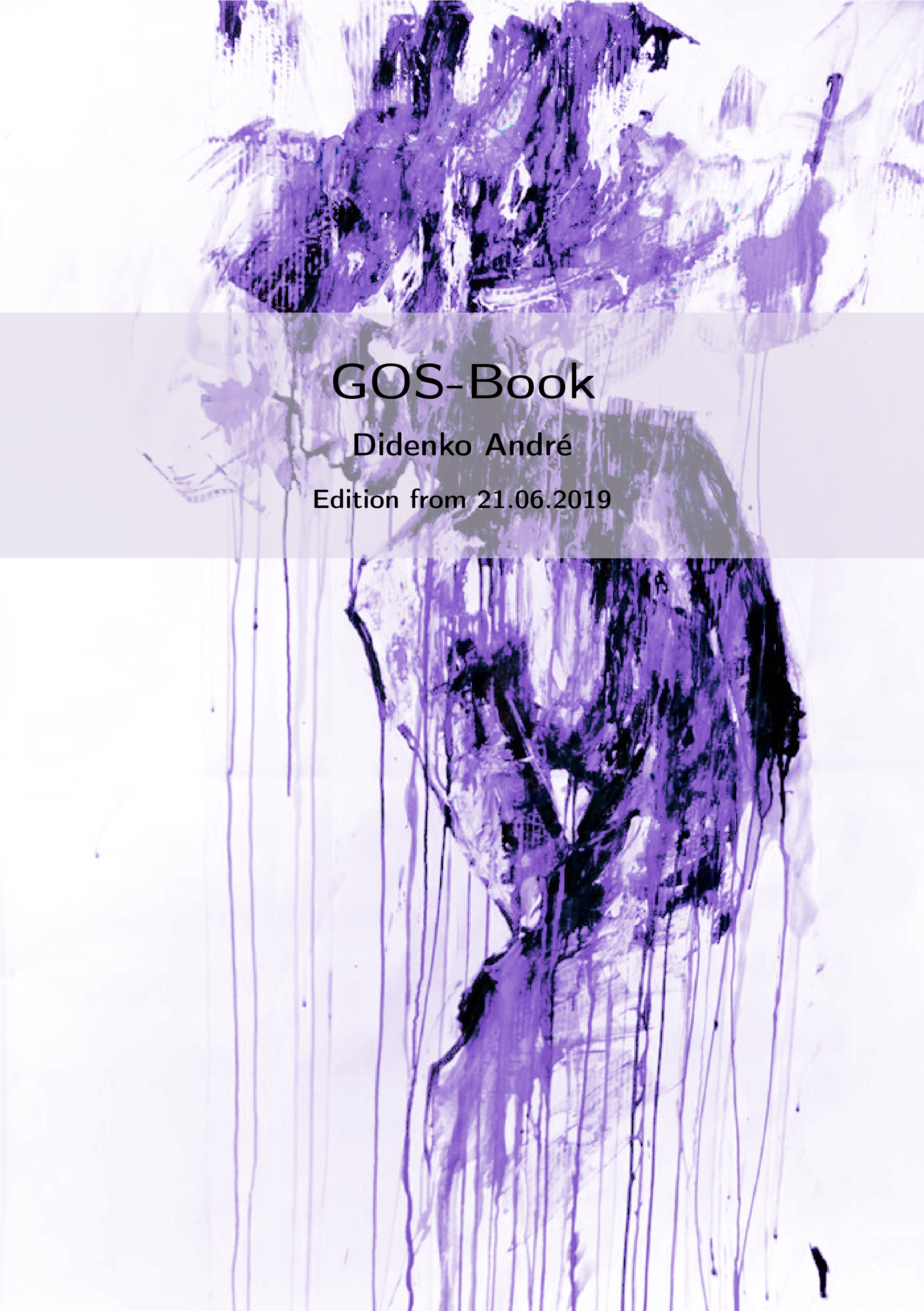


GOS-Book

Didenko André

Edition from 21.06.2019

Умереть не страшно, страшно не жить.

Виктор Гюго

МФТИ

Московский Физико—Технический Институт

Подготовка к ГОСу по Матану

Sapere aude

Диденко Андрей

Редакция от 21.06.2019 (22:42)

Полезные ссылки

► Последняя версия книги в pdf-формате:
GOS-Book.github.io/GOS-Book.pdf

► Web-site, посвященный данной книге:
GOS-Book.github.io/

► Дополнительные материалы, полезные при подготовке как к *устному* экзамену, так и к *письменному* доступны по ссылке:
drive.google.com/...

► Литература по курсам доступна по ссылке:
drive.google.com/...

► Анкета о ГОСе для ознакомления, но также прошу вас заполнить ее после сдачи экзамена:
drive.google.com/...

► Репозиторий, в котором хранится этот документ:
/GOS-Book/GOS-Book.github.io

► По любым вопросам касательно книги, также если вы хотите помочь в написании материала, просьба обращаться в личные сообщения:
/didenko_andre *
/didenko_andre*

Текущий статус книги

► В данный момент потихоньку переписываю книгу к новой программе 2018 года и совершенствую остальной материал. Но срочно нужна помощь в написании и редактировании билетов. Поэтому если кто-то хочет помочь — прошу написать мне.

► Я крайне не рекомендую использовать данное пособие как ***основную*** литературу во время подготовки к Государственному экзамену.

I ♡ LaTeX

2016

Оглавление

X Приложения

Список литературы и используемые материалы

Предоставляю список литературы, которыми мы пользовались в основном для написания билетов.

Кстати говоря, почти всю перечисленную ниже литературу, вы сможете получить по следующей ссылке: *drive.google.com/...*.

I Введение в математический анализ

- Лекции Сакбаева В.Ж.
- Учебное пособие Яковлева Г.Н. “Лекции по математическому анализу”
- Учебное пособие Бесова О.В. “Лекции по математическому анализу”
- Учебное пособие Иванова Г.Е. “Лекции по математическому анализу”
- Учебное пособие Кудрявцева Л.Д. “Курс математического анализа”
- Семинарские заметки Яковлевой Т.Х.

II Многомерный анализ, интегралы и ряды.

- Лекции Сакбаева В.Ж.
- Учебное пособие Яковлева Г.Н. “Лекции по математическому анализу”

III Кратные интегралы и теория поля.

- Лекции Сакбаева В.Ж.
- Учебное пособие Яковлева Г.Н. “Лекции по математическому анализу”
- Учебное пособие Петровича А.Ю. “Лекции по математическому анализу”

IV Гармонический анализ.

- Лекции Сакбаева В.Ж.
- Учебное пособие Яковлева Г.Н. “Лекции по математическому анализу”

V Аналитическая геометрия.

- Лекции Чубарова И.А.
- Учебное Пособие Беклемишева Д.В. “Курс аналитической геометрии и линейной алгебры”.

VI Линейная алгебра.

- Лекции Чубарова И.А.
- Учебное Пособие Беклемишева Д.В. “Курс аналитической геометрии и линейной алгебры”.

VII Дифференциальные уравнения.

- Учебное пособие Романко В.К. “Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления”.

VIII Теория вероятностей.

▶ Лекции Райгородского А.М. (*lectoriy.mipt.ru/...*) и (*youtube.com/...*[1])
▶ Пособие Севастьянова Б.А. “Курс теории вероятностей и математической статистики”
▶ Учебное пособие Гнеденко Б.В. “Курс теории вероятностей”
▶ Учебное пособие Захарова В.К., Севастьянова Б.А., Чистякова В.П. “Теория вероятностей”
▶ Пособие Чистякова В.П. “Курс теории вероятностей”
▶ Семинарские заметки Карлова М.И.

IX Теория функций комплексного переменного.

▶ Учебное пособие Половинкина Е.С. “Курс лекций по теории функции комплексного переменного”
▶ Лекции Карлова М.И. (*lectoriy.mipt.ru/...*)
▶ Семинарские заметки Агаханова Н.Х.
▶ Шабат Б.В. “Введение в комплексный анализ”

[1] На всякий случай предупрежу, что этот набор лекций с Школы Анализа Данных имеет мало общего с ГОСом, как и большинство курсов Райгородского в ШАДе и на *coursera.org*, но полезные вещи, конечно, можно почерпнуть.

Предисловие

Здравствуй, мой дорогой читатель!

Пособие, которое ты сейчас читаешь, — результат титанического труда многих людей. И мы все верим, что результат получился более чем достойный.

Цель данной книги – облегчить подготовку студентов Московского Физико—Технического Института к устному выпускному квалификационному государственному экзамену по математике, попросту к ГОСу. Как вы уже поняли, оглавление представляет собой программу к ГОСу 2016 года. Заметьте, что оно «кликабельно» в pdf-версии данной книги, что упрощает работу с книгой. И «кликабельно» не только оглавление данной книги, но и всевозможные числа и названия, указывающие на теоремы, которые уже использовались ранее в книге, а также объекты в мини-содержаниях перед главами. Надеюсь, это кому-нибудь поможет.

Нужно отметить, что мы писали билеты, существенно опираясь на учебные пособия, лекции различных преподавателей. Список соответствия билетов из программы и названий курсов от кафедры высшей математики материалам, которыми мы в основном пользовались смотрите ранее, в списке литературы.

Мы были предельно внимательны к составлению данной книги, стараясь уменьшить количество опечаток и повысить качество излагаемого материала. Но мы отказываемся от ответственности за всевозможные недочеты в этой книге (пожалуй, главный недочет этой книги — чрезмерная избыточность в некоторых местах, а иногда, наоборот, недостаток материала), ведь мы, на данный момент, всего лишь студенты, а главное — люди, которые могут ошибаться. И поэтому, прошу вас не забывать отправлять нам (ссылки ниже) сообщения о любых неточностях, опечатках, ошибках, недочетах. Также пишите, если хотите дать совет или выразить любые личные пожелания. Вместе с вами можно довести эту книгу до очень хорошего пособия.

Необходимо сразу предостеречь читателя, что данное пособие является именно кратким пересказом курса математики на физтехе, охватывающим вопросы к ГОСу. Пересказ должен быть цельным, а не отрывочным — как предлагает программа ГОСа, поэтому материал в билетах порой является избыточным для рассказа билета на самом экзамене. Например, я бы не стал сам в первом билете говорить об аксиоматике множества действительных чисел, однако поместить ее в это место в книге я просто обязан для полной картины мира. Однако оставляю читателю полную свободу выбора тем разговора с преподавателем. Названия глав — это лишь названия билетов, контрольные точки, к которым плавно материал книги пытается подвести читателя.

Не могу не отметить доброжелательного и внимательного отношения всех студентов МФТИ к этому пособию. Хочу сказать всем, кто присылал сообщения об опечатках и ошибках: “Спасибо”. Также хочется выразить особую благодарность Кудашову Аркадию, Лузянину Артемию, Проскину Роману, Вербе Глебу и Браславскому Илье за непосредственное соучастие в написании этой книги и выразить признательность Брицыну Евгению и Дроботу Олегу за многочисленные комментарии и исправления.

Не обошлось даже без участия преподавательского состава МФТИ. Так, например, Максим Широбоков, преподаватель теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики, прочитал билеты по теории вероятностей, оставил важные и ценные комментарии, и в ходе долгой дискуссии после редактирования билетов одобрил последние. За это все я очень благодарен ему.

Также Чубаров Игорь Андреевич на своей очной консультации упомянул, что читал это пособие, и сказал, что билеты по его предмету (аналитическая геометрия и линейная алгебра) написаны хорошо.

Мне лишь остается выразить надежду, что настоящее пособие поможет студентам при изучении математики в целом и подготовке к ГОСу. Но все же я настоятельно рекомендую пользоваться не только данным пособием при подготовке к ГОСу.

Желаю всем отличных результатов на ГОСе.

Диденко Андрей

О ГОСе[2]

В первую очередь, нужно рассказать о процедуре проведения выпускного квалификационного государственного экзамена по математике в МФТИ глазами студента третьего курса.

Процедура проведения этого экзамена почти ничем не отличается от обычных экзаменов кафедры высшей математики. Лично я искренне считаю, что успех на этом экзамене зависит, прежде всего, от вашей удачи, затем от уровня подготовки и, напоследок, от того, насколько вы умеете «вертеться», впрочем, как и на протяжении всей жизни на Физтехе...

Сначала нас ждала письменная работа, в которой было много задач, порядка двадцати. На нее отводилось довольно малое количество времени (три астрономических часа, т.е. 180 минут). На ней присутствовало 2–3 преподавателя, которые смотрели за нами в силу своих возможностей и желаний. К тому же, у них был ручной металлоискатель, которым преподаватель неловко тыкала в студентов в моей аудитории. К слову, пищит он неприятно!

Конечно же, рекомендую тщательно подготовиться к письменному экзамену, прорешать множество вариантов, посмотреть консультации преподавателей по решению задач и отнестись к ним лишь рекомендательно, потому что каждый год кафедра высшей математики преподносит некоторые сюрпризы, например, появляются задачи, о которых на консультациях преподаватели говорят: «Не будет», «Маловероятно», «Это слишком сложно для ГОСа». Получить достойные баллы при должной подготовке вполне реально. Разбалловку рассчитывают, основываясь на результатах всех студентов (подгоняя под распределение Гаусса, как рассказывал Карлов М.И.), в наш год было так: около 40 баллов из 68 для получения оценки «*отлично* (10)» за письменный экзамен.

Влияние этой письменной работы, как и на всех экзаменах вышмата, зависит от преподавателей, к которым вы попадете на устном экзамене. Некоторые считают эту оценку барьером, выше которого нельзя ставить оценку в зачетку, некоторые считают среднее арифметическое по всем оценкам от кафедры высшей математики и как-то к ним прибавляют оценку за письменный экзамен, некоторые не обращают внимания вовсе, некоторые принимают оценку за примерный уровень подготовки и спрашивают, основываясь на этом. Все, как всегда, не определено заранее.

Перейдем к обсуждению устного экзамена, который проходит через несколько дней после письменного. Многие после ГОСа по физике удивляются, что устный экзамен по математике проходит в больших аудиториях, таких как Актовый Зал, Большая Физическая, 117 ГК и прочие, но на самом деле, ничего удивительного. Как оказалось, это самый обычный экзамен от кафедры вышмата с некоторыми особенностями, о которых

[2] Заметим, что этот рассказ описывает реальные события, произошедшие в 2016 году. Возможно, что-то поменялось, и информация здесь уже не актуальна (а может, и сама книга уже не актуальна).

ниже. Конечно же, этот экзамен — это один из самых больших по объему материалов для подготовки, поэтому усердно работайте, постарайтесь хорошо подготовиться, надеюсь, моя книжка вам поможет.

Преподаватели собираются к 9 часам в аудитории и мило общаются между собой. На разных факультетах, как я понимаю, процедура ГОСа немножко разная, например, деканат может прийти и смотреть, как бы кого не отправили с пересдачей (да, пересдачи на ГОСе — большая, нет, огромная редкость, и даже в этом случае за вас деканат, студенты и остальные преподаватели заступятся), может прийти секретарь из деканата и заниматься бумажной работой, освободив одного преподавателя от этих дел. В 9 часов запускают первые группы студентов, раздают билеты и отправляют вас на задние парты. Там вы пишете билет отведенный час, причем первые полчаса преподаватели делятся на комиссии (которые состоят либо из одного, либо из двух человек), получают бумажки, решают всякие бюрократические проблемы и прочее, поэтому все слегка заняты и обращают меньше внимания на студентов в эти первые полчаса после первого захода, а для остальных заходов — так вообще уже будут иметь студентов для допроса на математические темы. В какой-то момент вашу фамилию называет один из двух преподавателей, который и будет принимать у вас экзамен, и вы идете навстречу своей судьбе. Продолжаете писать билет неподалеку от непосредственно вашей комиссии.

В очередной раз подчеркну, что процесс вашего экзамена во многом определяется преподавателями, которые вас слушают, а судьба вам случайно подкидывает их. На ГОСе нельзя проситься к преподавателям, а у нас вроде никто и не пытался. Преподаватели бывают разные: у всех разное отношение к студентам, к самому ГОСу. У некоторых преподавателей есть свои любимые темы, а у некоторых, наоборот, темы, которые они совсем не помнят. Так, десятки студентов жаловались, что некоторые преподаватели плохо помнят материал из теории вероятностей, и получались весьма нелепые ситуации. Вас слушают два преподавателя (в большинстве случаев), и оба ведут себя так, как будто они просто принимают у вас самый обычный экзамен[3]. Отличие ГОСа от других экзаменов состоит в том, что для каждого студента заводится так называемое личное дело, которое представляет из себя листик с анкетой. Один из этих преподавателей заполняет его касательно вас. Фамилия, имя, отчество, номер билета, вопросы в билете, какие были дополнительные вопросы, как вы ответили на все, какое общее впечатление о студенте и самое главное, *рекомендуемая оценка* за ГОС (которую они выбирают лично, основываясь на чем-угодно) — все это есть в этой анкете.

Итак, вы садитесь к преподавателю, он вам выдает вашу контрольную работу. Далее, эти два преподавателя спрашивают ваш билет, как они умеют это делать. После они задают дополнительные вопросы, которые по формату ГОСа должны быть либо очень простыми задачами, наподобие посчитать собственные числа у матрицы 2×2, либо прямо формулировка какой-нибудь хорошей теоремы, например, Стокса (формально, у них

[3] Рекомендую ознакомиться с этой анкетой о ГОСе на гугл-диске docs.google.com/... и тоже заполнить ее по окончанию ГОСа

даже есть список рекомендуемых вопросов). Но преподаватели бывают разные. Кстати, еще одна особенность ГОСа — вы сидите между этими преподавателями, и они вас слушают непрерывно 20–30 минут. Формат не позволяет давать задачи на подумать, не позволяет спрашивать сразу несколько человек. Вы находитесь один против двоих преподавателей, и вам деваться некуда. Конечно, за редким исключением, когда комиссия состоит из одного человека, или кто-то отлучится кофе попить, или телефонный звонок преподавателю прервет ваш экзамен на несколько минут. Все равно здесь действует система очереди — пока один не ответил до конца, другого не пускают. Хотя, может, некоторые преподаватели нарушают этот порядок. После дополнительных вопросов вас отпускают домой, перед этим вы можете попробовать спросить у преподавателя рекомендуемую оценку или подглядеть ее в той анкете.

Как только комиссии послушали всех студентов — начинается заседание комиссий. Здесь оглашаются рекомендуемые оценки, и поскольку на ГОС преимущественно приглашаются люди, которые уже работали на вашем факультете, т.е. лекторы и семинаристы, то, скорей всего, там будет несколько человек, которые вас знают и помнят, они могут немного подискутировать о данной оценке. В итоге, ставят в зачетку рекомендуемую оценку или измененную оценку, если средний балл сильно отличается от этой оценки и найдутся преподаватели, которые будут защищать (или губить) вас на этом заседании.

Итак, вы возвращаетесь обратно в институт к 16–17 часам. Ждете приглашения в ту же аудиторию. Далее, председатель комиссии зачитывает оценки. Все аплодируют, смеются, радуются за сдачу экзамена, кто-то огорчен своей оценкой. Но все рады окончанию сессии, учебного года. И все дружно уходят из аудитории, забирая зачетки с собой с росписями всех преподавателей кафедры высшей математики, которые были у вас на экзамене.

Так и заканчивается учебный год. Целый период жизни на Физтехе. Все прощаются с кафедрой высшей математики. Все уходят на летний отдых или по делам. Но никого уже не трогает сессия.

Диденко Андрей

PS. Возможно, вас интересует вопрос, какую оценку получил основной автор данного пособия на ГОСе?

Буду честным, я получил оценку «*отлично* (8)».

За письменную работу я получил «*отлично* (9)» — наошибался исключительно в арифметике аж на 20 с лишним баллов из 68. Вообще, это отдельная тема для дискуссий: почему арифметические ошибки так сильно влияют (аж треть баллов в моем случае)? Такое чувство, что больше половины Физтеха имели бы полный балл за выполненные ими задачи, если бы преподаватели мягко относились к арифметике. Ожидается, что будут проверять наши знания по высшей математике, а в итоге, снимают баллы за банальные опечатки в такой сложной и напряженной работе. Хотя с другой стороны, какой разговор о матанализе может идти с человеком, который на письменном экзамене пишет что-нибудь вроде $2+2=5$... В общем, читатель, будь внимателен и максимально собран на письменной работе и не повторяй ошибок автора данной книги. Но на самом деле, девятка меня вполне устраивала, для меня нет принципиальной разницы между градациями оценки «*отлично*».

Устный экзамен у меня принимал Шаньков В.В.. О нем я слышал много как положительных, так и отрицательных отзывов. Однако, не успел я еще подойти к нему, как он заявил на всю аудиторию, обращаясь ко мне: «Бездарность!» Не могу дать ответ, почему (разве что, моя письменная работа его чем-то расстроила), но, безусловно, я и даже некоторые преподаватели были шокированы данной его выходкой. Свой билет я знал отлично. Однако, если читатель знает Шанькова, то, понимает, что уже переубедить его в том, что я знаю математику, было очень сложно. Хотя может быть, он прав насчет моих знаний. При рассказе билета он немного давил, говорил различные колкости в мой адрес. Я даже растерялся чутка от его весьма своеобразных манер поведения и необычного чувства юмора. Разве можно было ожидать обычный прием экзамена после того, как он назвал меня бездарностью на виду у всего факультета? По окончании, он поставил мне в графу рекомендуемая оценка «*хорошо* (6)».

“Кто же будет читать пособие для подготовки к ГОСу от человека, который сам получил «*хорошо* (6)»?” — подумал я и слегка расстроился тому обстоятельству, что больше читателей мне не видать. Возможно, надо было больше готовиться самому, а не писать данное пособие, тем более местами оно не ахти. Однако, о моей сдаче экзамена от моих друзей узнала моя любимая семинаристка, Яковлева Тамара Харитоновна. Два года она мучилась, чтобы научить нашу группу всей прелести матанализа! На заседании комиссий она и заступилась за меня, рассказала Шанькову В.В. и комиссиям, что я очень старательный мальчик и что средний балл по математическим дисциплинам у меня около *9.5*. В итоге, мне в зачетку поставили «*отлично* (8)».

Святая женщина!

Обозначения и элементы теории множеств

Для сокращения записи используются следующие обозначения:

$\forall$ — квантор всеобщности «для любого», «для каждого», «для всех»;
$\exists$ — квантор существования «существует», «найдется»;
$:$ — логическая связка «такой, что», «такие, что»;
$\triangleq$ — «по обозначению равно»;
$\to$ — «соответствует», «поставлено в соответствие» или «стремится», «при стремлении»;
$\Rightarrow$ — логическая связка «следует»;
$\Longleftrightarrow$ — логическая связка «равносильно», «тогда и только тогда».

Множество является одним из исходных понятий в математике, оно не определяется. Множество состоит из объектов, которые принято называть *элементами*. Вместо слова «множество» иногда говорят *«набор»*, *«совокупность»*, *«собрание»*. Вводится также пустое множество, обозначаемое символом $\varnothing$, как множество, не содержащее ни одного элемента. Множества часто обозначают прописными буквами X, Y, Z, $\ldots$, а элементы множеств — строчными. Запись $x = y$ означает, что и x, и y — это один и тот же элемент. Запись $x \neq y$ означает обратное. Запись $x \in X$, $X \ni x$ означает, что *элемент x содержится во множестве X*, *принадлежит X*, *множество X содержит элемент x*. Запись $x \notin X$ означает, что множество X не содержит элемент x. Причем

Аксиома 1. Для любого x из множества X и любого множества Y выполняется одно и только одно из двух условий: $x \in Y$ или $x \notin Y$.

Определение 1. Множество Y называется *подмножеством* множества X, если любой элемент множества Y является элементом множества X. Обозначается $Y \subset X$, $X \supset Y$.

Заметим, что с помощью квантора $\forall$ это можно записать следующим образом. Условие $Y \subset X$ выполняется, если $\forall y \in Y \quad y \in X$.

Определение 2. Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то множества X и Y называют *равными* между собой и пишут $X = Y$.

При определении новых множеств часто используют:

1. Метод перечисления:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \text{ например, } X = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\};$$

2. Метод наложения условия:

$$X=\{x \mid \text{выполняется некоторое условие для } x\}, \text{ например, } X=\{x \mid x^2<1\}.$$

Определение 3. $Z = X \cup Y = \{z \mid z \in X$ или $z \in Y\}$ (*объединение* множеств X и Y) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств X, Y.

Определение 4. $Z = X \cap Y = \{z \mid z \in X$ и $z \in Y\}$ (*пересечение* множеств X и Y) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству X, так и множеству Y.

Определение 5. $Z = X \setminus Y = \{z \mid z \in X$ и $z \notin Y\}$ (*дополнение* множества Y до X) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит множеству x, но при этом одновременно не принадлежит Y.

Определение 6. Пусть теперь заданы множества $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. Множество, состоящее из двух элементов $x \in X$ и $y \in Y$, называется *парой* $\{x,\ y\}$ элементов x, y.

Определение 7. Пара вида $\{x,\ \{x,\ y\}\}$, где $x \in X$, $y \in Y$, $\{x,\ y\}$ — пара элементов x, y, называется *упорядоченной парой* элементов x и y. Элемент x называется первым элементом упорядоченной пары $\{x,\ \{x,\ y\}\}$, а элемент y — вторым. Упорядоченная пара $\{x,\ \{x,\ y\}\}$ обозначается через (x, y). В дальнейшем под парой обычно понимается упорядоченная пара.

Определение 8. Множество всех упорядоченных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называется *прямым* (*декартовым*) *произведением множеств* X и Y и обозначается через $X \times Y$.

При этом не предполагается, что обязательно множество X отлично от множества Y, т.е. возможен и случай, когда $X = Y$.

Для моей дорогой и любимой...

Введение в математический анализ

1. Теорема Больцано—Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности.

§1.1 Аксиоматика множества действительных чисел

Определение 1. Будем говорить, что на множестве G определена операция сложения «$+$» (умножения «$\cdot$»), если любой упорядоченной паре элементов $(a,\, b)$ элементов G поставлен в соответствие элемент $y = a + b$ (соотв., $y = a \cdot b$)

Зачастую знак умножения «$\cdot$» опускают и пишут ab вместо $a \cdot b$.

Определение 2. Будем говорить, что на множестве G задано отношение порядка «$\leqslant$», если для любых двух элементов $a, b \in G$ выполняется хотя бы одно из условий $a \leqslant b$, $b \leqslant a$.

Другими словами, для любых $a, b \in \mathbb{R}$ заранее установлено, верно или неверно неравенство $a \leqslant b$.

Определение 3. Множество $\mathbb{R}$, состоящее более, чем из одного элемента, называется *множеством действительных чисел*, а его элементы — *действительными числами*, если на $\mathbb{R}$ определены операции сложения «$+$» и умножения «$\cdot$» и отношение порядка «$\leqslant$», удовлетворяющие следующим 15 аксиомам:

I. **Аксиомы сложения** $(\,+\colon a, b \to a + b\,)$

1. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (*коммутативность*);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (*ассоциативность*);
3. $\exists 0 \in \mathbb{R}\colon \quad a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (*нейтральность нуля*);
4. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists (-a) \in \mathbb{R}\colon \quad a + (-a) = 0$, $(-a)$ называется *противоположным* числом для a (*существование противоположного*).

II. **Аксиомы умножения** $(\,\cdot\colon a, b \to a \cdot b\,)$

5. $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (*коммутативность*);
6. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (*ассоциативность*);
7. $\exists 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$: $\quad a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (*нейтральность единицы*);
8. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\quad \exists \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}\colon \quad a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$, $\dfrac{1}{a}$ называется *обратным* числом для a (*существование обратного*).

III. **Аксиома связи сложения и умножения**

9. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

IV. **Аксиомы порядка**

10. $a \leqslant a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (*рефлексивность*);
11. если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (*антисимметричность*);
12. если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (*транзитивность*).

V. **Аксиома связи сложения и порядка**

13. если $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (*монотонность*).

VI. **Аксиома связи умножения и порядка**

14. если $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$, то $0 \leqslant a \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (*монотонность*).

VII. **Принцип непрерывности**

15. Пусть A, B — непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что

$$a \leqslant b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Тогда $\exists c \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$.

Определение 4. Определим отношения порядка «$<$», «$>$», «$\geqslant$» и операции вычитания «$-$» и деления «$/$» на множестве $\mathbb{R}$:
- $a < b \iff a \leqslant b$ и $a \neq b$;
- $a > b \iff b < a$, аналогично $a \geqslant b \iff b \leqslant a$;
- $a - b \triangleq a + (-b)$;
- $a/b = \dfrac{a}{b} \triangleq a \cdot \dfrac{1}{b}$;

Напоследок, определим некоторые важнейшие числовые множества:
- Множество *натуральных* чисел

$$\mathbb{N} = \{1,\ 1 + 1 = 2,\ \ldots,\ n = 1 + \ldots + 1,\ \ldots\}.$$

- Множество $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Множество *целых* чисел

$$\mathbb{Z} = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\},$$

т.е. множество чисел x таких, что $x \in \mathbb{N}$ или $-x \in \mathbb{N}$, или $x = 0$.
- Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$. Тогда обозначим за $\overline{a, b}$ следующее множество

$$\overline{a, b} = \{a,\ a + 1,\ \ldots,\ b - 1,\ b\}.$$

- Множество *рациональных* чисел

$$\mathbb{Q} = \{x \,\big|\, x = p/q,\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}\}.$$

- Множество *иррациональных чисел* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ часто называют *числовой прямой*, а числа — *точками числовой прямой*. А сами действительные числа часто будем называть *вещественными числами*, или просто *числами*, подразумевая именно элементы из множества $\mathbb{R}$.

• Наряду с числовой прямой определим *расширенную числовую прямую:* множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. В нем определены отношения порядка, операции «$+$», «$-$», «$\cdot$» и «$/$» для элементов из $\mathbb{R}$. Элементы $-\infty$, $+\infty$ не содержатся в $\mathbb{R}$. Будем их называть *бесконечно удаленными точками* (*числами*) в противопоставление точкам числовой прямой $\mathbb{R}$, которые также называют *конечными точками* (*точками*).

Для плюс и минус бесконечностей определены отношения порядка: $\forall x \in \mathbb{R}\ -\infty < x < +\infty$. Частично определены операции «$+$», «$-$», «$\cdot$» и «$/$»

$$+\infty + a = +\infty \text{ и } +\infty - a = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\};$$
$$-\infty - a = -\infty \text{ и } -\infty + a = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\};$$
$$+\infty \cdot a = +\infty \text{ и } -\infty \cdot a = -\infty \quad \forall a > 0,\ a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\};$$
$$+\infty \cdot a = -\infty \text{ и } -\infty \cdot a = +\infty \quad \forall a < 0,\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\};$$
$$a/(-\infty) = 0 \text{ и } a/(+\infty) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

Но, например, не определены: сумма $+\infty + (-\infty)$, произведение $0 \cdot (\pm\infty)$, частное $(\pm\infty)/(\pm\infty)$.

• Пусть заданы действительные числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Числовыми промежутками* называются следующие множества:

- *интервал* $(a; b) \triangleq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$;
- *отрезок* $[a; b] \triangleq \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
- *полуинтервалы* $(a, b]$, $[a, b)$ с аналогичным определением;
- *лучи* $(-\infty; a) \triangleq \{x \mid x < a\}$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $[a; +\infty]$ с аналогичным определением;
- *точка* $\{a\}$;
- *числовая прямая* $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел удовлетворяет аксиомам I–VI, но не удовлетворяет аксиоме VII. Покажем последнее. Пусть $A = \{a \mid a \in \mathbb{Q},\ a > 0,\ a^2 < 2\}$, $B = \{b \mid b \in \mathbb{Q},\ b > 0,\ b^2 > 2\}$. Тогда во множестве $\mathbb{Q}$ не существует числа $c \in \mathbb{Q}$ со свойством: $a \leqslant c \leqslant b \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$.

§1.2 Точные грани числовых множеств

Определение 5. Число $M \in \mathbb{R}$ — *верхняя* (*нижняя*) *грань множества* $G \subset \mathbb{R}$, если выполняется условие

$$\forall x \in G \quad x \leqslant M \quad (\text{соотв., } x \geqslant M)$$

Определение 6. Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует верхняя (нижняя) грань этого множества:

$$\exists M \in G\colon \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant M \quad (\text{соотв., } x \geqslant M)$$

Множество G называется *ограниченным*, если G ограничено сверху и снизу.

Определение 7. *Модулем* числа x называется число

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда, с введенным определением, можно показать, что множество G ограничено тогда и только тогда, когда

$$\exists M \in \mathbb{R}\colon \quad \forall x \in G \quad |x| \leqslant M.$$

Определение 8. Число $M \in \mathbb{R}$ — *точная верхняя грань* или *супремум множества* $G \subset \mathbb{R}$ и обозначается $\sup G$, если

1. $\forall x \in G\colon \quad x \leqslant M$;
2. $\forall M' < M \quad \exists x \in G\colon \quad x > M'$.

Аналогично, число $M \in \mathbb{R}$ — *точная нижняя грань* или *инфимум множества* $G \subset \mathbb{R}$ и обозначается $\inf G$, если

1. $\forall x \in G \quad x \geqslant M$;
2. $\forall M' > M \quad \exists x \in G\colon \quad x < M'$.

Если множество $G \subset \mathbb{R}$ не ограничено сверху (снизу), то, по определению, $\sup G = +\infty$ (соотв., $\inf G = -\infty$).

Определение 9. Число $M \in \mathbb{R}$ называется *максимальным* (*минимальным*) *элементом множества* $G \subset \mathbb{R}$ и обозначается $\max G$ ($\min G$), если

1. $M \in G$;
2. $\forall x \in G \quad x \leqslant M \quad$ (соотв., $x \geqslant M$).

§1.3 Последовательности и пределы

Определение 10. Пусть имеется правило, которое каждому натуральному числу n ставит в соответствие некоторое x_n из множества G. Тогда множество всевозможных упорядоченных пар (n, x_n), $n \in \mathbb{N}$, называется *последовательностью* и обозначается либо $\{x_n\}$, либо x_n, $n \in \mathbb{N}$, либо $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Пара (n, x_n) называется *n-м элементом* этой последовательности и обозначается просто x_n. Число n называется *номером*, а число x_n — *значением* n-го элемента. Множество элементов последовательности всегда бесконечно. Два различных элемента последовательности могут иметь одно и то же значение, но заведомо отличаются номерами, которых бесконечно много. Множество же значений элементов последовательности может быть бесконечным, так и конечным, в частности, состоять из одного элемента.

Пока мы будем рассматривать лишь последовательности со значениями из $\mathbb{R}$ и называть их *числовыми последовательностями* или просто последовательностями, поэтому можно считать $G = \mathbb{R}$ в данном определении.

Определение 11. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что $x_n \leqslant M$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если выполняется условие:

$$\exists m \in \mathbb{R}\colon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant m.$$

Последовательность называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу:

$$\exists M \in [0; +\infty)\colon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M.$$

Определение 12. Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*), если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant x_{n+1} \quad (\text{соотв.}, \ x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*убывающей*), если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < x_{n+1} \quad (\text{соотв.}, \ x_n > x_{n+1}).$$

Будем называть последовательность *монотонной*, если она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Определение 13. Пусть $c \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда
- *окрестностью* числа $c \in \mathbb{R}$ называется любой интервал $(a; b)$, содержащий в себе элемент c: $(a; b) \ni c$, $(a; b) \subset \mathbb{R}$.
- *окрестностью* элемента $+\infty$ называется любой луч $(a; +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$.
- *окрестностью* элемента $-\infty$ называется любой луч $(-\infty; b)$, $b \in \mathbb{R}$.

Определение 14. Пусть $\varepsilon > 0$ и $c \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда если $c \in \mathbb{R}$, то
- *ε-окрестностью* O_ε числа c называется интервал $(c - \varepsilon; c + \varepsilon) = O_\varepsilon$.
- Если $c = +\infty$, то *ε-окрестностью* $+\infty$ называется луч $(\varepsilon; +\infty)$.
- Если $c = -\infty$, то $O_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$.

Всякая ε-окрестность элемента $c \in \overline{\mathbb{R}}$ является его окрестностью, но не наоборот.

Определение 15. Число или бесконечно удаленная точка $c \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если выполняется условие:

$$\forall O(c) \quad \exists M \in \mathbb{N}\colon \quad \forall n \geqslant M \quad x_n \in O(c).$$

Обозначается $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

Заметим, что число c не будет являться пределом $\{x_n\}$, если

$$\exists O(c)\colon \quad \forall M \in \mathbb{N} \quad \exists n > M\colon \quad x_n \notin O(c).$$

Лемма 1. Число x_0 является пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad x_n \in O_\varepsilon(x_0). \tag{1}$$

Заметим, что условие (1) часто записывают так:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Определение 16. Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный предел. Если же последовательность не имеет конечного предела, то она называется *расходящейся*.

В дальнейшем будем говорить «последовательность сходится», имея в виду, что она имеет конечный предел. Если же ее предел будет равен $\pm\infty$, будем отдельно отмечать «последовательность сходится к $\pm\infty$», однако такие последовательности являются расходящимися, поэтому иногда говорят, что они расходятся к $\pm\infty$.

Теорема 1 (о трех последовательностях). Пусть числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ удовлетворяют условиям:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}\colon \quad \forall n \geqslant N_0 \quad x_n \leqslant y_n \leqslant z_n.$$

Тогда, если $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся и их пределы равны, то $\{y_n\}$ тоже сходится к тому же пределу.

Определение 17. Последовательность отрезков $\{[a_n; b_n]\}$, $n \in \mathbb{N}$, называется *последовательностью вложенных отрезков*, если

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2 (Кантора).] Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку.

Определение 18. Последовательность вложенных отрезков называется *стягивающейся*, или *последовательностью стягивающихся отрезков* если последовательность длин этих отрезков сходится к нулю.

Теорема 3. Любая последовательность стягивающихся отрезков имеет единственную общую точку.

Теорему 3 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3'. Любая последовательность стягивающихся отрезков стягивается к некоторой точке.

§1.4 Теорема Больцано—Вейерштрасса

Определение 19. Последовательность $\{y_k\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n = n_k\colon \quad y_k = x_{n_k},$$

где последовательность $\{n_k\}$ строго возрастающая. Эта подпоследовательность обозначается $\{x_{n_k}\}$.

Определение 20. Предел любой подпоследовательности данной последовательности называется *частичным пределом* этой последовательности.

Теорема 4 (Больцано—Вейерштрасса). У любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. существуют числа a и b такие, что $a \leqslant x_n \leqslant b \quad \forall n$. Точкой $c_0 = (a+b)/2$ отрезок $[a; b]$ разделим на два равных по длине отрезка $[a; c_0]$ и $[c_0, b]$. Тогда хотя бы в одном из них лежат значения бесконечного множества элементов последовательности $\{x_n\}$. Через $[a_1; b_1]$ обозначим отрезок $[c_0; b]$, если он содержит значения бесконечного множества элементов последовательности, в противном случае через $[a_1; b_1]$ обозначим отрезок $[a; c_0]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ точкой $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ снова разделим на два отрезка $[a_1; c_1]$ и $[c_1; b_1]$, и через $[a_2; b_2]$ обозначим отрезок $[c_1; b_1]$, если он содержит значения бесконечного множества элементов последовательности $\{x_n\}$, и отрезок $[a_1; c_1]$ в противном случае. Таким образом, делением пополам, строится последовательность вложенных отрезков $[a_k; b_k]$, $k \in \mathbb{N}$, каждый из которых содержит значения бесконечного множества членов последовательности $\{x_n\}$, причем

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{(b-a)}{2^k} = 0.$$

Следовательно (см. теорему 3), эти отрезки имеют одну общую точку

$$c = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Построим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x_{n_1} \in [a_1; b_1];\\
&x_{n_2} \in [a_2; b_2], \quad n_2 \geqslant n_1;\\
&\ldots\\
&x_{n_k} \in [a_k; b_k], \quad n_k \geqslant n_{k-1};\\
&x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}; b_{k+1}], \quad n_{k+1} \geqslant n_k;\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Так как $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \forall k$, то из теоремы о трех последовательностях следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Теорема доказана. ■

Теорему Больцано—Вейерштрасса можно сформулировать следующим образом:

> **Теорема 4' (Больцано—Вейерштрасса).** Любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

§1.5 Критерий Коши сходимости числовой последовательности

> **Определение 21.** Последовательность $\{x_n\}$ *фундаментальна*, если она удовлетворяет *условию Коши*:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \quad \forall m, n > N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon \tag{2}$$

> **Лемма 2.** Если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна, т.е. удовлетворяет (2). Положим $\varepsilon = 1$, $m = N_1$. Тогда

$$\forall n > N_1 \quad |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon = 1,$$

т.е. $x_{N_1} - 1 < x_n < x_{N_1} + 1$. Если теперь через a и b обозначим соответственно наименьшее и наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_{N_1}, x_{N_1} - 1, x_{N_1} + 1$, то, очевидно, $a \leqslant x_n \leqslant b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма доказана. ■

> **Теорема 5 (Критерий Коши).** $\{x_n\}$ сходится $\Longleftrightarrow$ $\{x_n\}$ фундаментальна, где $\{x_n\}$ — числовая последовательность.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geqslant N_{\varepsilon/2} \quad |x_n - x_0| < \varepsilon/2.$$

Отсюда следует, что если $n \geqslant N_{\varepsilon/2}$ и $m \geqslant N_{\varepsilon/2}$, то

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_0| + |x_0 - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$: Пусть $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда, согласно лемме 2 последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Следовательно, по теореме Больцано—Вейерштрасса у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, причем $\exists x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\exists N_\varepsilon: \quad \forall n, m \geqslant N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| < \varepsilon/2 \\ &\exists K_\varepsilon: \quad \forall k \geqslant K_\varepsilon \qquad |x_{n_k} - x_0| < \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Положим $p = \max\{N_\varepsilon; K_\varepsilon\}$. Тогда, очевидно, $p \geqslant K_\varepsilon$, $n_p \geqslant p \geqslant N_\varepsilon$ и, следовательно, для любого $n \geqslant N_\varepsilon$

$$|x_n - x_0| \leqslant |x_n - x_{n_p}| + |x_{n_p} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А так как $\varepsilon > 0$ любое, то этим доказано, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. ■

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней.

§2.1 Определение функции

Определение 1. Пусть D и Y — два произвольных множества, и задано некоторое правило f, которое каждому элементу $x \in D$ ставит в соответствие один и только один некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Тогда множество всевозможных пар $(x, f(x))$, $x \in D$, называется *функцией* и обозначается либо просто f, либо $f(x)$, $x \in D$, либо $y = f(x)$, $x \in D$, либо, например, $f\colon D \to Y$.

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа: $Y \subset \mathbb{R}$.

• Элемент $x \in D$ называется *аргументом*, или *независимым переменным*, элемент $y = f(x) \in Y$ — *значением функции*, или *зависимым переменным*. Таким образом, $f(x)$ может обозначать как значении функции f на элементе x, так и саму функцию f.

• Множество D называется *областью определения* функции f. Иногда будем обозначать это множество как D_f. В таком случае, будем говорить, что функция определена на множестве G, если $G \subset D_f$.

• Множество всех $y = f(x)$, $x \in D_f$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $f(D)$

$$f(D_f) = \{y \,\big|\, y = f(x),\ x \in D_f\}.$$

Отметим, что $f(D_f) \subset Y$, но не обязано совпадать с Y.

• Множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D_f$, называется *графиком* функции f

$$\Gamma_f = \{(x, y) \,\big|\, y = f(x),\ x \in D_f\}.$$

• Если $M \subset D_f$, то множество всех $y = f(x)$, когда $x \in M$, называется *образом множества* M и обозначается $f(M)$

$$f(M) = \{y \,\big|\, y = f(x),\ x \in M\}.$$

• Если $E \subset f(D_f)$, то множество всех x, когда $y \in E$, называется *полным прообразом* множества E и обозначается $f^{-1}(E)$

$$f^{-1}(E) = \{x \,\big|\, x \in D_f,\ f(x) \in E\}.$$

При этом для каждой пары $(x; y = f(x))$, $x \in D_f$ элемент x называется *частным прообразом* точки y.

• При $S \subset D_f$ функция $f_S\colon S \to \mathbb{R}$, при $f_S(x) = f(x)$ называется *сужением* (*ограничением, следом*) функции f на S и обозначается $f\big|_S$.

Наряду с термином «функция» в определенных ситуациях употребляются равнозначные ему термины «отображение», «преобразование», «морфизм», «соответствие».

Замечание. Используя определение функции можно дать еще одно альтернативное определение для понятия «последовательность». Всякое отображение $f\colon \mathbb{N} \to Y$ называется *последовательностью* $\{y_n\}$ элементов множества Y, где ее n-ым элементом будет являться $(n, f(n))$.

Определение 2. Функция f называется *ограниченной сверху* (*снизу*) *на множестве* $X \subset D_f$, если множество $f(X)$ ограничено сверху (снизу), т.е. существует число M такое, что

$$\forall x \in X \quad f(x) \leqslant M \quad (\text{соотв., } f(x) \geqslant M).$$

Функция называется *ограниченной на множестве* X, если она на X ограничена и сверху, и снизу. Функция f называется *ограниченной* (без указания множества), если она ограничена на всей области. Попросту говоря, функция ограниченна, если множество ее значений $f(D_f)$ ограничено.

Определение 3. Пусть функция f определена на множестве $X \subset D_f$. Тогда

$$\sup_X f \triangleq \sup f(X) \quad (\inf_X \triangleq \inf f(X))$$

называется *верхней* (*нижней*) *гранью числовой функции* f на множестве X. Также может обозначаться как $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ (соотв., $\inf\limits_{x\in X} f(x)$)

Аналогично, если множество не указано, будем иметь в виду всю область определения функции. Заметим, что согласно предыдущему билету, определение, например, точной верхней грани M числовой функции f равносильно выполнению следующих двух пунктов

1. $\forall x \in D_f \quad f(x) \leqslant M$,
2. $\forall M' < M \quad \exists x \in D_f\colon \quad f(x) > M'$.

§2.2 Предельная, внутренняя, изолированная точки множества

Пусть $G \subset \mathbb{R}$ — множество.

Определение 4. Точка $x_0 \in G$ называется *изолированной точкой множества* G, если

$$\exists \delta > 0\colon \quad O_\delta(x_0) \cap G = x_0.$$

Определение 5. Точка $x_0 \in G$ называется *внутренней точкой множества* G, если

$$\exists \delta > 0\colon \quad O_\delta(x_0) \subset G.$$

Определение 6. Если $c \in \mathbb{R}$, то

1. *проколотой* ε*-окрестностью числа* c называется

$$\mathring{O}_\varepsilon(c) \triangleq O_\varepsilon(c) \setminus \{c\} = (c - \varepsilon; c) \cup (c; c + \varepsilon);$$

2. *проколотой окрестностью точки* c называется

$$\mathring{O}(c) \triangleq O(c) \setminus \{c\};$$

- Если c — бесконечно удаленная точка, то, $\mathring{O}_\varepsilon(c) \triangleq O(c)$.

Определение 7. Точка $c \in \overline{\mathbb{R}}$ называется *предельной точкой множества* G, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathring{O}_\varepsilon(c) \cap G \neq \varnothing.$$

Попросту говоря, точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является предельной точкой множества $X \subset \subset \mathbb{R}$, если в любой ее окрестности существует хотя бы одна точка из G, отличная от x_0. По аналогии с этим, если множество G является неограниченным сверху, то бесконечно удаленная точка $+\infty$ тоже является предельной точкой множества G, так как в этом случае в любой окрестности этой точки существует точка множества G. Если же G не ограничена снизу, то точка $-\infty$ также является предельной точкой множества G.

§2.3 Предел функций

Определение 8 (Определение предела функции по Коши). Пусть задана функция f на множестве D_f. И пусть c — конечная или бесконечно удаленная точка из $\overline{\mathbb{R}}$, x_0 — конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $D_f \subset \mathbb{R}$. Тогда элемент c называется *пределом функции* f при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если

$$\forall O(c) \quad \exists O(x_0)\colon \quad \forall x \in \mathring{O}(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O(c),$$

что эквивалентно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \cap D_f \quad f(x) \in O_\varepsilon(c).$$

В этом случае будем писать $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, или $f(x) \to c$ при $x \to x_0$.

Если точка x_0 — не предельная для множества D_f, то функция f не может иметь предела по Коши в точке x_0. Также заметим, что в определении предела функции f не требуется, чтобы функция была определена в точке x_0.

Определение 9. Если x_0 — предельная точка области определения D_f функции f, то последовательность $\{x_n\}$ называется *последовательностью Гейне* функции f в точке x_0 при условии, что

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Теорема 1. Элемент c является предельной точкой $G \subset \mathbb{R}$ (конечная или бесконечно удаленная) тогда и только тогда, когда существует последовательность x_n, такая что $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in G \setminus \{c\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Согласно теореме 1 у функции существует последовательность Гейне в любой точке x_0, являющейся предельной для D_f.

Определение 10 (Определение предела функции по Гейне). Пусть задана функция f на множестве D_f. Пусть c — конечная или бесконечно удаленная точка из $\overline{\mathbb{R}}$, x_o — конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $D_f \subset \mathbb{R}$. Тогда элемент c называется *пределом функции* f при $x \to x_0$ (или в точке x_0), если для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ функции f в точке x_0 выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

И в этом случае будем писать $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, или $f(x) \to c$ при $x \to x_0$.

Теорема 2. Определение 8 и определение 10 эквивалентны.

Определение 11. Пусть $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ и $S \subset D_f$, x_0 — предельная точка множества S, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда элемент $c \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции f по множеству S* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = c$, где $g(x) = f|_S = \{(x; f(x)), x \in S\}$.

Определение 12. *Пределом слева функции* f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предел сужения функции f на множество $D_f \cap (-\infty; x_0)$ (при условии, что x_0 — предельная точка $D_f \cap (-\infty; x_0)$). Обозначается $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Аналогично определяется *предел справа функции* f: $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Теорема 3 (о трех функциях). Пусть точка x_0 является предельной для областей определения функций f, g и h. Тогда если существуют пределы

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, такие что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

и при этом выполняется

$$\exists\delta > 0: \quad \forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

то существует и предел функции g при $x \to x_0$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

§2.4 Непрерывность функции

Пусть $G \subset \mathbb{R}$. Тогда $\forall x_0 \in G$ выполняется одно и только одно из двух утверждений:

1. x_0 — изолированная точка, т.е. $\exists\delta > 0$: $\mathring{O}_\delta(x_0) \cap G = \varnothing$;

2. x_0 — предельная точка, т.е. $\forall\delta > 0$ $\mathring{O}_\delta(x_0) \cap G \neq \varnothing$.

Определение 13. Функция f называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D_f$, предельной для D_f, если предел $f(x)$ при $x \to x_0$ существует и равен

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

В любой изолированной точке множества D_f функция $f(x)$ считается *непрерывной* по определению.

Определение 14. Функция f называется *непрерывной на множестве* $X \subset \subset \mathbb{R}$, если функция f определена на множестве X и непрерывна в каждой точке множества X.

Лемма 1. Функция f непрерывна на промежутке $[a;b)$ (отрезке $[a;b]$)

$$\iff \begin{cases} \forall x_0 \in (a;b) \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0); \\ \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \Big(\text{и } \exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)\Big). \end{cases}$$

§2.5 Теорема Вейерштрасса

Теорема 4 (Вейерштрасса). Функция f, непрерывная на отрезке $[a;b]$, ограничена и достигает на нем своих точных верхней и нижней граней.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$. Пусть при этом

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{и} \quad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Покажем, что $M < +\infty$ и что существует такая точка $x^* \in [a;b]$, что $f(x^*) = M$.

Итак, $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, что по определению значит

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in [a;b]\colon \quad M - \varepsilon < f(x) \leqslant M.$$

Это эквивалентно тому, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a;b]\colon \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

Поскольку $a \leqslant x_n \leqslant b \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому по теореме Больцано—Вейерштрасса можно выделить из нее подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к некоторому x^* при $k \to \infty$.

Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x^* \in [a;b]$. Следовательно, в силу непрерывности функции f на отрезке $[a;b]$ она непрерывна в точке x^* этого отрезка, значит, поскольку $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x^*$, то

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*).$$

С другой стороны $\forall k \in \mathbb{N}$ $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Из последних двух соотношений получаем $f(x^*) = M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Отсюда следует, во-первых, что $M < +\infty$, т.е. функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x^*.

Аналогично можно доказать, что непрерывная на отрезке функция ограничена снизу и достигает на нем своей нижней грани.

Теорема доказана. ■

3. Теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

§3.1 Промежуточные значения непрерывной функции на отрезке

Теорема 1 **(Больцано—Коши о промежуточных значениях).** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, тогда для любого C, заключенного между A и B, существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c)=C$.

Эту теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1' **(Больцано—Коши о промежуточных значениях).** Непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними значение.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a)=A<B=f(b)$ и тогда $f(a)<C<f(b)$.

Через c_1 обозначим середину отрезка $[a;b]$. Если $f(c_1)=C$, то искомая точка найдена и утверждение доказано.

Пусть $f(c_1)\neq C$. Тогда, если $f(c_1)>C$, то положим $a_1=a$, $b_1=c_1$, а если $f(c_1)<C$, то $a_1=c_1$, $b_1=b$, и поэтому всегда $f(a_1)<C<f(b_1)$.

По тому же самому принципу снова разделим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам, и через c_2 обозначим его середину. Если $f(c_2)=C$, то утверждение доказано. Если же $f(c_2)\neq C$, то через $[a_2;b_2]$ обозначим ту половину, для которой $f(a_2)<C<f(b_2)$, и т.д. Процесс или обрывается на некотором шаге, и тогда утверждение доказано, или получается последовательность вложенных отрезков $\{[a_n;b_n]\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ и

$$f(a_n)<C<f(b_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Таким образом, согласно теореме о последовательности стягивающихся отрезков существует общая точка $c\in[a;b]$ всех отрезков $\{[a_n;b_n]\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Поэтому в силу непрерывности функции f в точке c:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c), \tag{2}$$

Тогда из неравенств (1) в пределе при $n\to\infty$ следует

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n), \tag{3}$$

откуда из (2) и (3) получаем $f(c)=C$.

Случай, когда $A>B$, рассматривается аналогично.

Теорема доказана. ■

Следствие 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)$, $f(b)$ имеют разные знаки, тогда существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c)=0$.

Теорема 2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $M = \sup f([a;b])$, $m = \inf f([a;b])$. Тогда функция f принимает все значения из отрезка $[m;M]$ и только эти значения.

Доказательство. Согласно теореме 4 (Вейерштрасса) из прошлого билета существуют такие точки $\alpha \in [a;b]$ и $\beta \in [a;b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$

Тогда рассматриваемая теорема непосредственно вытекает из теоремы 1 (Больцано—Коши), примененной к отрезку $[\alpha;\beta]$, если $\alpha \leqslant \beta$, или соответственно к отрезку $[\beta;\alpha]$, если $\beta \leqslant \alpha$.

Теорема доказана. ■

Таким образом, множество всех значений функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке, представляет собой также отрезок. Однако, как показывают примеры, образом интервала может быть любой промежуток.

§3.2 Промежуточные значения непрерывной функции на промежутке

Более точно отметим, что свойство непрерывных функций принимать все промежуточные значения справедливо для любого промежутка (конечного или бесконечного).

Но сначала заметим, что любой промежуток числовой прямой $\mathbb{R}$ обладает следующим свойством: если $a \in \Delta$, $b \in \Delta$, $a < b$, то и $[a;b] \subset \Delta$. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если числовое множество обладает этим свойством, то оно является промежутком.

Теорема 3. Если функция f на промежутке Δ непрерывна и принимает значения A и B, $A < B$, то она принимает и любое промежуточное значение $C \in (A;B)$.

Доказательство. По условию, в промежутке Δ существуют точки a и b такие, что $f(a) = A$, $f(b) = B$. Если, например, $a < b$, то тогда согласно теореме 1 (Больцано—Коши), рассматриваемая функция заведомо принимает указанное значение в некоторой точке отрезка $[a;b]$, который является частью исходного промежутка Δ. ■

Другими словами, доказанная теорема утверждает, что если функция f непрерывна на промежутке Δ, и точки $a, b \in \Delta$ тогда для образа $f(\Delta)$ выполняется следующее свойство: пусть $f(a) \in f(\Delta)$, $f(b) \in f(\Delta)$, $f(a) < f(b)$, то и $[f(a); f(b)] \subset f(\Delta)$. Это в точности указанное выше свойство промежутков. Значит, с помощью него эту теорему можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3′. Если функция f непрерывна на промежутке Δ, то множество $f(\Delta)$ является промежутком.

§3.3 Про обратное утверждение

Заметим, что обратное утверждение является неверным, например, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ разрывна в точке $x = 0$, но у нее образ любого отрезка есть отрезок. Однако, для монотонных функций обратное утверждение является верным, докажем это в Теореме 5.

Однако, для дальнейших действий нам потребуются следующие определения.

Определение 1. Функция f называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* $X \subset D_f$, если для любых x_1 и $x_2 > x_1$ из множества X

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{соотв.}, f(x_1) \geqslant f(x_2)).$$

Определение 2. Пусть x_0 — точка разрыва функции f. Тогда

1. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, то x_0 — *точка устранимого разрыва*

2. Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$, но $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$, то x_0 — *точка разрыва первого рода*, а число $\Delta f = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется скачком функции f в точке x_0.

3. Все другие точки разрыва называют *точками разрыва второго рода.* (т.е. хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен).

Теорема 4. Если функция $f(x)$ определена и монотонна на интервале $(a; b)$, то в каждой точке $x_0 \in (a; b)$ она имеет односторонние пределы. Причем, если $f(x)$ — возрастающая, то

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0),$$

а если убывающая, то

$$f(x_0 - 0) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0 + 0).$$

Теорема 5. Если функция f определена и монотонна на промежутке Δ и $f(\Delta)$ — промежуток, то f непрерывна на Δ.

Доказательство. Предположим противное, что функция f разрывна в точке $x_0 \in \Delta$. Тогда по теореме 4 в точке x_0 обязательно существуют односторонние пределы, значит x_0 не является точкой разрыва второго рода. А в случае устранимой точки разрыва $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, т.е. отсюда и из неравенств из теоремы 4, получим $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т.е. функция непрерывна в точке разрыва, что невозможно. Значит x_0 не может быть точкой устранимого разрыва. Поэтому из монотонности следует, что x_0 может быть только точкой разрыва первого рода. Пусть, например, $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$.

Тогда f не принимает значения, лежащие между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0)$, и поэтому $f(\Delta)$ не является промежутком, что противоречит условию. Следовательно, $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Аналогично доказывается, что $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, если, конечно, x_0 не является правым концом промежутка Δ.

Теорема доказана. ■

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

§4.1 Определение производной

Пусть задана функция f и точка $x_0 \in D_f$. Тогда для любого $x \in D_f$, $x \neq x_0$, частное

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \tag{1}$$

где $h = x - x_0$, называется *разностным отношением функции f в точке x_0 с шагом h.*

Определение 1. Предел разностного отношения функции f в точке $x_0 \in$ $\in D_f$ с шагом h при $h \to 0$ называется *производной функции* f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2}$$

Определение 2. Предел разностного отношения функции f в точке $x_0 \in$ $\in D_f$ с шагом h при $h \to +0$ ($h \to -0$) называется *правой* (*левой*) *производной функции* f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ (соотв., $f'_-(x_0)$).

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3}$$

Очевидно, функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она в x_0 имеет односторонние производные и эти производные равны.

Заметим, что пределы (2) и (3) могут быть как конечными, так и бесконечными, и поэтому можно говорить о конечных и бесконечных производных.

Определение 3. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечную производную.

Формулы (2) и (3) часто записывают в других обозначениях. Вместо x_0 пишут x, шаг h разностного отношения (1) обозначают Δx, и тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Здесь Δx называется приращением аргумента, а разность $f(x+\Delta x) - f(x)$ — соответствующим приращением функции. Если $y = f(x)$, то это приращение функции обозначают Δy, а производную функции f в точке x обозначают y' В этих обозначениях формула (4) принимает вид

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Аналогичным образом записываются и формулы (3). В такой форме определение производной коротко формулируют так: Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

> **Определение 4.** Пусть D'_f — множество точек, в которых функция f имеет конечную производную. Тогда функция, которая каждому $x \in D'_f$ ставит в соответствие число $f'(x)$, называется *производной* функции $y = f(x)$ и обозначается f' или y'

Операция нахождения производной данной функции f называется *дифференцированием функции f*.

> **Определение 5.** Производная производной f' функции f в точке $x_0 \in D'_f$ называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) *функции f в точке x_0* и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Вообще, производная производной f' функции f называется *второй производной* функции $y = f(x)$ и обозначается f'', $f^{(2)}$ или y'', $y^{(2)}$

§4.2 Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций

Пусть задана функция f, и пусть $x_0 \in D_f$, где D_f — область определения функции f.

> **Определение 6.** Точка $x_0 \in D_f$ называется *точкой локального максимума (минимума) функции f*, если существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что для любого $x \in O(x_0) \cap D_f$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соотв., $f(x) \geqslant f(x_0)$).

> **Определение 7.** Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*, а ее значения в этих точках — *экстремальными значениями* (соотв., *локальными максимумами* или *локальными минимумами*).

> **Теорема 1 (Ферма).** Если функция f дифференцируема в точке x_0 и x_0 является ее точкой экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, так как она дифференцируема в точке x_0. Пусть, например, x_0 — точка максимума функции f. Тогда существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall x \in O(x_0),$$

и поэтому если $x \in O(x_0)$ и $x < x_0$ (соотв., $x > x_0$), то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \ (\leqslant 0).$$

Следовательно,

$$f'_{-}(x_0) \geqslant 0, \quad f'_{+}(x_0) \leqslant 0$$

а так как эти односторонние производные равны производной $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Случай, когда x_0 — точка минимума, рассматривается аналогично.

Теорема доказана. ■

Теорема Ферма имеет простую геометрическую интерпретацию: если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и x_0 — ее точка экстремума, то касательная к графику этой функции в точке x_0 параллельна оси Ox.

Определение 8. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* $(a;b)$, если она определена на $(a;b)$ и в каждой его точке имеет конечную производную.

Теорема 2 (Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса (билет №2) Функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ принимает и наибольшее и наименьшее значения, а так как $f(a) = f(b)$, то одно из них она принимает в некоторой точке $\xi \in (a;b)$. Тогда из теоремы Ферма следует, что $f'(\xi) = 0$.

Теорема доказана. ■

Теорема 3 (Лагранжа). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$ и найдем λ из условия $F(a) = F(b)$. Тогда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6}$$

Функция $F(x)$ при таком λ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует $\xi \in (a;b)$ такое, что $F'(\xi) = 0$. А так как $F'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(\xi) = \lambda$, т.е. выполняется равенство (5).

Теорема доказана. ■

Заметим, что коэффициент λ, определяемый по формуле (6), равен угловому коэффициенту хорды, проходящей через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$. Следовательно, теорема Лагранжа утверждает существование точки, в которой касательная к графику функции f параллельна этой хорде.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности $\mathring{O}(x_0)$, то для любого $x \in \mathring{O}(x_0)$ существует ξ лежащее строго между x и x_0 и такое, что
$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{7}$$

Формула (7) называется *формулой Лагранжа* для конечных приращений или *формулой конечных приращений*. Это следствие можно интерпретировать несколько иначе:

Следствие 2. Если функция f непрерывна в $O(x_0)$ и дифференцируема в $\mathring{O}(x_0)$, то $\forall x \in \mathring{O}(x_0)$ $\exists \Theta \in (0;1)$:
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta\Delta x)\Delta x,$$
где $\Delta x = x - x_0$.

Следствие 3. Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a;b)$, то функция f постоянна на отрезке $[a;b]$.

Определение 9. Функция называется *кусочно-дифференцируемой* на некотором промежутке, если она всюду, кроме конечного числа точек, имеет конечную производную.

Следствие 4. Если функция непрерывна на некотором конечном или бесконечном промежутке и всюду, кроме конечного числа точек, имеет производную, равную нулю, то эта функция постоянна на рассматриваемом промежутке.

Теорема 4 (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$ и $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{8}$$

Доказательство. Так как $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то $g(b) \neq g(a)$ (по теореме Ролля). Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$ и найдем λ из условия $F(a) = F(b)$. Тогда
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Функция $F(x)$ при таком λ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому существует $\xi \in (a;b)$ такое, что $F'(\xi) = 0$. А так как

$F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, то $f'(\xi) = \lambda g'(\xi)$, т.е. выполняется равенство (8).

Теорема доказана. ■

Следствие 5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемы в проколотой окрестности $\mathring{O}(x_0)$, причем $g'(x) \neq 0$ в $\mathring{O}(x_0)$, то для любого $x \in \mathring{O}(x_0)$ существует ξ, лежащее строго между x и x_0 такое, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа.

§5.1 Подготовительные определения[1]

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет n-ю производную, а следовательно, и все производные до n-го порядка. Легко видеть, что многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

обладает следующим свойством:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \in \overline{0, n}.$$

Определение 1. Этот многочлен $P_n(x)$ называется *многочленом Тейлора функции f в точке x_0*. Равенство

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0. При этом

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

называется *k-м членом* формулы Тейлора, а функция $r_n(x)$ — остаточным членом формулы Тейлора (он идет после n-го члена).

Иногда, чтобы указать, что многочлен Тейлора построен для конкретной функции f пишут $P_n(f; x)$, $r_n(f; x)$ вместо $P_n(x)$, $r_n(x)$, или даже $P_n(f; x_0; x)$, $r_n(f; x_0; x)$, обращая внимание на точку x_0.

В частном случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют *формулой Маклорена*.

Напоследок, нам пригодится следующее определение:

Определение 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, и пусть x_0 — предельная точка множества X (конечная или бесконечная). Говорят, что *функция $f(x)$ есть о-малое от $g(x)$ при $x \to x_0$*, и пишут

$$f(x) = o(g(x)) \text{ при } x \to x_0,$$

если в некоторой окрестности точки x_0 для любого $x \in X$, $x \neq x_0$

[1] Заранее предупрежу, что в этом пособии для этого билета будут предложены два подхода к этому билету.

выполняется неравенство[2]

$$|f(x)| \leqslant \alpha(x)|g(x)|,$$

где функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

§5.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

Теорема 1. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 имеет непрерывную производную n-го порядка и $f^{(n)}(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}(x_0)$, то для любого $x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ существует ξ, лежащее строго между x и x_0 и такое, что справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{1}$$

Доказательство. Функции

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

удовлетворяют всем условиям следствия 5 из теоремы Коши о среднем (Билет №4). Кроме того,

$$r_n^{(k)}(x_0) = 0, \quad \varphi^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k \in \overline{0, n}.$$

Поэтому, если $x \in O(x_0)$ и, например, $x < x_0$, то существует $\xi_1 \in (x; x_0)$ такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}.$$

Аналогично,

$$\exists \xi_2 \in (\xi_1; x_0)\colon \quad \frac{r_n'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} = \frac{r_n''(\xi_2)}{\varphi''(\xi_2)}.$$

.........(до тех пор пока есть производные)

$$\exists \xi_n \in (\xi_{n-1}; x_0)\colon \quad \frac{r_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})} = \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)}.$$

Легко видеть, что

$$\varphi^{(n)}(x) = (n+1)!(x - x_0),$$

[2]Однако можно заметить, что в этом параграфе везде мы будем указывать случай равенства. То есть будем рассматривать частный случай, в котором $f(x) = o(g(x)) = \alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$. Заметим, что для удобства некоторые авторы так и определяют понятие o-малое. А также точка x_0 будет всегда конечной.

$$r_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0).$$

К этим функциям на отрезке $[\xi_n; x_0]$ снова применим теорему о среднем:

$$\exists \xi \in (\xi_n; x_0)\colon \quad \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\varphi^{(n)}(\xi_n)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Следовательно, $\exists \xi \in (x; x_0)$ такое, что

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Аналогично рассматривается и случай $x > x_0$. Теорема доказана. ■

Равенство (1) называется *формулой Тейлоре с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Определение 3. Функция, которая задается формулой

$$y = g(f(x)),$$

где f и g — данные функции, называется *сложной функцией* или *композицией* (иногда *суперпозицией*) функций f и g.

Теорема 2. Если функция $\varphi(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ и он равен y_0, а функция $f(y)$ имеет предел при $y \to y_0$ и, кроме того, $\forall x \in D_\varphi \quad \varphi(x) \in \in D_f$, $\varphi(x) \neq y_0$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ имеет предел при $x \to x_0$ и

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D_\varphi, \quad x_n \neq x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Тогда последовательность $y_n = \varphi(x_n)$ сходится к y_0 при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n \to \infty} f(\varphi(x_n)) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{y \to y_0} f(y).$$

Теорема доказана. ■

Формула (2) называется *формулой замены переменного под знаком предела*. В ней x_0 и все рассматриваемые пределы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Теорема 3. Если функция f дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad \text{при } x \to x_0, \tag{3}$$

где $\psi(x)=o((x-x_0)^n),\ x\to x_0 \leftrightarrow \psi(x)=\alpha(x)(x-x_0)^n$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

Формула (3) называется *формулой Тейлора для f в точке x_0 порядка n с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. Функция f дифференцируема n раз в точке x_0. Следовательно, функция $f^{(n-1)}(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0, т.е. $\exists f^{(n)}(x_0)\in\mathbb{R}:\quad \exists f^{(k)}(x_0)\in\mathbb{R},\quad$ где $\quad k\in\overline{0,n-1}$

Рассмотрим функции $r_n(x)=f(x)-P_n(x),\quad \varphi(x)=(x-x_0)^n$

$$r_n^{(k)}(x)=0,\quad \forall k\in\overline{0,n},\quad \varphi^{(k)}(x_0)=0,\quad \forall k\in\overline{0,n-1},\quad \varphi^{(k)}(x)\neq 0,\quad x\neq x_0.$$

Согласно теореме Коши и следствию 5 из предыдущего билета все так же, как и в теореме 1 (про формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

$\forall x\in \overset{\circ}{O}(x_0)\quad x<x_0\quad \exists\xi=\xi(x)\in(x,x_0):$

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n^{(n-1)}(\xi)}{\varphi^{(n-1)}(\xi)}$$

$\forall x\in \overset{\circ}{O}(x_0)\quad \exists\xi\neq x_0:$

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n^{(n-1)}(\xi)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi-x_0)},\qquad r_n^{(n-1)}(x_0)=0\Rightarrow$$

$\xi=\xi(x)$: $\quad\xi(x)<x_0\quad \forall x\in O(x_0)\quad x<x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\xi(x)=x_0,\quad \text{т.к.}\quad x<\xi(x)<x_0\quad\Rightarrow$$

Теорема о замене переменной под знаком предела $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{n!}\lim_{\xi\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(\xi)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{\xi-x_0}=\frac{1}{n!}r_n^{(n)}(x_0)=0$$

Функция $\alpha(x)=\frac{r_n(x)}{\varphi(x)},\ x\in\overset{\circ}{O}(x_0)$ — бесконечно малая функция при $x\to$ $\to x_0\quad \Rightarrow r_n(x)=\alpha(x)\varphi(x)=\alpha(x)(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$, при $x\to x_0\quad\Rightarrow$ $\Rightarrow$ формула (3). ■

§5.3 Другой подход к доказательству формул Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа[3]

[3] При составлении материала мнения редколлегии разделились. Уже изложенные доказательства привлекают своей математической красотой и логичностью, но под собой имеют много фундамента и достаточно сложные. Доказательства же в этом параграфе просты и легко запоминаются. Поэтому мы решили опубликовать оба подхода.

Лемма 1. Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, f' на $\mathring{O}(x_0)$. Тогда в $\mathring{O}(x_0)$

$$(r_n(f;x))' = r_{n-1}(f';x).$$

Доказательство. Поскольку $f^{(k)}(x_0)$ — суть число, то

$$\left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)' = \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

и верна следующая последовательность равенств

$$(r_n(f;x))' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)' =$$
$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f'^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$
$$= r_{n-1}(f';x).$$ ∎

Лемма 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \tag{4}$$

Доказательство. Фактически, нужно показать, что

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0), \text{ где } \alpha(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0. \tag{5}$$

Зададим функцию $\alpha(x)$ следующим образом. Пусть $\alpha(x_0)=0$, а для $x \neq x_0$

$$\alpha(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0).$$

Тогда, очевидно, $\alpha(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$ (более того, она непрерывна в точке x_0) и выполняется равенство (4), в котором $o(x-x_0) = \alpha(x)(x-x_0)$. ∎

Теорема 4 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Если функция f дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad \text{при } x \to x_0, \tag{6}$$

где $\psi(x)=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0 \iff \psi(x)=\alpha(x)(x-x_0)^n$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Доказательство. Фактически, нужно показать, что $r_n(f;x)$ может быть представлен в виде

$$r_n(f;x) = o((x-x_0)^n)$$

Будем доказывать последнюю формулу, применяя индукцию. При $n = 1$ данное утверждение верно. Действительно, в этом случае функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно, согласно лемме 2

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы и с равенством $r_1(f;x) = o(x-x_0)$.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $n-1$ $(n \geqslant 2)$ вместо n и покажем, что оно верно в приведённой форме. Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях и лемму 1, имеем (считая, для определенности, что $x > x_0$)

$$r_n(f;x) = r_n(f;x) - \underbrace{r_n(f;x_0)}_{=0} = r_{n-1}(f';\xi)(x-x_0), \text{ где } x_0 < \xi < x.$$

По предположению индукции $r_{n-1}(f';\xi) = o((\xi-x_0)^{n-1}) = o((x-x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$ (ξ просто переобозначили за x). Следовательно,

$$r_n(f;x) = o((x-x_0)^n) \text{ при } x \to x_0.$$

Теорема доказана. ∎

Теорема 5 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0 имеет непрерывную производную n-го порядка и $f^{(n)}(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}(x_0)$, то для любого $x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ существует ξ, лежащее строго между x и x_0 и такое, что справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{7}$$

Доказательство. Фактически, нужно показать, что $r_n(f;x)$ может быть представлен в виде

$$r_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Будем доказывать последнюю формулу, применяя индукцию. Рассмотрим случай $x > x_0$ (случай $x < x_0$ аналогичен). При $n = 0$ выше указанная формула утверждает, что существует $\xi \in (x_0, x)$, при котором

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0).$$

Это утверждение верно, так как оно совпадает с доказанной в четвёртом билете формулой приращений Лагранжа.

Предположим, что утверждение верно при $n-1$ $(n \geqslant 1)$ вместо n и установим, что оно верно в приведённом виде. Используя теорему Коши о среднем и лемму 1, имеем

$$\frac{r_n(f;x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f;x) - \overbrace{r_n(f;x_0)}^{=0}}{(x-x_0)^{n+1} - \underbrace{(x_0-x_0)^{n+1}}_{=0}} = \frac{r_{n-1}(f';\xi)}{(n+1)(\xi-x_0)^n} =$$

$$= \frac{f'^{(n)}(\eta)}{n!(n+1)} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

где $x_0 < \eta < \xi < x$, а предпоследнее равенство написано в силу предположения индукции.

Теорема доказана. ■

§5.4 Теорема о единственности разложения функции по формуле Тейлора

Теорема 6 (о единственности разложения функции по формуле Тейлора). Пусть функция f дифференцируема n раз в точке $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0 \tag{8}$$

Тогда $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k \in \overline{0,n}$

Доказательство. f — дифференцируема n раз в точке x_0 $\Rightarrow$ Справедлива Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0 \tag{9}$$

Если из (8) вычесть (9), получим

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - a_k \right) (x-x_0)^k = o((x-x_0)^n) \tag{10}$$

В (10) левая и правая часть имеют пределы при $x \to x_0$, которые равны между собой.

$\frac{f^{(0)}(x)}{0!} - a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{f^{(0)}(x)}{0!}$

$(9) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - a_k \right) (x-x_0)^{k-1} = o((x-x_0)^{n-1})$

$\lim\limits_{x\to x_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} - a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f^{(1)}(x)}{1!}$

Делая так n раз, получим $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. ■

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

§6.1 Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность

Имеет место следующее следствие из теоремы Лагранжа о среднем

Теорема 1 **(Критерий постоянства дифференцируемой функции).** Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале, то $f(x)$ постоянна на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ на $(a;b)$.

Теорема 2 **(Критерий возрастания/убывания дифференцируемой функции).** Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ (соотв., $f'(x) \leqslant 0$) на $(a;b)$.

Доказательство. Если $f(x)$ возрастает на $(a;b)$, то для любых x и $x+\Delta x$ из $(a;b)$ разность $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ имеет тот же знак, что и Δx, и поэтому всегда $\frac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$. Отсюда в пределе при $\Delta x \to 0$ следует, что $f'(x) \geqslant 0$. Аналогично, если $f(x)$ убывает на $(a;b)$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$, и поэтому $f'(x) \leqslant 0$ на $(a;b)$.

Наоборот, для любых x и $x+\Delta x$ из $(a;b)$, по теореме Лагранжа, существует ξ такое, что $\Delta f = f'(\xi)\Delta x$. Поэтому, если $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ на $(a;b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Теорема доказана. ■

Теорема 3 **(Достаточное условие строго возрастания/убывания дифференцируемой функции).** Если функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ дифференцируема и $f'(x)>0$ (<0) на $(a;b)$, то она строго возрастает (убывает) на $(a;b)$.

Доказательство. По теореме Лагранжа, для любых x и $x+\Delta x$ из $(a;b)$ существует ξ такое, что

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x.$$

Отсюда следует, что если $f'(x)>0$, то $f(x)$ строго возрастает, а если $f'(x)<0$, то $f(x)$ строго убывает на $(a;b)$.

Теорема доказана. ■

Заметим, что условие: $f'(x)>0$ на $(a;b)$, являясь достаточным, не является необходимым для строго возрастания дифференцируемой функции $f(x)$ на $(a;b)$. Например, функция $f(x)=x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, но $f'(0)=0$.

§6.2 Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на локальные экстремумы

Точки экстремума и экстремальные значения функции (локальные минимумы и локальные максимумы) определялись в Билете 4. Там же была доказана теорема Ферма:

Теорема 4 (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). Если функция $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема и x_0 является точкой экстремума для $f(x)$, то $f'(x_0)=0$.

Заметим, что условие $f'(x_0)=0$, являясь необходимым, не является достаточным для того, чтобы точка x_0 была экстремальной для $f(x)$. Например, для$f(x)=x^3$ имеем: $f'(0)=0$; но точка $x_0=0$ не является экстремальной.

Определение 1. Точка x_0 называется *стационарной точкой функции* $f(x)$, если $f(x)$ в точке x_0 дифференцируема и $f'(x_0)=0$. Если же $f'(x_0)>0$ (<0), то x_0 называется точкой возрастании (убывания) функции $f(x)$.

Из теоремы Ферма следует, что точки экстремумов данной функции следует искать среди так называемых, *критических точек*, т.е. среди стационарных точек и точек, в которых нет производной.

Определение 2. Точка $x_0\in D_f$ называется *точкой строгого максимума (минимума) функции* $f(x)$, если существует окрестность $\mathring{O}(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$\forall x\in \mathring{O}(x_0)\cap D_f \quad f(x)<f(x_0) \quad (\text{соотв.} f(x)>f(x_0)).$$

Точки строгого максимума и минимума функции называют *точками строгого экстремума* этой функции.

Теорема 5 (достаточное условие экстремума дифференцируемой функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывно на интервале $(a;b)$ и дифференцируема на интервалах $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$. Тогда, если $f'(x)>0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x)<0$ на $(x_0;b)$, то x_0 — точка строгого максимума, а если $f'(x)<0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x)>0$ на $(x_0;b)$, то x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть выполнено $f'(x)>0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x)<0$ на $(x_0;b)$. Пусть $x\in(a;x_0)\Rightarrow$ на $[x;x_0]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа.

$\Rightarrow \exists \xi \in (x; x_0)$:

$$f(x_0) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_0 - x)}_{>0} > 0 \Rightarrow \forall x \in (a; x_0) \quad f(x_0) > f(x).$$

Аналогично, пусть $x \in (x_0; b)$. Тогда $\exists \xi \in (x_0; x)$:

$$f(x_0) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0} \underbrace{(x_0 - x)}_{<0} > 0 \Rightarrow \forall x \in (x_0; b) \quad f(x_0) > f(x).$$

Т.е. x_0 — точка строго максимума функции f.

Теорема доказана. ■

Доказанную теорему образно формулируют следующим образом. *Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума, а если с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.*

Теорема 6 (достаточное условие экстремума дифференцируемой функции). Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную 2-го порядка. Тогда, если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$ (<0), то x_0 — точка строгого минимума (максимума) функции $f(x)$.

Доказательство. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{1}{2} f''(x_0) + \alpha(x)\right)(x - x_0)^2,$$

где $\alpha \to 0$ при $x \to x_0$.

Если $f''(x_0) > 0$, то $\exists O(x_0)$: $\forall x \in \mathring{O}(x_0)$ $\frac{1}{2} f''(x_0) + \alpha(x) > 0$ и поэтому $f(x) > f(x_0)$ $\forall \mathring{O}(x_0)$. Следовательно, x_0 — точка строгого минимума функции $f(x)$. Аналогично доказывается, что если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума функции $f(x)$.

Теорема доказана. ■

§6.3 Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на выпуклость

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз на промежутке* $\Delta \subset D_f$, если для любых $x_1, x_2 \in \Delta$ и любых положительных α_1 и α_2 таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{1}$$

Если же выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \tag{2}$$

то функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх на промежутке* Δ.

В этом случае промежуток Δ называется *промежутком выпуклости вниз (вверх) функции* $f(x)$.

Легко видеть, что если $x_1 \neq x_2$, то любая точка $x_\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, лежит строго между x_1 и x_2. И наоборот, любая точка x, лежащая строго между x_1 и x_2, может быть представлена в виде $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Если в (1) (соотв. (2)) для $x_1 \neq x_2$ выполнено строго неравенство, то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой вниз (вверх) на промежутке* Δ, а промежуток Δ называется *промежутком строгой выпуклости вниз* (вверх) *функции* $f(x)$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)$ убывает (возрастает) на (a,b), то $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на (a,b). Если же $f'(x)$ строго убывает (возрастает) на $(a;b)$, то $f(x)$ строго выпукла вверх (вниз) на (a,b).

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in (a;b)$ и, для определенности, $x_1 < x_2$. Пусть, далее, α_1, α_2 — положительные числа, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Тогда точка $x_\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ удовлетворяет неравенствам $x_1 < x_\alpha < x_2$.

По теореме о среднем Лагранжа имеем

$$\exists \xi_1 \in (x_1; x_\alpha)\colon \quad f(x_\alpha) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_\alpha - x_1),$$

$$\exists \xi_2 \in (x_\alpha; x_2)\colon \quad f(x_2) - f(x_\alpha) = f'(\xi_2)(x_2 - x_\alpha).$$

Первое равенство умножим на α_1, второе — на α_2, а затем из первого вычтем второе. В результате получим равенство

$$f(x_\alpha) - \alpha_1 f(x_1) - \alpha_2 f(x_2) = f'(\xi_1)\alpha_1(x_\alpha - x_1) - f'(\xi_2)\alpha_2(x_2 - x_\alpha).$$

Заметим, что

$$x_\alpha - x_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_1 = -\alpha_2 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_2(x_2 - x_1)$$

и, аналогично, $x_2 - x_\alpha = \alpha_1(x_2 - x_1)$, поэтому

$$f(x_\alpha) - \alpha_1 f(x_1) - \alpha_2 f(x_2) = \alpha_1\alpha_2(x_2 - x_1)(f'(\xi_1) - f'(\xi_2)),$$

где $\xi_1 < \xi_2$. Следовательно, если $f'(x)$ убывает (возрастает), то

$$f(x_\alpha) - \alpha_1 f(x_1) - \alpha_2 f(x_2) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0).$$

Это и доказывает, что функция $f(x)$ выпукла вверх (соотв. вниз) на интервале $(a;b)$. ∎

Следствие 1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x) \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) на интервале $(a;b)$, то $f(x)$ выпукла вверх (соотв., вниз) на $(a;b)$. Если же $f''(x) < 0$ (>0) на $(a;b)$, то $f(x)$ строго выпукла вверх (соотв., вниз) на $(a;b)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке она имеет касательную.

Определение 4. Если существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что любая точка графика функции $y = f(x)$ при $x \in O(x_0)$ лежит на касательной или выше (ниже) касательной в точке x_0, то x_0 называется *точкой выпуклости вниз (вверх) функции* $f(x)$.

Определение 5. Точка x_0 называется *точкой строгой выпуклости вниз (вверх)* функции $y = f(x)$, если существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что любая точка графика этой функции при $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$, лежит выше (ниже) касательной в точке x_0.

Определение 6. Если существует окрестность $O(x_0) = (a; b)$ точки x_0 такая, что точки графика функции $y = f(x)$ при $x \in (a; x_0)$ лежат по одну сторону от касательной и, может быть, на касательной, а при $x \in (x_0; b)$ — по другую сторону и, может быть, на касательной, то x_0 называется *точкой перегиба функции* $f(x)$

Если же точки графика функции $f(x)$ при $x \in (a; x_0)$ лежат строго по одну сторону от касательной, а при $x \in (x_0; b)$ — строго по другую сторону, то x_0 называется *точкой строгого перегиба функции* $f(x)$.

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную вторую производную. Тогда, если $f''(x_0) > 0$ (<0), то точка x_0 является точкой строгой выпуклости вниз (вверх) функции $f(x)$.

Доказательство. Утверждение следует из формулы Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \alpha(x)(x - x_0)^2,$$

где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$. Действительно, если $f''(x_0) > 0$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0 такая, что для любого $x \neq x_0$ из этой окрестности

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + \alpha(x) > 0$$

и, следовательно,

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

т.е. точки графика функции $y = f(x)$ для $x \in \overset{\circ}{O}(x_0)$ лежат выше касательной в точке x_0. Аналогично, если $f''(x_0) < 0$, то

$$\exists O(x_0)\colon \quad \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0) \quad f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad \blacksquare$$

Следствие 2. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную второго порядка. Тогда, если x_0 является точкой перегиба для

$f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 9. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на интервале $(a;b)$, содержащем точку x_0, и дважды дифференцируема на интервалах $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$. Тогда, если $f''(x)$ на $(a;x_0)$ положительна, а на $(x_0;b)$ отрицательна, или наоборот, то x_0 — точка строгого перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Для функции $f(x)$ напишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

где ξ лежит между x и x_0. Из нее видно, что если $f''(x)$ имеет разные знаки на $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, то график функции перегибается через касательную. ■

Таким образом, равенство нулю второй производной является *необходимым условием*, а смена знака второй производной — *достаточным условием точки перегиба* функции.

Многомерный анализ, интегралы и ряды

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте.

§7.1 Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте.

1 Компактные множества.

Определение 1. Множество G точек из $\mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует число $r \geqslant 0$ такое, что

$$|OM| \leqslant r \quad \forall M \in G.$$

Здесь O — точка с координатами $(0, 0, \ldots, 0)$.

Определение 2. Точка M_0 называется *точкой прикосновения множества* G, если в любой ее окрестности содержится хотя бы одна точка из G.

Определение 3. Множество всех точек прикосновения множества G называется *замыканием* множества G и обозначается $\overline{G}$.

Определение 4. Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Для любого множества G все его точки и все его предельные точки являются точками прикосновения, и других точек прикосновения нет.

Определение 5. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактным* множеством в $\mathbb{R}^n$ (*компактом* в $\mathbb{R}^n$), если $\forall$ последовательности $\{x_n\}$ точек множества G $\exists$ ее подпоследовательность, сходящаяся к точке множества G.

Теорема 1. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} G - \textit{ограниченное множество} \\ G - \textit{замкнутое множество}, \end{cases} \tag{1}$$

Доказательство.

1. Докажем, что если $G \subset \mathbb{R}^n$, G — огранич, G — замкнуто, то G — компакт.

Пусть $\{x_k\}$ — последовательность точек $\mathbb{R}^n$: $x_k \in G$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Т.к. G — ограниченное $\Leftarrow$ то согласно теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists \{x_{k_j}\}$ последовательности $\{x_k\}$, которая сходится к некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists j_0 \in \mathbb{N} : \ \forall j > j_0, x_{k_j} \in O_\varepsilon(x_0) \cap G \ \Leftarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ O_\varepsilon(x_0) \cap G \neq \varnothing$

$\Rightarrow$ x_0 — точка прикосновения множества G

G — замкнутое $\Rightarrow$ $x_0 \in G$

$\Rightarrow$ Любая последовательность точек G имеет подпоследовательность, сходящуюся к точке G (G — компакт)

2. Докажем, что если множество G не ограничено, то G не является компактом. И докажем, что если множество G не замкнуто, то G не является компактом.

G не является компактом: $\exists$ последовательность $\{x_n\}$ точек множества G такая, что $\forall$ ее подпоследовательность не является сходящейся к точке множества G.

1. G — неограниченная, $\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists x_k \in G\colon \quad |x_k| > k$

$\exists \{x_k\} : |x_k| > k \;\; \Rightarrow \;\; \forall$ строго монотонно возрастающая натуральная $\{k_j\} \;\; x_{k_j} > k_j \to +\infty$ при $j \to +\infty \quad \Rightarrow \;\; x_{k_j}$ расходится, т.е. неограничена

2. G — не замкнутое, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x_0$ — предельная точка G, $x_0 \notin$ $\notin G \quad \Rightarrow$

$\exists \{x_k\} : \; \forall k \in \mathbb{N} : x_k \in G \setminus \{x_0\}, x_k \to x_0$ при $k \to +\infty$

$\Rightarrow \quad \exists \{x_k\}$ — последовательность точек G, предел, который $\exists$ и не лежит в $G \quad \Rightarrow$ любая ее подпоследовательность не является сходящейся к точке множества G. ■

Область в $\mathbb{R}^n$ — аналог интервалов в $\mathbb{R}^1$
Компакты в $\mathbb{R}^n$ — аналог отрезков в $\mathbb{R}^1$

2 Равномерно непрерывные функции и отображения

Определение 6. Функция $f(M)$, $M \in G$, называется *непрерывной на множестве* G, если она непрерывна в каждой его точке, т.е. если выполняется условие:

$$\forall M_0 \in G \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall M \in G, \quad |MM_0| < \delta\colon \quad |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Заметим, что здесь δ зависит как от ε, так и от M_0.

Определение 7. Функция $f(M)$, $M \in G$, называется *равномерно непрерывной на множестве* G, если выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall M, M' \in G, \; |MM'| < \delta\colon \quad |f(M) - f(M')| < \varepsilon. \tag{3}$$

Заметим, что здесь δ зависит только от ε.

Очевидно, если выполнено условие (3), то и выполнено условие (2), т.е. если функция равномерно непрерывна в любой точке этого множества, то она непрерывна на этом множестве. Как показывают примеры, обратное утверждение является неверным.

Теорема 2. Если функция $f(M)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ (т.е. G — компакт в $\mathbb{R}^n$), то она равномерно непрерывна на G.

Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что функция $f(M)$ не является равномерно непрерывной на G. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \quad \forall \delta > 0 \quad \exists M, M' \in G: \quad |MM'| < \delta, \quad |f(M) - f(M')| \geqslant \varepsilon_0$$

Через M_k и M'_k обозначим точки из этого условия, которые соответствуют $\delta = 1/k$, т.е. M_k и M'_k принадлежат множеству G и такие, что

$$|M_k M'_k| < \frac{1}{k}, \quad |f(M_k) - f(M'_k)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{4}$$

Так как множество G ограничено, то последовательность $\{M_k\}$ ограничена, и поэтому по теореме Больцано—Вейерштрасса у нее есть сходящаяся подпоследовательность $\{M_{k_p}\}$. Пусть

$$\lim_{p \to \infty} M_{k_p} = M_0.$$

Отсюда и из условия $|M_k M'_k| < 1/k$ следует, что

$$\lim_{p \to \infty} M'_{k_p} = M_0.$$

А так как множество G замкнуто, то $M_0 \in G$.

Функция $f(M)$ непрерывна в точке M_0, поэтому

$$|f(M_{k_p}) - f(M'_{k_p})| \leqslant |f(M_{k_p}) - f(M_0)| + |f(M_0) - f(M'_{k_p})| \to 0$$

при $p \to \infty$, что противоречит условию (4), которое следует из нашего предположения. Следовательно, это предположение неверное.

Теорема доказана. ■

Эту теорему иногда называют *теоремой Кантора о равномерной непрерывности*. Кратко ее формулируют так:

Теорема 2'. Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна.

Следствие 1. Если функция непрерывна на некотором отрезке, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

§8.1 Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Определение 1. Функция f называется дифференцируемой в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если она определена в некоторой окрестности точки x^0 и $\exists$ вектор $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \in \mathbb{R}^n$, такой что

$$f(x) - f(x^0) = (A, x - x^0) + o(|x - x^0|),\ x \to x^0, \tag{1}$$

где $(A, x-x^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + A_n(x_n - x_n^0)$; $o(|x - x^0|) = \alpha(x)|x - x^0|$, где $\alpha(x)$ определена в $O(x^0)$, $\lim\limits_{x\to x^0} \alpha(x) = 0$.

При этом вектор $A \in \mathbb{R}^n$ называется градиентом функции f в точке x^0. (Градиент f в точке x^0 определен, если функция f дифференцируема в точке x^0). Обозначается $\operatorname{grad} f(x^0), \nabla f(x^0)$.

Функция f дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow\ f$ определена в окрестности $O(x^0)$ и $\exists A \in \mathbb{R}^n$, такое что

$$f(x) = f(x^0) + (A, x - x^0) + \alpha(x) \cdot |x - x^0|,\ \textit{где}\ \alpha \text{ — бмф при } x \to x^0$$

$$\Longleftrightarrow\ \exists \lim_{x\to x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - (A, x - x^0)}{|x - x^0|} = 0 \tag{1'}$$

Определение 2. Если функция f дифференцируема в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то дифференциалом функции f в точке x^0 называется функция аргумента $h \in \mathbb{R}^n$, линейная по h и заданная равенством

$$df(x^0, h) = (\operatorname{grad} f(x^0), h) = A_1 h_1 + \ldots + A_n h_n.$$

Если функция $f\colon G \to \mathbb{R}^1 (G \subset \mathbb{R}^n)$, дифференцируема на множестве $D \subset G$, то дифференциалом функции f называется функция $df(x, h)$, где $(x, h) \in D \times \mathbb{R}^n$; $df(x, h) = (\operatorname{grad} f(x), h)$

Определение 3. Производной функции f, определенной в окрестности $O(x^0)$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ по направлению $\overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^n$ $|l| = 1$, называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + tl) - f(x^0)}{t}$$

Определение 4. Частной производной функции f, определенной в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ по переменной x_j, $j \in \overline{1, n}$ в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, называется производная функции f в точке x^0 по направлению $\overrightarrow{l}_j = (0, \ldots, l_j = 1, \ldots, 0)$. Обозначается $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1^0,\ldots,x_{j-1}^0,x_j^0+t,x_{j+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x^0)}{t}$$

Теорема 1 (Достаточное условие дифференцируемости). Если функция f имеет в некоторой окрестности $O(x^0,y^0)$ частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $(x,y)\in O(x^0,y^0)$, которые непрерывны в точке (x^0,y^0), то функция f дифференцируема в точке x^0,y^0.

Доказательство. Пусть $(x,y)\in O_\delta(x^0,y^0)$, $|x-x^0|^2+|y-y^0|^2<\delta^2 \Rightarrow |y-y^0|^2<\delta^2 \Rightarrow (x^0,y)\in O_\delta(x^0,y^0) \Rightarrow$

$$f(x,y)-f(x^0,y^0)=f(x,y)-f(x^0,y)+f(x^0,y)-f(x^0,y^0),$$

$f(x,y)=\varphi(\xi),\xi\in[x^0,x] \quad\Rightarrow$ согласно условию Теоремы фунция $f(\xi,y)$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)$ в любой точке (ξ,y) при $\xi\in[x^0,x]$, т.к. тогда $(\xi,y)\in O(x^0,y^0) \quad\Rightarrow$ функция φ дифференцируема на отрезке $[x^0,x] \quad\Rightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\xi_1\in(x^0,x)$, $\varphi(x)-\varphi(x^0)=\varphi'(\xi_1)(x-x^0) \quad\Rightarrow\quad \exists\xi_1\in(x^0,x)$

$f(x,y)-f(x^0,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)(x-x^0)$

Аналогично, $\exists\eta_1\in(y,y^0)$:

$$f(x^0,y)-f(x^0,y^0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,\eta_1)(y-y^0)$$

$\forall(x,y)\in O_\delta(x^0,y^0) \quad \exists\xi_1\in(x^0,x),\ \exists\eta_1\in(y^0,y):$

$$f(x,y)-f(x^0,y^0)=f'_x(\xi,y)\Delta x+f'_y(x,\eta)\Delta y$$

Т.к. частные производные непрерывны в точке (x^0,y^0), то

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ y\to y^0}} f'_x(\xi_1,y)=f'_x(x^0,y^0)\Rightarrow \alpha=f'_x(\xi,y)-f'_x(x^0,y^0) - \textit{бмф при } (x,y)\to(x^0,y^0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ y\to y^0}} f'_y(x,\eta_1)=f'_y(x^0,y^0)\Rightarrow \beta=f'_y(x,\eta_1)-f'_y(x^0,y^0) - \textit{бмф при } (x,y)\to(x^0,y^0)$$

$\Rightarrow\ f(x,y)-f(x^0,y^0)=f'_x(x^0,y^0)\Delta x+f'_y(x^0,y^0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$

$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},\ \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} - \textit{ограниченые},$$

$$\gamma=\alpha\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\beta\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} - \textit{бмф}.$$

$\Rightarrow\ f$ дифференцируема в точке (x^0,y^0). ■

Следствие 1. Если фунция f определена на области $G \subset \mathbb{R}^n$ и имеет на этой области частные производные 1-го порядка, которые непрерывны на области G, то функция f дифференцируема в каждой точке области G.

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением[1].

§9.1 Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *неявной функцией, заданной уравнением* $F(x, y) = 0$, если $F(x, f(x)) = 0$ для любого $x \in D_f$. (Здесь, как обычно, D_f — область определения функции f.)

Теорема 1 (о существовании и единственности неявной функции, заданной одним уравнением). Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0), и пусть $F(x_0, y_0) = 0$. Тогда, если $F(x, y)$ при каждом фиксированном x строго монотонна по y, то у точек x_0 и y_0 существуют окрестности Δ и $(a; b)$ такие, что на множестве $\Delta \times (a; b)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y = f(x)$, $x \in \Delta$, и эта функция f непрерывна на Δ.

Доказательство. По условию функция $F(x_0, y)$ строго монотонна и равна нулю при y_0. Пусть для определенности, она строго возрастает. Тогда $F(x_0, y) > 0$ для всех допустимых $y > y_0$ и $F(x_0, y) < 0$ для всех допустимых $y < y_0$. Выберем некоторые a и b такие, что $a < y_0 < b$ и точки (x_0, a), (x_0, b) лежат в δ-окрестности точки (x_0, y_0). Тогда

$$F(x_0, a) < 0 < F(x_0, b).$$

Функции $F(x, a)$ и $F(x, b)$ непрерывны в точке x_0, поэтому существуют окрестности Δ' и Δ'' точки x_0 такие, что (рис.9.1)

$$F(x, a) < 0 \quad \forall x \in \Delta', \qquad F(x, b) > 0 \quad \forall x \in \Delta''.$$

Отсюда следует, что $F(x, a) < 0 < F(x, b)$ для любого x из интервала $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$. А так как функция $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in \Delta$ по y непрерывна и строго монотонна, то для каждого $x \in \Delta$ существует единственное y, которое обозначим $f(x)$, такое что $f(x) \in (a; b)$ и $F(x, f(x)) = 0$. Следовательно, на прямоугольнике $\Delta \times (a; b)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную неявную функцию $y = f(x)$. Докажем, что она непрерывна в точке x_0

Выберем некоторую окрестность $(\alpha; \beta)$ точки y_0. Не ограничивая общности, будем считать, что $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$. Тогда точно так же, как и для интервала (a, b), строится окрестность $\Delta = \Delta(\alpha; \beta)$ точки x_0 такая,

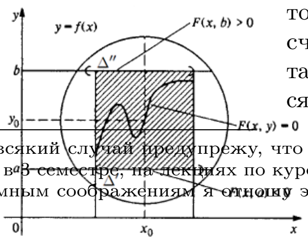


Рис. 9.1

[1] На всякий случай предупрежу, что материал этого билета и следующего билетов читался в 3 семестре, на лекциях по курсу “Кратные интегралы и теории поля”, однако по разумным соображениям я отношу этот материал к многомерному анализу.

что $\forall x \in \Delta \quad f(x) \in (\alpha; \beta)$. А это и означает, что функция f непрерывна в точке x_0.

Непрерывность функции $y = f(x)$ в любой точке $x_1 \in \Delta$ следует из того, что в точке с координатами x_1 и $y_1 = f(x_1)$ выполнены все условия теоремы, поэтому, согласно доказанному, у точки (x_1, y_1) существует прямоугольная окрестность, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную функцию $y = f_1(x)$, $x \in \Delta_1$, которая непрерывна в точке x_1. Очевидно, что $f_1(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta \cap \Delta_1$, и поэтому функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_1 \in \Delta$.

Теорема доказана. ■

Следствие 1. Пусть функция $F(x, y)$ в некоторой о
(x_0, y_0) непрерывна и имеет частную производную
ную в точке (x_0, y_0). Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$ и
справедливы утверждения теоремы 1.

Доказательство. Пусть для определенности $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда из непрерывности функции $F'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0) следует, что $F'_y(x, y) > 0$ в некоторой δ-окрестности этой точки, и поэтому для уравнения $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) выполнены все условия теоремы 1. Случай $F'_y(x_0, y_0) < 0$ рассматривается аналогично.

Следствие доказано. ■

Теорема 2. Пусть функция $F(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывна и имеет производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$, непрерывные в точке (x_0, y_0). Тогда если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то имеют место утверждения теоремы 1 и, кроме того, функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{1}$$

Доказательство. В силу непрерывности производных F'_x и F'_y в точке (x_0, y_0) функция $F(x, y)$ дифференцируема в этой точке, поэтому

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, а функции α и β такие, что $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Положим здесь $y = f(x)$. Тогда $F(x, y) = F(x_0, y_0) = 0$,

следовательно,

$$F'_x(x_0,y_0)\Delta x + F'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y = 0,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0,y_0)+\alpha}{F'_y(x_0,y_0)+\beta}.$$

Отсюда в пределе при $x \to x_0$ получаем, что функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную и справедлива формула (1).

Теорема доказана. ■

Следствие 2. Если выполнены все условия теоремы 2 и, кроме того, производные F'_x и F'_y непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция $y = f(x)$, $x \in \Delta$, имеет непрерывную производную.

Доказательство. В теореме 1 доказано, что функция $y = f(x)$ непрерывна. Из теоремы 2 следует, что она имеет производную, причем

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad x \in \Delta.$$

Поэтому, в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций, производная $f'(x)$ непрерывна на Δ.

Следствие доказано. ■

Следствие 3. Если выполнены все условия следствия 2 и, кроме того, функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема l раз в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция $y = f(x)$ на интервале Δ имеет непрерывные производные до l-го порядка включительно.

10. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

§10.1 Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть $f\colon D_f \to \mathbb{R}, \quad D_f \subset \mathbb{R}^n$

Определение 1. Точка $x_0 \in D_f$ будет называться точкой *локального минимума* (*максимума*), если

$$\exists \delta > 0\colon \quad \forall x \in D_f \cap O_\delta(x_0)\colon \quad f(x) \geqslant f(x_0) \quad \big(f(x) \leqslant f(x_0)\big) \tag{1}$$

Точка x_0 будет называться точкой *строгого минимума* (*максимума*) :

$$\exists \delta > 0\colon \quad \forall x \in D_f \cap O_\delta(x_0)\colon \quad f(x) > f(x_0) \quad \big(f(x) < f(x_0)\big) \tag{1'}$$

Определение 2. Точка $x_0 \in D_f$ называется точкой локального экстремума, если она является либо точкой локального минимума, либо точкой локального максимума функции f.

Точка x_0 не является точкой локального экстремума, если

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in D_f \cap \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\colon \quad f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

§10.2 Необходимые условия, достаточные условия

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума). Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда если x_0 является точкой локального экстремума функции f, то $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0 \quad \forall j \in \overline{1, n}$, т.е. $\operatorname{grad} f(x_0) = \vec{\theta}$.

Определение 3. Точка $x_0 \in D_f$ называется стационарной точкой функции f, если функция f дифференцируема в точке x_0 и $\operatorname{grad} f(x_0) = \vec{\theta}$.

Пусть функция f в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеет частные производные 2-ого порядка, непрерывные в точке x_0. Тогда существуют следующие формы для $\forall h \in \mathbb{R}^n$, которые мы обозначим за *линейную* и *квадратичную* соответственно.

$$df(x_0) = (\nabla f, h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j = \Phi_1(x_0, h) \tag{2}$$

$$d^2 f(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j = \Phi_2(x_0, h) \tag{3}$$

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума). Пусть функция f определена и имеет частные производные 2-го порядка в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, причем частные производные 2-го порядка непрерывны в точке x_0.

Тогда, если x_0 — точка локального максимума функции f, то $\nabla f(x_0) = \vec{\theta}; \quad \Phi_2(x_0, h) \leqslant 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. $\nabla f(x_0) = \vec{\theta}$ согласно Теореме 1. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (т.к. $df(x_0) = 0$)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\Phi_2(x_0, h) + \alpha(x)|h|^2, \quad \text{где} \quad h = x - x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{при} \quad \alpha(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0. \tag{4}$$

$\forall x \in D_f \setminus \{x_0\}$ положим $\xi = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}; \quad \rho = |x - x_0| \quad \Rightarrow \quad \rho > 0, \quad |\xi| = 1.$

$h = x - x_0 = \rho\xi \quad \Rightarrow \quad \Phi_2(x_0, h) = \Phi_2(x_0, \rho\xi) = \rho^2\Phi_(x_0, \xi)$, т.к. Φ_2 — квадратичная форма $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{\rho^2} = \frac{1}{2}\Phi_2(x_0, \xi) + \alpha(x)$

Т.к. x_0 — точка локального максимума, то $\exists \delta_0$: $\forall x \in O_\delta(x_0) \cap D_f$. $f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \xi \in S_1(\mathbb{R}^n), (|\xi| = 1) : \Phi_2(x_0, \xi) = 2\frac{1}{\rho^2}(f(x) - f(x_0)) - \alpha(x)$

$\Phi_2(x_0, \xi) = \lim\limits_{\rho \to 0} \left(2\frac{1}{\rho^2}(f(x) - f(x_0)) - \alpha(x)\right)$

$\exists \lim\limits_{\rho \to 0} \alpha(x) = 0$, $\Phi_2(x_0, \xi)$ от ρ не зависит, правая часть имеет предел $\Longrightarrow \quad \exists \lim\limits_{\rho \to 0} \left(\frac{1}{\rho^2}(f(x) - f(x_0))\right) \leqslant 0$

$\Rightarrow \quad \forall \xi \in S_1(\mathbb{R}^n) : \Phi_2(x_0, \xi) \leqslant 0$

$\Rightarrow \quad \forall h \in \mathbb{R}^n : \quad \Phi_2(x_0, h) = |h^2| \cdot \Phi_2\left(x_0, \frac{h}{|h|}\right) \leqslant 0$ ■

Теорема 3 (Достаточное условие экстремума). Пусть функция f определена и 2-ды непрерывно-дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $\nabla f(x_0) = \vec{\theta}$ и $\Phi_2(x_0, h) > 0 \quad \forall h \neq \vec{\theta}$, то x_0 — точка строгого локального минимума функции f.

Доказательство. Т.к. Φ_2 непрерывна на компакте $S_1(\mathbb{R}^n)$, то она достигает минимума в точке $\xi_0 \in S_1(\mathbb{R}^n) : m = \Phi_2(x_0, \xi_0) = \inf\limits_{|\xi|=1} \Phi_2(x_0, \xi) > 0$

Справедлива формула (4) $\quad \Rightarrow$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}|h^2| \cdot \left(\Phi_2\left(x_0, \frac{h}{|h|}\right) + \alpha(x)\right) \geqslant \frac{1}{2}|h|^2(m + \alpha(x))$$

$$\alpha(x) \overset{x \to x_0}{\Longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap D_f : f(x) - f(x_0) \geqslant \frac{1}{2}|h|^2\left(m - \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{4}|h|^2 > 0$$

$\Rightarrow$ Получили теорему 3

■

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона—Лейбница.

§11.1 Определение интеграла Римана

Определение 1. *Разбиением промежутка* Δ называется любое конечное множество $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ попарно непересекающихся промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$, объединение которых равно Δ.

Если a и b — концы промежутка Δ, а x_{i-1} и x_i — концы промежутка Δ_i, то

$$a = x_0 \leqslant x_1 \ldots \leqslant x_n = b.$$

Множество точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ называется *точками разбиения* $\tau(\Delta)$ промежутка Δ.

Пусть на конечном промежутке Δ задана функция $f(x)$, и пусть $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ — некоторое разбиение промежутка Δ. Через m_i и M_i обозначим точные грани функции f на промежутке Δ_i:

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x),$$

а через $|\Delta_i|$ — длину промежутка Δ_i. Очевидно, что если x_{i-1} и x_i — концы промежутка Δ_i, то $|\Delta_i| = x_i - x_{i-1}$, поэтому вместо $|\Delta_i|$ иногда будем писать Δx_i.

Определение 2. Для функции $f(x)$, $x \in \Delta$, и разбиения $\tau(\Delta)=\{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ суммы

$$\sum_{i=1}^{N} m_i|\Delta_i| \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{N} M_i|\Delta_i|$$

называются *интегральными суммами Дарбу* (соответственно, *нижней и верхней*) и обозначаются $s(f;\tau)$ и $S(f;\tau)$.

Очевидно, что для $\forall f(x)$, $x \in \Delta$, и $\forall \tau(\Delta)$ справедливо неравенство

$$s(f;\tau) \leqslant S(f;\tau).$$

Определение 3. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in \Delta$, и некоторое разбиение $\tau(\Delta) = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_N\}$ промежутка Δ. Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)|\Delta_i|,$$

где $\xi_i \in \Delta_i$ называется *интегральной суммой Римана функции* f и обозначается $\sigma(f;\tau)$ или $\sigma(f;\tau;\xi)$, где $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_N)$. ξ будем называть выборкой точек, подчиненной разбиению τ.

Очевидно, для любого разбиения $\tau(\Delta)=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_N\}$ справедливы неравенства

$$s(f;\tau)\leqslant\sigma(f;\tau;\xi)\leqslant S(f;\tau)$$

при любом выборе точек $\xi_i\in\Delta_i$. Кроме того,

$$s(f;\tau)=\inf_{\xi}\sigma(f;\tau;\xi),\quad S(f;\tau)=\sup_{\xi}\sigma(f;\tau;\xi).$$

Определение 4. Точные грани $\sup\limits_{\tau}s(f;\tau)$ и $\inf\limits_{\tau}S(f;\tau)$ называются *интегралами Дарбу* (соответственно, *нижним и верхним*) *от функции f по промежутку* Δ и обозначаются $\underline{J}(f)$ и $\overline{J}(f)$. Таким образом,

$$\underline{J}(f)=\sup_{\tau}s(f;\tau),\quad \overline{J}(f)=\inf_{\tau}S(f;\tau),$$

причем $\underline{J}(f)\leqslant\overline{J}(f)$ для любой функции f, определенной на конечном промежутке Δ.

Определение 5. Если интегралы Дарбу от функции f по промежутку Δ конечны и равны между собой, то функция f называется *интегрируемой по Риману на промежутке* Δ, а число

$$J(f)=\underline{J}(f)=\overline{J}(f)$$

называется *интегралом Римана от функции f по промежутку* Δ и обозначается $\int_\Delta f(x)\,dx$.

Из этого определения следует, что если функция f интегрируема на промежутке Δ, то

$$s(f;\tau)\leqslant\int_\Delta f(x)\,dx\leqslant S(f;\tau)\quad\forall\tau(\Delta).$$

Если $\Delta=[a,b]$, интеграл обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Определение 6. Пусть $\tau(\Delta)=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_N\}$ — некоторое разбиение конечного промежутка Δ. Тогда число, равное $\max\limits_i|\Delta_i|$, где $i=1,\ldots,N$, называется *мелкостью разбиения* τ и обозначается $|\tau|$.

Определение 7. Последовательность $\{\tau_k\}$ разбиений промежутка Δ называется *римановой*, если $\lim\limits_{k\to+\infty}|\tau_k|=0$.

Теорема 1. Если функция f интегрируема на промежутке $\Delta \subset D_f$, то для любой римановой последовательности разбиений $\tau_k(\Delta)$, $k \in \mathbb{N}$, имеют место равенства

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f, \tau, \xi) = \lim_{k\to\infty} \sigma(f, \tau_k, \xi) = \int_{\Delta} f(x)\, dx. \tag{1}$$

§11.2 Определенный интеграл как функция верхнего (нижнего) предела.

Для любой функции f, определенной и интегрируемой на промежутке Δ, функция

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \quad x \in \Delta, \tag{2}$$

где $c \in \Delta$, называется *интегралом с переменным верхним пределом*, а функция

$$\Phi(x) = \int_x^c f(t)\, dt, \quad x \in \Delta, \tag{3}$$

— *интегралом с переменным нижним пределом*.

Очевидно, $\Phi(x) = -F(x)$ $\forall x \in \Delta$. Поэтому ограничимся рассмотрением только интегралов с переменным верхним пределом.

Теорема 2. Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то функция (2) на Δ удовлетворяет условию

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leqslant ||f|| \cdot |x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in \Delta,$$

где $||f|| = \sup\limits_{x\in\Delta} |f(x)|$.

Доказательство. Действительно, $\forall x_1, x_2$ из Δ имеем:

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_c^{x_2} f(t)\, dt - \int_c^{x_1} f(t)\, dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\, dt \right| \leqslant ||f|| \cdot |x_2 - x_1|. \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. Если функция f интегрируема на промежутке Δ, то функции (2) и (3) непрерывны на Δ.

Теорема 3. Если функция f интегрируема на промежутке Δ и непрерывна в точке $x_0 \in \Delta$, то функция (2) в точке x_0 имеет производную и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $x \in \Delta$, $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta F = F(x) - F(x_0)$. Тогда, если $x \neq x_0$, то

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt,$$

и поэтому

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,dt \right|. \tag{4}$$

Так как функция f непрерывна в точке x_0, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in O_\delta(x_0) \cap \Delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда из равенства (4) следует, что

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|} \left| \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,dt \right| = \varepsilon$$

$\forall x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \cap \Delta$, и поэтому $F'(x_0)$ существует и $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Определение 8. Функция $F(x)$ называется *первообразной* (или *точной первообразной*) для функции $f(x)$ на промежутке Δ, если $F(x)$ дифференцируема на Δ и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta.$$

Очевидно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то и любая функция вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, будет первообразной для $f(x)$.

Следствие 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману и непрерывна на промежутке Δ. Тогда $\forall x_0 \in \Delta$ функция (2) непрерывно дифференцируема и $\forall x \in \Delta$ $F'(x_0) = f(x_0)$.

У любой непрерывной, интегрируемой по Риману на промежутке Δ функции f есть первообразная (2).

§11.3 Формула Ньютона—Лейбница

Теорема 4. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть сначала функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b)$. Тогда для любых точек $x_0, x_1, \ldots, x_N$, таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

имеем
$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{N}\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right).$$

На любом отрезке $[x_{i-1},x_i]$ функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа о среднем, поэтому
$$\exists\xi_i\in(x_{i-1};x_i)\colon\quad F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i,$$
и, следовательно,
$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{N}f(\xi_i)\Delta x_i=\sigma(f;\tau;\xi),$$
где τ — разбиение отрезка $[a;b]$ точками x_0, x_1, ..., x_N. А так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то по теореме 1
$$\lim_{|\tau|\to 0}\sigma(f;\tau;\xi)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Формула (5) доказана в случае, когда $F'(x)=f(x)$ на интервале $(a;b)$. В общем случае, пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F'(x)=$ $=f(x)$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек $c_0,c_1,\ldots,c_N$, таких, что $a=c_0<c_1<\ldots<c_N=b$, где $F'(x)\neq f(x)$ или $F'(x)$ не существует. Тогда, как уже доказано,
$$\int_{c_{i-1}}^{c_i}f(x)\,dx=F(c_i)-F(c_{i-1}),$$
и поэтому
$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{c_{i-1}}^{c_i}f(x)\,dx=F(b)-F(a).\qquad\blacksquare$$

Формула (2) называется *формулой Ньютона—Лейбница*. В ней вместо разности $F(b)-F(a)$ иногда пишут $F(x)\big|_a^b$, и тогда она принимает вид
$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Следствие 3. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема и имеет первообразную $F(x)$ (точную или обобщенную), то
$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt.$$

Следствие 4. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ интегрируема и имеет точную первообразную, то существует $\xi \in (a;b)$ такое, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, формула (6) следует из формулы (5) и формулы Лагранжа о среднем для функции $F(x)$. ■

В заключение доказанную теорему сформулируем как теорему об интеграле от производной:

Если функция $F(x)\colon x \in [a;b]$, на отрезке $[a;b]$ непрерывна и кусочно-дифференцируема, а ее производная интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{7}$$

Формула (7), как и формула (2), называется формулой Ньютона—Лейбница.

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы равномерно сходящегося ряда.

§12.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

1 Сходимость функциональных последовательностей и рядов

Пусть задана последовательность функций $\{f_n\}$

$$f_n(x), \ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

определенных на некотором множестве E.

Определение 1. Функциональная последовательность называется *сходящейся в точке* $x_0 \in E$, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится.

Последовательность $\{f_n\}$ называется сходящейся на множестве E, если она сходится в каждой точке множества E.

Если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E, \tag{2}$$

то говорят, что *последовательность* (1) *на множестве* E *сходится к функции* $f(x)$, и пишут «$f_n(x) \to f(x)$ на E» или «$f_n(x) \xrightarrow{E} f(x)$ при $n \to +\infty$».

Эта функция $f(x)$ называется пределом или предельной функцией последовательности. В этом случае иногда говорят, что *последовательность* $\{f_n\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *поточечно*.

Соответствующим образом определяется и сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{3}$$

члены которого определены на множестве E.

Определение 2. Ряд (3) называется *сходящимся в точке* $x_0 \in E$, если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится.

Ряд (3) *называется сходящимся на множестве* E, если он сходится в любой точке множества E. Если

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \forall x \in E, \tag{4}$$

то функция $f(x)$ называется *суммой ряда* (3).

§12.2 Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы равномерно сходящегося ряда

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

§13.1 Степенные ряды. Радиус сходимости

Радиус и круг сходимости степенного ряда. Радиус сходимости

Рассматриваем функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

где z_0 и $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — заданные комплексные числа, а z — переменная, принимающая комплексные значения, т.е $z \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Такие ряды называются *степенными рядами*. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда* (1).

Отметим, что у степенного ряда счет членов ведется не с единицы, а с нуля: первый член называется нулевым, второй — первым и т.д.

Теорема 1. Если степенной ряд (1) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он сходится абсолютно в любой точке z из круга $|z-z_0|<r_1$, где $r_1=|z_1-z_0|$.

Доказательство. Так как ряд (1) сходится в точке z_1, то последовательность $\{a_n r_1^n\}$ ограничена. Пусть

$$|a_n r_1^n| \leqslant M \quad \forall n$$

Положим $q = \frac{1}{r_1}|z - z_0|$. Тогда

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n| r_1^n q^n \leqslant M q^n \quad \forall n.$$

Отсюда по признаку сравнения следует, что если $|z - z_0| < r_1$, то ряд (1) сходится абсолютно. Теорема 1 доказана. ■

Следствие 1. Если ряд (1) расходится в точке z_2, то он расходится в любой точке z, для которой $|z - z_0| > r_2$, где $r_2 = |z_2 - z_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что для степенного ряда (1) возможны три ситуации:

1. ряд (1) сходится только в точке z_0;
2. ряд (1) сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$;
3. существует число $R > 0$ такое, что для всех z из круга $|z - z_0| < R$ ряд сходится, а для всех z, для которых $|z - z_0| > R$, ряд расходится.

Определение 1. Число $R > 0$, обладающее свойством: ряд (1) сходится, если $|z - z_0| < R$, и расходится, если $|z - z_0| > R$, называется *радиусом сходимости*, а круг $|z - z_0| < R$ — *кругом сходимости* степенного ряда (1).

Если ряд (1) сходится только в точке z_0, то, по определению $R = 0$. Если ряд (1) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то $R = +\infty$.

Теорема 2. У любого степенного ряда (1) существует радиус сходимости R, причем

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, и пусть сначала $0 < q < +\infty$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = q \cdot |z - z_0|.$$

Отсюда по признаку Коши для числового ряда следует, что ряд (1) сходится, если $q|z - z_0| < 1$, и расходится, если $q|z - z_0| > 1$.

Следовательно, $R = 1/q$, т.е. справедлива формула (2).

Если $q = 0$, то ряд (1) сходится при любом z, и поэтому $R = +\infty$. Если же $q = +\infty$, то ряд (1) расходится при любом $z \neq z_0$, и поэтому $R = 0$. Можно считать, что в этих случаях тоже справедлива формула (2).

Теорема доказана. ∎

Формула (2) называется *формулой Коши-Адамара* для радиуса сходимости степенного ряда (1).

Теорема 3. Степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \tag{4}$$

имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (1).

Доказательство. Заметим, что ряд (3) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ и $\{\sqrt[n]{n|a_n|}\}$ имеют одни и те же частные пределы. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

что, в силу формулы Коши-Адамара, и доказывает равенство радиусов сходимости степенных рядов (1) и (3).

Аналогично ряд (4) сходится или расходится одновременно с рядом
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^n.$$
А так как
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$
то ряд (4) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (1). Теорема доказана.

Отметим, что ряд (3) получается из ряда (1) почленным дифференцированием, а ряд (4) — почленным интегрированием по отрезку $[z_0; z]$, соединяющему точки z_0 и z. Следовательно, теорему (3) можно сформулировать так: *Исходный ряд и ряды полученные из него почленным дифференцированием и почленным интегрированием, имеют один и тот же радиус сходимости.* ■

Теорема 4. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда (1). Тогда, если $R > 0$, то ряд (1) сходится равномерно на любом замкнутом круге $|z_0 - z| \leqslant r$, у которого $r < R$.

Доказательство. Из определения радиуса сходимости и теоремы Абеля следует, что ряд (1) в точке $z_1 = z_0 + r$ сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. А так как
$$|a_n(z-z_0)^n| \leqslant |a_n| r^n \quad \forall n$$
при условии $|z - z_0| \leqslant r$, то, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (1) сходится равномерно в круге $|z - z_0| \leqslant r$. Теорема доказана. ■

Следствие 2. Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (1). В случае $R = 0$ круг сходимости, согласно определению, является пустым множеством.

Пусть $R > 0$. Рассмотрим некоторую точку z_1 из круга сходимости и положим $\delta = R - |z_1 - z_0|$.

Тогда $O_\delta(z_1)$ содержится в $O_r(z_0)$, а $O_{\delta/2}(z_1)$ содержится в $O_r(z_0)$, $r = R - \delta/2$, где ряд сходится равномерно. А так как члены ряда (1) непрерывны в точке z_1, то его сумма тоже непрерывна в точке z_1.

Следствие доказано. ■

Рассмотрим теперь случай, когда степенной ряд сходится в некоторой точке, лежащей на границе его круга сходимости. Рассмотрим ряды вида
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{5}$$

Теорема 5. Если R — радиус сходимости ряда (5), и ряд сходится при $z = R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0; R]$ действительной оси.

Доказательство. Если $z \in [0; R]$, то

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно относительно x, а последовательность

$$b_n = \left(\frac{x}{R}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

при любом x монотонна и на $[0; R]$ ограничена:

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$$

Поэтому, согласно принципу Абеля, ряд (5) сходится равномерно на $[0; R]$.

Теорема доказана. ■

Эта теорема называется *Второй теоремой Абеля.*

§13.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{6}$$

Теорема 6. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда (6), а $f(x)$ — сумма этого ряда. Тогда, если $R > 0$, то функция $f(x)$ в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ имеет производные любого порядка, которые находятся почленным дифференцированием ряда (6).

Доказательство. Действительно, согласно теореме 3, почленно продифференцированный ряд имеет тот же радиус сходимости R, что и ряд (6), поэтому он сходится равномерно на любом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, и утверждение теоремы следует из теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда. ■

Теорема 7. Если функция $f(x)$ является аналитической в точке x_0, т.е. в некоторой δ-окрестности точки x_0 она является суммой степенного ряда вида (6), то

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Доказательство. Действительно, продифференцировав n раз обе части равенства

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

и положив $x = x_0$, получим $f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$. ■

§13.3 Ряд Тейлора

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда степенной ряд (6), коэффициенты которого определены по формулам (7), называется *рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*.

В случае, когда $x_0 = 0$, ряд Тейлора называют *рядом Маклорена*.

Из теорем 6 и 7 следует, что если функция $f(x)$ аналитическая в точке x_0, то она в некоторой окрестности точки x_0 бесконечно дифференцируема и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

т.е. в этой окрестности она разлагается в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.

Рассмотрим формулу Тейлора для функции $f(x)$, которая определена и бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + r_n(x), \tag{8}$$

где $r_n(x)$ — n-й остаточный член формулы Тейлора. Из нее видно, что *функция $f(x)$ есть сумма своего ряда Тейлора в некоторой δ-окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in O_\delta(x_0).$$

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0. Тогда, если

$$\exists M\colon \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad \forall x \in O_\delta(x_0), \quad \forall n,$$

то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \forall x \in O_\delta(x_0).$$

Доказательство. Для функции $f(x)$ напишем формулу Тейлора (8) с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0. Тогда $|f^{(n+1)}(\xi)| \leqslant M$, и поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

для любого n и любого $x \in O_\delta(x_0)$. А это и доказывает теорему, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \qquad \blacksquare$$

Кратные интегралы и теория поля

III

14. Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости.

§14.1 Формула Грина

1 Криволинейные интегралы: определения, основные свойства

2 Формула Грина для клетки

Пусть в плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксирована некоторая прямоугольная система координат x, y, и пусть Δ — некоторая открытая клетка, т.е. $\Delta = (a; b) \times (c; d)$, а $\overline{\Delta}$ — ее замыкание, т.е. $\overline{\Delta} = [a; b] \times [c; d]$. Через $\partial\Delta$, как обычно, обозначим границу множества Δ.

Лемма 1. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны на $\overline{\Delta}$, а их производные P'_y и Q'_x непрерывны и интегрируемы на Δ, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\partial\Delta} P\, dx + Q\, dy \tag{1}$$

где обход $\partial\Delta$ совершается против часовой стрелки, если система координат x, y правая (рис), и по часовой стрелке, если система координат x, y левая (рис 14.2).

Доказательство. По формуле сведения кратного интеграла к повторному получаем

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int\limits_c^d Q(b, y)\, dy - \int\limits_c^d Q(a, y)\, dy$$

В правой части стоит разность двух интегралов: первый интеграл — это криволинейный интеграл по отрезку BC, а второй — интеграл отрезку AD. Следовательно,

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{BC} Q\, dy - \int\limits_{AD} Q\, dy = \int\limits_{BC} Q\, dy + \int\limits_{DA} Q\, dy.$$

А так как интегралы от $Q\, dy$ по AB и CD равны нулю, то

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{ABCDA} Q\, dy$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{ABCDA} P\, dx.$$

Лемма доказана. ∎

Формула (1) называется *формулой Грина*. Таким образом, *формула Грина справедлива для любого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат*.

§14.2 Потенциальные векторные поля на плоскости

Если на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ задана векторная функция $a(M)$, то говорят, что на G задано *векторное поле* $a(M)$

В этом параграфе будем считать, что G — это 2-мерная область, т.е. открытое связное множество точек на плоскости.

Определение 1. Векторное поле $a(M)$, $M \in G$, называется *потенциальным в области* G, если существует скалярная функция $u(M), M \in G$, такая, что

$$a(M) = \operatorname{grad} u(M), M \in G.$$

В этом случае функция $u(M)$ называется *потенциалом векторного поля* $a(M)$.

15. Формула Остроградского—Гаусса. Соленоидальные векторные поля.

§15.1 Формула Остроградского—Гаусса

Определение 1. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ называется элементарной относительно оси z в прямоугольной декартовой системе координат (O, x, y, z), если

$$G = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, (x, y) \in g, \quad \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in g \,\}, \tag{1}$$

где g — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂g и функции φ_1, φ_2 определены, непрерывны на замыкании области $\overline{g}$ и непрерывно-дифференцируемы на g.

Аналогично определяется область в $\mathbb{R}^3$, элементарная относительно осей x, y.

Замечание. Так как область g ограничена и ее граница является кусочно-гладкой, то граница имеет нулевую меру Жордана, а g — измеримо по Жордану, ∂g — компакт.

Лемма 1. Пусть область G элементарна относительно оси $z(x, y)$. Тогда если функция f определена и непрерывна на замыкании $\overline{G}$, и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial z}$, *или* $\frac{\partial f}{\partial x}$, *или* $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна и ограничена на G, то

$$\iiint\limits_G \frac{\partial f}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G\,\text{внеш}} f\, dx\, dy, \tag{2}$$

или

$$\iiint\limits_G \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G\,\text{внеш}} f\, dy\, dz, \tag{3}$$

или

$$\iiint\limits_G \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G\,\text{внеш}} f\, dx\, dz, \tag{4}$$

где поверхностные интегралы берутся по внешней относительно G стороне поверхности ∂G.

Доказательство. Область G задана условием (1) $\Rightarrow$ $\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0$,

где $S_{1,2} = \{(x, y) \in \overline{g},\ z = \varphi_{1,2}(x, y)\}$, $S_0 = \{(x, y) \in \partial g, \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y)\}$

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in g,\ \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y)\ \forall (x, y) \in g\}$ $\Rightarrow$ ∂G — кусочно-гладкая поверхность.

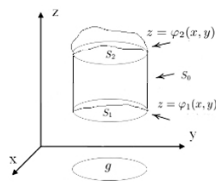


Рис. 15.1

$$\iint\limits_{S_{2}\text{внеш}} f\,dx\,dy = \iint\limits_{g} f(x,y,\varphi_2(x,y))\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{S_{1}\text{внеш}} f\,dx\,dy = -\iint\limits_{g} f(x,y,\varphi_1(x,y))\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{S_{0}\text{внеш}} f\,dx\,dy{=}0, \text{ так как на } S_0\ \vec{n}_{\text{внеш}(x,y,z)=(n_x,n_y,0)}$$

$\Rightarrow$

$$\iint\limits_{G} f\,dx\,dy{=}\iint\limits_{g} (f(x,y,\varphi_2(x,y)){-}f(x,y,\varphi_1(x,y)))\,dx\,dy$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{g} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz{=}$$

$$= \iint\limits_{g} f(x,y,\varphi_2) - f(x,y,\varphi_1)\,dx\,dy \qquad \blacksquare$$

Следствие 1. Лемма 1 для x и для y доказывается аналогично.

Теорема 1 (Теорема Остроградского—Гаусса). Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ элементарна относительно всех координатных осей. Тогда если функции P, Q, R определены и непрерывны на $\overline{G}$, а частные производные P'_x, Q'_y, R'_z — непрерывны и ограничены на G, то справедлива *формула Остроградского—Гаусса*:

$$\iiint\limits_{G} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G\text{внеш}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \quad (5)$$

где $\partial G_{\text{внеш}}$ — внешняя относительно области G сторона поверхности G.

Доказательство. $(5) \Leftarrow (3), (4), (2)$. $\blacksquare$

Лемма 2. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ можно разрезать кусочно-гладкой поверхностью $\Sigma \subset G$ на две области G_1 и G_2, каждая из которых элементарна относительно координатной оси z. Тогда если функция f определена и непрерывна на $\overline{G}$ и ее частная производная f'_z непрерывна и ограничена на G, то справедлива формула (2).

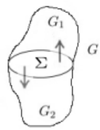
Доказательство. $G = G_1 \cup G_2$

$\partial G_{1\text{внеш}} = \partial G'_{\text{внеш}} \cup \Sigma_{1\text{внеш}}$

$$\partial G_{2\,внеш} = \partial G''_{внеш} \cup \Sigma_{2\,внеш}$$
$$\partial G_{внеш} = \partial G'_{внеш} \cup \partial G''_{внеш}$$

$\left.\begin{matrix}\Sigma_{1\,внеш}\\ \Sigma_{2\,внеш}\end{matrix}\right\}$ *это поверхности Σс противоположными ориентациями.*

$$\iint\limits_{\partial G_{1\,внеш}} f\,dx\,dy + \iint\limits_{\partial G_{2\,внеш}} f\,dx\,dy = \iint\limits_{G_{внеш}} f\,dx\,dy \qquad (6)$$



$$\iiint\limits_{G_{1,2}} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G_{1,2\,внеш}} f\,dx, dy \qquad (7)$$

Рис. 15.2

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G_1} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{G_2} \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \qquad (8)$$

$(6,7,8) \;\Rightarrow\; (2)$ ■

Теорема 2. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^3$ такая, что для каждой их трех координатных осей ее можно конечным числом кусочно-гладких поверхностей разрезать на конечное число областей, элементарных относительно соответствующей оси. Тогда если функции P, Q, R непрерывны на $\overline{G}$, а их частные производные P'_x, Q'_y, R'_z непрерывны и ограничены на G, то справедлива *формула Остроградского—Гаусса* (5).

Теорема 3. Пусть область G — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, граница которой состоит из конечного числа гладких поверхностей. Пусть функции P, Q, R определены и непрерывны на замыкании $\overline{G}$. Тогда если она непрерывно-дифференцируема на G, то справедлива формула (5).

§15.2 Соленоидальные векторные поля.

Определение 2. Непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$, $M \in G$ называется *соленоидальным* в области G, если

$$\forall M \in G \quad \operatorname{div} \vec{a}(M) = 0 \qquad (9)$$

Теорема 4. Непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$, $M \in$ $\in G$ является соленоидальным в области $G \Leftrightarrow$ для любой замкнутой области $\overline{g}$ такой, что $\overline{g} \subset G$ и ∂g - кусочно-гладкая граница области g, выполняется равенство:

$$\iint\limits_{\partial g \text{внеш}} \vec{a}\, d\vec{s} = 0 \tag{10}$$

Доказательство. Пусть выполняется (9). Пусть g — область: $\overline{g} \subset G$ и ∂g — кусочно-гладкая поверхность.

Тогда так как $\vec{a}$ — непрерывно-дифференцируемое векторное поле в G, по формуле Остроградского—Гаусса:

$$\iint\limits_{\partial \overline{g}} \vec{a}\, d\vec{s} = \iiint\limits_{g} \operatorname{div}\, \vec{a}(M)\, dg = 0, \text{ из } (9)$$

$\Rightarrow$ из (9) $\Rightarrow$ (10)

Пусть выполняется (10), $M \in G$. $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0 :\ O_\delta \subset G \Rightarrow$

$$\operatorname{div}\, \vec{a}(M) = \lim_{r \to +0} \left(\frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \iint\limits_{S_M^+(r)} a\, d\vec{s} \right) = 0,$$

где $S_M^+(r)$ — сфера с центром в точке M радиуса r, $r \in (0, \delta)$.

(10) $\Rightarrow$ (9) ■

Определение 3. Непрерывно-дифференцируемая векторная функция $\vec{b}(M)$, $M \in G$, называется векторным потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$, $M \in G \subset \mathbb{R}^3$, в области G, если

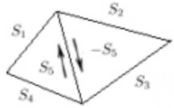
$$\forall M \in G \quad \vec{a}(M) = \operatorname{rot}\, \vec{b}(M)$$

Лемма 3. Если непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$, $M \in G$, имеет на области G векторный потенциал, то оно соленоидально на G.

Доказательство. $\vec{a}(M)$ — непрерывно-дифференцируемо по условию. Тогда

$$\forall M \in G \quad \vec{a}(M) = \operatorname{rot}\, \vec{b}(M) \Rightarrow \quad \exists \operatorname{div}\, \vec{a}(M) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\, \vec{b}(M)) = 0 \text{ в } G.$$ ■

Определение 4. Замкнутой кусочно-гладкой поверхностью называется ограниченная кусочно-гладкая поверхность, не имеющая края. При этом, если $S = \sum\limits_{j=1}^{m} S_j$, где $\forall j \in \overline{1, m}$, S_j — простая гладкая поверхность с кусочно-гладким краем ∂S_j, то каждый гладкий участок края ∂S_j совпадает с гладким участком края ∂S_i, но их ориентации противоположны. Суммарный край $\partial S = \sum\limits_{j=1}^{m} \partial S_j$ — пуст.



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ Рис. 15.3

Теорема 5. Если непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$, $M \in G$, имеет в области G векторный потенциал $\vec{b}$, то для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности $S: \ S \subset G$ выполняется равенство: $\iint\limits_S \vec{a}\, d\vec{s} = 0$.

Доказательство. Пусть S_1 — гладкий кусок кусочно-гладкой поверхности S без края. Пусть $\gamma_1 = \partial S_1$, γ_1 — край S_1. Тогда поверхность $S_2 = S \setminus S_1$ имеет край $\gamma_2 = \partial S_2 = (\gamma_1)^{-1}$.

$\vec{a}$ — непрерывно-дифференцируемая вектор-функция на области G.

$S_2, S_1 \subset G$.

$\Rightarrow$ на S_2, S_1 справедлива формула Стокса.

$$\iint\limits_S \vec{a}\, d\vec{s} = \iint\limits_{S_1} \vec{a}\, d\vec{s} + \iint\limits_{S_2} \vec{a}\, d\vec{s} = \iint\limits_{S_1} \operatorname{rot} \vec{b}\, d\vec{s} + \iint\limits_{S_2} \operatorname{rot} \vec{b}\, d\vec{s} \overset{\textit{Стокс}}{=\!=\!=}$$
$$= \iint\limits_{\gamma_1} \vec{b}\, d\vec{r} + \iint\limits_{\gamma_2} \vec{b}\, d\vec{r} = \iint\limits_{\gamma_1} \vec{b}\, d\vec{r} - \iint\limits_{\gamma_1} \vec{b}\, d\vec{r} = 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 6. Если непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$, $M \in G$ соленоидально в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то

$$\forall M \in G\ \exists \delta > 0,\ \exists \textit{непр-дифф. вект. поле } \vec{b}(P),\ P \in O_\delta(M):$$
$$\forall P \in O_\delta(M): \ \vec{a}(P) = \operatorname{rot} \vec{b}(P) \qquad (11)$$

Теорема 7 (Гельмгольца). Любое непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$, $M \in G$, G — область в $\mathbb{R}^3$, является суммой двух непрерывно-дифференцируемых векторных полей — потенциального и соленоидального:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u(M) + \vec{c}(M), \quad \forall M \in G, \quad \operatorname{div} \vec{c}(M) = 0$$

16. Формула Стокса.

§16.1 Формула Стокса

1 Формула Стокса для гладкой параметрически заданной поверхности

Рассмотрим гладкую параметрически заданную поверхность с краем

$$S = \{\vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}\} \tag{1}$$

Будем предполагать, что здесь D — это ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров. Тогда граница (край) поверхности (1) тоже состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров. Любую такую поверхность S будем называть *гладкой поверхностью с кусочно-гладкой границей*.

Если носитель поверхности S содержится в некотором множестве $G \subset \subset \mathbb{R}^3$, то будем говорить, что поверхность S лежит в G, и писать $S \subset G$.

Теорема 1. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определены и непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \mathbb{R}^3$, то для любой гладкой поверхности $S \subset G$ с кусочно-гладкой границей ∂S справедливы формулы

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\partial S} Q\,dy = \iint\limits_{S} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\partial S} R\,dz = \iint\limits_{S} \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\,dx, \tag{4}$$

где ориентации поверхности S и ее границы ∂S согласованы.

Доказательство. Пусть гладкая поверхность S задана уравнением (1) и ориентирована своими параметрами, а граница ∂D области D состоит из одного или нескольких кусочно-гладких кусков вида $\gamma = \{u(t), v(t), t \in \in [a;b]\}$, каждый из которых параметром t ориентирован положительно относительно области D. Тогда, как известно (см.выше???), граница ∂S поверхности S состоит из конечного числа кусочно-гладких кусков вида

$$\Gamma = \{\vec{r}(u(t), v(t)), \quad t \in [a;b]\},$$

ориентация каждого из которых параметром t согласована с ориентацией поверхности S.

Для каждого куска $\Gamma \subset \partial S$ по формуле замены переменных

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx = \int\limits_{\gamma} (Px'_u)\,du + (Px'_v)\,dv.$$

Просуммировав по всем $\Gamma \subset \partial S$, получим

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \int\limits_{\partial D} (Px'_u)\,du + (Px'_v)\,dv. \tag{5}$$

При дополнительном условии, что функция $x(u,v)$ имеет непрерывную смешанную производную, интеграл по ∂D, согласно формуле Грина, равен следующему двойному интегралу:

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial(Px_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Px'_u)}{\partial v} \right) du\,dv.$$

Преобразуем подынтегральное выражение этого интеграла:

$$\frac{\partial(Px'_v)}{\partial u} - \frac{\partial(Px'_u)}{\partial v} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}x'_u + \frac{\partial P}{\partial y}y'_u + \frac{\partial P}{\partial z}z'_u \right) x'_v -$$
$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x}x'_v + \frac{\partial P}{\partial y}y'_v + \frac{\partial P}{\partial z}z'_v \right) x'_u = \frac{\partial P}{\partial y}(y'_u x'_v - y'_v x'_u) + \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) =$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}.$$

В результате получим равенство

$$\iint\limits_{\partial D} (Px'_u)\,du + (Px'_v)\,dv = \int\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du\,dv. \tag{6}$$

Отметим, что оно справедливо и без предположения, что функция $x(u,v)$ имеет непрерывную смешанную производную. (Это утверждение можно доказать предельным переходом.)

Из равенств (5), (6) и формулы для вычисления поверхностных интегралов следует, что

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx = \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} du\,dv - \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du\,dv = \iint\limits_{S} \frac{\partial P}{\partial z} dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy.$$

Формула (2) доказана. Формулы (3), (4) доказываются аналогично.

Теорема доказана. ■

Сложив равенства (2)–(4), получим формулу

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Эта формула (как, в частности, любая из формул (2)–(4)) называется *формулой Стокса*.

Если поверхность S лежит на плоскости $z = 0$, то формула Стокса превращается формулу Грина:

$$\int\limits_S P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Гармонический анализ

IV

17. Достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.

§17.1 Ортогональные системы и ряды Фурье

1 Ортогональные и ортонормированные системы функций

Пусть задана система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{1}$$

области определения которых имеют непустое пересечение. Тогда любой функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{2}$$

где a_n — некоторые числа, называется *рядом по системе функций* (1), а числа a_n — *коэффициентами ряда* (1).

Говорят, что *функция $f(x)$ разложена в ряд по системе функций* (1), если указаны числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$, такие, что ряд (2) в любой точке области определения функции f сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Определение 1. Любые две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенные на промежутке Δ, называются *ортогональными на* Δ, если их произведение интегрируемо на Δ (в собственном или несобственном смысле) и

$$\int_\Delta \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0$$

Очевидно, функция, тождественно равная нулю на промежутке Δ, ортогональна на Δ любой функции, определенной на Δ.

Определение 2. Система функций, определенных на промежутке Δ, называется *ортогональной на* Δ, если любые две функции этой системы ортогональны на Δ.

Определение 3. Система функций

$$\{1,\ \cos kx,\ \sin kx\}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

называется тригонометрической системой функций.

Легко проверить, что тригонометрическая система (3) ортогональна на интервале $(-\pi;\pi)$. А так как все функции это системы периодические с периодом 2π, то справедливо следующее утверждение:

Тригонометрическая система (3) *ортогональна на любом промежутке длины* 2π.

Обобщение системы (3) является система функций

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \ldots,\ \cos n\frac{\pi}{l}x,\ \sin n\frac{\pi}{l}x,\ \ldots,$$

где $l>0$, которую тоже будем называть *тригонометрической системой*. Очевидно, она ортогональная на любом промежутке длины $2l$.

Определение 4. Система функций (3), определенных на промежутке Δ, называется *ортонормированной на* Δ, если она ортогональна на Δ и

$$\int_\Delta |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Условие (4) называется *условием нормировки.*

2 Ряды Фурье по ортогональным системам функций

Пусть $f(x)$, $x\in\Delta$, разложена в ряд по системе функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{5}$$

ортогональной на промежутке Δ:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \tag{6}$$

Найдем формулы для определения коэффициентов этого ряда. Для этого обе части равенства (6) умножим на $\varphi_k(x)$ и проинтегрируем по промежутку Δ, предполагая, что полученный ряд можно интегрировать почленно. В результате получим равенство

$$\int_\Delta f(x)\varphi_k(x)\,dx = a_k\int_\Delta |\varphi_k(x)|^2\,dx,$$

так как интегралы от произведений $\varphi_n(x)\psi_n(x)$ при $n\neq k$ равны нулю (в силу ортогональности системы (5))

Предположим еще, что ортогональную систему (5) можно нормировать, т.е. что

$$\int_\Delta |\varphi_k(x)|^2\,dx \neq 0 \quad \forall n$$

Тогда для коэффициентов a_n ряда (6) получим формулу

$$a_n=\frac{1}{\int_\Delta |\varphi_n(x)|^2\,dx}\int_\Delta f(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Определение 5. Числа a_n, определяемые по формулам (7) называются *коэффициентами Фурье функции f по ортогональной системе* (3), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ называется *рядом Фурье функции f по этой системе.*

Определение 6. Функция f, определенная на конечном промежутке $\Delta = (a; b) \subset \mathbb{R}$, за исключением, быть может, конечного числа точек из Δ, называется *абсолютно интегрируемой* на промежутке Δ, если существует конечный набор элементов $c_0, c_1, \ldots, c_m \in \overline{\mathbb{R}}$, такой, что

1. $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_m = b$;
2. $\forall [\alpha; \beta] \subset (c_{k-1}; c_k)$, $k \in \overline{1, m}$ функция f интегрируема по Риману на $[\alpha; \beta]$;
3. $\int_\Delta |f(x)|\, dx$ сходится;
4. $\forall \varepsilon > 0$ функция f интегрируема по Риману на множестве

$$G_\varepsilon = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{m} (O_\varepsilon(c_k)\right)$$

§17.2 Тригонометрические ряды Фурье

Для любой функции f, определенной и абсолютно интегрируемой на конечном интервале $(a; b)$, определены коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(a; b)$:

$$1,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \ldots,\ \cos n\frac{\pi}{l}x,\ \sin n\frac{\pi}{l}x,\ \ldots, \tag{8}$$

где $l = (b - a)/2$. Соответствующий ряд Фурье обычно записывают в следующем виде:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x \tag{9}$$

Из общей формулы для коэффициентов Фурье следует, что коэффициенты a_0, a_n, b_n ряда (9) вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\, dx, \tag{10}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x) \cos n\frac{\pi}{l}x\, dx, \tag{11}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x) \sin n\frac{\pi}{l}x\, dx, \tag{12}$$

Определение 7. Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам выше, называются *коэффициентами Фурье функции f по тригонометрической системе* (8).

Так как общий случай заменой $\xi = \frac{\pi}{l}x$ сводится к тригонометрической системе, ортогональной на $(-\pi;\pi)$, то в дальнейшем будем изучать в основном только ряды по тригонометрической системе

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots,$$

которую будем называть *стандартной тригонометрической системой.*

Вместо тригонометрической системы (8) ортогональной на интервале $(-l;l)$, часто рассматривают систему комплекснозначных функций

$$\varphi_\nu(x) = e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}, \quad \nu \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

Ее тоже называют тригонометрической, так как

$$e^{i\nu\frac{\pi}{l}x} = \cos\nu\frac{\pi}{l}x + i\sin\nu\frac{\pi}{l}x$$

Определение 8. Для любой функции $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-l;l)$ числа

$$c_\nu = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\nu\frac{\pi}{l}x}\,dx, \quad \nu = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \tag{14}$$

называются *коэффициентами Фурье функции f по ортогональной системе* (13), причем

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

где a_0, a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе (8).

Определение 9. Выражение

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x}, \tag{16}$$

где $c_\nu = c_\nu(f)$, называют *рядом Фурье функции f по системе* (13), а сумма

$$T_n(f;x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu\frac{\pi}{l}x} \tag{17}$$

называется *n-й частичной суммой* этого ряда.

Из формул (15) следует, что

$$T_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{k\frac{\pi}{l}x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k + ib_k}{2}e^{-k\frac{\pi}{l}x} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos n\frac{\pi}{l}x + b_k\sin n\frac{\pi}{l}x$$

Таким образом, $T_n(f;x)$ — это n-я частичная сумма ряда Фурье функции f по тригонометрической системе (8).

Как уже говорилось, в основном будем рассматривать случай, когда $l=\pi$ и функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π. В этом случае

$$T_n(f;x)=\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}, \tag{18}$$

где

$$c_v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)e^{i\nu\xi}\,d\xi,\ \nu\in\mathbb{Z}. \tag{19}$$

§17.3 Интегральное представление частичных сумм рядов Фурье по тригонометрической системе. Ядро Дирихле

Рассмотрим n-ю частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)\in\overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ по тригонометрической системе, ортогональной на интервале $(-\pi;\pi)$. Как показано в прошлом пункте, имеют место формулы (18) и (19). Подставляя одну в другую, получим

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu(x-\xi)}\,d\xi$$

Определение 10. Функция $D_n(x)=\sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu x}$ называется *ядром Дирихле порядка n.*

Очевидно,

$$D_n(x)=1+2\sum_{\nu=-n}^{n}\cos\nu x$$

Отсюда следует, что $D_n(x)$ — четная 2π-периодическая функция, $D_n(0)=$ $=1+2n$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(x)\,dx=1$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии получаем, что

$$D_n(x)=\frac{e^{-inx}-e^{-inx+ix}}{1-e^{ix}}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

для любого $x\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ (и равно $2n+1$ в противоположном случае, как уже было замечено).

С помощью ядра Дирихле n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ выражается следующим образом:

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)D_n(\xi-x)\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\xi+x)D_n(\xi)\,d\xi.$$

А так как подынтегральная функция является 2π-периодической, то

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi+x)D_n(\xi)\,d\xi.$$

§17.4 Теорема Римана об осцилляции

Определение 11. Для любой функции f замыкание множества точек $x \in D_f$, в которых $f(x) \neq 0$, называется *носителем функции* f и обозначается $\operatorname{supp} f$.

Определение 12. Функция, определенная на $\mathbb{R}$, называется *финитной*, если ее носитель ограничен, т.е. если она равна нулю вне некоторого отрезка.

Определение 13. Функция, определенная на некотором промежутке Δ, называется *ступенчатой*, если существует разбиение промежутка Δ на конечное число промежутков, на каждом из которых она постоянна.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ такая, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{\Delta}$ и

$$\int_\Delta |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{20}$$

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$ и построим финитную ступенчатую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую неравенству.

Из определения абсолютно интегрируемой функции f на промежутке Δ следует, что существует ограниченное измеримое множество $g_\varepsilon \subset \Delta$, на котором функция f интегрируема по Риману, причем

$$\int_\Delta |f(x)|\,dx - \int_{g_\varepsilon} |f(x)|\,dx = \int_{\Delta\setminus g_\varepsilon} |f(x)|\,dx$$

Через $f_\varepsilon(x)$ обозначим функцию, равную $f(x)$ на g_ε и нулю вне g_ε. Очевидно,

$$\int_\Delta |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{\Delta\setminus g_\varepsilon} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{21}$$

Функция $f_\varepsilon(x)$ равна нулю вне ограниченного множества $g_\varepsilon \subset \Delta$, поэтому ее носитель содержится в некотором отрезке $[a;b] \subset \overline{\Delta}$. На этом отрезке она интегрируема по Риману, так как она интегрируема по Риману на g_ε и на $[a;b] \setminus g_\varepsilon$. Поэтому существует разбиение τ отрезка $[a;b]$ на промежутки $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ такое, что

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx - s(f_\varepsilon;\tau) < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $s(f_\varepsilon;\tau)$ — нижняя сумма Дарбу функции $f_\varepsilon(x)$, т.е.

$$s(f_\varepsilon;\tau) = \sum_{j=1}^N m_j|\Delta_j|,$$

где $m_j = \inf\limits_{x\in\Delta_j} f_\varepsilon(x)$. Через $\varphi(x)$ обозначим ступенчатую функцию, которая равна m_j на Δ_j, $j=1,\ldots,N$, и нулю вне $[a;b]$. Очевидно, $\varphi(x) \leqslant f_\varepsilon(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_\Delta \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = s(f_\varepsilon;\tau),$$

и, следовательно,

$$\int_\Delta |f(x)-\varphi(x)|\,dx = \int_a^b f_\varepsilon(x)\,dx - s(f_\varepsilon;\tau) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) следует, что финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству (20) теоремы. Действительно:

$$\int_\Delta |f(x)-\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_\Delta |f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx + \\ + \int_\Delta |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Теорема 2 **(Римана об осцилляции).** Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\Delta f(x)e^{i\lambda x}dx = 0 \tag{23}$$

Доказательство. Для характеричстических функций любого конечного промежутка это утверждение очевидно. Действительно, если ξ и η — концы промежутка, то

$$\left|\int_\xi^\eta e^{i\lambda x}\,dx\right| = \left|\frac{e^{i\lambda\eta}-e^{i\lambda\xi}}{i\lambda}\right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}.$$

А так как любая финитная ступенчатая функция есть линейная комбинация характеристических функций конечного числа конечных промежутков, то утверждение теоремы верно для любой такой функции.

Согласно теореме 1, для любого $\varepsilon>0$ существует финитная ступенчатая функция $\varphi(x)$ такая, что

$$\int_\Delta |f(x)-\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\left|\int_\Delta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \int_\Delta |f(x)-\varphi(x)|\,dx \;+\; \left|\int_\Delta \varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|.$$

Последний интеграл, согласно уже доказанному, стремится к нулю при $\lambda\to\infty$, поэтому

$$\exists\lambda_\varepsilon\colon\quad \forall\lambda, |\lambda|>\lambda_\varepsilon \qquad \left|\int_\Delta \varphi(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_\Delta f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall\lambda, |\lambda| > \lambda_\varepsilon,$$

что и доказывает равенство (23). ■

Отметим, что здесь параметр λ может принимать любое значение из $\mathbb{R}$ и, в частности, может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$. Следовательно, наряду с (23) выполняется и равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = 0$$

Следствие 1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\Delta f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_\Delta f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$$

§17.5 Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье в точке

1 Признак Липшица

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Говорят, что она в этой точке удовлетворяет *условию Липшица порядка* $\alpha > 0$, если существуют постоянные C и $\delta > 0$ такие, что

$$|f(x_0+\xi) - f(x_0)| \leqslant C|\xi|^\alpha \quad \forall\xi\in(-\delta;\delta). \tag{24}$$

Теорема 3 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке). Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ в точке $x_0\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Доказательство. Напомним, что для n-й частичной суммы ряда Фурье функции f справедлива формула

$$T_n(f;x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+\xi)D_n(\xi)\,d\xi,$$

где

$$D_n(\xi) = \frac{\sin\lambda_n\xi}{\sin\frac{\xi}{2}},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi)\,d\xi = 1,\ \lambda_n = n+\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$T_n(f;x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+\xi)-f(x_0))D_n(\xi)\,d\xi.$$

По условию функция f в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица (24). Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta < \pi$. Тогда функция

$$F(\xi) = \frac{f(x_0+\xi) - f(x_0)}{\sin\frac{\xi}{2}}$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(\xi)| \leqslant \frac{C|\xi|^\alpha}{\left|\sin\frac{\xi}{2}\right|} \quad \forall \xi \in (-\delta; \delta).$$

А так как функция $\sin\frac{\xi}{2}$ выпукла вверх на отрезке $[0;\pi]$, то

$$\sin\frac{\xi}{2} \geqslant \frac{\xi}{\pi} \quad \forall \xi \in [0;\pi],$$

и поэтому

$$|F(\xi)| \leqslant \pi C|\xi|^{\alpha-1} \quad \forall \xi \in [0;\pi].$$

Следовательно,

$$|T_n(f;x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}C\int_{-h}^{h}|\xi|^{\alpha-1}\,d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{-h}F(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{h}^{\pi}F(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \quad (25)$$

для любого $h \in (0;\delta)$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $h \in (0;\delta)$ функция $F(\xi)$ абсолютно интегрируема на интервалах $(-\pi;-h)$ и $(h;\pi)$. Согласно теореме Римана об осцилляции, интегралы по этим интервалам стремятся к нулю при $n \to \infty$. Поэтому из (25) следует неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|T_n(f;x_0) - f(x_0)| \leqslant C\cdot\frac{1}{\alpha}h^\alpha.$$

А так как оно справедливо для любого $h \in (0;\delta)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|T_n(f;x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Очевидно, если верхний предел неотрицательной последовательности равен нулю, то это последовательность сходится и ее предел равен нулю. ■

Следствие 2. Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ дифференцируема или непрерывна и имеет конечные односторонние призводные, то в этой точке ее ряд Фурье сходится к $f(x_0)$.

Следствие 3. Если функция $f(x)$, $x \in [a;b]$, $a < b$, на интервале $(a;b)$ непрерывна, абсолютно интегрируема и в каждой точке $x \in (a;b)$ дифференцируема или имеет конечные односторонние производные, то в любой точке $x \in (a;b)$ ее ряд Фурье сходится и

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x,$$

где $l=\frac{b-a}{2}$, $a_0=a_0(f)$, $a_n=a_n(f)$, $b_n=b_n(f)$. Если, кроме того, функция f непрерывна на $[a;b]$, $f(a)=f(b)$ и существуют конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$, то и в точках $x=a$, $x=b$ ряд Фурье сходится к $f(x)$.

2 Признак Дини

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и в этой точке непрерывна. Если, кроме того, существует $\delta>0$ такое, что разностное отношение

$$\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0)}{\xi}$$

абсолютно интегрируемо на интервале $(-\delta;\delta)$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Дини*.

Очевидно, если функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha>0$, то в этой точке она удовлетворяет и условию Дини. Обратное утверждение является неверным.

Теорема 4 (Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке). Если функция $f(x)\in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ в точке $x_0\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $f(x_0)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3 для $h\in(0;\delta)$ получаем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}|T_n(f;x_0)-f(x_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-h}^{h}|F(\xi)|d\xi,$$

где

$$|F(\xi)|\leqslant\pi\left|\frac{f(x_0+\xi)-f(x_0)}{\xi}\right|.$$

Отсюда и из условия Дини следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}|T_n(f;x_0)-f(x_0)|=0.$$ ■

3 Признак Дирихле

Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в этой точке удовлетворяет *условию Дирихле*, если существует $\delta>0$ такое, что на интервалах $(x_0-\delta;x_0)$ и $(x_0;x_0+\delta)$ она монотонна и ограничена.

Очевидно, функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Дирихле в точке x_0, в этой точке имеет конечные односторонние пределы $f(x_0\pm 0)$.

Теорема 5. Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дирихле, то ее ряд Фурье в этой точке сходится к $M_f(x_0)$.

Доказательство. Как известно,

$$|T_n(f;x_0) - M_f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_h^\pi F_\pm(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| + \\ + \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_0^h (f(x_0\pm\xi) - f(x_0\pm 0))D_n(\xi)\,d\xi\right|$$

для любого $h \in (0;\pi)$.

Согласно условию Дирихле, существует $\delta > 0$ такое, что функции $f(x_0 \pm \pm\,\xi)$ на интервале $(0;\delta)$ монотонны и ограничены. По второй теореме о среднем для любого $h \in (0;\delta)$ существуют $\theta_\pm \in [0;h]$ такие, что

$$\int_0^h (f(x_0\pm\xi) - f(x_0\pm 0))D_n(\xi)\,d\xi = (f(x_0\pm h) - f(x_0\pm 0))\int_{\theta_\pm}^h D_n(\xi)\,d\xi$$

Как известно, ядро Дирихле обладает следующим свойством: существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left|\int_\alpha^\beta D_n(\xi)\,d\xi\right| \leqslant 2C\pi$$

для любых $\alpha, \beta \in (0;\pi)$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно для любого $h \in (0;\delta)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|T_n(f;x_0) - M_f(x_0)| \leqslant \\ \leqslant C\sum_{\pm}|f(x_0\pm h) - f(x_0\pm 0)| + \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_h^\pi F_\pm(\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right|,$$

из которого следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}|T_n(f;x_0) - M_f(x_0)| \leqslant C\sum_{\pm}|f(x_0\pm h) - f(x_0\pm 0)|$$

для любого $h \in (0;\delta)$. А так как в последнем неравенстве правая часть стремится к нулю при $h \to +0$, то

$$\lim_{n\to\infty}|T_n(f;x_0) - M_f(x_0)| = 0.$$ ■

Следствие 4. Если функция $f(x)$ ограничена и кусочно-монотонна на интервале $(-\pi;\pi)$, то в любой точке $x \in (-\pi;\pi)$ ее ряд Фурье сходится к

$$M_f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

а в точках $-\pi$ и π он сходится к $\frac{f(-\pi+0) - f(\pi-0)}{2}$. В частности, в точках

$x \in (-\pi; \pi)$, где f непрерывна, ряд Фурье сходится к $f(x)$.

Следствие 5. Если непрерывная 2π-периодическая функция f кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то в любой точке $x \in \mathbb{R}$ ее ряд Фурье сходится к $f(x)$.

18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

§18.1 Признак Липшица равномерной сходимости

Говорят, что функция $f(x)$, $x \in (A;B)$, на интервале $(A;B)$ удовлетворяет *условию Липщица порядка* $\alpha > 0$, если существует постоянная C такая, что

$$|f(x+\xi) - f(x)| \leqslant C|\xi|^\alpha$$

для любого $x \in (A;B)$ и любого ξ такого, что $x + \xi \in (A;B)$.

Теорема 1 (Признак Липшица). Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ на интервале $(A;B)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье на любом отрезке $[a;b] \subset (A;B)$ сходится равномерно к $f(x)$.

Доказательство. При доказательстве признака Липшица (теорема 3) в билете 15 получено равенство

$$T_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi,$$

где

$$F(x,\xi) = \frac{f(x+\xi)-f(x)}{\sin(\xi/2)}, \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2}.$$

Пусть $\delta = \min\{a - A; B - b\}$. Тогда, как и в билете 15, получаем, что функция $F(x,\xi)$ удовлетворяет неравенству

$$|F(x,\xi)| \leqslant \pi C|\xi|^{\alpha-1}$$

для любого $x \in [a;b]$ и любого $\xi \in (-\delta;\delta)$. Следовательно, для любого $x \in [a;b]$ и любого $h \in (0;\delta)$ справедливо неравенство

$$|T_n(f;x) - f(x)| \leqslant C\frac{1}{\alpha}h^\alpha + \\ + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{-h} F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{h}^{\pi} F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right|. \quad (1)$$

Покажем, что для любого $h \in (0;\delta)$

$$\sup_{x\in[a;b]}\left|\int_h^\pi F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (2)$$

Так как функция $\sin(\xi/2)$ на интервале $(0;\pi)$ непрерывна, неотрицательна и монотонно возрастает, то, согласно второй теореме о среднем, для любого $x \in [a;b]$ и любого $h \in (0;\pi)$ существует $\theta \in [h;\pi]$ такое, что

$$\int_h^\pi F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi = \frac{1}{\sin(h/2)}\int_h^\theta (f(x+\xi)-f(x))\sin\lambda_n\xi\,d\xi.$$

Легко видеть, что для любого $x \in [a;b]$

$$\left|\int_h^\theta f(x)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \leqslant \frac{2}{\lambda_n}\sup_{x\in[a;b]}|f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Далее,

$$\left|\int_h^\theta f(x+\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \leqslant \left|\int_h^\theta f(x+\xi)e^{i\lambda_n y}\,d\xi\right| =$$
$$= \left|\int_{h+x}^{\theta+x} f(y)e^{i\lambda_n y}\,dy\right| \leqslant \sup_{\alpha,\beta}\left|\int_\alpha^\beta f(y)e^{i\lambda_n y}\,dy\right|,$$

где супремум берется по всем $\alpha,\beta \in [a-\pi;b+\pi]$. По теореме Римана о равномерной осцилляции этот супремум стремится к нулю при $n\to\infty$. Утверждение (2) доказано. Аналогично доказывается

$$\sup_{x\in[a;b]}\left|\int\limits_{-\pi}^{-h} F(x,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{3}$$

Из всего выше следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in[a;b]}|T_n(f;x)-f(x)| \leqslant C\cdot\frac{1}{\alpha}h^\alpha$$

для любого $h\in(0;\delta)$. ■

Из теоремы Лагранжа о среднем сразу следует, что если функция на некотором интервале имеет ограниченную производную, то на это интервале она удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha=1$. Поэтому получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ на интервале $(A;B)$ имеет ограниченную производную, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a;b]\subset(A;B)$.

§18.2 Признак Дини равномерной сходимости

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем отрезок $[a;b]$, и в каждой точке этого отрезка непрерывна. Тогда, если существует $\delta>0$ такое, что для любого $x\in[a;b]$ интеграл

$$\psi(\delta;x) = \int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}\right|\,d\xi$$

сходится, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Дини* на отрезке $[a;b]$. Если, кроме того,

$$\sup_{x\in[a;b]}\psi(h;x)\to 0 \quad \text{при } h\to 0, \tag{4}$$

то будем говорить, что функция f на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет *равномерному условию Дини*.

Теорема 2 (Признак Дини). Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет равномерному условию Дини, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на $[a;b]$.

Доказательство. Как и при доказательстве признака Липщица (Теорема 1), для любого $h \in (0;\delta)$ получаем неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x\in[a;b]} |T_n(f;x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[a;b]} \psi(h;x).$$

Тогда отсюда и из условия (4) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x\in[a;b]} |T_n(f;x) - f(x)| = 0 \qquad \blacksquare$$

§18.3 Признак Дирихле равномерной сходимости

Сначала рассмотрим случай монотонных на интервале функций.

Теорема 3. Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ непрерывна и монотонна на интервале $(A;B)$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a;b] \subset (A;B)$.

Доказательство. Пусть $\delta = \min\{a-A; B-b\}$. Тогда как и при доказательстве признака Дирихле сходимости ряда Фурье в точке (Теорема 5 билета №17), для любого $x \in [a;b]$ и любого $h \in (0;\delta)$ получаем неравенство

$$|T_n(f;x) - f(x)| \leqslant \\ \leqslant C\sum_{\pm} |f(x\pm h) - f(x)| + \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\left|\int_h^\pi F_\pm(x;\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\right|. \qquad (5)$$

При доказательства признака Липшица равномерной сходимости ряда Фурье (Теорема 1) доказано, что последние интегралы в неравенстве (5) при $n\to\infty$ стремятся к нулю равномерно относительно $x\in[a;b]$. Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{x\in[a;b]} |f(x\pm h) - f(x)| \leqslant 2c\omega_f(h),$$

где $\omega_f(h)$ — модуль непрерывности функции f. А так как функция f равномерно непрерывна на отрезке $\left[a-\frac{\delta}{2}; b+\frac{\delta}{2}\right]$, то $\omega_f(h)\to\infty$ при $h\to+0$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a;b]} |T_n(f;x) - f(x)| = 0 \qquad \blacksquare$$

Следствие 2. Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi;\pi)$ на интервале $(A;B)$ представима в виде суммы или разности двух непрерывных монотонных функций, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке

$[a; b] \subset (A; B)$.

Теорема 4 **(Признак Дирихле равномерной сходимости ряда Фурье).** Если функция $f(x) \in \overset{*}{L}{}_1^R(-\pi; \pi)$ непрерывна и кусочно-монотонна на интервале $(A; B)$, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset (A; B)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функция f монотонна на промежутках $(A; c]$ и $[c; B)$. Тогда

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = f(x) \text{ на } (A; c] \text{ и } \varphi(x) = \varphi(c) \text{ на } [c; B), \\ &\psi(x) = 0 \text{ на } (A; c] \text{ и } \psi(x) = f(c) - f(x) \text{ на } [c; B). \end{aligned}$$

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на интервале $(A; B)$ непрерывны и монотонны, то в этом случае утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть интервал $(A; B)$ точками c_1, c_2, $\ldots$, c_N разбивается на $N + 1$ промежутков, на каждом из которых функция f монотонна, и пусть, для определенности,

$$A < a < c_1 < c_2 < \ldots < c_N < b < B.$$

На каждом интервале (c_k, c_{k+1}), $k{=}1, \ldots, N{-}1$, выберем какую-нибудь точку b_k. Тогда, как уже доказано, ряд Фурье функции f сходится равномерно к $f(x)$ на каждом отрезке

$$[a_1; b_1],\ [b_1; b_2],\ \ldots,\ [b_{N-1}; b],$$

а следовательно, и на отрезке $[a; b]$. ■

19. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

§19.1 Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

Аналогом ряда Фурье в данном вопросе будем называть интеграл

$$\int_0^{+\infty} (a(y)\cos(yx) + b(y)\sin(yx))\,dy, \text{ где}$$

$$a(y) = \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos(yt)\,dt; \qquad b(y) = \lim_{l\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} .f(t)\sin(yt)\,dt$$

который называется *интегралом Фурье*.

Заметим, что не для всякой функции f, которая абсолютно интегрируема на любом конечном интервале, определенные выше пределы существуют. Если же функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то эти пределы заведомо существуют и

$$a(f;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt; \qquad b(f;y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt. \tag{1}$$

Теорема 1. Если функция f определена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то функции $a(f)$ и $b(f)$ определены и ограничены на $\mathbb{R}$, причем

$$||a(f;y)||_C \leqslant \frac{1}{\pi}||f||_{L_1}, \quad ||b(f;y)||_C \leqslant \frac{1}{\pi}||f||_{L_1}. \tag{2}$$

Кроме того, они непрерывны на $\mathbb{R}$ и

$$\lim_{y\to\pm\infty} a(f;y) = \lim_{y\to\pm\infty} b(f;y) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Из неравенств

$$|f(t)\cos(yt)| \leqslant |f(t)|, \quad |f(t)\sin(yt)| \leqslant |f(t)|.$$

и абсолютной интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$ следует, что интегралы (1) сходятся равномерно на $\mathbb{R}$ относительно y, и поэтому функции $a(f)$ и $b(f)$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Неравенства (2) очевидны, а соотношения (3) следуют из теоремы Римана об осцилляции. ∎

Определение 1. Определенная на $\mathbb{R}$ функция называется *локально интегрируемой*, если она абсолютно интегрируема на любом конечном интервале.

Определение 2. Для любой локально интегрируемой функции $\varphi, x \in \mathbb{R}$ предел
$$\lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} \varphi(x)\, dx$$
называют *интегралом от $+\infty$ до $-\infty$ в смысле главного значения* (*или в смысле Коши*) и обозначают
$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

Для локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f введем функцию
$$c(f;y) = \text{v. p.}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \tag{4}$$
являющуюся аналогом коэффициентов Фурье в комплексной форме для периодических функций, и через эту функцию выразим интеграл Фурье функции f.

Очевидно,
$$c(f;y) = \frac{1}{2}(a(f;y) - ib(f;y)),$$
где $a(f;y)$ и $b(f;y)$ — функции, определенные в формулах (1). Тогда, для любого $\eta > 0$ имеем
$$\int_{-\eta}^{\eta} c(f;y) e^{iyx}\, dy = \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{\eta} (a(f;y) - ib(f;y))(\cos yx + i \sin yx)\, dy.$$
А так как функция $a(f;y)$ четная, а функция $b(f;y)$ — нечетная, то
$$\int_{-\eta}^{\eta} c(f;y) e^{iyx}\, dy = \int_{0}^{\eta} (a(f;y) \cos yx + b(f;y) \sin yx)\, dy.$$
Отсюда в пределе $\eta \to \infty$ получаем, что интеграл Фурье функции f равен интегралу
$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} c(f;y) e^{iyx}\, dy. \tag{5}$$
Интеграл (5), где функция $c(f;y)$ определена по формуле (4), называется *интегралом Фурье в комплексной форме.*

Пусть абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f в любой точке $x \in \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию Дини или условию Дирихле. Тогда:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} c(f;y) e^{iyx}\, dy, \quad c(f;y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx$$
Здесь функция f принимает действительные значения, а функция $c(f;y)$ принимает, вообще говоря, комплексные значения. Причем, в первом равенстве нет множителя перед интегралом, а во втором — стоит множитель $\frac{1}{2\pi}$. Обычно используют более симметричные формулы.

Определение 3. Для любой локально интегрируемой комплекснозначной функции $f(x), x \in \mathbb{R}$ функция

$$\widehat{f}(\xi) = \text{v. p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

называется *преобразованием* (*или образом*) *Фурье функции* f, а функция

$$\widetilde{f}(\xi) = \text{v. p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x}\, dx$$

называется *обратным преобразованием* (*или прообразом*) *Фурье функции* f.

Если функция f абсолютно интегрируема, то, как было доказано выше, функции $\widehat{f}$ и $\widetilde{f}$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$, причем

$$||\widehat{f}||_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_{L_1}, \quad ||\widetilde{f}||_C \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_{L_1}.$$

Кроме того,

$$\lim_{\xi \to \infty} \widehat{f}(\xi) = \lim_{\xi \to \infty} \widetilde{f}(\xi) = 0.$$

§19.2 Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье

Функцию f, определенную на $\mathbb{R}$, будем называть *кусочно непрерывной*, если она кусочно непрерывна на любом конечном интервале. Если же она на любом конечном интервале кусочно дифференцируема, то будем говорить, что она *кусочно дифференцируема на* $\mathbb{R}$. Аналогично определяются и *кусочно непрерывно дифференцируемые на* $\mathbb{R}$ функции.

Заметим, что если функция f непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема, то она является обобщенной первообразной для производной f'.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда, если $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Действительно, из равенства

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\, dt, \quad c \in \mathbb{R},$$

и сходимости интеграла $f'(x)$ на $\mathbb{R}$ следует, что пределы у $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ существуют, а из сходимости интеграла от $f(x)$ на $\mathbb{R}$ следует, что эти пределы равны нулю.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Тогда, если $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то
$$F[f'] = i\xi \widehat{f}(\xi), \quad F^{-1}[f'] = -i\xi \widetilde{f}(\xi).$$

Доказательство. По формуле интегрирования по частям получаем

$$F[f'] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x}\, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{+\infty}^{-\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\xi) e^{-i\xi x}\, dx.$$

В силу леммы, внеинтегральные члены равны нулю, поэтому
$$F[f'] = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Аналогично доказывается и вторая формула. ∎

Следствие 1. Если $f, f', \ldots, f^{(n)}$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то
$$F[f^{(k)}] = (i\xi)^k F[f],$$
$$F^{-1}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k F^{-1}[f], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

В частности
$$\widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right), \quad \widetilde{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^n}\right)$$
при $\xi \to \pm\infty$.

Теорема 3. Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $\widehat{f}(\xi)$ и $\widetilde{f}(\xi)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и
$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi} = -iF[xf(x)], \quad \frac{d\widetilde{f}}{d\xi} = iF^{-1}[xf(x)].$$

Доказательство. По признаку Вейерштрасса интегралы
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \quad \text{и} - i \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$
сходятся равномерно по ξ на $\mathbb{R}$, поэтому они непрерывны и производная по ξ от первого из них равна второму. Следовательно,
$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi} = -iF[xf(x)].$$

Аналогично доказывается и вторая формула. ∎

Следствие 2. Если функции $f(x)$, $xf(x)$, $\ldots$, $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $\widehat{f}(\xi)$ и $\widetilde{f}(\xi)$ n раз непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k} = (-i)^k F[x^k f(x)], \quad \frac{d^k \widetilde{f}}{d\xi^k} = i^k F^{-1}[x^k f(x)], \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Аналитическая геометрия

V

20. Прямые и плоскости в пространстве. Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве. Углы между прямыми и плоскостями.

§20.1 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве, плоскости в пространстве

1 Уравнения прямой на плоскости и в пространстве

Аксиома 1 (Постулат Евклида). Через любую точку P_0 плоскости (пространства) можно провести единственную прямую, параллельную заданной прямой

Рассмотрим точку P_0 на плоскости (в пространстве) и вектор $\vec{a}$. Построим уравнение, описывающее множество точек P, принадлежащих прямой l, проходящей через точку P_0 и параллельной вектору $\vec{a}$.

Заметим, что условие $P \in l$ эквивалентно $\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{a}$, или, если обозначить через $\vec{r}$ и $\vec{r_0}$ радиус-векторы точек P и P_0 соответственно, $\vec{r} - \vec{r_0} = t\vec{a}$, что даёт

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{a}, \ t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

— *параметрическое уравнение прямой на плоскости* (*в пространстве*), которое в координатной записи для $\vec{r}(x, y, z)$ и $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ принимает вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases} \tag{1'}$$

что можно переписать в виде

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{2}$$

— *каноническое уравнение прямой в пространстве*. Уравнения (1), (2) записываются аналогично для прямой на плоскости отбрасыванием условия на z.

Замечание. Для соотношения (2) действует следующая договорённость: если какие-то из коэффициентов a_k равны нулю, соответствующие им числители приравниваются нулю. Заметим, что все коэффициенты не могут быть нулевыми, потому что направляющий вектор не может быть ноль-вектором.

Заметим, что каноническое уравнение (2) в плоском случае представимо в виде $a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0$. Переобозначая $A = a_2, B = -a_1, C = a_1 y_0 - a_2 x_0$, получим

$$Ax + By + C = 0 \tag{3}$$

— *общее линейное уравнение прямой на плоскости*. Если $B \neq 0$, его можно переписать в виде *уравнения с угловым коэффициентом*:

$$y = kx + b, \tag{4}$$

где $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$.

Пусть P_0 — точка прямой на плоскости, а $\vec{n}$ — вектор нормали. Тогда имеет место соотношение $(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0$, или

$$(\vec{r}, \vec{n}) + D = 0 \tag{5}$$

— *нормальное уравнение прямой на плоскости*. Если система координат ортонормированна, раскрывая скалярное произведение, получим

$$n_1 x + n_2 y + D = 0, \tag{6}$$

откуда и из сравнения с (3) видно, что $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

В трёхмерном пространстве условие (1) может быть переписано с использованием векторного произведения:

$$[\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{a}] = \vec{0}, \tag{7}$$

что равносильно

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{b}, \vec{b} \perp \vec{a} \tag{8}$$

— *векторное уравнение прямой в пространстве*.

2 Уравнения плоскости в пространстве

Аксиома 2 (Постулат Евклида). Через любую заданную точку пространства можно провести ровно одну плоскость, параллельную заданной плоскости.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных направленных отрезка, лежащих в плоскости π_0, и задана точка P_0 в пространстве. Условием принадлежности точки P плоскости π, проходящей через P_0 и параллельной плоскости π_0, будет $\overrightarrow{P_0P} = t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}$, или, если обозначить через $\vec{r}$ и $\vec{r_0}$ радиус-векторы точек P и P_0 соответственно,

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t_1 \vec{a} + t_2 \vec{b}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

— *параметрическое уравнение плоскости*.

Иначе записать условие можно как линейную зависимость векторов $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, или, с использованием смешанного произведения:

$$(\overrightarrow{P_0P}, \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = 0. \tag{10}$$

Раскрывая определитель по первой строке и вводя обозначения $A=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, $B=$ $=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{11}$$

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) называется *общим линейным уравнением плоскости*, (11) — общим линейным уравнением плоскости, проходящей через $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пусть P_0 — точка прямой в пространстве, а $\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости. Тогда соотношение (5) служит *нормальным уравнением плоскости в пространстве*. Если система координат ортонормированна, получаем $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

§20.2 Углы между прямыми и плоскостями

Пусть две прямые на плоскости заданы параметрическими уравнениями вида (1) с использованием направляющих векторов $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$. Поскольку $(\vec{a_1}, \vec{a_2}) = |a_1|\,|a_2| \cos\varphi$, где $\varphi \in [0; \pi]$ - угол между векторами $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$, угол между прямыми, лежащий в интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, находится по формуле

$$\widetilde{\varphi} = \arccos \frac{|(\vec{a_1}, \vec{a_2})|}{|a_1|\,|a_2|}. \tag{13}$$

Искомый угол также равен углу между нормалями, поэтому при задании прямой нормальным уравнением (5) имеем:

$$\widetilde{\varphi} = \arccos \frac{|(\vec{n_1}, \vec{n_2})|}{|n_1|\,|n_2|}. \tag{14}$$

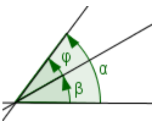


Рис. 20.1

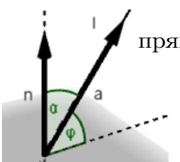
Пусть две прямые заданы в виде (4) с угловыми коэффициентами k_1 и k_2. Тангенс угла с осью абсцисс $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{A}{B} = k$. Для угла между двумя заданными прямыми имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} \tag{15}$$

$$\widetilde{\varphi} = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \tag{16}$$

Теперь перейдём в трёхмерное пространство. Угол между двумя прямыми по-прежнему можно найти по формуле (13).

Рассмотрим угол между плоскостями π_1 и π_2. Этот угол равен углу между их нормалями $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ (или является смежным, если найденный угол тупой), поэтому формула повторяет выражение (14).

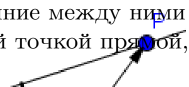


Пусть теперь даны плоскость π с нормалью $\vec{n}$ и прямая l с направляющим вектором $\vec{a}$. Искомый угол выражается через смежный угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$:

$$\sin\widetilde{\varphi} = \cos\widetilde{\alpha} = \frac{|(\vec{a}, \vec{n})|}{|\vec{a}|\,|\vec{n}|} \Rightarrow \widetilde{\varphi} = \arcsin\frac{|(\vec{a}, \vec{n})|}{|\vec{a}|\,|\vec{n}|} \qquad (17)$$

§20.3 Формулы расстояния от точки до прямой и плоскости, между прямыми в пространстве

Пусть заданы точка P_1 плоскости и прямая l. Расстояние между ними равно длине проекции отрезка, соединяющего P_1 с любой точкой прямой,



на нормаль прямой:

$$\rho_2(P_1, l) = \frac{|(\vec{r_1} - \vec{r}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}. \tag{18}$$

Используя нормальное уравнение (5), получим:

$$\rho_2(P_1, l) = \frac{|(\vec{r_1}, \vec{n}) + D|}{|\vec{n}|}. \tag{19}$$

В ортонормированном базисе уравнение (5) приобретает вид (3), а формула выглядит следующим образом:

$$\rho_2(P_1, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{20}$$

При рассмотрении точки P_1 и прямой l в трёхмерном пространстве удобно пользоваться векторным произведением и вычислять расстояние как модуль проекции отрезка, соединяющего точку P_1 с произвольной точкой P прямой, на плоскость, нормальную направляющему вектору $\vec{a}$:

$$\rho_3(P_1, l) = \frac{|[\vec{a}, \vec{r_1} - \vec{r}]|}{|\vec{a}|}. \tag{21}$$

Если используется представление 8, можно записать:

$$\rho_3(P_1, l) = \frac{\left|[\vec{a}, \vec{r_1}] - \vec{b}\right|}{|\vec{a}|}. \tag{22}$$

Пусть теперь даны точка P_1 в пространстве и плоскость π. Повторяя рассуждения, получим формулы, аналогичные (18) и (19), приобретающие в ортонормированном базисе вид

$$\rho_3(P_1, \pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{23}$$

если плоскость задаётся общим линейным уравнением (12).

Теперь рассмотрим случай двух скрещивающихся прямых в пространстве $(l_1 | \cdot l_2)$. Построим параллелепипед, двумя из рёбер которого являются направляющие векторы $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$, приложенные соответственно в точках P_1 и P_2 (см. рис.). Расстояние между ними будет равно расстоянию между гранями, параллельными обеим плоскостям, т.е., из определений скалярного и векторного произведения,

$$\rho_3(l_1, l_2) = h_{par} = \frac{V\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\}}{S\{\vec{a_1}, \vec{a_2}\}} = \frac{|(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{r_2} - \vec{r_1})|}{|[\vec{a_1}, \vec{a_2}]|}. \tag{24}$$

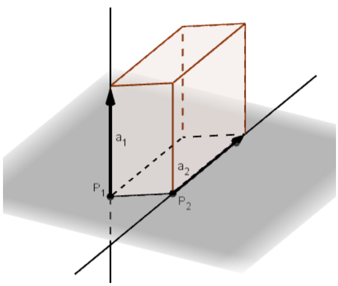


Рис. 20.4

Линейная алгебра

VI

21. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера—Капелли.

§21.1 Теорема Кронекера—Капелли

Рассмотрим *систему линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Эту систему можно записать в матричном виде:

$$AX = b^{\uparrow}, \tag{1'}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, b^{\uparrow} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A называется *основной матрицей системы*, $b^{\uparrow}$ — *столбцом свободных членов*, $\widetilde{A} = (A|b^{\uparrow})$ — *расширенной матрицей системы*.

Определение 1. Набор векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_r}$ называется *базисом* множества векторов $V \neq \varnothing$, если

(1) $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_r}$ линейно независимы

(2) $\forall v \in V \exists \lambda_1, \ldots \lambda_r : v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$

Определение 2. Упорядоченный набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *частным решением* системы (1), если при его подстановке в неё получается верное равенство. *Общим решением* (1) называется совокупность всех её решений. Система называется *совместной*, если имеет хотя одно решение.

Определение 3. *Рангом конечного набора векторов* называется количество векторов в базисе этого набора. *Рангами матрицы по строкам* и *по столбцам* называются ранги соответственно набора строк и набора столбцов матрицы.

Лемма 1 (о ранге матрицы). Для любой матрицы A равны между собой её ранг по столбцам, ранг по строкам и количество строк в неупрощаемом виде (виде после отработки алгоритма Гаусса).

В силу этого свойства, говорят просто о *ранге матрицы* $\operatorname{rg} A$.

Теорема 1 (Кронекера—Капелли). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widetilde{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$: Пусть система совместна. Это означает, что

$$\exists x_1, \ldots, x_n : x_1 a_1^{\uparrow} + \ldots + x_n a_n^{\uparrow} = b^{\uparrow},$$

где через $a_k^{\uparrow}$ обозначен k-й столбец матрицы A. Следовательно, базис столбцов матрицы A является и базисом столбцов матрицы $\widetilde{A}$ и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widetilde{A}$.
$\Leftarrow$: Пусть $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widetilde{A}$, а столбцы $a_{j_1}^{\uparrow}, ..., a_{j_r}^{\uparrow}$ образуют базис матрицы A. Этот набор в совокупности с $b^{\uparrow}$ не может образовать линейно независимый набор, т.к. это повлечёт увеличение ранга, следовательно,

$$\exists x_{j_1}, ..., x_{j_r} : -b^{\uparrow} + x_{j_1} a_{j_1}^{\uparrow} + \ldots + x_{j_r} a_{j_r}^{\uparrow} + \sum_{j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}} 0 a_j^{\uparrow} = 0,$$

что означает, что решение существует. ■

§21.2 Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Напомним, что для приведения матриц к *ступенчатому виду* (2) используется прямой ход алгоритма Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & a_{1,j_1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1,n} \\ & & a_{2,j_1} & \ldots & \ldots & a_{2,n} \\ & & & \ddots & \ldots & \vdots \\ & 0 & & & a_{r,j_r} \; \cdots & a_{r,n} \\ \hline & & & 0 & & \end{array}\right) \tag{2}$$

Затем применяется обратный ход алгоритма Гаусса для приведения к *неупрощаемой форме*, которая при перестановке столбцов имеет вид (3).

$$\left(\begin{array}{cccccc} & 1 & & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1,n} \\ 0 & & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ & & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{r,n} \\ \hline & & 0 & & & \end{array}\right) \tag{3}$$

Теорема 2. Общее решение совместной системы линейных уравнений (1) имеет вид

$$Y = X_0 + \sum_{j=1}^{n-r} c_j X_j, c_j \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где X_0 — частное решение, $X_1, ..., X_{n-r}$ — линейно независимые решения однородного уравнения $AX = 0$, а $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \widetilde{A}$ - ранг матрицы уравнения.

Доказательство. Прямой и обратный ход алгоритм Гаусса приводят расширенную матрицу системы (возможно, с переобозначением $x_{i_1} \to x'_1, ..., x_{i_r} \to \to x'_r, ...$) к неупрощаемому виду

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & \quad & r & r+1 & \quad & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ r \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ & \ddots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{r,n} & b'_r \\ \hline & & & 0 & & & 0 \end{array}\right) \end{array}, \tag{5}$$

что соответствует системе

$$\begin{cases} x'_1 + \sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_{1j}x'_j = b'_1 \\ x'_2 + \sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_{2j}x'_j = b'_2 \\ \ldots \\ x'_r + \sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_{rj}x'_j = b'_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = b'_1 - \sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_{1j}x'_j \\ x'_2 = b'_2 - \sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_{2j}x'_j \\ \ldots \\ x'_r = b'_r - \sum\limits_{j=r+1}^{n} a'_{rj}x'_j \end{cases}$$

$x'_1, ...x'_r$ называются *главными* неизвестными, $x'_{r+1}, ..., x'_n$ — *свободными*, или *параметрическими*, т.к. выбор последних произволен.

Введём обозначения:

$$X'_0 = \left(\begin{array}{c} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ \hline 0 \end{array}\right), X'_j = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ r+j \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c} -a'_{1,r+j} \\ \vdots \\ -a'_{r,r+j} \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right), j = \overline{1, n-r} \tag{6}$$

Тогда решение имеет вид

$$Y' = X'_0 + \sum_{j=1}^{n-r} x'_{r+j}X'_j,$$

где

$$x'_{r+j} \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n-r}.$$

Остаётся лишь перейти к исходным переменным и получить выражение 4, где $c_j = x'_{r+j}$. ■

22. Линейное отображение конечномерных линейных пространств, его матрица. Сюръективное и инъективное отображения. Ядро и образ линейного отображения.

§22.1 Линейное отображение конечномерных линейных пространств, его матрица

Пусть L_1 и L_2 — линейные пространства над одним и тем же полем K.

Определение 1. Отображение $\varphi\colon L_1 \to L_2$ называется *линейным отображением*, если

1. $\forall x_1, x_2 \in L_1 \hookrightarrow \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$
2. $\forall x \in L_1, \forall \lambda \in K \hookrightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

В частности, из определения следует, что $\varphi(0_{L_1}) = 0_{L_2}$.

Определение 2. *Образ* отображения — это множество

$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(L_1) = \{y \in L_2 \mid \exists x \in L_1 : \varphi(x) = y\} \tag{1}$$

Определение 3. *Ядро* отображения — это множество

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in L_1 \mid \varphi(x) = 0_{L_2}\} \tag{2}$$

Определение 4. Отображение $\varphi\colon L_1 \to L_2$ называется *инъективным*, если никакие два различных вектора из L_1 не имеют одинаковых образов:

$$\forall x_1, x_2 \in L_1\colon \quad \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \hookrightarrow x_1 = x_2 \tag{3}$$

Определение 5. Отображение $\varphi\colon L_1 \to L_2$ называется *сюръективным*, если любой элемент L_2 имеет прообраз в L_1:

$$\forall y \in L_2 \quad \exists x \in L_1\colon \quad \varphi(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = L_2 \tag{4}$$

Утверждение 1.
1. $\operatorname{Ker}\varphi$ — линейное подпространство пространства L_1;
2. $\operatorname{Im}\varphi$ — линейное подпространство пространства L_2.

Теорема 1. Линейное преобразование φ инъективно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть φ инъективно, то есть выполняется (3). Тогда
$\forall x \in L_1 : \varphi(x) = 0 = \varphi(0) \hookrightarrow x = 0$, то есть $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

$\Longleftarrow$: Пусть $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ и $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Тогда $\varphi(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$.
Таким образом, выполняется условие (3). ■

Определение 6. Линейное отображение $\varphi : L \to L$, отображающее пространство L в себя, называется *линейным преобразованием*.

Напомним, говорят, что *размерность* линейного пространства $\dim L = n$, если в нём существует базис из n векторов.

Рассмотрим запись преобразования φ в базисах. Пусть $\dim L_1 = n$, $e = \|e_1 \ldots e_n\|$ — базис в L_1; $\dim L_2 = m$, $f = \|f_1 \ldots f_m\|$ — базис в L_2.

$$\forall x \in L_1 \hookrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Rightarrow \varphi(x) \xlongequal{linear} \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j)$$

$$\varphi(e_j) \in L_2 \Rightarrow \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}) f_i = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$$

Отсюда и из единственности разложения по базису получаем закон преобразования координат:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = \overline{1, m} \Leftrightarrow Y_f^{\uparrow} = A_{\varphi,e,f} X_e^{\uparrow}, \tag{5}$$

где через $X_e^{\uparrow}$, или, сокращённо, X обозначаются столбцы координат $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$ при разложении элемента x по базису e: $x = eX_e^{\uparrow}$

Определение 7. Матрица $A_{\varphi,e,f} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \|\varphi(e_1)^{\uparrow} \ldots \varphi(e_n)^{\uparrow}\|$, состоящая из столбцов координат образов базисных элементов e_j в разложении по базисным элементам f_i, называется *матрицей линейного отображения* φ в паре базисов e и f.

Утверждение 2. О вычислении образа и ядра преобразования с помощью его матрицы
1) $x \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow A_{\varphi} X^{\uparrow} = 0^{\uparrow}$
2) $\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1) \ldots \varphi(e_n) \rangle = \langle a_1^{\uparrow} \ldots a_n^{\uparrow} \rangle$, где $a_j^{\uparrow}$ — столбцы матрицы A_{φ}, а $\langle a_1^{\uparrow} \ldots a_n^{\uparrow} \rangle$ — *линейная оболочка*, то есть множество всех линейных комбинаций $\lambda_1 a_1^{\uparrow} + \ldots + \lambda_n a_n^{\uparrow}, \lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. Пусть дано линейное отображение $\varphi : L_1 \to L_2$. Тогда $\dim L_1 = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Доказательство. Из пункта 1) утверждения 2 и теоремы 2 билета 21 следует, что размерность ядра преобразования равна количеству параметрических неизвестных, то есть $n - \operatorname{rg} A_\varphi$, а его базис в координатной записи имеет вид фундаментальной системы решений уравнения $A_\varphi X^\uparrow = 0^\uparrow$. Из пункта 2) того же утверждения следует, что $\dim \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{rg} A_\varphi$. ■

Замечание. Из доказанного, однако, не следует, что для любого преобразования φ пространства L_2 пространство разложимо в сумму ядра и образа преобразования.

■ Пример 1.

1) Для преобразования двумерного пространства с матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Im} \varphi = \langle e_1 \rangle, \operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Im} \varphi = \langle e_1 \rangle \neq L = \langle e_1, e_2 \rangle$
2) В пространстве многочленов $P^{(n)}(x)$ степени не выше n преобразование $\varphi = \dfrac{d}{dx}$ будет линейным с $\operatorname{Ker} \varphi = P^{(0)}(x)$ и $\operatorname{Im} \varphi = P^{(n-1)}(x)$ ■

23. Собственные значения и собственные векторы линейных преобразований. Диагонализируемость линейных преобразований.

§23.1 Свойства собственных векторов и собственных значений линейных преобразований

Пусть дано линейное преобразование $\varphi\colon L \to L$, где L - линейное пространство над полем K.

Определение 1. Вектор $x \in L\colon x \neq \overrightarrow{0}$ называется *собственным вектором* преобразования φ, если

$$\exists \lambda \in K\colon \quad \varphi(x) = \lambda x, \tag{1}$$

λ называется *собственным значением* преобразования φ

Теорема 1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ являются собственными векторами линейного преобразования φ, отвечающими попарно разным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда $x_1, \ldots, x_n$ образуют линейно независимую систему векторов.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции:

$\underline{n=1:}$ Вектор x_1 является собственным, значит, по определению не равен нулевому $\Rightarrow$ образует линейно-независимую систему.

$\underline{n-1:}$ Пусть теорема верна для $n-1 \geqslant 1$ собственных векторов.

$\underline{n:}$ Пусть для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \hookrightarrow \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Покажем, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

$\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x_i = \varphi(0) = 0$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 & \quad | \cdot \lambda_n \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n x_n = 0 \end{cases}$$

Вычтем второе равенство из первого и получим:

$$\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)x_1 + \alpha_2(\lambda_n - \lambda_2)x_2 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})x_{n-1} = 0$$

По предположению индукции $\forall i = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \alpha_i(\lambda_n - \lambda_i) = 0$, откуда в силу условия теоремы $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0 \Rightarrow \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0$ ■

Следствие 1. Если $\dim L = n$ и φ имеет n различных собственных значений, то из собственных векторов преобразования φ можно составить базис L.

Утверждение 1. Линейное преобразование φ приводимо к диагональному виду тогда и только тогда, когда в L существует базис $h = \|h_1, ..., h_n\|$ из собственных векторов φ. При этом $A_{\varphi,h} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\huge 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, где λ_i удовлетворяют $\varphi(h_i) = \lambda_i h_i$.

Теперь обсудим способ вычисления собственных значений и собственных векторов. Пусть в пространстве L задан базис $e = \|e_1, ..., e_n\|$. Распишем в координатном представлении закон преобразования собственного вектора $x = eX^{\uparrow}$:

$$A_\varphi X^{\uparrow} = \lambda X^{\uparrow} \Leftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X^{\uparrow} = 0 \tag{2}$$

Уравнение 2 имеет нетривиальные решения, если матрица вырожденна:

$$\chi_{A_\varphi}(\lambda) \equiv \det(A_\varphi - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

Определение 2. Уравнение 3 называется *характеристическим*, его корни — *характеристическими корнями*, а многочлен $\chi_{A_\varphi}(\lambda)$ — *характеристическим многочленом матрицы* A_φ.

Утверждение 2. Если λ — собственное значение, то оно является характеристическим корнем. Характеристический корень λ_0 является собственным значением, если $\lambda_0 \in K$.

■ **Пример 1.** Пусть φ — преобразование поворота на угол α в двумерном пространстве над полем вещественных чисел $K = \mathbb{R}$: $A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $\alpha \neq k\pi$. Тогда собственными значениями являются $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha} \notin K$. Данное преобразование не имеет собственных значений, а значит, и собственных векторов. ■

Определение 3. Пусть $\varphi : L \to L$ — линейное преобразование пространства L над полем K, $\lambda \in K$. Множество L_λ собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, называется *собственным подпространством* для собственного значения λ.

Определение 4. *Геометрической кратностью* характеристического корня λ_0 называется размерность пространства L_{λ_0}. *Алгебраической кратностью* называется число $k \in \mathbb{N}$, если $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k p(\lambda)$, где $p(\lambda)$ - такой многочлен, что $p(\lambda_0) \neq 0$.

Теорема 2. Геометрическая кратность характеристического корня не превосходит его алгебраической кратности.

Действительно, если λ_0 — корень геометрической кратности m, то в L_{λ_0} можно выбрать базис $e_1, \ldots, e_m$, а затем дополнить его до линейно независимого набора элементами $e_{m+1}, \ldots, e_n \in L$. Далее нужно перейти к полученному базису и воспользоваться определением матрицы преобразования:

$$A_{\varphi,e} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & \text{\Large 0} & \\ & \ddots & & \text{\Large C} \\ \text{\Large 0} & & \lambda_0 & \\ \hline & \text{\Large 0} & & \text{\Large D} \end{array} \right\|$$

$$\chi_\varphi = \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & \text{\Large 0} & \\ & \ddots & & \text{\Large C} \\ \text{\Large 0} & & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & \text{\Large 0} & & D - \lambda E \end{array} \right| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_0 - \lambda \end{vmatrix} \left| D - \lambda E \right| =$$

$$= (\lambda_0 - \lambda)^m \det(D - \lambda E) \Rightarrow k \geqslant m \tag{4}$$

24. Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов.

§24.1 Самосопряженные преобразования евклидовых пространств, свойства их собственных значений и собственных векторов.[1]

Определение 1. Линейное пространство E над полем вещественных чисел называется *евклидовым*, если в нём введено *скалярное произведение* $(\bullet,\bullet): E \times E \to \mathbb{R}$ — операция удовлетворяющая следующим условиям:

1. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in E$
3. $(x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in E$
4. $(x, x) > 0 \quad \forall x \in E : x \neq 0$

Замечание. Иначе говоря, скалярное произведение — симметричная положительно определённая билинейная форма (см. билет 24).

Рассмотрим, как происходит вычисление скалярного произведения через координаты в базисе $e = \|e_1 \dots e_n\|$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = eX, y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j = eY$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (e_i, e_j) y_j \tag{1}$$

Определение 2. *Матрицей Грама* базиса e называется матрица попарных скалярных произведений его элементов:

$$G_e = \|(e_i, e_j)\| = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Теперь выражение 1 можно записать в виде:

$$(x, y) = X^T G_e Y \tag{3}$$

[1] Рекомендую ознакомиться с написанными самим Чубаровым И.А. материалами по этому билету по этой ссылке: *https : //drive.google.com/drive/...*

Замечание. Матрица Грама симметрична в силу симметричности скалярного произведения, однако не любая симметричная матрица может служить в качестве матрицы Грама: поскольку матрица Грама является матрицей билинейной формы скалярного произведения, она должна быть положительно определена (см. билет 24).

Определение 3. Линейное преобразование $\varphi\colon E \to E$ евклидова пространства называется *самосопряжённым*, если

$$\forall x, y \in E \hookrightarrow (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \tag{4}$$

Теорема 1 (Условие самосопряжённости преобразования в терминах матрицы Грама). Пусть матрица A_φ преобразования φ записана в некотором базисе e. φ является самосопряжённым преобразованием в том и только том случае, если

$$A^T_{\varphi,e} G_e = G_e A_{\varphi,e}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $X_e^\uparrow = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y_e^\uparrow = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - столбцы координат векторов $x = eX$ и $y = eY$. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{c} (\varphi(x), y) = (A_\varphi X)^T G_e Y = X^T A_\varphi^T G_e Y \\ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) = X^T G_e A_\varphi Y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} X^T A_\varphi^T G_e Y = X^T G_e A_\varphi Y, \\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Обозначим $B = A_\varphi^T G_e$, $C = G_e A_\varphi$. Подставляя $X = E_i$, $Y = E_j$, где E_k — k-й столбец единичный матрицы, получим $E_i^T B E_j = E_i^T C E_j = b_{ij} = c_{ij}$, то есть $B = C$, что равносильно (5). ∎

Следствие 1. В ортонормированном базисе ($G_e = E$) условие самосопряжённости преобразования φ приобретает вид: $A = A^T$, то есть матрица должна быть симметричной.

Определение 4. Подпространство $U \subseteq L$ называется *инвариантным подпространством* преобразования φ, или *φ-инвариантным*, если

$$\forall u \in U \hookrightarrow \varphi(u) \in U \tag{6}$$

Определение 5. *Ортогональным дополнением* подпространства U евклидова пространства E называется множество векторов из E, ортогональных каждому из векторов подпространства U, т.е.

$$U^\perp = \{v \in E\colon \quad \forall u \in U \hookrightarrow (u, v) = 0\} \tag{7}$$

Пусть φ — самосопряжённое преобразование евклидова пространства E.

Утверждение 1. Если U — φ-инвариантное подпространство в E, то его ортогональное дополнение $U^\perp$ также φ-инвариантно.

Доказательство. $\forall x \in U \quad \forall y \in U^\perp \hookrightarrow (x, \varphi(y)) {=} (\varphi(x), y) {=} 0$, т.к. $\varphi(x) \in U$. Следовательно, $\varphi(y) \in U^\perp \forall y \in U^\perp$. ∎

Утверждение 2. Собственные векторы самосопряжённого преобразования φ, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. Если $\varphi(x_1) = \lambda_1 x_1, \varphi(x_2) = \lambda_2 x_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, то $\lambda_1(x_1, x_2) = = (\varphi(x_1), x_2) = (x_1, \varphi(x_2)) = \lambda_2(x_1, x_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0$ ∎

Лемма 1. Любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.

Замечание. Одномерное инвариантное подпространство порождается собственным вектором, а двумерное соответствует существенно комплексному характеристическому корню. В силу основной теоремы алгебры характеристический многочлен имеет хотя бы один комплексный корень.

Теорема 2. Все характеристические корни самосопряжённого преобразования действительные.

Доказательство. Проведём доказательство по индкуции по $n = \dim E$:

$\underline{n = 1:}$ случай очевиден.

$\underline{n = 2:}$ в ортонормированном базисе

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (8)$$

Дискриминант этого уравнения $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$.

$\underline{n > 2:}$ сделаем индуктивное предположение, что у любой симметрической матрицы порядка меньше n все характеристические корни вещественные. Допустим, хотя бы один корень матрицы A мнимый. Согласно замечанию к лемме 1, ему соответствует двумерное инвариантное пространство U. По утверждению 1, $U^\perp$ тоже инвариантно.

В ортонормированном базисе, составленном из базисов подпространств, матрица преобразования имеет блочный вид (из определения матрицы преобразования) $A' = \left\|\begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{matrix}\right\|$, где A_1 и A_2 — симметрические матрицы 2-го и $(n-2)$-го порядков соответственно.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1 - \lambda E & 0 \\ 0 & A_2 - \lambda E \end{vmatrix} = |A_1 - \lambda E|\,|A_2 - \lambda E| \tag{9}$$

По предположению индукции $|A_2 - \lambda E|$ имеет все действительные корни, с учётом случая $\underline{n=2}$ $|A_1 - \lambda E|$ — тоже. Противоречие с предположением.

Т.о., теорема верна для всех n. ■

Определение 6. Преобразование $\varphi|_U : U \to U \subseteq L$ называется *ограничением* преобразования $\varphi : L \to L$ на инвариантное подпространство U, если $\forall u \in U \hookrightarrow \varphi|_U(u) = \varphi(u)$.

Замечание. Ограничение самосопряжённого преобразования на инвариантное подпространство U евклидова пространства E остаётся самосопряжённым, если рассматривать на подпространстве скалярное произведение, заданное во всём пространстве E.

Теорема 3. Для любого самосопряжённого преобразования существует ортонормированный базис из его собственных векторов. Матрица преобразования в этом базисе диагональна: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\Huge 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы этого преобразования.

Доказательство. Проведём доказательство по индукции по $n = \dim E$:

$\underline{n=1:}$ случай очевиден.

$\underline{n>1:}$ пусть теорема верна для $\dim E < n$. Пусть λ_1 — какой-либо характеристический корень, действительный по теореме 2, — ему соответствует собственный вектор h_1 (сразу нормируем его: $|h_1| = 1$). $U = \langle h_1 \rangle$ — одномерное инвариантное пространство, натянутое на этот вектор. Согласно утверждению 1 подпространство $U^\perp$, имеющее размерность $n-1$, инвариантно, и для ограничения $\varphi|_{U^\perp}$ в силу предположения индукции существует ортонормированный базис из собственных векторов $h_2, \ldots, h_n$. Тогда $h_1, \ldots, h_n$ — искомый базис. ■

25. Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду.

§25.1 Билинейные и квадратичные формы[1].

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над полем K (при изложении вопроса достаточно считать поле скаляров K множеством действительных чисел $\mathbb{R}$). Функция $b(x, y) : L \to L$ называется *билинейной функцией*, если она линейна по каждому аргументу, то есть

(1) $b(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 b(x_1, y) + \alpha_2 b(x_2, y) \forall x_1, x_2, y \in L, \alpha_1, \alpha_2 \in K$,

(2) $b(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 b(x, y_1) + \beta_2 b(x, y_2) \forall x, y_1, y_2 \in L, \beta_1, \beta_2 \in K$.

Пусть $\dim L = n, \bar{e} = \|e_1 \dots e_n\|$ — базис L. Обозначим $b_{ij} = b(e_i, e_j), 1 \leqslant i, j \leqslant \leqslant n$.

Определение 2. Матрицу $B = B_e = (b_{ij})$ называют *матрицей билинейной функции* B в базисе $e_1, ..., e_n$.

Получим координатную запись. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, тогда

$$b(x, y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = X^T B Y, \quad (1)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Определение 3. Запись билинейной функции в виде многочлена (1) называют *билинейной формой*.

Замечание. По традиции билинейной формой называют и саму функцию.

Утверждение 1. Пусть $e = (e_1, ..., e_n), e' = (e'_1, ..., e'_n)$ — два разных базиса пространства L, $S = S_{e \to e'}$ — матрица перехода от базиса e к базису e', а B и B' — матрицы билинейной формы b в базисах e и e' соответственно. Тогда

$$B' = S^T B S \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что ранг матрицы B и знак её определителя (если он не равен нулю) не зависят от выбора базиса.

[1]Рекомендую ознакомиться с написанными самим Чубаровым И.А. материалами по этому билету по этой ссылке: *https : //drive.google.com/drive/...*

Определение 4. Билинейная форма $b(x, y)$ называется *симметрической*, если $\forall x, y \in L \hookrightarrow b(x, y) = b(y, x)$.

Утверждение 2. Матрица симметрической билинейной формы в любом базисе является симметрической, т.е. $B^T = B$.

Определение 5. *Квадратичной функцией (формой)*, порождённой симметрической билинейной формой $b(x, y)$, называется функция $k(x) = b(x, x)$ $\forall x \in L$.

Утверждение 3. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная симметрическая билинейная форма $b(x, y)$, такая, что $k(x) = b(x, x), \forall x \in L$

Доказательство. $k(x + y) = b(x + y, x + y) = b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = k(x) + k(y) + 2b(x, y) \Rightarrow b(x, y) = \dfrac{k(x + y) - k(x) - k(y)}{2}$. ■

Определение 6. *Матрицей квадратичной формы* называют матрицу породившей её симметричной билинейной формы.

Квадратичная форма записываема в виде

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + \ldots + b_{nn}x_n^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{ij}x_ix_j. \tag{3}$$

§25.2 Приведение квадратичных форм в линейном пространстве к каноническому виду

Определение 7. Квадратичная форма вида $q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$ называется *диагональной*. Она называется *канонической*, если $\alpha_i = \pm 1; 0$ и

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} y_i^2 \tag{4}$$

Числа p и q называются *положительным* и *отрицательным индексами инерции*, $\sigma = p - q$ — *сигнатурой*.

Теорема 1 (о приведении квадратичной формы к каноническому виду). Для любой квадратичной формы (3) существует такая невырожденная ($\det S \neq 0$) замена переменных $X = SY$, что в новых переменных она принимает канонический вид (4).

Доказательство. Воспользуемся *алгоритмом Лагранжа* выделения полных квадратов.

(1) Допустим, что $\exists i$: $b_{ii} \neq 0$. При необходимости перенумеровав переменные, можем считать, что $b_{11} \neq 0$. Тогда выделим в квадратичной форме все одночлены, содержащие x_1, и дополним это выражение до квадрата:

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_1x_j + (\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j) =$$
$$= b_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2 + (\sum_{i=2}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n} b_{ij}x_ix_j - (\sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2) =$$
$$= b_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2 + k_1(x_2, \ldots, x_n)$$

Тогда сделаем замену $\widetilde{x_1} = x_1 + \sum\limits_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j, \widetilde{x_2} = x_2, \ldots \widetilde{x_n} = x_n$. Квадратичная форма $k_1(\widetilde{x_2}, \ldots, \widetilde{x_n})$ не зависит от $\widetilde{x_1}$, и к ней можно применить тот же метод, и так далее, в результате получится квадратичная форма $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \widetilde{x_i}^2 (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r \neq 0, r = \operatorname{rg} B)$. Остаётся сделать замену $y_i = \sqrt{|\alpha_i|}\widetilde{x_i}, i = \overline{1, r}; y_k = \widetilde{x_k}, k = \overline{r+1, n}$.

(2) Препятствие к выделению квадратов может возникнуть, если на каком-то этапе получена форма, все диагональные элементы матрицы которой равны нулю, но есть ненулевые элементы вне диагонали. Перенумеровав при необходимости переменные, добьёмся $b_{12} \neq 0$. Тогда сделаем подготовительную замену $x_1 = x_1' - x_2', x_2 = x_1' + x_2', x_j = x_j' (j \geqslant 3)$:

$$k(x') = 2b_{12}({x'}_1^2 - {x'}_2^2) + q'(x'),$$

причём форма $q'(x')$ не содержит с члена с ${x'}_1^2$. Теперь условие пункта 1 выполняется. ■

Теорема 2. Пусть невырожденная замена $X = SY$ приводит квадратичную форму $k(x)$ к каноническому виду (4). Если другая невырожденная замена $X = TZ$ приводит форму к каноническому виду $\widetilde{q}(x) = \sum\limits_{i=1}^{s} z_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{s+t} z_i^2$, то $p = s, q = t$, причём $p + q = \operatorname{rg} B$

Теорему 2 оставим без доказательства, только заметим, что равенство $p + q = \operatorname{rg} B$ следует из сохранения ранга матрицы B при замене базиса.

26. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

§26.1 Положительно определенные квадратичные формы[1].

Определение 1. Квадратичная функция $k(x)$ на линейном пространстве L (здесь пространство задаётся над полем вещественных чисел: $K = \mathbb{R}$) называется *положительно определённой*, если $\forall x \in L$: $x \neq 0 \hookrightarrow$ $\hookrightarrow k(x) > 0$; *отрицательно определённой*, если $\forall x \in L$: $x \neq 0 \hookrightarrow k(x) < 0$; *неотрицательно определённой* (*положительно полуопределённой*), если $\forall x \in L \hookrightarrow k(x) \geqslant 0$;
неположительно определённой (*отрицательно полуопределённой*), если $\forall x \in L \hookrightarrow k(x) \leqslant 0$;
знаконеопределённой, если $\exists x_1, x_2 \in L$ и $k(x_1) > 0$, $k(x_2) < 0$.

Пусть в некотором базисе квадратичная функция записана в виде квадратичной формы

$$k(x) = b_{11}x_1^2 + \ldots + b_{nn}x_n^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{ij}x_i x_j. \tag{1}$$

с матрицей $B = (b_{ij})$.

Лемма 1. Квадратичная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда она приводится к диагональному виду $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2, \alpha_i > 0, i = \overline{1, n}$ или, что равносильно, каноническому виду $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$.

Замечание. От диагонального вида можно прийти к каноническому при помощи замены $y_i = \sqrt{\alpha_i} z_i$.

Доказательство. То, что диагональная форма со всеми положительными коэффициентами положительно определена, очевидно.
Обратно, допустим, что данная положительно определённая форма приводится к виду $\sum\limits_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum\limits_{i=p+1}^{p+q} y_i^2$. Если, вопреки доказываемому, $p < n$, то $k(0, 0, ..., 1) \leqslant 0$. Получаем противоречие с условием. ∎

[1] Рекомендую ознакомиться с написанными самим Чубаровым И.А. материалами по этому билету по этой ссылке: *https : //drive.google.com/drive/...*

§26.2 Критерий Сильвестра

Теорема 1 (Критерий Сильвестра). Для положительной определенности квадратичной формы $k(x)$ в $\mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы B, имеющие вид

$$\Delta_m = \det \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{Vmatrix} (b_{ij} = b_{ji} \forall i, j), m = \overline{1, n}, \tag{2}$$

были положительными

Доказательство.

$\boxed{\text{дост.:}}$ Пусть дано, что все главные миноры матрицы квадратичной формы положительны, и надо доказать, что она является положительно определенной. Воспользуемся методом математической индукции и леммой 1.

Случай для $\underline{n = 1}$ очевиден.

Допустим, что $\underline{n > 1}$ и из положительности главных миноров матрицы квадратичной формы вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно следует возможность приведения квадратичной формы от $n-1$ переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ к виду $k(x) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2$. Покажем, что достаточность имеет место и в случае n переменных.

В выражении квадратичной формы от переменных $x_1, \dots, x_n$ выделим слагаемые, содержащие x_n:

$$k(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} x_j x_i + 2 \sum_{j=1}^{n-1} b_{jn} x_j x_n + b_{nn} x_n^2.$$

Двойная сумма $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{ij} x_j x_i = k^*(x)$ есть квадратичная форма, зависящая от $n-1$ переменной, причем главные миноры её матрицы совпадают с главными минорами $k(x)$ до порядка $n-1$ включительно, которые, по условию, положительны. Отсюда следует, по предположению индукции, что квадратичная форма $k^*(x)$ положительно определена и для нее существует невырожденная замена переменных $x_j = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sigma_{ji} y_i, j = \overline{1, n-1}$, приводящая ее к каноническому виду $k^*(x) = \widetilde{k}^*(y) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2$.

Запишем квадратичную форму в новых переменных:

$$k(x) = \widetilde{k}(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} b'_{jn} y_j x_n + b_{nn} x_n^2$$

и выделим полные квадраты по $y_1, ..., y_{n-1}$:

$$k = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i^2 + 2b'_{in} y_i x_n + {b'_{in}}^2 x_n^2) + (b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} {b'_{in}}^2) x_n^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} z^2 + b''_{nn} x_n^2,$$

где введено обозначение $b''_{nn} = b_{nn} - \sum\limits_{i=1}^{n-1} {b'_{in}}^2$ и произведена замена $z_i = y_i + + b'_{in} x_n, i = \overline{1, n-1}, x_n = x_n$. Эта замена, очевидно, невырожденная.

Теперь вспомним, что определитель матрицы квадратичной формы сохраняет знак при замене базиса. По условию определитель матрицы B квадратичной функции в исходном базисе положительный, поскольку является главным минором порядка n. Но из выражения для $k(x)$ в конечном базисе мы получаем, что определитель матрицы квадратичной формы k равен b''_{nn}. Поэтому $b''_{nn} > 0$ и можно ввести переменную $z_n = \sqrt{b''_{nn}} x_n$, в результате чего получаем канонический вид: $k = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$.

$\boxed{\text{необх.:}}$ Дано, что квадратичная функция положительно определена, и надо доказать положительность главных миноров её матрицы. Снова применим индукцию по числу переменных n.

Для $\underline{n=1}$ это ясно.

Пусть $\underline{n>1}$ и для форм от меньшего числа переменных утверждение теоремы верно. Поскольку квадратичная форма $k^*(x) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{ij} x_j x_i$ является положительно определенной (её значения — это значения $k(x)$ при $x_n = 0$), то по предположению индукции ее главные миноры, совпадающие с главными минорами матрицы B до порядка $n-1$, положительны. А определитель самой матрицы B, который является главным минором порядка n, положителен, поскольку $k(x)$ приводится к каноническому виду $k = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$, и определитель матрицы полученной при этом квадратичной формы равен 1 и имеет такой же знак, как и определитель матрицы B.

■

Следствие 1 (Критерий Сильвестра для отрицательной определенности). Для отрицательной определенности квадратичной формы $k(x)$ в $\mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы B имели чередующиеся знаки, начиная с минуса, т.е. $(-1)^m \Delta_m > 0, m = \overline{1, n}$.

Доказательство. Рассмотрим форму $-k(x)$ с матрицей $B' = -B = (-b_{ij})$: ее положительной определённости, по критерию Сильвестра, равносильно условие

$$\Delta_m = \det \begin{Vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1m} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{m1} & -b_{m2} & \cdots & -b_{mm} \end{Vmatrix} = (-1)^m \Delta_m > 0, m = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

■

Дифференциальные уравнения

VII

27. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью — квазимногочленом.

§27.1 Дифференциальные многочлены и общий метод решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Обозначим через $C^1(\mathbb{R})$ множество всех комплекснозначных функций, заданных и непрерывных на всех числовой оси $\mathbb{R}$, а через $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, — множество всех функций, k раз непрерывно дифференцируемых на всей оси $\mathbb{R}$.

Определение 1. Говорят, что задан *оператор дифференцирования* D, действующий из $C^1(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$, если каждой функции $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ оператор D ставит в соответствие функцию $y'(x) \in C(\mathbb{R})$ по формуле $Dy(x) = y'(x)$.

Определение 2. *k-я степень оператора дифференцирования* D^k, $k \in \mathbb{N}$, является оператором, действующим из множества $C^k(\mathbb{R})$ во множество $C(\mathbb{R})$ по формуле $D^k y(x) = y^{(k)}(x)$.

Определение 3. *Дифференциальным многочленом степени* $n \in \mathbb{N}$ (или многочленом степени n от оператора дифференцирования D) $L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа (действительные или комплексные), называют оператор, действующий из множества $C^n(\mathbb{R})$ во множество $C(\mathbb{R})$ по формуле $L(D)y(x) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$.

Лемма 1. Дифференциальный многочлен степени n является линейным оператором, т.е. для любых функций $y_1(x), y_2(x) \in C^n(\mathbb{R})$ и любых чисел c_1, c_2 выполнено равенство

$$L(D)[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] = c_1 L(D) y_1(x) + c_2 L(D) y_2(x).$$

Доказательство. Требуемое утверждение получается из определения 3 дифференциального многочлена и свойства линейности для производных. Действительно,

$$\begin{aligned} L(D)(c_1 y_1 + c_2 y_2) &= \\ &= (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + a_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_n (c_1 y_1 + c_2 y_2) = \\ &= c_1 (y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1) + c_2 (y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n y_2) = \\ &= c_1 L(D) y_1 + c_2 L(D) y_2. \end{aligned}$$

■

Лемма 2. Если λ — комплексное число, то для любой $y(x) \in C^n(\mathbb{R})$ справедлива так называемая формула сдвига

$$L(D)\left[e^{\lambda x} \cdot y(x)\right] = e^{\lambda x} \cdot L(D+\lambda)y(x).$$

Доказательство. При любом $k \in \mathbb{N}$ по формуле Лейбница получаем

$$D^k[e^{\lambda x} \cdot y] = (e^{\lambda x} \cdot y)^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} C_k^j (e^{\lambda x})^{(j)} \cdot y^{(k-j)} =$$

$$= e^{\lambda x} \cdot \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j D^{k-j} y = e^{\lambda x}(D+\lambda)^k y.$$

В силу этого,

$$L(D)[e^{\lambda x} y] = e^{\lambda x}(D+\lambda)^n y + a_1 e^{\lambda x}(D+\lambda)^{n-1} y + \dots + a_n e^{\lambda x} y =$$
$$= e^{\lambda x} L(D+\lambda) y. \qquad \blacksquare$$

Лемма 3. Все решения уравнения $z' - \lambda z = f(x)$, где λ — комплексное число и $f(x)$ — заданная комплекснозначная функция из $C(\mathbb{R})$, задаются формулой

$$z(x) = e^{\lambda x}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda\zeta} \cdot f(\zeta)\, d\zeta\right),$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

Доказательство. Ищем решение уравнения в виде $z(x) = c(x)e^{\lambda x}$. После подстановки $z(x)$ в уравнение и упрощений получаем

$$c'(x) = e^{-\lambda x} \cdot f(x).$$

Отсюда

$$c(x) = C + \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda\zeta} \cdot f(\zeta)\, d\zeta,$$

что и доказывает лемму. $\blacksquare$

§27.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, и $a_1, \dots, a_n$ — заданные действительные или комплексные числа, называют линейным однородным дифференциальным уравнением порядка

n с постоянными коэффициентами. Числа $a_1, \ldots, a_n$ называют коэффициентами уравнения (1). С помощью дифференциального многочлена

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

уравнение (1) коротко записывается в виде

$$L(D)y(x) = 0. \tag{2}$$

Лемма 4. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ — какие-либо решения уравнения (1) и C_1, C_2 — произвольные комплексные числа, то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением уравнения (1).

Доказательство. Воспользуемся формой (2) записи уравнения (1). В силу линейности многочлена $L(D)$ (см. лемму 1), имеем

$$L(D)y = L(D)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(D) y_1 + C_2 L(D) y_2 = 0,$$

так как $L(D)y_1 = L(D)y_2 = 0$ по условию леммы. ■

Рассмотрим функции вида

$$\varphi(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x)e^{\lambda_m x}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные комплексные числа, а $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ — многочлены с комплексными коэффициентами.

Лемма 5. Если в (3) $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то коэффициенты во всех многочленах $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ нулевые.

Доказательство. Применим индукцию по m. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть утверждение леммы справедливо, если в формуле (3) заменить m на $(m-1)$. При $m > 1$ рассмотрим функцию

$$\psi(x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot \varphi(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{m} P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0.$$

Продифференцируем $\psi(x)$ $(N+1)$ раз, где N — степень многочлена $P_1(x)$. В силу того, что $P_1^{(N+1)}(x) = 0$, получим

$$\sum_{k=2}^{m} \left[P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} \right]^{(N+1)} = 0$$

или

$$\sum_{k=2}^{m} Q_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0,$$

где Q_k — многочлены той же степени, что и $P_k(x)$, так как $\lambda_k - \lambda_1 \neq 0$ при всех $k = \overline{2, m}$. Из предположения индукции $Q_k(x) \equiv 0$, $\forall k = \overline{2, m}$. Следовательно, $P_k(x) \equiv 0$, $k = \overline{2, m}$. Тогда и $P_1(x) \equiv 0$. Это значит, что все коэффициенты многочленов $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ в (3) нулевые. ■

Рассмотрим характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Уравнение $L(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением* для (1).

Напомним, что число λ_0 называется *корнем кратности* k ($k \in \mathbb{N}, 1 \leqslant \leqslant k \leqslant n$) уравнения $L(\lambda) = 0$, если

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot L_1(\lambda),$$

где $L_1(\lambda)$ — многочлен степени $(n - k)$ и $L_1(\lambda_0) \neq 0$. Из формулы Тейлора для $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ сразу следует, что λ_0 — корень кратности k для $L(\lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$L(\lambda_0) = L'(\lambda_0) = \dots = L^{(k-1)}(\lambda_0) = 0, \qquad L^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$$

Лемма 6. Если λ_0 — корень кратности k характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то каждая из функций

$$e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$$

является решением уравнения (1).

Доказательство. 1. $\lambda_0 = 0$. Тогда $L(\lambda) = \lambda^k(\lambda^{n-k} + a_1\lambda^{n-k-1} + \dots + a_{n-k})$, где $a_{n-k} \neq 0$, и, следовательно,

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-k}D^k$$

Нетрудно проверить, что функции $1,\ x,\ \dots,\ x^{k-1}$ являются решениями $L(D)y = 0$.

2. $\lambda_0 \neq 0$. Сделаем замену $y = e^{\lambda_0 x}z$. По формуле сдвига (см. лемму 2)

$$L(D)y = e^{\lambda_0 x}L(D + \lambda_0)z = 0.$$

Характеристический многочлен $L(\lambda + \lambda_0)$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности k. В силу п. 1. уравнение $L(D + \lambda_0)z = 0$ имеет решения $1,\ x,\ \dots,\ x^{k-1}$. Из замены получаем утверждение леммы.

■

Теорема 1. Пусть характеристическое уравнение $L(\lambda) = 0$ имеет корни $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_m$ ($m \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant m \leqslant n$) соответственно кратности $k_1,\ \dots,\ k_m$ ($k_1 + \dots + k_m = n$). Тогда:

1. любая функция вида

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x)e^{\lambda_m x}, \tag{4}$$

где $P_j(x) = C_0^j + C_1^j x + \dots + C_{k_j-1}^j x^{k_j-1}$ — многочлен степени $(k_j - 1)$, коэффициентами которого служат произвольные комплексные постоянные $C_0^j,\ \dots,\ C_{k_j-1}^j$, является решением уравнения (1);

2. если $y(x)$ — какое-либо решение уравнения (1), то найдется единственный набор коэффициентов многочленов $P_1(x), \ldots, P_m(x)$, при котором это решение $y(x)$ задается формулой (4).

Доказательство. 1. первый пункт теоремы немедленно следует из леммы 6 и принципа суперпозиции для уравнения (1) (см. лемму 4).

2. второй пункт докажем методом математической индукции по n. Пусть $y(x)$ — какое-либо решение (1). При $n=1$ уравнение (1) имеет вид $y'+a_1y=0$ и по лемме 3 все его решения имеют вид $y=Ce^{-a_1x}$. Ясно, что при некотором единственном значении C эта формула содержит и наше решение. Пусть теперь $n>1$ и пусть всякое решение $y(x)$ линейного однородного уравнения порядка $(n-1)$ с постоянными коэффициентами единственным образом записывается в форме (4) с заменой n на $(n-1)$. В силу условий теоремы

$$L(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}.$$

Значит,

$$L(D) = (D-\lambda_1)^{k_1}(D-\lambda_2)^{k_2}\ldots(D-\lambda_m)^{k_m}.$$

Введем дифференциальный многочлен степени $(n-1)$

$$M(D) = (D-\lambda_1)^{k_1-1}(D-\lambda_2)^{k_2}\ldots(D-\lambda_m)^{k_m},$$

где при $k_1=1$ первый сомножитель отсутствует. Тогда $L(D)=M(D)(D-\lambda_1)$. Положим $(D-\lambda_1)y=z$. В таком случае уравнение (2) эквивалентно системе

$$\begin{cases} (D-\lambda_1)y = z, \\ M(D)z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Каждое решение второго уравнения системы (5) в силу предположения индукции имеет вид

$$z(x) = Q_1(x)e^{\lambda_1 x} + Q_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + Q_m(x)e^{\lambda_m x}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

где $Q_1(x)$ — многочлен степени (k_1-2) в случае $k_1>1$ и $Q_1(x)\equiv 0$ в случае $k_1=1$, а $Q_j(x)$ — многочлены степени (k_j-1) при всех $j=\overline{2,m}$. По лемме 3 решение первого уравнения системы (5) имеет вид

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(C + \int e^{-\lambda_1 x} z(x)\,dx\right), \tag{6}$$

где C — комплексная постоянная.

Учитывая, что при целом $l \geqslant 0$ первообразная

$$\int x^l e^{\lambda x}\,dx = \begin{cases} (b_0x^l + \cdots + b_l)e^{\lambda x}, & \lambda \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \\ \frac{x^{l+1}}{l+1}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

и что $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$, $\forall j = \overline{2,m}$, из вида $z(x)$ находим, что

$$\int e^{-\lambda_1 x} z(x)\,dx = \begin{cases} P_1(x) + P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots + P_m(x)e^{(\lambda_m-\lambda_1)x}, & k_1 > 1 \\ P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots + P_m(x)e^{(\lambda_m-\lambda_1)x}, & k_1 = 1 \end{cases}$$

Подставляя это выражение в (6), получаем, что рассматриваемое решение $y(x)$ уравнения (1) имеет вид (4).

Рассуждением от противного установим единственность записи (4) для каждого уравнения (1). Если существует решение $y(x)$ уравнения (1), для которого

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} P_k(x)e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{P}_k(x)e^{\lambda_k x},$$

то отсюда

$$\sum_{k=1}^{m} \left[P_k(x) - \tilde{P}_k(x)\right] e^{\lambda_k x} \equiv 0.$$

Из леммы 5 тогда получаем, что $P_k(x) \equiv \tilde{P}_k(x)$, $\forall k = \overline{1,m}$.

■

§27.3 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью — квазимногочленом

Эти уравнения имеют вид

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = f(x), \tag{7}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — заданные комплексные или действительные числа, а правая часть $f(x)$ уравнения (7) — заданная непрерывная функция на некотором промежутке X оси $\mathbb{R}$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$z^{(n)}(x) + a_1 z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n z(x) = 0 \tag{8}$$

Прежде всего покажем, что если известно какое-либо решение $y_0(x)$ линейного неоднородного уравнения (7), то замена $y(x)=z(x)+y_0(x)$ приводит уравнение (7) к линейному однородному уравнению (8). Действительно, воспользовавшись представлением левой части (7) через дифференциальный многочлен

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{9}$$

получаем, что

$$L(D)y = L(D)(z + y_0) = L(D)z + L(D)y_0 = L(D)z + f(x) = f(x).$$

Отсюда следует $L(D)z = 0$, т.е. $z(x)$ — решение (8).

Это замечание позволяет написать формулу всех решений линейного неоднородного уравнения (7), если найти каким-то образом его решение $y_0(x)$, так как формула общего решения (8) была уже получена ранее. Именно, если $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ — базис решений (8), то формула $y=C_1 z_1(x)+ + \cdots + C_n z_n(x) + y_0(x)$ дает все решения (7). Ее называют формулой общего решения (7).

Лемма 7. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и пусть $y_1(x)$ — какое-либо решение уравнения (7) при $f(x) \equiv f_1(x)$ и $y_2(x)$ — какое-либо решение уравнения (7) при $f(x) \equiv f_2(x)$.

Тогда $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (7).

Доказательство.

$$L(D)y = L(D)(y_1 + y_2) = L(D)y_1 + L(D)y_2 = f_1(x) + f_2(x) = f(x). \qquad \blacksquare$$

Определение 4. *Квазимногочленом* называется функция $f(x)=e^{\mu x} P_m(x)$, где μ — заданное комплексное число, $P_m(x)$ — заданный многочлен степени m с комплексными коэффициентами.

Из теоремы 1 следует, что всякое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой конечную сумму квазимногочленов.

Покажем, в каком виде нужно искать частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами (7) с квазимногочленом в правой части. Найдя это частное решение и базис пространства решений (8), немедленно получаем общее решение (7).

Рассмотрим уравнение

$$L(D)y(x) = e^{\mu x} \cdot P_m(x), \tag{10}$$

где μ — заданное комплексное число, а $P_m(x)$ — заданный многочлен степени m.

Определение 5. Если число μ является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

то говорят, что в уравнении (10) имеет место *резонансный случай*. Если же μ не является корнем $L(\lambda) = 0$, то говорят, что в уравнении (10) имеет место *нерезонансный случай*.

Теорема 2. Для уравнения (10) существует и единственно решение вида

$$y(x) = x^k \cdot Q_m(x) e^{\mu x},$$

где $Q_m(x)$ — многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени m, а число k равно кратности корня μ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае и $k = 0$ в нерезонансном случае.

Доказательство. Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = e^{\mu x} \cdot z$ в уравнении (9) всегда можно избавиться от $e^{\mu x}$ в правой части. В самом деле, используя формулу сдвига, после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)(e^{\mu x} z) = e^{\mu x} L(D + \mu)z = e^{\mu x} P_m(x).$$

Отсюда $L(D + \mu)z = P_m(x)$.

Таким образом, доказательство теоремы осталось провести для уравнения вида

$$L(D)y = P_m(x) \tag{11}$$

а) Нерезонансный случай: $L(0) \neq 0$. Пусть

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_m,$$

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_m.$$

Подставляя $P_m(x)$, $Q_m(x)$ в (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов q_0, q_1, ..., q_m:

$$\begin{cases} a_n q_0 = p_0, \\ a_n q_1 + a_{n-1} \cdot m q_0 = p_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n q_m + \dots = p_m. \end{cases}$$

Матрица этой линейной системы треугольная с числами $a_n = L(0) \neq 0$ по диагонали, поэтому все коэффициенты $Q_m(x)$ определяются однозначно.

б) Резонансный случай

$$L(\lambda) = \lambda^k (\lambda^{n-k} + a_1 \lambda^{n-k-1} + \dots + a_{n-k}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad a_{n-k} \neq 0, \quad k \neq n.$$

Следовательно,

$$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-k} D^k, & k \leqslant n, \\ D^n, & k = n. \end{cases}$$

В случае $k < n$ замена $D^k y = z$ в уравнении (11) приводит к уравнению

$$L_1(D)z \equiv (D^{n-k} + \dots + a_{n-k})z = P_m(x).$$

Поскольку $L_1(0) = a_{n-k} \neq 0$, то для этого уравнения имеет место нерезонансный случай. Следовательно, существует единственное решение этого уравнения $z = R_m(x)$, где $R_m(x)$ — некоторый многочлен степени m.

Рассмотрим уравнение

$$D^k y = \begin{cases} R_m(x), & k < n, \\ P_m(x), & k = n. \end{cases}$$

Взяв нулевые начальные условия для этого уравнения

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(k-1)}(0) = 0,$$

получаем единственное решение вида

$$y(x) = x^k \cdot Q_m(x). \qquad \blacksquare$$

28. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения.

§28.1 Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения

Определение 1. *Нормальной линейной системой с постоянными коэффициентами* порядка $n \geqslant 2$ называют систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Здесь: t — аргумент; $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — неизвестные функции; a_{ij} — заданные комплексные или действительные числа, называемые *коэффициентами* системы, $i, j = \overline{1, n}$; $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — заданные комплексные функции, называемые свободными членами системы; $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt}$, $i = \overline{1, n}$. Будем всегда считать, что функции $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ — заданные непрерывные функции на некотором промежутке T числовой оси $\mathbb{R}$.

Заметим, что число уравнений системы (1) равно числу неизвестных функций.

Упростим запись. Пусть

$$A = ||a_{i,j}||, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \ \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда нормальная линейная система (1) записывается в виде одного уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t). \tag{2}$$

Линейная система (2) называется *линейной однородной системой*, если $f(x) \equiv 0$ на промежутке T. В противном случае она будет называться *линейной неоднородной системой*. *Решением* нормальной линейной системы (2) будем называть всякую вектор-функцию $x = \varphi(t)$ с n комплекснозначными непрерывно дифференцируемыми на промежутке T компонентами $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, если $\dot{\varphi}(t) \equiv A\varphi(t) + f(t)$ на промежутке T.

Рассмотрим нормальную линейную однородную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{3}$$

где $t \in \mathbb{R}$, A — квадратная комплексная матрица порядка n, $x(t)$ — неизвестная вектор-функция с n компонентами.

Лемма 1. (принцип суперпозиции) Если $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$ — решения системы (3), а C_1, C_2 — произвольные комплексные числа, то вектор-функция $x(t) = C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t)$ также решение системы (3).

Доказательство. В силу условий леммы имеем

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = C_1\dot{x}^{(1)}(t) + C_2\dot{x}^{(2)}(t) - A\left[C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t)\right] =$$
$$= C_1\left[\dot{x}^{(1)} - Ax^{(1)}\right] + C_2\left[\dot{x}^{(2)} - Ax^{(2)}\right] = 0. \qquad \blacksquare$$

Будем считать в дальнейшем, что матрица A является матрицей линейного преобразования $\mathcal{A}$ в комплексном унитарном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ столбцов с n компонентами в ортонормированном базисе e_1, e_2, ..., e_n. При заданном базисе можно отождествить преобразование $\mathcal{A}$ и его матрицу A.

Очевидно, что система (3) имеет тривиальное решение $x = 0$. Будем искать нетривиальные решения (3) в виде $x(t) = e^{\lambda t}h$, где $h \neq 0$ — числовой n-мерный вектор. Подставляя $x(t)$ в систему (3), получим $\lambda e^{\lambda t}h = Ae^{\lambda t}h$ или $Ah = \lambda h$.

Напомним, что собственный вектор h преобразования A для собственного значения λ определяется условием

$$Ah = \lambda h, \quad h \neq 0,$$

и что все собственные значения λ преобразования A являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где E — единичная матрица порядка n. Таким образом, установлено следующие утверждение.

Лемма 2. Для того, чтобы вектор-функция $x(t) = e^{\lambda t}h$ была нетривиальным решением линейной однородной системы (3), необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением, а h — соответствующим ему собственным вектором преобразования A.

Теорема 1. Пусть существует базис $\mathbb{R}^n$ из собственных векторов h_1, ..., h_n линейного преобразования A и пусть λ_1, ..., λ_n — соответствующие им собственные значения (среди них могут быть одинаковые)

Тогда:

а) вектор-функция $x(t)$ вида

$$x(t) = C_1e^{\lambda_1 t}h_1 + \ldots + C_ne^{\lambda_n t}h_n, \tag{4}$$

где C_1, ..., C_n — произвольные комплексные постоянные, являются решением системы (3);

б) если $x(t)$ — какое-либо решение системы (3), то найдутся такие значения постоянных $C_1, \ldots, C_n$, при которых $x(t)$ задается формулой (4).

Доказательство. П. а) следует из леммы 1 и леммы 2.

Докажем п. б). Пусть $x(t)$ — какое-либо решение (3). Так как $h_1, \ldots, h_n$ — базис $\mathbb{R}^n$, то $\forall t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = \zeta_1(t)h_1 + \ldots + \zeta_n(t)h_n.$$

Подставим $x(t)$ в систему (3). Имеем

$$\dot{\zeta}_1(t)h_1 + \ldots + \dot{\zeta}_n(t)h_n = \zeta_1(t)Ah_1 + \ldots + \zeta_n(t)Ah_n = \lambda_1\zeta_1(t)h_1 + \ldots + \lambda_n\zeta_n(t)h_n.$$

Так как $h_1, \ldots, h_n$ — линейно независимые векторы, то отсюда

$$\dot{\zeta}_1(t) = \lambda_1\zeta_1(t), \ldots, \dot{\zeta}_n(t) = \lambda_n\zeta_n(t).$$

Из этих уравнений находим, что $\zeta_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \zeta_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}$. Подстановка найденных $\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t)$ в формулу для $x(t)$ дает (4). ■

Как известно из курса алгебры, базис пространства $\mathbb{R}^n$ из собственных векторов преобразования A существует, например, тогда, когда все собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ преобразования A попарно различны или когда преобразование A является нормальным (независимо от кратности λ), в частности, симметрическим.

Если несимметрическое преобразование A имеет собственное значение λ кратности k, то, вообще говоря, линейно независимых собственных векторов A, соответствующих этому значению λ, оказывается меньше k. Таким образом, в таком случае нельзя построить базис $\mathbb{R}^n$ из собственных векторов преобразования A. Но можно построить *жорданов базис* пространства $\mathbb{R}^n$

Определение 2. Пусть λ_0 — собственное значение преобразования A и пусть векторы $h_1, h_2, \ldots, h_k$ таковы, что

$$\begin{aligned} &Ah_1 = \lambda_0 h_1, \quad h_1 \neq 0, \\ &Ah_2 = \lambda_0 h_2 + h_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Ah_k = \lambda_0 h_k + h_{k-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда h_1 — собственный вектор преобразования A, а векторы $h_2, \ldots, h_k$ называют *присоединенными векторами* к вектору h_1. Система векторов $h_1, \ldots, h_k$ называется *жордановой цепочкой* для собственного значения λ_0, а число k называется длиной жордановой цепочки.

Если собственное значение λ_0 — простое и h_1 — соответствующий ему собственный вектор, то присоединенных векторов к h_1 в этом случае не существует. Если же λ_0 — кратное собственное значение, то для него может существовать несколько жордановых цепочек, содержащих линейно независимые собственные векторы преобразования.

Теорема 2 (Жордана). Каково бы ни было линейное преобразование A в комплексном пространстве $\mathbb{R}^n$, всегда существует базис $\mathbb{R}^n$, составленный из жордановых цепочек для всех собственных значений.

Отметим, что

- в жордановом базисе $\mathbb{R}^n$ (базисе, составленном из жордановых цепочек) число различных жордановых цепочек равно числу линейно независимых векторов преобразования A;
- в жордановом базисе сумма длин всех жордановых цепочек для каждого кратного собственного значения λ равна кратности λ;
- в общем случае жорданов базис $\mathbb{R}^n$ является комплексным даже для действительного преобразования A;
- жорданов базис может быть базисом, состоящим только из собственных векторов A;
- жорданов базис $\mathbb{R}^n$ строится не единственным образом.

Пусть A — произвольная квадратная матрица, λ — собственное значение A и пусть $h_1, \ldots, h_k$ — некоторая жорданова цепочка для λ. Покажем, что каждой жордановой цепочке длины k соответствует k решений системы (3) вида

$$\begin{aligned}
&x_1(t) = e^{\lambda t} h_1 \equiv e^{\lambda t} \cdot P_1(t),\\
&x_2(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_2(t),\\
&x_3(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + h_3\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_3(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_k(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_1 + \ldots + \frac{t}{1!}h_{k-1} + h_k\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_k(t),
\end{aligned} \tag{6}$$

Лемма 3. Каждая из вектор-функций $x_r(t) = e^{\lambda t} \cdot P_r(t),\ r = \overline{1, k}$, является решением системы (3)

Доказательство. При $k = 1$ утверждение леммы доказано в лемме 2. Пусть $k \geq 2$. Тогда $\dot{P}_r(t) = P_{r-1}(t)$, а из определения жордановой цепочки (5) следует, что $AP_r(t) = \lambda P_r(t) + P_{r-1}(t)$. Подставляя $x_r(t)$ в систему (3), получаем, что

$$\begin{aligned}
\dot{x}_r(t) - Ax_r = \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t}\dot{P}_r - e^{\lambda t} AP_r =\\
= \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t} P_{r-1} - e^{\lambda t}(\lambda P_r + P_{r-1}) = 0
\end{aligned}$$

Здесь был использован тот факт, что формула производной произведения скалярной функции и вектор-функции аналогична формуле производной произведения двух скалярных функций. ■

Теорема 3. Пусть жорданов базис $\mathbb{R}^n$ состоит из S жордановых цепочек $h_1^{(j)}, \ldots, h_{k_j}^{(j)}$ длин k_j $(k_1 + .. + k_S = n)$ для собственных значений λ_j (среди λ_j могут быть одинаковые) преобразования A, $j = \overline{1, S}$. Тогда:

а) вектор-функция $x(t)$ вида

$$x(t) = \sum_{j=1}^{S} e^{\lambda_j t} \left[C_1^{(j)} P_1^{(j)}(t) + \ldots + C_{k_j}^{(j)} P_{k_j}^{(j)}(t) \right], \qquad (7)$$

где $P_1^{(j)}(t), \ldots, P_{k_j}^{(j)}(t)$ — многочлены вида (6) и $C_1^{(j)}, \ldots, C_{k_j}^{(j)}$, $j = \overline{1, S}$ — произвольные комплексные постоянные, является решением системы (3).

б) если $x(t)$ — какое-либо решение системы (3), то найдется такой набор значений постоянных $C_1^{(j)}, \ldots, C_{k_j}^{(j)}$, $j = \overline{1, S}$, при котором $x(t)$ задается формулой (7).

Доказательство. П. а) следует из леммы 3 и леммы 1.

Докажем п. б).Пусть $x(t)$ — какое-либо решение системы (3). Покажем, что оно имеет вид (7). При каждом $t \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ можно разложить по базису $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$x(t) = \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \ldots + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right].$$

Подставим $x(t)$ в систему (3) и воспользуемся определением жордановой цепочки (5). Имеем:

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\dot{\zeta}_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \ldots + \dot{\zeta}_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right] = \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) A h_1^{(j)} + \ldots + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) A h_{k_j}^{(j)} \right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) \lambda_j h_1^{(j)} + \zeta_2^{(j)}(t) \left(\lambda_j h_2^{(j)} + h_1^{(j)} \right) + \ldots + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) \left(\lambda_j h_{k_j}^{(j)} + h_{k_j-1}^{(j)} \right) \right].$$

Из единственности разложения $x(t)$ по жордановому базису отсюда находим S систем вида

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1^{(j)} = \lambda_j \zeta_1^{(j)} + \zeta_2^{(j)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\zeta}_{k_j-1}^{(j)} = \lambda_j \zeta_{k_j-1}^{(j)} + \zeta_{k_j}^{(j)}, \\ \dot{\zeta}_{k_j}^{(j)} = \lambda_j \zeta_{k_j}^{(j)}, \quad j = \overline{1, S} \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем снизу вверх, получаем:

$$\zeta_{k_j}^{(j)}(t) = C_{k_j}^{(j)} e^{\lambda_j t},$$
$$\zeta_{k_j-1}^{(j)}(t) = \left[C_{k_j-1}^{(j)} + C_{k_j}^{(j)} \frac{t}{1!}\right] e^{\lambda_j t},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\zeta_1^{(j)}(t) = \left[C_1^{(j)} + C_2^{(j)} \frac{t}{1!} + \ldots + C_{k_j}^{(j)} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}\right] e^{\lambda_j t}, \quad j = \overline{1, S}.$$

Подставляя найденные значения $\zeta_1^{(j)}(t), \ldots, \zeta_{k_j}^{(j)}(t)$ в разложение $x(t)$ и собирая члены возле каждого $C_1^{(j)}, \ldots, C_{k_j}^{(j)}$, получим представление $x(t)$ в виде (7). ■

29. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Формула Лиувилля—Остроградского. Определитель Вронского.

§29.1 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением порядка n с переменными коэффициентами называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $x \in [\alpha, \beta]$, $a_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, — заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, называемые коэффициентами уравнения (1), и $f(x)$ — заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, называемая правой частью уравнения (1). При $f(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, уравнение — однородное, в противном случае — неоднородное. $a_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, $f(x)$ могут быть комплексными.

Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1) на $[\alpha, \beta]$, если $\varphi(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и обращает (1) в тождество на всем $[\alpha, \beta]$.

Лемма 1. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_i(x)$ — решение уравнения (1) при $f(x) \equiv f_i(x)$ на $[\alpha, \beta]$, $i = 1, 2$, то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (1).

Следствие 1. Если $y_1(x), y_2(x)$ — решения линейного однородного уравнения и c_1, c_2 — произвольные числа, то линейная комбинация $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ также является решением линейного однородного уравнения.

Решение уравнения (1) всегда можно свести к решению линейной системы дифференциальных уравнений порядка n следующего вида:

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x), \tag{2}$$

где

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_1(x) \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Лемма 2. Уравнение (1)) эквивалентно системе (2).

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение (1).

Положим $y_1(x)=\varphi(x)$, $y_2(x)=\varphi'(x), \dots, y_n(x)=\varphi^{(n-1)}(x)$. Тогда вектор-функция с компонентами $\varphi(x)$, $\varphi'(x), \dots,$ $\varphi^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет системе (2). Наоборот, если вектор-функция с компонентами $\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$ — решение системы (1), то, исключив из (2) переменные $y_2, \dots, y_n$, получаем, что $y_1 = \varphi(x)$ — решение уравнения (1). ■

Лемма 2 позволяет перенести все результаты для линейных систем на случай уравнения (1).

Рассмотрим для уравнения (1) начальные условия

$$y(x_0) = y_1^{(0)},\ y'(x_0) = y_2^{(0)},\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^{(0)}, \tag{4}$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ — заданные числа.

Теорема 1. Пусть все функции $a_j(x)$, $j = \overline{1, n}$ и $f(x)$ — непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ решение задачи Коши (1)), (4 существует и единственно на всем $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Сделав замену

$$y_1(x) = y(x),\ y_2(x) = y'(x),\ \dots,\ y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

сведем уравнение (1) к системе (2). При этом начальные условия примут вид

$$y(x_0) = y^{(0)}, \tag{5}$$

где $y^{(0)}$ — вектор с компонентами $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$. В силу леммы 2 задача Коши (1)), (4 эквивалентна задаче Коши (2)), (5. В силу условий теоремы $A(x)$ и $f(x)$ — непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, для задачи Коши (2)), (5 выполнены все условия теоремы о существовании и единственности задачи Коши для линейной системы уравнений. Значит, и решение задачи Коши (1)), (4 существует и единственно на $[\alpha, \beta]$. ■

§29.2 Фундаментальная система решений

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \tag{6}$$

где $a_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$.

Определение 1. Решения $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ уравнения (6) называются *линейно зависимыми* на $[\alpha, \beta]$, если $\exists$ числа $c_1, \ldots, c_k$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_k y_k(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

В противном случае решения $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ называются *линейно независимыми* на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим линейную однородную систему, которая эквивалентна уравнению (1):

$$y'(x) = A(x)y(x),$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Лемма 3. Решения $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ уравнения (6) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда соответствующие им решения $Y_1(x), \ldots, Y_k(x)$ системы (7) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$ (здесь $Y_j(x)$ — вектор-функция с компонентами $y_j(x), y_j'(x), \ldots, y_j^{(n-1)}(x)$, $j = \overline{1, k}$.

Доказательство. Пусть решения $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ уравнения (6) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$. Тогда найдутся такие числа $c_1, \ldots, c_k$, $|c_1| + \ldots + |c_k| > 0$, что

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_k y_k(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Дифференцируя последовательно это тождество $(n-1)$ раз, получаем тождество на $[\alpha, \beta]$ для решений системы (7):

$$c_1 Y_1(x) + \ldots + c_k Y_k(x) \equiv 0,$$

т.е. решения $Y_1(x)$, ..., $Y_k(x)$ системы (7) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$.

Обратно, если выполнено последнее тождество на $[\alpha, \beta]$ с некоторыми, одновременно не равными нулю, числами $c_1, \ldots, c_k$, то первая компонента этого векторного тождества означает линейную зависимость решений $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ уравнения (6). ■

Следствие 2. Решения $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ уравнения (6) линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда решения $Y_1(x), \ldots, Y_k(x)$ системы (7) линейно независимы на $[\alpha, \beta]$.

Определение 2. Совокупность произвольных n независимых решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ уравнения (6) называется *фундаментальной системой решений уравнения* (6).

Из леммы 3 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Лемма 4. Решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ уравнения (6) образуют фундаментальную систему решений уравнения (6) в том и только в том случае, когда вектор-функция $\Phi_j(x)$ с компонентами $\varphi_j(x), \ldots, \varphi_j^{(n-1)}(x)$, $j = \overline{1, n}$, образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы (7).

С помощью леммы 4 все утверждения о фундаментальных системах решений линейной однородной системы переносятся на фундаментальные системы решений линейных однородных уравнений порядка n.

Теорема 2. Для уравнения (6) существует бесконечное множество фундаментальных систем решений.

Доказательство. Уравнение (6) эквивалентно системе (7), для которой справедлив аналог теоремы 2 для линейной системы с переменными коэффициентами. В силу леммы 4 тогда справедлива и теорема 2. ■

Теорема 3. Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (6), то каждое решение $y(x)$ уравнения (6) представимо единственным образом в виде

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — постоянные.

Доказательство. По лемме 4 вектор-функции $\Phi_j(x)$ с компонентами $\varphi_j(x)$, $\varphi_j'(x), \ldots, \varphi_j^{(n-1)}(x)$, $j = \overline{1, n}$, образуют фундаментальную систему решений системы (7), эквивалентной уравнению (6). По теореме, аналогичной теореме 3, для линейной системы с переменными коэффициентами любое решение $Y(x)$ системы (7) единственным образом представимо в виде

$$Y(x) = c_1\Phi_1(x) + \ldots + c_n\Phi_n(x).$$

Первая строка этого векторного равенства и дает утверждение теоремы 3. ■

§29.3 Определитель Вронского

Рассмотрим систему

$$y'(x) = A(x)y(x), \tag{8}$$

где $A(x)$ — заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ комплекснозначная квадратная матрица порядка n.

Теорема 4. Пусть $y_j(x), j = \overline{1,k}$ — решения линейной однородной системы (8). Решения $y_j(x), j = \overline{1,k}$ — линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ числовые векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть решения (8) $y_j(x), j = \overline{1,k}$ — линейно независимы. Если $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$, такое, что $y_j(x_0)$, $j = \overline{1,k}$ — линейно зависимые векторы, то найдутся числа $c_1, \ldots, c_k$, $|c_1| + \ldots + |c_k| > 0$, такие, что

$$c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_k y_k(x_0) = 0$$

Вектор-функция

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_k y_k(x)$$

является решением системы (8) и удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = 0$. Тогда $y(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, т.е. $y_j(x)$, $j = \overline{1,k}$, линейно зависимы. Противоречие.

Наоборот. Пусть $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ векторы $y_j(x_0)$, $j = \overline{1,k}$, линейно независимы. Если бы вектор-функции $y_j(x)$, $j = \overline{1,k}$, были линейно зависимыми на $[\alpha, \beta]$, то следовало бы, что векторы $y_j(x_0)$, $j = \overline{1,k}$, — линейно зависимы. Противоречие. ■

Пусть $y_1(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ — система вектор-функций с n компонентами на $[\alpha, \beta]$

Определение 3. *Определителем Вронского* (или сокращенно *вронскианом*) системы $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] = \det ||y_1(x) \ \ \ldots \ \ y_n(x)||.$$

Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения линейной однородной системы (8), то из теоремы 4 вытекает следующая связь между линейной зависимостью $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ на $[\alpha, \beta]$ и обращением в нуль их определителя Вронского $W(x)$.

- Решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (8) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$, тогда и только тогда, когда $W[y_1, \ldots, y_n] \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$.

- Решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ системы (8) линейно независимы на $[\alpha, \beta]$, тогда и только тогда, когда $W[y_1, \ldots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Отсюда получаем, что не существует таких $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$, $x_1 \neq x_2$, что $W(x_1)=0$, $W(x_2)\neq 0$.

Определение 4. *Определителем Вронского* (или сокращенно *вронскианом*) решений $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения (6) называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{9}$$

и обозначается $W(x)$ или $W[y_1(x),\dots,y_n(x)]$.

Теорема 5. Решения $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения (6) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(x)\equiv 0$ на $[\alpha,\beta]$. Решения $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения (6) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(x)\neq 0$ для всех $x\in[\alpha,\beta]$.

Доказательство. Сведем уравнение (6) к эквивалентной системе (7). Тогда столбцы $W(x)$ — решения системы (7) и, значит, $W(x)$ является определителем Вронского и для решений (7). Но для него утверждения теоремы 5 уже установлены для линейной однородной системы , как свойства определителя Вронского. ■

§29.4 Формула Лиувилля—Остроградского

Теорема 6. Пусть $W(x)$ — вронскиан решений $y_1(x),\dots,y_n(x)$ уравнения (8) и пусть $x_0\in[\alpha,\beta]$. Тогда для всех $x\in[\alpha,\beta]$ справедлива формула Лиувилля—Остроградского

$$W(x)=W(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\operatorname{tr}A(\zeta)\,d\zeta\right\}, \tag{10}$$

где $\operatorname{tr}A(\zeta)=a_{11}(\zeta)+\ldots+a_{nn}(\zeta)$ называется следом матрицы $A(\zeta)$.

Доказательство. Покажем, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x)=\operatorname{tr}A(x)\cdot W(x),\quad x\in[\alpha,\beta].$$

Пусть $y_{ij}(x)$, $i=\overline{1,n}$ компоненты решения $y_j(x)$, $j=\overline{1,n}$. Тогда $W(x)$ является функцией всех этих компонент:

$$W(x)=W[y_{11}(x),y_{21}(x),\dots,y_{nn}(x)].$$

По формуле производной сложной функции получаем, что

$$W'(x)=\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}(x)}y'_{pq}(x).$$

Если $W_{pr}(x)$ — алгебраическое дополнение $y_{pr}(x)$ в $W(x)$, то разложение $W(x)$ по p-й строке дает

$$W(x) = \sum_{r=1}^{n} y_{pr}(x) \cdot W_{pr}(x).$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}} = W_{pq}(x).$$

Каждая вектор–функция $y_q(x)$ удовлетворяет системе (8), т.е.

$$y_q'(x) = A(x) y_q(x), \quad q = \overline{1, n}, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Отсюда находим, что

$$y_{pq}'(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x),$$

где $a_{pr}(x)$ — элементы матрицы $A(x)$.

Подставляя найденные выражения $\frac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}}$ и $y_{pq}'(x)$ в формулу $W'(x)$, получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p,q=1}^{n} W_{pq}(x) \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x) = \sum_{p,r=1}^{n} a_{pr}(x) \sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x).$$

Но из курса алгебры известно, что

$$\sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x) = W(x) \cdot \delta_{rp},$$

где δ_{rp} — символ Кронекера. Тогда

$$W'(x) = W(x) \sum_{p,r=1}^{n} a_{pr}(x) \delta_{pr} = W(x) \sum_{p=1}^{n} a_{pp}(x) = W(x) \cdot \operatorname{tr} A(x).$$

Интегрирование этого линейного однородного уравнения первого порядка дает требуемую формулу (10). ■

Теорема 7. Пусть $W(x)$ — определитель Вронского решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (6) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива формула Лиувилля—Остроградского

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ -\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta)\, d\zeta \right\}.$$

Доказательство. Уравнение (6) эквивалентно линейной системе (7). Для них определитель Вронского $W(x)$ один и тот же, и для системы (7) формула Лиувилля—Остроградского доказана. Остается заметить, что для системы (7) $\operatorname{tr} A(\zeta) = -a_1(\zeta)$. ■

Замечание. Рассмотрев уравнение (6), заметим, что коэффициент при старшей производной $y^{(n)}$: $a_0(x) = 1$. Если $a_0(x) \neq 1, a_0(x) \neq 0$, то

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ -\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(\zeta)}{a_0(\zeta)}\, d\zeta \right\}.$$

30. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимые условия локального экстремума.

§30.1 Простейшая задача вариационного исчисления

Обозначим через $C^1[a,b]$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[a,b]$. Для $\forall y_1(x), y_2(x) \in C^1[a,b]$ введем *расстояние* между ними по формуле

$$||y_1(x) - y(x)||_{C^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Множество функций $C^1[a,b]$ с введенной метрикой является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x,y,p)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x \in [a,b]$ и $\forall (y,p) \in \mathbb{R}^2_{(y,p)}$ — плоскости с декартовыми прямоугольными координатами y,p. Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int\limits_a^b F[x, y(x), y'(x)]\, dx \tag{1}$$

на множестве M тех функций $y(x) \in C^1[a,b]$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{2}$$

где A и B — заданные числа. Функции $y(x) \in M$ будем называть *допустимыми*.

Очевидно, что $\forall y(x) \in M$ интеграл (1) определен и задает функционал (отображение $F\colon M \to \mathbb{C}$) с областью определения M в пространстве $C^1[a,b]$.

Определение 1. Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$ дает *слабый локальный минимум (максимум)* функционала (1), если $\exists$ число $\varepsilon>0$ такое, что для $\forall y(x) \in M$, для которой $||y(x)-\hat{y}(x)||_{C^1[a,b]}<\varepsilon$, выполняется неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$ $(J(y) \leqslant J(\hat{y}))$.

Оба понятия — слабый локальный минимум и слабый локальный максимум объединяются единым термином: *слабый локальный экстремум*.

Определение 2. Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1) называется *простейшей вариационной задачей*

Простейшую вариационную задачу иногда называют задачей с закрепленными концами в силу того, что допустимые кривые обязаны проходить через две закрепленные точки $M_1(a,A)$ и $M_2(b,B)$ на плоскости $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$

Обозначим через $\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$ множество всех тех функций $y(x) \in C^1[a,b]$, для которых $y(a) = y(b) = 0$.

Пусть $y(x) \in M$ и $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Рассмотрим семейство функций, зависящих от действительного параметра α: $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$. Поскольку $y(x,\alpha) \in M$ при $\forall\alpha$, то можно рассмотреть интеграл

$$J(y + \alpha\eta) = \int\limits_a^b F[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)]\, dx. \tag{3}$$

При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ интеграл (3) является собственным интегралом $\Phi(\alpha)$, зависящим от параметра α. Если взять некоторое $\varepsilon > 0$, то при $|\alpha| \leqslant \varepsilon,\ x \in [a,b]$ подынтегральная функция F и ее производная по α в силу наложенных на F условий являются непрерывными. Тогда по известной из курса анализа теореме $\Phi(\alpha) = J(y + \alpha\eta)$ является дифференцируемой функцией α при $|\alpha| \leqslant \varepsilon$ и по правилу Лейбница

$$\Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y(x) + \alpha\eta(x)]\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \int\limits_a^b \left\{ \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx.$$

Определение 3. *Допустимым приращением* (*вариацией*) функции $y(x) \in M$ называется любая функция $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$. Выражение $\frac{d}{d\alpha} J[y(x) + \alpha\eta(x)]\Big|_{\alpha=0}$, где $\eta(x)$ — любая функция из $\overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$, называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ и обозначается $\delta J[y, \eta(x)]$, $\forall\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$.

Таким образом, вариация функционала (1)

$$\delta J[y, \eta(x)] = \int\limits_a^b \left\{ \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx, \tag{4}$$

где $\eta(x)$ — любая допустимая вариация функции $y(x) \in M$.

Отметим, что первая вариация $\delta J[y, \eta(x)]$ линейно зависит от $\eta(x)$ и $\eta'(x)$.

§30.2 Необходимые условия локального экстремума

Теорема 1. Если $\hat{y}(x) \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо $\delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ для любой допустимой $\eta(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум для функционала $J(y)$, т.е. $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $J(\hat{y} + h) \geq J(\hat{y})$ для $\forall h(x) \in \mathring{C}^1[a, b]$, для которой $||h(x)|| < \varepsilon$. Положим $h(x) = \alpha\eta(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a, b]$. Тогда $\hat{y}(x) + h(x) \in M$ и для достаточно малых $|\alpha|$ при фиксированной $\eta(x)$

$$||h(x)||_{C^1[a,b]} = |\alpha| \left\{ \max_{[a,b]} |\eta(x)| + \max_{[a,b]} |\eta'(x)| \right\}, \tag{5}$$

$$\Phi(\alpha) = J(\hat{y} + \alpha\eta) \geq J(\hat{y}) = \Phi(0) \tag{6}$$

Это значит, что дифференцируемая функция $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$. Значит, $\Phi'(0) = 0$, и тогда $\delta J[y, \eta(x)] = \Phi'(0) = 0$, $\forall \eta(x) \in \mathring{C}^1[a, b]$ ■

Лемма 1 (Основная лемма вариационного исчисления). Если $f(x) \in C[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\eta(x)\,dx = 0$ для $\forall \eta(x) \in \mathring{C}^1[a, b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство. Рассуждаем от противного. Пусть $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$. Тогда $\exists x_0 \in (a, b)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$. Из непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ следует, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$, $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$. Возьмем

$$\eta(x) = \begin{cases} [x - (x_0 - \varepsilon)]^2 \cdot [x - (x_0 + \varepsilon)]^2, & x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $\eta(x) \in \mathring{C}^1[a, b]$. По интегральной теореме о среднем получаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)\eta(x)\,dx = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)\,dx =$$

$$= f(\zeta) \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)\,dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)\,dx > 0,$$

где $\zeta \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. А это неравенство противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$ неверно.

Лемма доказана. ■

Теорема 2. Пусть функция $F(x,y,p)$ — дважды непрерывно дифференцируема при $\forall x \in [a,b]$, $\forall (y,p) \in \mathbb{R}^2_{(y,p)}$. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x)$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо функция $\hat{y}(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{7}$$

(здесь $\frac{d}{dx}$ — полная производная по x).

Доказательство. Если $\hat{y}(x)$ — решение задачи, то в силу теоремы 1 $\delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ для любой допустимой вариации $\eta(x)$. Учитывая, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, проинтегрируем по частям слагаемое, содержащее $\eta'(x)$ в формуле (4). Это законно, так как выражение

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'}\bigg|_{y=\hat{y}(x)} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \cdot y''\right]\bigg|_{y=\hat{y}(x)}$$

в силу условий теоремы является непрерывной на $[a,b]$ функцией. Имеем

$$0 = \int\limits_a^b \left\{ \frac{\partial F[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)]}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx =$$

$$= \frac{\partial F[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)]}{\partial y'} \cdot \eta(x)\bigg|_{x=a}^{b} + \int\limits_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\}\bigg|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\}\bigg|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x)\, dx.$$

Поскольку функция $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[a,b]$, а функция

$$\left\{ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \right\}\bigg|_{y=\hat{y}(x)}$$

является непрерывной на $[a,b]$, то в силу леммы 1 (основной леммы вариационного исчисления)

$$\left\{ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} \right\}\bigg|_{y=\hat{y}(x)} \equiv 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Это значит, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7). ■

Определение 4. Всякое решение уравнения Эйлера (7) называют *экстремалью* функционала (1). Всякая же экстремаль $y(x)$ функционала (1), являющаяся допустимой функцией, т.е. $y(x) \in M$, называется *допустимой экстремалью* функционала (1).

Из теоремы 2 вытекает, что только среди допустимых экстремалей (1), т.е. среди экстремалей, удовлетворяющих граничным условиям (2), нужно искать решение простейшей вариационной задачи.

Теория вероятностей

VIII

31. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий и классов событий.

§31.1 Классическое определение вероятности. Интуитивные понятия о вероятности.[1]

Рассмотрим обычную игральную кость — кубик, на каждой из шести граней которого нанесены числа от 1 до 6. У нас есть всего 6 вариантов того, как этот кубик может упасть на стол после случайного бросания Какая же цифра выпадет на кубике?

$$1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6 \text{ — всего 6 исходов нашего испытания.}$$

Каким свойствами обладают эти варианты?

1. Хотя бы один из исходов обязательно случится. (т.е. на формальном языке эти исходы образуют полную группу событий)

2. Никакие два одновременно не происходят. (попарно несовместны)

3. Исходы равновозможны. (равновероятны)

Подобных примеров можно придумать великое множество. Например, пусть есть игральная колода из 36 карт. А исход — взаимное расположение карт друг за другом после тщательной перетасовки (их 36! всего способов переставить карты внутри множества от 1 до 36). Такая система событий тоже обладает перечисленными свойствами.

Пусть в рамках какого-то эксперимента есть какие-то исходы $w_1, \ldots,$ w_n, и они обладают этими тремя перечисленными выше свойствами. События, состоящее из одного исхода, станем называть *элементарными событиями*. Тогда по определению считают[2]

$$\mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{n}.$$

где $\mathbb{P}(w_i)$ — вероятность произвольного элементарного события w_i. Действительно, если хотя бы один из этих исходов произойдет, причем на самом деле ровно один и эти исходы равновозможны, естественно сказать, что вероятность каждого их этих исходов — это $\frac{1}{n}$. Тогда в задаче про кубик $\mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{6}$, а в задаче про карты $\mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{36!}$.

[1]Этот и следующие билеты по теории вероятностей в ходе долгой дискуссии были одобрены преподавателем МФТИ Широбоковым Максимом. Также рекомендую посмотреть Вам сборник определений и формулировок теорем, которые Максим выложил по этой ссылке *vk.com/...*

[2]С современной и строгой точки зрения (Колмогорова) вероятность определяется на множествах, не на исходах, поэтому правильнее было бы элементарное событие обозначить $\{w_i\}$,т.е. как множество, состоящее из одного элемента, а вероятность $\mathbb{P}(\{w_i\})$. Но в рамках данной книги я допущу себе эту вольность, чтобы не запутываться со строгостью изложения.

Наряду с элементарными событиями рассматриваются также случайные события, ведь часто представляет интерес наступление при испытании не какого-то элементарного события, а одного из нескольких элементарных событий. Например, в качестве события в задаче про игральную кость можно рассмотреть A — игральная кость выпала четной стороной кверху. Это, очевидно, означает, что она выпала либо стороной 2, либо стороной 4, либо стороной 6. То есть, как говорят, элементарных исходов, которые благоприятствуют этому *случайному событию* A — их всего 3 штуки. И все эти элементарные исходы равновероятны. Событие A с точки зрения множеств считают множеством из всех элементарных исходов $w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}$, ему благоприятствующих. Тогда

Определение 1 (Классическое определение вероятности). *Вероятностью случайного события* A, обозначаемой $\mathbb{P}(A)$, называется отношение

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\left\{\begin{array}{c}\text{число несовместимых и равновозможных}\\ \text{элементарных событий, составляющих } A\end{array}\right\}}{\{\text{число всех возможных элементарных событий}\}} = \frac{k}{n}$$

В нашем случае $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Станем рассматривать некоторую систему событий $A, B, C \ldots$, каждое из которых должно *произойти* или *не произойти*. Тогда заметим, что вероятность, определенная нами в таком смысле, обладает следующими свойствами.

1. Для каждого события $\mathbb{P}(A) = \frac{k}{n} \geqslant 0$.

2. Обозначим за $\Omega \triangleq \{w_1, \ldots, w_n\}$ — *множество* (*пространство*) *всех элементарных исходов*. Тогда, очевидно, $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$. Будем называть событие Ω *достоверным*.

3. $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \frac{k'+k''}{n} = \frac{k'}{n} + \frac{k''}{n} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ — вероятность дизъюнктного объединения двух событий (т.е. события предполагаются непересекающимися — элементарные исходы, благоприятствующие событию A, и исходы, благоприятствующие событию B, представляют собой непересекающиеся множества) равна сумме вероятностей события A и события B.

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ — вероятность обычного объединения (предполагаем, что пересечения тоже могут быть — есть какие-то исходы, которые благоприятствуют и событию A, и событию B), т.е. тех событий, которые благоприятствуют или событию A, или событию B. Если $A \cap B = \varnothing$, то события называют *несовместимыми*. И тогда, как и в предыдущем пункте, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

5. Будем обозначать любое *невозможное* событие $\varnothing$. Тогда $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

6. $\overline{A} = \Omega \setminus A$ — *отрицание события* A. Событие, *противоположное* A, — это событие, которому благоприятствуют те исходы, которые не благоприятствуют событию A.

   Тогда $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Доказательство. $\overline{A} \cup A = \Omega \xrightarrow{2} \mathbb{P}(A \cup \overline{A}) = 1$, а так как $\overline{A}$ и A несовместны, то по свойству 4: $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$. ■

7. Если событие A влечет за собой событие B (т.е. множество A является подмножеством множества B), то $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

   Доказательство. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (\overline{A} \cap B)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \geqslant \mathbb{P}(A)$. ■

8. $\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_k)$.

9. Формула включений-исключений:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \\ - \cdots - \mathbb{P}(A_{k-1} \cap A_k) + \cdots + (-1)^{k-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k)$$

   Это полный аналог формулы включений–исключений из комбинаторики, поэтому мы ее не доказываем.

Определение 2. События A_1, A_2, ..., A_n образуют *полную группу событий*, если хотя бы одно из них непременно должно произойти, т.е. если

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega.$$

Для нее верны все свойства, указанные выше.

§31.2 Аксиоматическое определение вероятности А.Н. Колмогорова

Аксиоматическое определение вероятности включает в себя как частные случаи классическое определение вероятности, которое мы обсудили в прошлом параграфе, и статистическое (в котором сначала проводят n испытаний, и при k успешных испытаниях считают $\mathbb{P} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{k(n)}{n}$) и преодолевает недостаточность каждого из них.

Отправным пунктом аксиоматики Колмогорова является множество Ω, элементы которого называются *элементарными событиями*. Наряду с Ω рассматривается множество $\mathfrak{F}$ подмножеств Ω — множества элементарных событий. Элементы $\mathfrak{F}$ называются *случайными событиями.*

Определение 3. Множество $\mathfrak{F}$ называется *алгеброй множеств*, если выполнены следующие требования:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$, $\varnothing \in \mathfrak{F}$ ($\varnothing$ – пустое множество);

2. из того, что $A \in \mathfrak{F}$, следует, что так же $\overline{A} \in \mathfrak{F}$;

3. из того, что $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$, следует, что $A \cup B \in \mathfrak{F}$ и $A \cap B \in \mathfrak{F}$.

   Если дополнительно к перечисленным выполняется еще следующее требование:

4. из того, что $A_n \in \mathfrak{F}$ (при $n = 1, 2, \ldots$), вытекает, что $\bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{F}$ и

$\bigcap_n A_n \in \mathfrak{F}$, то множество $\mathfrak{F}$ называется *σ-алгеброй*.

Под операциями над случайными событиями понимаются операции над соответствующими множествами.

Теперь мы можем перейти к формулировке аксиом, определяющих вероятность.

Аксиома 1. Каждому случайному событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $\mathbb{P}(A)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Аксиома 3 (Расширенная аксиома сложения). Если событие A равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, то

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) + \ldots$$

Следствие 1 (Теорема сложения). Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместимы, то

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Для классического определения вероятности свойства, выраженные аксиомой 2, не нужно было постулировать, так как это свойство вероятности было нами доказаны.

Из сформулированных аксиом мы выведем несколько важных элементарных следствий.

Прежде всего, из очевидного равенства

$$\Omega = \varnothing + \Omega$$

и следствия 1 мы заключаем, что

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\Omega).$$

Таким образом.

1. Вероятность невозможного события равна нулю.

2. Для любого события A

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

3. Каково бы ни было случайное событие A,

$$0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1.$$

4. Если событие A влечет за собой событие B, то

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

5. Пусть A и B — два произвольных события. Поскольку в суммах $A \cup \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ и $B = A \cap B \cup (B \setminus (A \cap B))$ слагаемые являются несовместными событиями, то в соответствии с аксиомой 3

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B); \quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B).$$

Отсюда вытекает теорема сложения для произвольных событий A и B

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

В силу неотрицательности $\mathbb{P}(A \cap B)$ отсюда заключаем, что

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

По индукции теперь выводим, что если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные события, то имеет место неравенство

$$\mathbb{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Вероятностным пространством принято называть тройку символов $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, где Ω — множество элементарных событий, $\mathfrak{F}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, называемых случайными событиями, и $\mathbb{P}(A)$ — вероятность, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{F}$.

§31.3 Условная вероятность, независимость событий

Однако в ряде случаев приходится рассматривать вероятности событий при дополнительном условии, что произошло некоторое событие B. Такие вероятности мы будем называть *условными* и обозначать символом $\mathbb{P}(A|B)$: это означает вероятность события A при условии, что событие B произошло.

Решим задачу нахождения условной вероятности для классического определения вероятности.

Пусть есть множество элементарных исходов $\Omega = \{w_1, \ldots w_n\}$, событие $B = \{w_{i_1}, \ldots w_{i_k}\} \subseteq \Omega$. И есть еще событие A, вероятность которого мы хотим посчитать, при том условии, что событие B произошло, т.е. произошел ровно один из $|B| = k$ элементарных исходов, и $|B|$ надо поставить в знаменатель (столько всего возможных исходов в нашем испытании). А в числитель надо поставить количество тех благоприятствующих событию B исходов, которые, в свою очередь, благоприятствуют событию A, т.е. найти исходы, которые благоприятствуют обоим событиям, что, естественно, равняется $|A \cap B|$.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \qquad (1)$$

Понятно, что если B — событие, для которого $\mathbb{P}(B)=0$, то равенство (1) теряет смысл.

Заметим, что рассуждения, проведенные нами, не являются доказательством, а представляют только мотивировки следующего определения. Формула (1), которая в случае классического определения была нами выведена из определения условной вероятности, в случае аксиоматического определения вероятности будет взята нами в качестве определения.

Определение 4. В общем случае при $\mathbb{P}(B)>0$ число $\mathbb{P}(A|B)$, определяемое равенством

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

называется *условной вероятностью* события A при условии B.

При $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ равенство (1) эквивалентно так называемой *теореме умножения*, согласно которой

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B), \tag{2}$$

т.е. *вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло*.

Теорема умножения применима и в том случае, когда для одного из событий A или B вероятность равна нулю, так как в этом случае вместе, например, с $\mathbb{P}(A) = 0$ имеют место равенства $\mathbb{P}(A|B) = 0$ и $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

Вполне естественно, говорят, что событие A *независимо* от события B, если имеет место равенство

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \tag{3}$$

т.е. если наступление события B не изменяет вероятности события A. Если событие A независимо от B, то в силу (2) имеет место равенство

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A).$$

Отсюда при $\mathbb{P}(A) > 0$ находим, что

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B). \tag{4}$$

т.е. событие B также, т.е. независимо от A. Таким образом, свойство независимости событий *взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения принимает особенно простой вид, а именно, если события A и B независимы, то

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Если независимость событий A и B определить посредством последнего равенства, то это определение верно всегда, в том числе и тогда, когда $\mathbb{P}(A) = 0$ или $\mathbb{P}(B) = 0$. Поэтому

Определение 5. События A и B *независимы*, если выполняется

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

События B_1, B_2, ..., B_s называют *независимыми в совокупности*, если для любого события B_p из их числа и произвольных B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_r} из их же числа и отличных от B_p ($i_n \neq p$ и $1 \leqslant n \leqslant r$) события B_p и $B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_r}$ взаимно независимы.

В силу предыдущего, это определение эквивалентно следующему:

Определение 6. События B_1, B_2, ..., B_s называют *независимыми в совокупности*, если при любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant s$ и r ($1 \leqslant r \leqslant s$)

$$\mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_r}) = \mathbb{P}(B_{i_1})\mathbb{P}(B_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(B_{i_r}). \tag{5}$$

Если (5) выполнено только при $s = 2$, то события называют *попарно независимыми*. Как видно, для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости. Однако из независимости в совокупности вытекает попарная независимость, потройная, и т.д.

§31.4 Формула полной вероятности

Предположим теперь, что событие B может осуществиться с одним и только с одним из n несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Иными словами, положим, что

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i, \tag{6}$$

где события $B \cap A_i$ и $B \cap A_j$ с разными индексами i и j несовместимы. По теореме сложения вероятностей имеем:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Использовав теорему умножения, находим, что

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Это равенство носит название *формулы полной вероятности.*

§31.5 Формула Байеса

Пусть по-прежнему имеет место равенство (6). Требуется найти вероятность события A_i, если известно, что B произошло. Согласно теореме умножения имеем:

$$\mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_i|B) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Отсюда

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)},$$

используя формулу полной вероятности, находим, что

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}.$$

Два последних равенства носят название *формул Байеса*. Формулы Байеса часто интерпретируются как формулы, позволяющие по *априорным* (известным предварительно, до проведения опыта) вероятностям $P(A_i)$ и по результатам опыта (наступления события B) найти *апостериорные* (вычисленные после опыта) вероятности $P(A_i|B)$.

32. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства. Вычисление для нормального распределения.

§32.1 Случайные величины

Пусть дано конечное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где $\mathbb{P}$ — вероятности каждого события, состоящего из элементарных исходов из Ω. Тогда *случайной величиной* принято называть любую функцию $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (т.е. случайному элементарному исходу ставится в соответствие совершенно конкретное значение).

Абсолютно так же определяется случайная величина для бесконечного счетного вероятностного пространства, где $\Omega = \{w_1, \dots, w_n, \dots\}$.

Пусть теперь дано произвольное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (т.е. теперь мы не исключаем непрерывного случая), где снова $\mathbb{P}$ — вероятности каждого события, состоящих из элементарных исходов из Ω (вероятностная мера, строго говоря). Тогда в этом общем случае:

> **Определение 1.** *Случайной величиной* ξ называется действительная функция от элементарного события w: $\xi = \xi(w)$, $w \in \Omega$, для которой при любом действительном x множество $\{w\colon \xi(w) \leqslant x\}$ принадлежит $\mathcal{A}$ (т.е. является событием) и для него определена вероятность $\mathbb{P}(w\colon \xi(w) \leqslant x)$, записываемая кратко $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi \leqslant x)$. Эта вероятность, рассматриваемая как функция x, называется *функцией распределения случайной величины* ξ.

Отметим ее свойства:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$;
2. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, если $x_1 \leqslant x_2$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x+0) = F(x)$ — непрерывна справа.[1]

Важным классом распределений вероятностей являются *абсолютно непрерывные распределения*, для которых существует неотрицательная функция $p(z)$, удовлетворяющая при любых x равенству:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\, dz,$$

где $p(z)$ называют *плотностью вероятности*, обладающая следующими свойствами:

[1]Заметим, что если бы в определении случайной величины мы положили $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ (т.е. строгий знак равенства), то полученная функция распределения была бы непрерывна слева: $F(x-0) = F(x)$. В разных учебниках делают по-разному.

1. $p(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
2. $\forall x_1, x_2\colon \quad \mathbb{P}(x_1 \leqslant \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$

Другой класс составляют *дискретные распределения*, задаваемые конечным или счетным набором вероятностей $\mathbb{P}(\xi = x_k)$ для которых

$$\sum_k \mathbb{P}(\xi = x_k) = 1,$$

тогда функция распределения $F_\xi(x) = \sum\limits_{k\colon\, x_k \leqslant x} \mathbb{P}(\xi = x_k)$.

Если распределение случайной величины абсолютно непрерывно или дискретно, то говорят также, что сама случайная величина или ее функция распределения соответственно абсолютно непрерывны или дискретны.

Нужно подчеркнуть, что распределения не делятся лишь только на дискретные и непрерывные. Возможны случаи, когда случайные величины не являются ни дискретными, ни непрерывными (например, взять хотя бы сумму непрерывной и дискретной случайной величины). Но в рамках программы ГОСа мы рассмотрим только отдельно взятые непрерывные и дискретные случайные величины.

§32.2 Совместные распределения нескольких случайных величин

Пусть на вероятностном пространстве заданы случайные величины: $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$.

Определение 2. *Совместной функцией распределения* (или *многомерной функцией распределения*) величин $\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_n$ (или случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$) называется вероятность

$$F_\xi(x) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n).$$

Когда n-мерный вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ имеет плотностью распределения вероятностей $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемой *совместной плотностью распределения*, то функцию распределения можно записать в виде интеграла:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \underset{\mathbb{D}}{\int \cdots \int} p(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1\, dz_2\, \ldots\, dz_n,$$

причем область интегрирования $\mathbb{D}$ определяется неравенствами $\xi_i < x_i,\ i \in \in \overline{1, n}$

Очевидно, что в случае дискретных случайных величин совместную функцию распределения можно записать как n-мерную сумму, также распространенную на область $\mathbb{D}$.

Решим задачу о функции распределения суммы непрерывных случайных величин $\zeta = \xi + \eta$. Пусть $p(x_1, x_2)$ — плотность распределения вероятностей вектора (ξ, η). Искомая функция равна вероятности попадания точки (ξ, η) в полупространство $\xi + \eta < x$ и, следовательно,

$$F_\zeta(x) = \iint\limits_{x_1+x_2<x} p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{x-x_1} p(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \\ = \int\limits_{-\infty}^{x} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(z, x_1 - z)\, dz. \quad (1)$$

Сформулируем напоследок одно важное определение.

Определение 3. Случайные величины ξ_1, ..., ξ_n называются *независимыми*, если для любых числовых множеств $B_1, \ldots, B_k$ $\forall k \in \overline{1, n}$, для которых определены вероятности событий $\{\xi_j \in B_j\}$ имеет место равенство

$$\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_k \in B_k) = \mathbb{P}(\xi_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(\xi_k \in B_k).$$

Если положить $B_k = (-\infty; x_k)$, то из только что озвученного определения можно вывести, что для независимых величин верно следующее свойство:

$$F_{\xi_1, \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \ldots F_{\xi_n}(x_n).$$

Отметим, что две дискретные случайные величины ξ и η со значениями $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ соответственно будут независимы тогда и только тогда, когда для любых i, j:

$$\mathbb{P}(\xi = x_i, \eta = y_j) = \mathbb{P}(\xi = x_i) \cdot \mathbb{P}(\eta = y_j).$$

Также отметим, что две непрерывные случайные величины ξ и η будут независимы тогда и только тогда, когда во всех точках непрерывности функций $p_\xi(x), p_\eta(y), p_{\xi\eta}(x, y)$ — плотностей распределений:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y).$$

§32.3 Математическое ожидание

Сначала дадим определение для дискретных случайных величин. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ обозначают возможные значения случайной величины ξ, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — соответствующие им вероятности, $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n, ...\}$ — наше пространство элементарных исходов в $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Определение 4. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* ξ называется число, обозначаемое $\mathbb{E}\xi$ и равное

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{w \in \Omega} \xi(w) \cdot \mathbb{P}(w), \quad (2)$$

где $\mathbb{P}(w)$ — элементарные вероятности, если этот ряд сходится абсолютно.

Перепишем определение матожидания по-другому.

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{w\in\Omega} \xi(w)\cdot\mathbb{P}(w) = x_1\left(\sum_{w:\ \xi(w)=x_1} \mathbb{P}(w)\right) + \ldots + x_k\left(\sum_{w:\ \xi(w)=x_k} \mathbb{P}(w)\right) +$$
$$+ \ldots = x_1\mathbb{P}(\xi = x_1) + \ldots + x_k\mathbb{P}(\xi = x_k) + \ldots = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k\mathbb{P}(\xi = x_k)$$

В силу этого равенства, дадим аналогичное определение матожиданию:

Определение 4'. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* ξ называется сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, если тот сходится абсолютно.

Для непрерывных случайных величин естественным будет следующее определение:

Определение 5. Если случайная величина ξ непрерывна, $p_\xi(x)$ — ее плотность распределения и $F_\xi(x)$ — функция распределения, то *математическим ожиданием случайной величины* ξ называется интеграл

$$\mathbb{E}\xi \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_\xi(x), \tag{3}$$

в тех случаях, когда существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|p_\xi(x)\,dx$.

■ **Пример 1.** Найти математическое ожидание случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ — параметры нормального распределения. ■

Решение. По формуле (3) находим, что

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Заменой $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ мы приводим вычисляемый интеграл к виду

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu)e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}\,dz + \mu\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\right]$$

Так как (смотрите замечание после примера)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \sqrt{2\pi} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 0$$

то

$$\mathbb{E}\xi = \mu.$$ ■

Итак, мы получили важный результат, вскрывающий вероятностный смысл одного и параметров, определяющих нормальное распределение: параметр μ в нормальном распределении равен математическому ожиданию.

Замечание. Второй интеграл равен нулю в силу своей нечетности, однако, возможно, стоит напомнить вычисление первого интеграла $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, носящего имя *интеграла Гаусса*. Гауссов интеграл может быть представлен, как $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$. Рассмотрим квадрат этого интеграла I^2. Тогда, переходя от двумерных декартовых координат к полярных, получаем:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr = \\ = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,d(-\tfrac{r^2}{2}) = 2\pi.$$

Следовательно, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

§32.4 Теоремы о математическом ожидании

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной.

Доказательство. Постоянную C мы можем рассматривать, как дискретную случайную величину, которая может принимать только одно значение C с вероятностью единица; поэтому согласно определению 4'

$$\mathbb{E}C = C \cdot 1 = C, \qquad \blacksquare$$

Теорема 2. Для любых случайных величин ξ и η, для которых существуют математические ожидания $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{E}\eta$ справедливо[2]

$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta. \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай дискретных случайных величин ξ и η. Пусть $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — возможные значения величины ξ и $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — их вероятности; $b_1, \ldots, b_k, \ldots$ — возможные значения величины η и $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ — вероятности этих значений. Возможные значения величины $\xi + \eta$ имеют вид $a_n + b_k$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Обозначим через p_{nk} вероятность того, что ξ примет значение a_n, а η — значение b_k. По определению

[2] Условие на существование математических ожиданий очень важно. Если оно не выполнено, то математическое ожидание суммы не обязано быть равно сумме матожиданий, подобно тому как и сумма двух несходящихся интегралов может неожиданно сойтись.

математического ожидания

$$\mathbb{E}(\xi+\eta)=\sum_{n,k=1}^{\infty}(a_n+b_k)p_{nk}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_n+b_k)p_{nk}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}p_{nk}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_{nk}\right).$$

Так как по теореме о полной вероятности $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_{nk}=p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_{nk}=q_k$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}p_{nk}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_np_n=\mathbb{E}\xi \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}b_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_{nk}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kq_k=\mathbb{E}\eta.$$

Доказательство теоремы для случая дискретных слагаемых завершено.

Точно так же в случае, когда существуют двумерная плотность распределения $p(x,y)$ случайной величины (ξ,η), по формуле (1) находим:

$$\mathbb{E}(\xi+\eta)=\int x\,dF_{\xi+\eta}(x)=\int x\left(\int p(z,x-z)\,dz\right)dx=\iint xp(z,x-z)\,dz\,dx=$$
$$=\iint(z+y)p(z,y)\,dz\,dy=\iint zp(z,y)\,dz\,dy+\iint yp(z,y)\,dz\,dy=$$
$$=\int zp_\xi(z)\,dz+\int yp_\eta(y)\,dy=\mathbb{E}\xi+\mathbb{E}\eta.$$

Эта теорема имеет место и в самом общем случае, но мы не будем его касаться в данном пособии.[3] ■

Теорема 3 (мультипликативность). Математическое ожидание произведения независимых случайных величин ξ и η, для которых существуют математические ожидания $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{E}\eta$ равно произведению их математических ожиданий.

$$\mathbb{E}(\xi\eta)=\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай дискретных случайных величин ξ и η. Пусть $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ — возможные значения величины ξ и $p_1,\ldots,p_n,\ldots$ — их вероятности; $b_1,\ldots,b_k,\ldots$ — возможные значения величины η и $q_1,\ldots,q_k,\ldots$ — вероятности этих значений. Тогда вероятность того, что ξ примет значение a_n, а η — значение b_k равна p_nq_k. По определению математического ожидания

$$\mathbb{E}(\xi\eta)=\sum_{k,n}a_nb_kp_nq_k=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}a_nb_kp_nq_k=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_np_n\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}b_kq_k\right)=\mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta.$$

[3] Мы не будем их затрагивать, потому что их просто не требуют по программе ГОСа, да и в нашем курсе теории вероятностей (2 семестр ФРТК) не давалось общего случая.

Аналогично, если ξ и η — абсолютно непрерывные случайные величины, и $p_{\xi\eta}(x,y)$ — их плотность распределения. Так как они независимы, то

$$p_{\xi\eta}(x,y) = p_\xi(x)p_\eta(y).$$

Тогда по формуле математического ожидания для непрерывного случая:

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyp_{\xi\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyp_\xi(x)p_\eta(y)(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yp_\eta(y)\,dy = \mathbb{E}\xi\cdot\mathbb{E}\eta.$$

Эта теорема имеет место и в самом общем случае, но мы не будем его касаться в данном пособии. ■

Следствие 1. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, для которых существуют математические ожидания $\mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2, \ldots, \mathbb{E}\xi_n$ равно произведению их математических ожиданий.

$$\mathbb{E}(\xi_1 \ldots \xi_n) = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}\xi_n.$$

Следствие 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$\mathbb{E}(C\xi) = C\cdot\mathbb{E}\xi$$

Доказательство. Постоянную C и случайную величину ξ (какой бы она ни была) можно рассматривать как независимые величины.[4] ■

Следствие 3 (линейность). Для любых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$, таких, что существуют математические ожидания $\mathbb{E}\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\xi_n$ и любых чисел $c_1, \ldots, c_n$ справедливо

$$\mathbb{E}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n) = c_1\mathbb{E}\xi_1 + c_2\mathbb{E}\xi_2 + \ldots + c_n\mathbb{E}\xi_n$$

Доказательство. Это утверждение доказывается по индукции с помощью теоремы 2 и следствия 2. ■

Теорема 4 (монотонность). Если случайные величины ξ и η таковы, что

[4] Точнее и проще говоря, константа не зависит от элементарных исходов Ω, по которым берется сумма/интеграл в выражении для матожидания, поэтому эту константу можно просто вытащить за знак суммы/интеграла.

$\xi \geqslant \eta$ и существуют математические ожидания $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{E}\eta$, то верно

$$\mathbb{E}\xi \geqslant \mathbb{E}\eta.$$

Доказательство. Докажем сначала, что из $\xi \geqslant 0$ следует $\mathbb{E}\xi \geqslant 0$. В самом деле, в случае дискретных случайных величин в определении математического ожидания все слагаемые неотрицательны (значения $\xi \geqslant 0$ и вероятности больше нуля). Аналогично, в случае непрерывных случайных величин в определении математического ожидания подынтегральное выражение неотрицательно (значения $\xi \geqslant 0$ и плотность больше нуля). Тогда в силу свойства монотонности соответствующих сумм и интегралов получаем, что математическое ожидание $\mathbb{E}\xi \geqslant 0$. Применяя доказанное свойство к неотрицательной разности $\xi - \eta \geqslant 0$, получаем $\mathbb{E}(\xi - \eta) = \mathbb{E}\xi - \mathbb{E}\eta \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Эта теорема имеет место и в самом общем случае, но мы не будем его касаться в данном пособии. ■

Теорема 5. Если случайная величина ξ такова, что $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$.

Доказательство. Для дискретных случайных величин из $\mathbb{E}\xi = 0$ следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n p_n = 0$, где $p_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ и по условию $x_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. А значит такое возможно только при $x_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Аналогично доказывается для непрерывных случайных величин, и эта теорема имеет место быть в самом общем случае. ■

§32.5 Дисперсия

Определение 6. *Дисперсией случайной величины* ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения ξ от $\mathbb{E}\xi$, если $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ существует. Обозначим ее $\mathbb{D}\xi$.

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2. \tag{5}$$

Таким образом, согласно определению формул для математического ожидания, можно утверждать, что если случайная величина ξ дискретна и имеет закон распределения вероятностей $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = \overline{1, \ldots}$, где $\sum_{i=1}^{+\infty} = 1$, то ее дисперсия вычисляется по формуле

$$\mathbb{D}\xi = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_k - \mathbb{E}\xi)^2 p_k; \tag{6}$$

для дисперсии непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p_\xi(x)$ имеем следующую формулу:

$$\mathbb{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}\xi)^2 p_\xi(x)\, dx. \tag{7}$$

■ **Пример 2.** Найти дисперсию случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ — параметры нормального распределения. ■

Решение. Мы уже знаем, что $\mathbb{E}\xi = \mu$, поэтому

$$\mathbb{D}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Заменой $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ мы приводим вычисляемый интеграл к виду

$$\mathbb{D}\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

Интегрированием по частям находим, что

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-ze^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \right]$$

Первое слагаемое в квадратных скобках равно 0, а второе представляет из себя упомянутый ранее интеграл Гаусса, который равен $\sqrt{2\pi}$. Таким образом, окончательно

$$\mathbb{D}\xi = \sigma^2.$$

■

Мы выяснили, таким образом, вероятностный смысл второго парамера, определяющего нормальный закон. Мы видим, что нормальный закон полностью определен математическим ожиданием и дисперсией.

Итак, дисперсия играет роль меры рассеяния (разбросанности) значений случайной величины около математического ожидания.

Заметим, что в силу линейности математического ожидания и теоремы 1 и т.к. математическое ожидание по сути это постоянное число (точнее предел), то $\mathbb{E}(\mathbb{E}\xi) = \mathbb{E}\xi$:

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2 = \\ = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$$

Так как дисперсия является неотрицательной величиной (покажем ниже), то из последнего мы выводим одно свойство матожидания: $\mathbb{E}\xi^2 \geqslant (\mathbb{E}\xi)^2$.

Отметим основные свойства дисперсии.

Теорема 6. Дисперсия любой случайной величины неотрицательна, причем $\mathbb{D}\xi = 0$ тогда и только тогда, когда ξ — постоянная.

Доказательство. Свойство неотрицательности следует из неравенства $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant 0$ и свойства монотонности математического ожидания: $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant 0$.

Если $\xi = c$, c — постоянная, то $\mathbb{D}c = \mathbb{E}(c - \mathbb{E}c)^2 = 0$.

Если $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = 0$, то учитывая, что $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant 0$ из теоремы 5 получаем, что $(\xi-\mathbb{E}\xi)^2=0$, т.е. $\xi=\mathbb{E}\xi$, а так как математическое ожидание — постоянное число, то мы доказали нашу теорему в обе стороны. ■

Теорема 7. Если a — постоянная, то

$$\mathbb{D}(a\xi) = a^2\mathbb{D}\xi.$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbb{D}(a\xi) = \mathbb{E}[a\xi - \mathbb{E}(a\xi)]^2 = \mathbb{E}[a(\xi - \mathbb{E}\xi)]^2 = a^2\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = a^2\mathbb{D}\xi. \quad ■$$

Теорема 8. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta.$$

Доказательство. Используя определение дисперсии (5) и свойство линейности математического ожидания, получим

$$\mathbb{D}(\xi+\eta)=\mathbb{E}[(\xi+\eta)-\mathbb{E}(\xi+\eta)]^2=\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2+2\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta)+\mathbb{E}(\eta-\mathbb{E}\eta)^2.$$

Отсюда следует формула из теоремы 8, так как согласно свойству мультипликативности математического ожидания

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)\mathbb{E}(\eta - \mathbb{E}\eta) = (\mathbb{E}\xi - \mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\eta - \mathbb{E}\eta) = 0. \quad ■$$

Формула из теоремы 8 по индукции распространяется на сумму n попарно независимых случайных величин.

Следствие 4. Если ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n попарно независимы, то

$$\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{D}(\xi_1) + \mathbb{D}(\xi_2) + \ldots + \mathbb{D}(\xi_n).$$

§32.6 Ковариация

Определение 7. Величина $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)]$ носит название *ковариации* между ξ и η и обозначается

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)].$$

Теперь можно обобщить следствие 4 на случай зависимых случайных величин.

Теорема 9. Имеет место формула

$$\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}(\xi_k) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \operatorname{cov}(\xi_k, \xi_l).$$

Доказательство. Доказательство для двух случайных величин ничем не отличается от данного в теореме 8, кроме того, что замечаем $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \operatorname{cov}(\xi, \eta)$. По индукции верно и для произвольного натурального числа n. ■

Теорема 10 (Неравенства Коши—Буняковского). Для любых двух случайных величин ξ, η

$$|\mathbb{E}(\xi\eta)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi^2 \cdot \mathbb{E}\eta^2}. \tag{8}$$

$$|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leqslant \sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}. \tag{9}$$

Доказательство. Для любых чисел x, y по теореме 4 о математическом ожидании

$$\mathbb{E}(x\xi + y\eta)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что квадратичная формула

$$x^2\mathbb{E}\xi^2 + 2xy\mathbb{E}\xi\eta + y^2\mathbb{E}\eta^2$$

неотрицательно определена, а следовательно, ее дискриминант неположителен:

$$(\mathbb{E}(\xi\eta))^2 - \mathbb{E}\xi^2 \cdot \mathbb{E}\eta^2 \leqslant 0.$$

Аналогично можно доказать второе неравенство (9) Коши—Буняковского, взяв в качестве неотрицательной функции $\mathbb{D}(x\xi + y\eta) \geqslant 0$.[5] ■

Определение 8. Величина $\dfrac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}}$ называется коэффициентом корреляции между ξ и η и обозначается

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}}.$$

Обсудим пару свойств коэффициента корреляции.

- $|\rho(\xi, \eta)| \leqslant 1$.

  Это следует из неравенства Коши—Буняковского $|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leqslant \sqrt{\mathbb{D}\xi \cdot \mathbb{D}\eta}$.

[5]Кстати, второе неравенство КБ является более естественным, потому что именно ковариация играет роль скалярного произведения в пространстве случайных величин с конечным вторым моментом. Неравенство КБ — неотъемлемое свойство именно скалярного произведения.

- Если ξ, η независимы, то $\rho(\xi,\eta)=0$.

  Это было попутно получено в теореме 8. Повторим еще раз. В случае независимых ξ и η

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta)=\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)\mathbb{E}(\eta-\mathbb{E}\eta)=$$
$$=(\mathbb{E}\xi-\mathbb{E}\xi)(\mathbb{E}\eta-\mathbb{E}\eta)=0.$$

33. Неравенство Чебышева и закон больших чисел.

§33.1 Неравенство Чебышева

К уже доказанным свойствам математического ожидания добавим ещё одно.

Определение 1. С каждым событием $A \in \mathcal{A}$ свяжем дискретную случайную величину

$$I_A = I_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{если } w \in A; \\ 0, & \text{если } w \notin A; \end{cases}$$

называемую *индикатором события* A .

Теорема 1. Математическое ожидание индикатора I_A события A равно вероятности этого события.

$$\mathbb{E} I_A = \mathbb{P}(A).$$

Доказательство. Так как $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{w \in A} p(w)$, то

$$\mathbb{E} I_A = \sum_{w \in \Omega} I_A(w) p(w) = \sum_{w \in A} 1 \cdot p(w) + \sum_{w \notin A} 0 \cdot p(w) = \sum_{w \in A} p(w) = \mathbb{P}(A).$$

Это утверждение, конечно же, верно и в непрерывном случае, и в самом общем случае. ■

Теорема 2 (неравенство Маркова). Пусть случайная величина ξ принимает неотрицательные значения. Пусть $a > 0$. Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{a}.$$

Доказательство. Представим ξ в виде суммы двух неотрицательных случайных величин

$$\xi = \xi \cdot I_{\{\xi \geqslant a\}} + \xi \cdot I_{\{\xi < a\}}.$$

По свойствам аддитивности и монотонности имеем:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\xi \cdot I_{\{\xi \geqslant a\}}) + \underbrace{\mathbb{E}(\xi \cdot I_{\{\xi < a\}})}_{\geqslant 0} \geqslant \mathbb{E}(\xi \cdot I_{\{\xi \geqslant a\}}).$$

Так как $\xi \cdot I_{\{\xi \geqslant a\}} \geqslant a \cdot I_{\{\xi \geqslant a\}}$, то применяя еще раз свойство монотонности, получаем

$$\mathbb{E}\xi \geqslant a \mathbb{E}(I_{\{\xi \geqslant a\}}) = a \cdot \mathbb{P}(\xi \geqslant a),$$

что и доказывает неравенство Маркова. ■

Теорема 3 (неравенство Чебышева). Если случайная величина ξ имеет дисперсию $\mathbb{D}\xi$, и пусть $b > 0$, то

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant b) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{b^2}.$$

Доказательство. Уже доказано неравенство Маркова $\mathbb{P}(\eta \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}\eta}{a}$ для $\eta \geqslant 0$, $a > 0$. Полагая в нем $\eta = |\xi - \mathbb{E}\xi|^2$ и $a = b^2$, получаем неравенство Чебышева. ■

§33.2 Закон больших чисел

Говорят, что к случайным величинам ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, имеющим математические ожидания $\mathbb{E}\xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, применим закон больших чисел, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathbb{E}\xi_1 + \mathbb{E}\xi_2 + \ldots + \mathbb{E}\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (1)$$

Теорема 4 (Маркова). Если у случайных величин ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, существуют дисперсии и если при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to 0, \qquad (2)$$

то к случайным величинам ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, применим закон больших чисел.

Доказательство. Обозначим $\eta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n)/n$. Пользуясь неравенством Чебышева, в котором положим $b = \varepsilon$, $\xi = \eta_n$, получим

$$\mathbb{P}\left(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{D}\eta_n.$$

Отсюда, так как

$$\mathbb{E}\eta_n = \frac{\mathbb{E}\xi_1 + \ldots + \mathbb{E}\xi_n}{n}, \quad \mathbb{D}\eta_n = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right),$$

для вероятности противоположного события находим оценку

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathbb{E}\xi_1 + \ldots + \mathbb{E}\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right).$$

Из этого неравенства и условия (2) следует (1). ■

Некоторые частные случаи этой теоремы.

Теорема 5 (Чебышева). Если случайные величины ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, попарно независимы, имеют равномерно ограниченные дисперсии (т.е. существует постоянная с такая, что $\mathbb{D}\xi_k < c$ при всех $k = 1, 2\ldots$), то к случайным величинам ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, применим закон больших чисел.

Доказательство. В самом деле, для доказательства теоремы достаточно проверить условие (2). Из неравенств $\mathbb{D}\xi_k < c$, $k = 1, 2\ldots$, и попарной независимости случайных величин ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k < nc.$$

Отсюда получаем условие (2):

$$\frac{1}{n^2}\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) < \frac{c}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 6. Если случайные величины ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены, попарно независимы и имеют конечные дисперсии, то к этим случайным величинам применим закон больших чисел.

Доказательство. Теорема 6 следует из теоремы 5. Действительно, дисперсии $\mathbb{D}\xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$, существуют и равны между собой; следовательно, они равномерно ограничены и мы находимся в условиях теоремы 5. $\blacksquare$

Утверждение теоремы 6 означает, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, найдется такое N, что при $n > N$ верно неравенство

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \delta, \tag{3}$$

где $a = \mathbb{E}\xi_k$, $k \in \mathbb{N}$

34. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

Теорема 1. Если случайные величины $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n,\ \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то при $n \to +\infty$ равномерно по $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du,$$

где $a = \mathbb{E}\xi_k$, $\sigma = \mathbb{D}\xi_k$, $k \in \overline{1, n}$

Доказательство. Положим

■

IX Теория функций комплексного переменного

35. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши—Римана. Интегральная теорема Коши.

§35.1 Предел. Функции комплексного переменного

Выберем системы окрестностей для точек из $\mathbb{C}$, чтобы определить понятие сходимости (сделаем это аналогично $\mathbb{R}^2$).

- $B_r(z_0) \triangleq \{z \mid |z - z_0| < r\}$ — выберем в качестве *окрестности произвольной точки* z_0 радиуса $r > 0$.
- $\overset{\circ}{B}_r(z_0) \triangleq \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ — будем обозначать так *проколотую окрестность точки* $z_0 \in \mathbb{C}$.
- $\overline{B_r(z_0)} \triangleq \{z \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ — будем обозначать так замкнутый круг с центром в точке z_0 радиуса r.

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность чисел из $\mathbb{C}$, $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Число $A = a + ib \in \mathbb{C}$ называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо включение $z_n \in B_\varepsilon(A) = \{z_n \mid |z_n - A| < \varepsilon\}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)\colon \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon) \quad z_n \in B_\varepsilon(A) \quad (\text{т.е. } |z_n - A| < \varepsilon).$$

Определение 2. Последовательность $\{z_n\}$ *сходится* (*стремится*) *к бесконечности* ($z_n \to \infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)\colon \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon) \quad |z_n| > \varepsilon.$$

Это определение эквивалентно тому, что окрестностью бесконечности является внешность круга $\overline{B_\varepsilon(0)}$, т.е. множество вида $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(\infty) \triangleq \{z \mid |z| > \varepsilon\}$.

Определение 3. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ с введенной выше системой окрестностей своих точек, пополненная присоединением к ней единственной бесконечно удаленной точки $z = \infty$ и системой ее окрестностей $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(\infty)$ (т.е. сходимостью к ∞ по определению 2), называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\mathbb{C}} = \{\infty\} \cup \{\mathbb{C}\}$.

При этом обозначим $B_\varepsilon(\infty) = \overset{\circ}{B}_\varepsilon(\infty) \cup \{\infty\}$.

Пусть $f\colon G \to \mathbb{C}$ — функция, где $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Заметим, что задание комплексной функции f равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, так как $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Определение 4. Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *внутренней точкой множества* $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ ($z_0 \in \operatorname{int} G$), если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что справедливо включение $B_\varepsilon(z_0) \subset G$.

Определение 5. Точка $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *предельной точкой множества* $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ в проколотой окрестности $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(z_0)$ имеется по крайней мере одна точка (а потому и бесконечно много точек) из G (т.е. $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(z_0) \cap G \neq \varnothing$, $\forall \varepsilon > 0$).

Определение 6. Пусть $f\colon G \subset \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — функция и точка z_0 — предельная точка для G. Тогда число $A \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *пределом функции в точке* z_0 *по множеству* G, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \quad \forall z \in \overset{\circ}{B}_\delta(z_0) \cap G \quad f(z) \in B_\varepsilon(A).$$

§35.2 Дифференцирование функций комплексного переменного

Определение 7. Если функция $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ такова, что существует конечный предел отношения

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{при} \quad z \to z_0,$$

то этот предел называется *производной функции* f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Пусть $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta f = f(z) - f(z_0)$. Определение 7 означает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall \Delta z$: $0 < |\Delta z| < \delta$ справедливо

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z), \tag{2}$$

где функция $\alpha(\Delta z)$, определяемая из равенства (2) в силу (1) удовлетворяет условию $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0$. Такая функция называется o-малой и обозначается $o(\Delta z)$.

Определение 8. Функция $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если справедливо представление

$$\Delta f = A \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z), \quad \forall \Delta z\colon \quad 0 < |\Delta z| < r, \tag{3}$$

где A не зависит от Δz, а функция $\alpha(\Delta z)$ является $o(\Delta z)$.

Лемма 1. Функция $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ дифференцируема в точке $z_0 \iff$ существует производная $f'(z_0)$, причем в формуле (3) число $A = f'(z_0)$.

§35.3 Условия Коши—Римана

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$; $\Delta z = z - z_0$, или $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, где $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$; $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, где $\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0)$, $\Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0)$. [1]

Теорема 1 (Условия Коши—Римана). Для того, чтобы функция $f\colon G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ была дифференцируема в точке $z_0 \in \operatorname{int} G$, необходимо и достаточно, чтобы

1. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (как функции двух действительных переменных x и y).

2. В точке (x_0, y_0) были выполнены следующие условия (называемые условиями Коши-Римана):

$$\begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) &= v'_y(x_0, y_0), \\ u'_y(x_0, y_0) &= -v'_x(x_0, y_0). \end{aligned} \tag{4}$$

При этом

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0). \tag{5}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть $\exists f'(z_0) = a + ib$. Тогда $\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)$, где $\frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \to 0} 0$. Но, с другой стороны, $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$. А значит

$$\Delta u + i\Delta v = \underbrace{(a + ib)}_{f'(z_0)}(\Delta x + i\Delta y) + \underbrace{\alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y)}_{\alpha(\Delta z)}$$

Приравниваем действительные и мнимые части слева и справа:

$$\begin{cases} \Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y). \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим $0 \leqslant |\alpha_1(\Delta x, \Delta y)| \leqslant |\alpha(\Delta z)|$ (катет не длиннее гипотенузы, $|\alpha|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2$). Тогда

$$\underbrace{0}_{=0} \leqslant \frac{|\alpha_1(\Delta x, \Delta y)|}{|\Delta z|} \leqslant \underbrace{\frac{|\alpha(\Delta z)|}{|\Delta z|}}_{\xrightarrow{\Delta z \to 0} 0}.$$

[1] Впредь, для краткости, примем следующее обозначение для частных производных $\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$.

Из теоремы о трех функциях из математического анализа для $\overline{\mathbb{R}}$ следует: $\exists \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\alpha_1(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$. Аналогично, $\exists \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\alpha_2(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$. Отсюда и из равенства (6) следует дифференцируемость функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, причем

$$\begin{aligned} u'_x(x_0,y_0) &= a, \qquad & u'_y(x_0,y_0) &= -b,\\ v'_x(x_0,y_0) &= b, \qquad & v'_y(x_0,y_0) &= a. \end{aligned} \tag{7}$$

Используя равенства (7) убеждаемся, что выполнены условия Коши-Римана (4), причем

$$f'(z_0) = a+ib = u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0)-iu'_y(x_0,y_0)$$

$\Longleftarrow$: Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0,y_0), выполнены условия Коши-Римана (4). Тогда в точке $z_0 = x_0+iy_0$

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v \overset{u,v\text{ дифф.}}{=\!=\!=\!=} u'_x\Delta x + \overbrace{u'_y}^{-v'_x}\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y) +$$

$$+ i\big(v'_x\Delta x + \overbrace{v'_y}^{u'_x}\Delta y + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\big) \overset{(4)}{=\!=}$$

$$\overset{(4)}{=\!=} (u'_x+iv'_x)(\Delta x+i\Delta y)+\alpha_1(\Delta x,\Delta y)+i\alpha_2(\Delta x,\Delta y) = A\cdot\Delta z+\alpha(\Delta z),$$

где число $A{=}u'_x(x_0,y_0){+}iv'_x(x_0,y_0)$, функция $\alpha{=}\alpha_1{+}i\alpha_2$, причем, поскольку $\exists \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\alpha_1(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$, $\exists \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\alpha_2(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$, то

$$\left|\frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z}\right| \leqslant \frac{|\alpha_1(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} + \frac{|\alpha_2(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \xrightarrow{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} 0,$$

(гипотенуза не длинее суммы катетов, $|\alpha|^2 = |\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2$). Т.е. функция f дифференцируема в точке z_0, и верна формула (5).

Теорема доказана. ■

§35.4 Регулярные функции

Аналогично $\mathbb{R}^2$ мы назовем множество G из $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$):

- *открытым*, если для любой его точки z_0 найдется ее окрестность $B(z_0)$, принадлежащая этому множеству;
- *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки;
- *областью*, если множество обладает следующими двумя свойствами:
  1. для любой точки $z_0\in G$ существует окрестность этой точки, принадлежащая G (*открытость*);

2. для любых двух точек $z_1, z_2 \in G$ существует лежащий в G путь с концами z_1 и z_2 (*линейная связность*);

- *односвязной областью*, если любой простой замкнутый контур, целиком лежащий в ней, может быть непрерывной деформацией стянут в точку, постоянно оставаясь внутри области.

  Более удачное определение: область $G \subset \mathbb{C}$ называется *односвязной*, если любая замкнутая кусочно-гладкая кривая $\Gamma \subset G$ является границей ограниченного открытого множества D, целиком принадлежащего G.

Определение 9. Пусть G — область в $\mathbb{C}$. Функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется *регулярной в области* G, если она дифференцируема на G и ее производная $f'\colon G \to \mathbb{C}$ является непрерывной функцией. Говорят, что $f\colon G \to \mathbb{C}$ *регулярна в точке* $z_0 \in G$, если она регулярна в некоторой окрестности этой точки.

§35.5 Интегрирование функции комплексного переменного

Определение 10. *Непрерывной кривой* называется геометрическое место точек z комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих некоторому параметрическому уравнению $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции действительного переменного t на отрезке $[t_0, t_1]$. Непрерывная кривая — *простая*, если $\forall t', t'' \in [t_0, t_1]$: $t' \neq t'' \Rightarrow z(t') \neq z(t'')$, кроме, возможно $z(t_0) = z(t_1)$. Непрерывная кривая — *замкнутая*, если $z(t_0) = z(t_1)$

При изменении параметра t на отрезке $[t_0; t_1]$ в одном направлении (от t_0 к t_1 или наоборот) точка $z(t)$ совершает обход кривой γ. Выбор направления обхода кривой γ называется ориентацией кривой, а кривая с выбранной ориентацией называется *ориентированной кривой* или *контуром*.

Скажем, что на кривой γ выбрана *ориентация, индуцированная данной параметризацией* $z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, если на кривой выбрано направление движения, соответствующее возрастанию t.

Определение 11. Непрерывная кривая $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется *гладкой*, если она допускает параметрическое представление с помощью комплекснозначной функции действительного аргумента $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, у которой функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, имеют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ всюду на отрезке $[t_0, t_1]$, причем если кривая замкнута, то $z'(t_0 + 0) = z'(t_1 - 0)$.

Определение 12. Пусть дан непрерывный контур γ в $\mathbb{C}$ с параметризацией $z = z(t)$. Пусть существует конечное разбиение $\{\theta_k\}_{k=0}^{m}$ отрезка $[t_0, t_1]$, т.е. $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m = t_1$ такое, что контуры γ_k, определяемые функциями $z = z(t)$, $t \in [\theta_{k-1}, \theta_k]$, являются гладкими контурами с той же, что и у контура γ, ориентацией. Тогда контур γ называется *кусочном-гладким контуром*, или *объединением гладких контуров* $\{\gamma_k\}$, т.е. $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_m$.

Пусть дан кусочно-гладкий контур γ с параметризацией $z = z(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, где $z(t_0)$ — начало, а $z(t_1)$ — конец контура γ.

Пусть выбрано конечное *разбиение отрезка* $[t_0, t_1]$ вида

$$\lambda \triangleq \{\tau_k \mid k \in \overline{1, m_\lambda},\ t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{m_\lambda} = t_1\}. \quad (8)$$

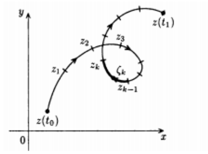


Рис. 35.1

Мелкостью разбиения λ назовем величину

$$|\lambda| = \max\{\tau_k - \tau_{k-1} \mid k \in \overline{1, m_\lambda}\}.$$

Пусть при каждом $k \in \overline{1, m_\lambda}$, произвольно выбрана точка

$$\zeta_k \in \{z(t) \mid t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]\}, \quad (9)$$

т.е. точка ζ_k принадлежит дуге $\widehat{z_{k-1}, z_k} \subset \gamma$, где $z_k \triangleq z(\tau_k)$.

Определение 13. Пусть дана непрерывная на кусочно-гладком контуре γ функция $w = f(z)$. Определим выражение

$$\sigma(\lambda) \triangleq \sum_{k=1}^{m_\lambda} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \text{где} \quad \Delta z_k \triangleq z_k - z_{k-1}, \quad (10)$$

которое будем называть *интегральной суммой функции* f, соответствующей разбиению λ.

Если существует конечный предел интегральных сумм (10) при $|\lambda| \to 0$, не зависящий от выбора разбиения λ (8) и точек $\{\zeta_k\}$ (9), то этот предел называется интегралом от функции f по контуру γ, который обозначается

$$\int_\gamma f(z)\, dz. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть дана непрерывная на кусочно-гладком контуре γ функция $f(z)$. Тогда интеграл (11) существует и справедлива формула

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (u(x,y)\, dx - v(x,y)\, dy) + i \int_\gamma (v(x,y)\, dx + u(x,y)\, dy), \quad (12)$$

где $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, и стоящие справа в формуле (12) два интеграла являются криволинейными интегралами второго рода от действительных функций действительных переменных по контуру γ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

Следствие 1. Пусть дана непрерывная на кусочно-гладком контуре γ функция $f(z)$. Тогда справедлива формула

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\cdot z'(t)\,dt, \tag{13}$$

где в (13) интеграл в правой части от комплексной функции действительного переменного определяется по формуле

$$\int_{t_0}^{t_1} (u(t)+iv(t))\,dt \triangleq \int_{t_0}^{t_1} u(t)\,dt + i\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt. \tag{14}$$

§35.6 Интегральная теорема Коши

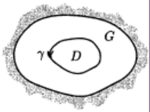


Рис. 35.2

Теорема 3 (Коши). Для всякой регулярной функции $f\colon G\to\mathbb{C}$, заданной в односвязной области G, справедливо равенство

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0, \tag{15}$$

где интеграл берется по любому замкнутому простому кусочно-гладкому контуру γ, лежащему в области G.

Доказательство. Для заданного в теореме контура γ запишем формулу (12):

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)\,(dx+idy) = \underbrace{\int_\gamma (u\,dx - v\,dy)}_{\triangleq J_1} + i\underbrace{\int_\gamma (v\,dx+u\,dy)}_{\triangleq J_2}, \tag{16}$$

Через D обозначим односвязную область в G, границей которой является данный контур γ. Нам известна следующая формула Грина:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{17}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — действительные функции переменных x, y, непрерывные со своими частными производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D} = D\cup\gamma$.

В силу непрерывной дифференцируемости функций u и v на односвязной области G, следующей из регулярности функции f, формула Грина (17) и условия Коши—Римана дают для интегралов (16)

$$J_1 \overset{(17)}{=\!=} \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy \overset{\text{УКР}}{=\!=} 0,$$

$$J_2 \overset{(17)}{=\!=} \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy \overset{\text{УКР}}{=\!=} 0,$$

т.е. равенство (15) доказано, а значит теорема доказана. ■

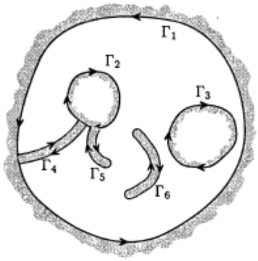


Рис. 35.3

Определение 14. *Областью с кусочно-гладкой границей* будем называть область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, граница $\partial G = \Gamma$ которой является объединением конечного числа гладких ограниченных кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, любые две из которых могут иметь общими лишь концевые точки.

Эти кривые $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ будем называть гладкими компонентами границы Γ области G. Эти компоненты бывают двух типов:

1. Кривая Γ_k — *правильной гладкой компонентой* Γ, если в каждой окрестности каждой точки $z_0 \in \mathring{\Gamma}_k$ ($\mathring{\Gamma}_k$ — кривая Γ_k без концевых точек) находятся как точки из области G, так и из $\mathbb{C} \setminus G \cup \Gamma$.

2. Кривая Γ_k — *разрезом*, если для каждой точки $z_0 \in \mathring{\Gamma}_k$ существует окрестность $B_\varepsilon(z_0)$ такая, что $B_\varepsilon(z_0) \setminus \Gamma_k \subset G$.

Определение 15. Будем считать, что кусочно-гладкая граница $(\partial G)^+$ *положительно ориентирована относительно области* G, если при обходе $(\partial G)^+$ область G остается слева (при этом считается, что разрез проходится дважды: в одну сторону, потом в противоположную). Аналогично, определим отрицательно ориентированную границу относительно области G, которую обозначим $(\partial G)^-$.

Если $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ будем продолжать по непрерывности на ∂G, то не исключаем, что на разрезы f может продолжаться по-разному, т.е. пределы с разных берегов разреза могут отличаться.

Теорема 4 (интегральная теорема Коши для односвязных областей). Пусть дана ограниченная односвязная область G с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ регулярна на области G и непрерывна на замыкании области $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Приведем доказательство этой теоремы для случая, когда добавлением к границе Γ конечного числа разрезов оставшиеся точки области G можно представить в виде объединения конечного числа звездных множеств.

Определение 16. Ограниченная область G называется *звездным множеством*, если граница Γ области G может быть задана в виде

$$\Gamma = \{z \big| z = z_0 + z_1(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta, z_1(\alpha) = z_1(\beta)\}, \tag{19}$$

где $z_0 \in G$ называется *центром звездного множества*, $z_1 \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — кусочно-гладкая функция, причем должны выполняться включения

$$\Gamma_\lambda \triangleq \{z \big| z = z_0 + \lambda z_1(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset G, \forall \lambda \in [0, 1). \tag{20}$$

Проще говоря, множество G называется *звездным*, если можно найти такую точку (*центр зведного множества*), что все прямые отрезки, соединяющие ее с любой другой, целиком принадлежат G.

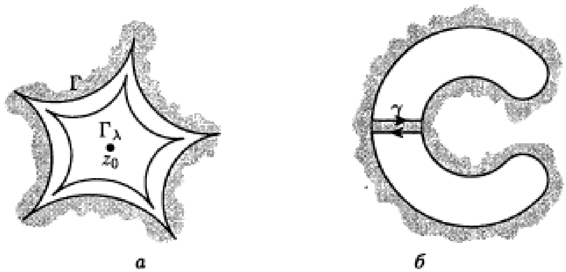


Рис. 35.4

Доказательство достаточно провести для случая, когда G есть звездное множество с центром в точке $z_0 = 0$. Покажем это.

Допустим, что его центр $z_0 \neq 0$. Сделав замену $\tilde{z} = z - z_0$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma - z_0$, $\tilde{G} = G - z_0$, получим звездное множество G с центром в точке 0, причем

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\Gamma}} f(\tilde{z} + z_0)\, d\tilde{z} = \int_{\partial\tilde{G}} \tilde{f}(\tilde{z})\, d\tilde{z},$$

где $\tilde{f}(\tilde{z}) = f(\tilde{z} + z_0)$ есть регулярная функция, и если покажем, что последний интеграл равен нулю, то и исходный равен нулю.

Итак, считаем, что центр множества G есть точка $z_0 = 0$. Тогда кривая Γ_λ из (20) принимает вид:

$$\Gamma_\lambda \triangleq \{z \big| z = \lambda z_1(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Так как по определению 16 звездного множества справедливы включения $\Gamma_\lambda \subset G$, то по теореме Коши 3 справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_\lambda} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \quad \forall \lambda \in (0, 1). \tag{21}$$

Для каждого $\lambda \in (0,1)$ делаем замену переменного $\zeta = \lambda z$. Тогда $\zeta \in \Gamma_\lambda \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z \in \Gamma$. В силу этой замены равенство (21) принимает вид

$$\int_\Gamma f(\lambda z)\lambda\,dz = 0, \text{ откуда } \int_\Gamma f(\lambda z)\,dz = 0, \forall\lambda \in (0,1) \tag{22}$$

Так как функция f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\overline{G}$, то она равномерно непрерывна на $\overline{G}$. Это значит, что $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) >$ $> 0, \forall z', z'' \in \overline{G}, |z' - z''| < \delta \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Поэтому $\forall z \in \Gamma$ получаем $|z - \lambda z| = (1-\lambda)|z| \leqslant (1-\lambda)C_0$, где $C_0 = \max\{|z| \big| z \in \Gamma\}$.

Выбрав $\lambda_\varepsilon \in (0,1)$, удовлетворяющее неравенству $(1-\lambda_\varepsilon) < \delta(\varepsilon)/C_0$, получаем $|z - \lambda_\varepsilon z| < \delta(\varepsilon)$, $\forall z \in \Gamma$. Поэтому из (22) следует:

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\Gamma f(z)\,dz - 0\right| = \left|\int_\Gamma (f(z) - f(\lambda_\varepsilon z))\,dz\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Gamma |f(z) - f(\lambda_\varepsilon z)|\,|dz| \leqslant \varepsilon \int_\Gamma |dz|. \tag{23}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем равенство (18).

Теорема доказана. ■

Теорема 5 (обобщенная интегральная теорема Коши). Пусть дана ограниченная область G с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ. Пусть функция $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ регулярна на области G и непрерывна на замыкании области $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \tag{24}$$

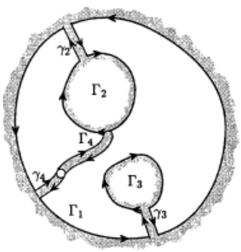


Рис. 35.5

Доказательство. Поскольку область ограничена, то значит одна группа компонент, «внешняя» компонента, образует кусочно-гладкий замкнутый контур, который отделяет G от бесконечности. (см. рис. 35.5)

Добавим к каждой «внутренней» компоненте границы ∂G дополнительный разрез, соединяющий его с «внешней» компонентой. Итак, мы конечным числом дополнительных непересекающихся между собой разрезов $R_1, \ldots R_p$ разбили область G на подмножества $G_1, \ldots, G_m$. Эти подмножества, по построению, являются ограниченными односвязными областями с кусочно-гладкими границами. Тогда по интегральной теореме Коши для односвязных множеств:

$$\underbrace{0=\sum_{j=1}^{m}\int_{(\partial G_j)^+} f(z)\,dz}_{\text{т.к. каждый интеграл}=0}=\int_{(\partial G)^+} f(z)\,dz+\sum_{k=1}^{m}\underbrace{\left(\int_{(R_k)^+} f(z)\,dz+\int_{(R_k)^-} f(z)\,dz\right)}_{=0\forall s}$$

Отсюда

$$\int_{(\partial G)^+} f(z)\,dz=0.$$

Теорема доказана.[2] ■

[2]Хочу обратить ваше внимание, что мы везде писали Γ (следуя обозначениям Е.С. Половинкина), однако подразумевали, что берем положительно ориентированную границу G относительно области G. Т.е. нагляднее было бы писать $(\partial G)^+$. Просто не забывайте, что в Теоремах 4 и 5 нужна положительно ориентированная граница.

36. Интегральная формула Коши. Разложение функции, регулярной в окрестности точки, в ряд Тейлора.

§36.1 Интегральная формула Коши

■ **Пример 1.** Вычислить интеграл

$$I_k = \int_{\gamma_r^+} (z-a)^k\, dz, \quad k \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C}$$

где контур γ_r^+ есть окружность $\{z \big| |z-a| = r > 0\}$, ориентированная движением против хода часовой стрелки. ■

Решение. Выберем параметризацию окружности γ_r^+ вида $z = a + re^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$I_k = \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\varphi} \cdot rie^{i\varphi}\, d\varphi = ir^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi}\, d\varphi.$$

В Итоге

1. При $k = -1$ получаем

$$I_{-1} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i;$$

2. При $k \neq -1$ получаем

$$I_k = ir^{k+1} \left(\int_0^{2\pi} \cos(k+1)\varphi\, d\varphi + i \int_0^{2\pi} \sin(k+1)\varphi\, d\varphi \right) = 0.$$

Ответ: $I_k = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1, \\ 0, & k \neq -1. \end{cases}$ ■

Теорема 1 (Интегральная формула Коши). Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей $\Gamma = (\partial G)^+$. Пусть функция $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ регулярна на G и непрерывна на $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Тогда для любой точки $z \in G$ справедлива интегральная формула Коши вида

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{1}$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z \in G$. Функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ регулярна по переменному ζ в области $G \setminus \{z\}$. Выберем число $r_0 > 0$ такое, что выполнено включение $\overline{B_{r_0}(z)} \subset G$.

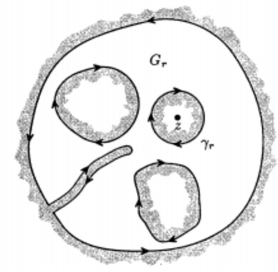


Рис. 36.1

Обозначим через $\gamma_r = \gamma_r^+ \triangleq \{\zeta \big| |\zeta - z| = r\}$ окружность радиуса $r \in (0, r_0)$ ориентированную против хода часовой стрелки. Обозначим множества $G_r \triangleq G \setminus \overline{B_r(z)}$ и $\Gamma_r \triangleq \Gamma \cup \gamma_r^-$. Очевидно, что множество G_r есть область с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ_r(рис.36.1).

По обощенной интегральной теореме Коши 5 из билета №33 получаем

$$0 = \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{2}$$

Итак,

$$J \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \overset{(2)}{=\!=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \forall r\colon \quad 0 < r < r_0 \tag{3}$$

Как показано в примере 1, справедливо равенство $1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$, откуда

$$J - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \forall r \in (0, r_0)$$

Так как $f(\zeta)$ непрерывна в точке $z \in G$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) \in (0, r_0)$ такое, что $\forall \zeta\colon |\zeta - z| < \delta(\varepsilon)$ следует $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. Поэтому выбирая $r \in (0, \delta(\varepsilon))$, получаем

$$|J - f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |\, d\zeta| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi r} \int_{\gamma_r} |\, d\zeta| = \varepsilon. \tag{4}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то из (3), (4) следует $J = f(z)$, т.е. формула (1). ■

Определение 1. Пусть γ — кусочно-гладкий контур в $\mathbb{C}$ и пусть $\omega = q(z)$ — непрерывная на γ функция. Тогда интеграл вида

$$I(z) \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \notin \gamma \tag{5}$$

называется *интегралом типа Коши* по контуру γ от функции q.

Теорема 2. При сформулированных в определении 1 условиях функция $I\colon \mathbb{C}\setminus\gamma\to\mathbb{C}$ из (5) определена и дифференцируема бесконечное число раз, причем для производных справедлива формула

$$I^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{q(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n\in\mathbb{N} \tag{6}$$

Доказательство.

1. Докажем формулу (6) при $n=1$. Так как функция $q(\zeta)$ непрерывна на контуре γ, то существует число $M< <+\infty$ такое, что $|q(\zeta)|\leqslant M$ при $\zeta\in\gamma$.
Фиксируем точку $z\notin\gamma$. Пусть $d\triangleq \operatorname{dist}(z,\gamma)$. Очевидно, что $d>0$. Выберем число $r\in(0,\frac{d}{2})$ и возьмем произвольное число $\Delta z\in\mathbb{C}$ так, чтобы $0<|\Delta z|<r$. Тогда для $\forall\zeta\in\gamma$ получаем

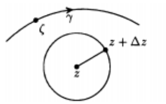


Рис. 36.2

$$|\zeta-(z+\Delta z)|\geqslant|\zeta-z|-|\Delta z|\geqslant d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2} \tag{7}$$

Оценим выражение

$$\frac{I(z+\Delta z)-I(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{q(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta= \\ =\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma q(\zeta)\left[\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)\frac{1}{\Delta z}-\frac{1}{(\zeta-z)^2}\right]d\zeta. \tag{8}$$

Упростим выражение в прямых скобках под интегралом (8):

$$[\ldots]=\frac{(\zeta-z)-((\zeta-z)-\Delta z)}{(\zeta-z)((\zeta-z)-\Delta z)}\cdot\frac{1}{\Delta z}-\frac{1}{(\zeta-z)^2}=\frac{1}{(\zeta-z)(\Delta z-(\zeta-z))}- \\ -\frac{1}{(\zeta-z)^2}=\frac{(\zeta-z)-(\Delta z-(\zeta-z))}{(\zeta-z)^2(\Delta z-(\zeta-z))}=\frac{\Delta z}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}.$$

Поэтому для (8) получаем оценку

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{q(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{|q(\zeta)||\Delta z||\,d\zeta|}{|\zeta-z|^2|\zeta-z-\Delta z|}\leqslant \\ \leqslant\frac{|\Delta z|}{\pi d^3}\int_\gamma|q(\zeta)||\,d\zeta|\leqslant\frac{|\Delta z|\cdot M}{\pi d^3}\int_\gamma|\,d\zeta|\xrightarrow{\Delta z\to 0}0.$$

Таким образом, в пределе получаем равенство

$$I'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{q(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta. \tag{9}$$

2. Общий случай n-й производной получается аналогично первому случаю из формулы (6) для $(n-1)$-й производной и воспользовавшись биномом Ньютона

$$(\zeta - z - \Delta z)^n = (\zeta - z)^n - n\Delta z(\zeta - z)^{n-1} + O(\Delta z^2),$$

которое легко проверяется, например, методом математической индукции.

Теорема доказана. ■

Теорема 3. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области $G \subset \mathbb{C}$. Тогда эта функция имеет в G производные всех порядков, т.е. является бесконечно дифференцируемой функцией в области G.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in G$, тогда существует число $r_0 > 0$ такое, что $\overline{B_{r_0}(z_0)} \subset G$. Пусть окружность $\gamma_{r_0} \triangleq \{z \,|\, |z - z_0| = r_0\}$ ориентирована положительно относительно внутренности круга (т.е. движением против хода часовой стрелки). Тогда по теореме 1 справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \forall z \in B_{r_0}(z_0). \tag{10}$$

Так как в формуле (10) функция $\zeta \to f(\zeta)$ непрерывна на γ_{r_0}, то интеграл в (10) есть интеграл типа Коши, и по теореме 2 он бесконечно дифференцируем в круге $B_{r_0}(z_0)$, т.е. в силу равенства (10) функция f бесконечно дифференцируема в этом круге $B_{r_0}(z_0)$, при этом из (6) следует формула:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \quad \forall z \in B_{r_0}(z_0). \tag{11}$$

Так как точка $z_0 \in G$ была произвольной, то функция f бесконечно дифференцируема во всей области G. ■

§36.2 Разложение функции, регулярной в окрестности точки, в ряд Тейлора

Опираясь на интегральную формулу Коши, в этом параграфе покажем, что функция регулярна в окрестности некоторой точки тогда и только тогда, когда в этой окрестности она представима в виде суммы степенного ряда.

Определение 2. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - a)^n, \tag{12}$$

где точка $a \in \mathbb{C}$ и коэффициенты $c_n \in \mathbb{C}$ фиксированы.

Теорема 4 (Абеля). Если степенной ряд (12) сходится в точке $z_0 \neq a$, то ряд (12) сходится абсолютно в любой точке из круга $B_{|z_0-a|}(a)$, а в любом замкнутом круге $\overline{B_r(a)}$, где $0 < r < |z_0 - a|$, этот ряд сходится равномерно.

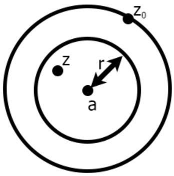


Рис. 36.3

Доказательство. Так как по условию числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ сходится, то из необходимого условия сходимости рядов следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n(z_0 - a)^n| = 0$, поэтому существует число $\alpha > 0$ такое, что $|c_n(z_0 - a)^n| \leqslant \alpha$ для всех n.

1) Пусть точка $z \in B_{|z_0-a|}(a)$. Тогда $|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n \leqslant \alpha q_z^n$, где $q_z \triangleq \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_z^n$ очевидно сходится, то по признаку сравнения ряд (12) сходится и абсолютно в точке z.

2) Определим $q_0 \triangleq \frac{r}{|z_0-a|} \geqslant \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|$. Аналогично пункту 1 получаем оценку: $|c_n(z - a)^n| \leqslant \alpha q_0^n$. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_0^n$ очевидно сходится, то по признаку Вейештрасса(см. ниже) ряд (12) сходится равномерно на круге $\overline{B_r(a)}$.

Теорема доказана. ■

Утверждение 1 (Признак Вейерштрасса). Пусть последовательность функций $\{f_n\}$ такова, что $|f_n(z)| \leqslant a_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall z \in G$ и пусть числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно и равномерно на G.

Эта теорема 4 позволяет получить представление об области сходимости степенного ряда (12).

Определим для степенного ряда (12) понятие*радиуса сходимости*:

$$R \triangleq \sup\{|z - a| \,\Big|\, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^n \text{ сходится}\}. \tag{13}$$

Тогда, если $0 < R < +\infty$, то в силу теоремы 4 Абеля в каждой точке круга $B_R(a)$ ряд (12) сходится, а в каждой точке $z \notin \overline{B_R(a)}$ ряд (12) расходится. Круг $B_R(a)$ называется *кругом сходимости ряда* (12). Радиус сходимости R степенного ряда (12) может быть вычислен по известной формуле Коши-Адамара (причем, в ней не исключено $R = \pm\infty$):

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \tag{14}$$

■ **Пример 2.** Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$, являющийся суммой бесконечной геометрической прогрессии, очевидно сходится при $|z| < 1$ к функции $\frac{1}{1-z}$, так как легко посчитать, что

$$S_N(z) \triangleq \sum_{n=0}^{N} z^n = \left(\sum_{n=0}^{N} z^n\right)\frac{1-z}{1-z} = \frac{1 - z + z - \cdots - z^N + z^N - z^{N+1}}{1-z} =$$
$$= \frac{1 - z^{N+1}}{1-z} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1-z}. \quad ■$$

Утверждение 2. Пусть в области G заданы непрерывные функции $f_n : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ и кусочно-гладкий контур γ. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ сходится к своей сумме $S(z)$ равномерно на контуре γ. Тогда этот ряд можно почленно интегрировать по контуру γ, т.е. справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma} S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)\,dz. \tag{15}$$

Определение 3. Пусть у функции $f\colon B_r(a) \to \mathbb{C}$ существуют в точке $a \in \mathbb{C}$, $r>0$, производные $f^{(n)}(a)$ любого порядка $n \in \mathbb{N}$. Тогда степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{16}$$

называется *рядом Тейлора функции* f с центром в точке a.

Теорема 5. Если функция f регулярна в круге $B_r(a)$, где $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, то она представима в этом круге $B_r(a)$ в виде суммы сходящегося ряда Тейлора, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall z \in B_r(a), \tag{17}$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{18}$$

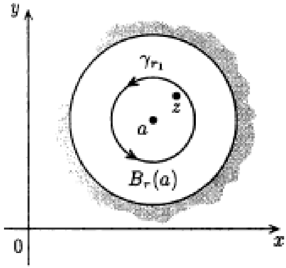


Рис. 36.4

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z \in B_r(a)$. Тогда существует число $r_1 > 0$ такое, что $|z-a| < r_1 < r$.

Пусть $\gamma_{r_1} \triangleq \{\zeta \,\big|\, |\zeta - a| = r_1\}$ — ориентированная движением против хода часовой стрелки окружность (см. рис. 36.4). Запишем интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{19}$$

Преобразуем функцию $\zeta \to \frac{1}{\zeta - z}$, где $\zeta \in \gamma_{r_1}$, к виду

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)}.$$

Здесь $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{r_1} \triangleq q, q < 1$. Как в примере 2, получаем разложение в сходящийся ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left(1 + \frac{z-a}{\zeta-a} + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

В итоге, подынтегральная функция в (19) представима сходящимся на γ_{r_1} рядом

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta), \quad \forall \zeta \in \gamma_{r_1}. \tag{20}$$

Так как справедлива оценка

$$\left|\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} f(\zeta)\right| \leqslant \frac{M}{r_1}\cdot q^n, \quad \text{где} \quad M = \sup_{\zeta \in \gamma_{r_1}} |f(\zeta)| < +\infty,$$

а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (20) сходится равномерно на окружности γ_{r_1}. Поэтому в силу утверждения 2 ряд (20) можно почленно интегрировать по окружности γ_{r_1}. В результате получаем равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta \cdot (z-a)^n, \tag{21}$$

т.е. степенной ряд вида (12) с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{22}$$

Эти коэффициенты c_n не зависят от выбора точки z или окружности γ_{r_1}, так как, воспользовавшись формулой для производной для интеграла типа Коши, получаем для c_n формулу (18). Таким образом, ряд (21) есть ряд Тейлора функции f. В силу произвольности $z \in B_r(a)$ ряд (21) сходится в круге $B_r(a)$, а поэтому его радиус сходимости $R \geqslant r$. ■

Следствие 1. Пусть функция f регулярна в области G и пусть выбрана точка $a \in G$. Тогда функция f представима в виде ряда Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

который сходится по крайней мере в круге $B_R(a)$ максимального радиуса $R > 0$, при котором этот круг содержится в области G (см. рис. 36.5).

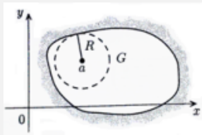


Рис. 36.5

37. Разложение функции, регулярной в кольце, в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

§37.1 Разложение функции, регулярной в кольце, в ряд Лорана

Определение 1. Рядом Лорана с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

понимаемый как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \tag{2}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z-a)^{-m}. \tag{3}$$

Ряд (2) является обычным степенным рядом и в силу теоремы Абеля (билет №34) областью его сходимости является некоторый круг $B_R(a)$, где R — радиус сходимости ряда (2). Ряд (3) заменой $\frac{1}{z-a} = \zeta$ приводится к степенному ряду $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$, и по той же теореме Абеля его область сходимости — тоже некоторый круг $|\zeta| < \alpha_0$. Следовательно, ряд (3) сходится в области $|z-a| > \frac{1}{\alpha_0} \triangleq \rho \geqslant 0$. Если $\rho > R$, то суммарный ряд (1) не сходится ни в одной точке, если же $\rho < R$, то ряд (1) сходится в кольце: $\rho < |z-a| < R$.

В последнем случае кольцо $\rho < |z-a| < R$, где R — радиус сходимости ряда (2), а $\frac{1}{\rho}$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} c_{-m}\zeta^m$ называется *кольцом сходимости ряда Лорана* (1).

По теореме Абеля ряд (2) сходится равномерно в $\overline{B_{R_1}(a)}$ при $R_1 \in (0, R)$, а ряд (3) сходится равномерно на множестве $|z-a| \geqslant \rho_1$ при $\rho_1 > \rho$. Следовательно, ряд Лорана сходится равномерно в любом кольце

$$\rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1, \quad \rho < \rho_1 < R_1 < R.$$

Определение 2. Функциональный ряд

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z), \quad z \in G \tag{4}$$

сходится *равномерно строго внутри области* G, если он сходится равномерно в каждом замкнутом круге $\overline{B_r(z)}$, $r>0$, содержащемся в области G.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Пусть функциональный ряд (4), составленный из регулярных функций $f_n\colon G\to\mathbb{C}$, сходится равномерно строго внутри области G. Тогда

1) сумма $S(z)$ ряда (4) есть тоже регулярная функция на G (Первая теорема Вейерштрасса)

2) ряд (4) можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е. для $\forall k\in\mathbb{N}$ имеет место формула

$$S^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n^{(k)}(z),\quad z\in G \tag{5}$$

причем каждый ряд (5) сходится равномерно строго внутри области G (Вторая теорема Вейерштрасса).

Таким образом, по определению 2 ряд Лорана (1) сходится *равномерно строго внутри* его кольца сходимости. Так как к тому же каждый член ряда (1) в кольце сходимости является регулярной функцией, то по теореме 1 (Вейерштрасса) сумма ряда Лорана в кольце сходимости также является регулярной функцией, причем ряд Лорана в этом кольце можно почленно дифференцировать любое число раз.

Теорема 2. Пусть в области G заданы непрерывные функции $f_n\colon G\to$ $\to\mathbb{C}$, $\quad n\in\mathbb{N}$ и кусочно-гладкий контур γ. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(z)$ сходится к своей сумме $S(z)$ равномерно на контуре γ. Тогда этот ряд можно почленно интегрировать по контуру γ, т.е. справедливо равенство

$$\int_\gamma S(z)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\gamma f_n(z)dz \tag{6}$$

Имеет место и обратное утверждение, а именно,

Теорема 3 (Лорана—Вейерштрасса). Всякая функция $\omega=f(z)$, регулярная в кольце $\rho<|z-a|<R$, где $0\leqslant\rho<R\leqslant+\infty$, представима в этом кольце суммой сходящегося ряда Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta, \quad r \in (\rho, R), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

причем ориентация окружности $\gamma_r \triangleq \{\zeta \,\big|\, |\zeta - a| = r\}$ положительная, т.е. обход производится против хода часовой стрелки.

Доказательство.

1. Покажем, что каждый коэффициент c_n в формуле (7) не зависит от выбора $r \in (\rho, R)$. Функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ регулярна в кольце $\rho < |\zeta - a| < < R$. Для любых чисел r_1, r_2: $\rho < r_1 < r_2 < R$ определим окружности γ_k с центром в точке a и радиуса $r_k, k \in \overline{1,2}$, ориентированные положительно. По обобщенной теореме Коши получаем равенство

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta = 0, \text{т.е.}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta,$$

что и требовалось для доказательства независимости интеграла (7) от выбора $r \in (\rho, R)$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$.

2. Зафиксируем произвольную точку z_0 в кольце $\rho<|z-a|<R$. Выберем числа r_1, r_2 такие, что $\rho < r_1 < |z_0 - a| < r_2 < R$, и окружности $\gamma_k = \{z \,\big|\, |z - - a| = r_k\}$ при $k \in \overline{1,2}$, ориентированные положительно. Тогда контур $\Gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^{-1}$, является границей кольца $r_1 < |z - a| < r_2$, в котором по интегральной формуле Коши получаем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta \triangleq I_2 + I_1. \tag{8}$$

Рассмотрим интеграл I_2 из равенства (8). Преобразовывая подынтегральную функцию I_2 (так же, как в теореме 5 (билет №34)), для всех $\zeta \in \gamma_2$ получаем сумму геометрической прогрессии (см. пример 2 из билета №34) вида

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z_0 - a}{\zeta - a}\right)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta). \tag{9}$$

Из справедливости оценки

$$\left| f(\zeta) \frac{(z_0 - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leqslant q_2^n \cdot \frac{M}{r_2}, \quad \forall \zeta \in \gamma_2,$$

где $q_2 \triangleq \frac{|z_0 - a|}{r_2} < 1, \quad M \triangleq \sup\{|f(z)| \,\big|\, r_1 \leqslant |z - a| \leqslant r_2\} < +\infty$, и из того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_2^n$ сходится, по признаку Вейерштрасса получаем, что ряд

(9) сходится абсолютно и равномерно на γ_2. По теореме 2 ряд (9) можно почленно интегрировать по γ_2, т.е. получим, что

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,dz \overset{(9)}{=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\cdot(z_0-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_0-a)^n, \tag{10}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

3. Рассмотрим интеграл I_1 из (8). Представим $-\frac{1}{\zeta - z_0}$ в виде ряда (см. пример 2 из билета №34)

$$-\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{(z_0-a)\left(1 - \frac{\zeta-a}{z_0-a}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z_0-a)^{n+1}}. \tag{12}$$

По признаку Вейерштрасса ряд (12) сходится равномерно по ζ на γ_1, так как

$$\left|\frac{\zeta-a}{z_0-a}\right| = \frac{r_1}{|z_0-a|} \triangleq q_1 < 1, \quad \forall\zeta\in\gamma_1.$$

Так как $|f(\zeta)| \leqslant M$ при $\zeta\in\gamma_1$, то ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{(z_0-a)^{n+1}}, \quad \zeta\in\gamma_1, \tag{13}$$

также сходится равномерно на γ_1, и аналогично случаю вычисления I_2 его можно почленно интегрировать. После интегрирования равенства (13) получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,d\zeta\right)\frac{1}{(z_0-a)^{n+1}}. \tag{14}$$

Заменяя в формуле (14) номера $(n+1)$ на $(-m)$, получаем равенство

$$I_1 = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m(z_0-a)^m, \tag{15}$$

где

$$c_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}\,d\zeta, \quad m = -1, -2, \ldots \tag{16}$$

В силу пункта 1. в формулах (11), (16) контуры γ_1, γ_2 можно заменить на любую окружность $\gamma_r = \{z \mid |z-a| = r\}$, где $\rho < r < R$, т.е. верна общая формула коэффициентов (7). Так как точка z_0 была выбрана в данном кольце произвольно, то, складывая ряды (10) и (15), получаем ряд Лорана с коэффициентами (7), сходящийся во всем кольце $\rho < |z-a| < R$. ■

Следствие 1. Если функция $f\colon B_R(a) \to \mathbb{C}$ регулярна на $B_R(a)$, то ее ряд Лорана с центром в точке a совпадает с ее рядом Тейлора с центром в точке a.

Доказательство. В самом деле, по формуле (7) при $m = -1, -2, \dots$ функция $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}$ будет регулярной в круге $B_R(a)$, и по теореме Коши интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю, т.е. $c_m = 0 \quad \forall m = -1, -2, \dots$ ■

Теорема 4 (о единственности разложения в ряд Лорана). Разложение регулярной в кольце $\rho < |z-a| < R$ функции f в сходящийся ряд Лорана с центром в точке a единственно.

Доказательство. Пусть регулярная функция f представлена в кольце $\rho < |z-a| < R$ в виде некоторого ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n. \tag{17}$$

Выберем число $r \in (\rho, R)$, и пусть окружность $\gamma_r = \{z \mid |z-a| = r\}$ ориентирована положительно. Как показано в примере 1 (билет №34), справедлива формула

$$I_k \triangleq \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & k = 0, \\ 0, & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \tag{18}$$

Как было отмечено в начале параграфа, ряд (17) на окружности γ_r сходится равномерно. Зафиксируем любое число $k \in \mathbb{Z}$. Умножив ряд (17) на ограниченную по модулю на кривой γ_r функцию $\frac{1}{2\pi i (z-a)^{k+1}}$, получаем равномерно сходящийся на окружности γ_r ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}}. \tag{19}$$

Следовательно, по теореме 2 его можно почленно интегрировать по окружности γ_r, и, учитывая формулу (7), получаем

$$c_k \overset{(7)}{=\!=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz \overset{(19)}{=\!=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} b_n \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-a)^{k-n+1}} \overset{(18)}{=\!=} b_k,$$

т.е. ряд (17) совпадает с рядом Лорана (1), (7). ■

Из следствия 1 и теоремы 4 получаем

Следствие 2. Представление регулярной функции $f\colon B_R(a) \to \mathbb{C}$ в виде сходящегося степенного ряда по степеням $(z-a)$ единственно. Оно совпадает с рядом Тейлора этой функции с центром в точке a.

Следствие 3 (неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана). Пусть функция f регулярна в кольце $\rho < |z-a| < R$ и на каждой окружности $\gamma_r = \{z \mid |z-a| = r\}$ справедлива оценка $|f(z)| \leqslant A_r \ \forall z \in \gamma_r$. Тогда для коэффициентов (7) ряда Лорана (1) справедлива оценка

$$|c_n| \leqslant \frac{A_r}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Доказательство. Из формулы (7) сразу следует

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{A_r}{2\pi r^{n+1}} \int_{\gamma_r} |\, d\zeta| = \frac{A_r}{r^n},$$

что и требовалось доказать. ∎

§37.2 Изолированные особые точки однозначного характера

Определение 3. Пусть функция f не регулярна в точке $a \in \overline{\mathbb{C}}$, но регулярна в некоторой проколотой окрестности этой точки a (т.е. на множестве $\overset{\circ}{B}_\rho(a), \rho > 0$). Тогда точку a называют *изолированной особой точкой* (*однозначного характера*) *функции* f.

В определении 3 точка a может быть как конечной точкой (тогда $\overset{\circ}{B}_\rho(a) = \{z \mid 0 < |z-a| < \rho\}$), так и бесконечной (тогда $\overset{\circ}{B}_\rho(\infty) = \{z \mid |z| > \rho\}$).

В зависимости от поведения функции f около особой точки будем различать три типа особых точек.

Определение 4. Изолированная особая точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ функции $f\colon \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to$ $\to \mathbb{C}$ называется

1. *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$;
2. *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;
3. *существенно особой точкой*, если не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

В случае, когда особая точка a конечна, регулярную в кольце $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$ функцию f по теореме 3 можно представить в виде сходящегося ряда Лорана с центром в точке a, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \tag{21}$$

Тогда будем различать две части ряда Лорана

$$I_{\text{пр}} \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n,$$

которые называют соответственно *правильной и главной частями ряда Лорана* (21) с центром в особой точке a.

В случае, когда особая точка $a = \infty$, функцию f можно представить в виде сходящегося в кольце $\overset{\circ}{B}_\rho(\infty)$ ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(\infty), \tag{22}$$

и теперь будем различать части ряда (22)

$$I_{\text{пр}} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}} \triangleq \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n,$$

которые называются соответственно *правильной и главной частями ряда Лорана* (22) с центром в ∞.

Теорема 5. Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ есть изолированная особая точка функции f. Пусть функция f представлена своим рядом Лорана с центром в точке a.

1) Для того, чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана отсутствовала (т.е. $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$).

2) Чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $I_{\text{гл}}(z)$ содержала конечное число ненулевых слагаемых.

3) Чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $I_{\text{гл}}(z)$ содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

Доказательство. I. Пусть точка $a \in \mathbb{C}$ конечна.

1. *Необходимость*. Пусть a — устранимая особая точка функции f, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Тогда функция f ограничена в некоторой окрестности точки a, т.е. существуют числа $\rho_1 \in (0,\rho)$ и $A > 0$ такие, что $|f(z)| < A$ при $\forall z \in \overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$. Воспользуемся неравенством Коши для коэффициентов ряда Лорана функции f

$$|c_n| \leqslant \frac{A}{r^n}, \quad \forall r \in (0,\rho_1).$$

Для каждого целого $n < 0$ получаем, что $|c_n| \leqslant A \cdot r^{|n|} \to 0$ при $r \to 0$, т.е. $c_n = 0$ для всех $n < 0$, т.е. $I_{\text{гл}}(z) = 0$.

2. *Достаточность*. Пусть $I_{\text{гл}}(z) \equiv 0$, т.е. $c_n = 0 \quad \forall n < 0$. Тогда $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \triangleq S(z), \quad \forall z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a)$.

Так как сумма сходящегося степенного ряда $S(z)$ есть регулярная функция на круге $\overset{\circ}{B}_\rho(a)$, причем $f(z) = S(z)$ при $z \neq a$, то существует предел

$$\lim_{z\to a} f(z) = S(a) = c_0.$$

3. *Необходимость*. Пусть точка a — полюс функции f, т.е. существует предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. В силу этого можно выбрать $\delta > 0$ такое, что при всех $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$ справедливо неравенство $|f(z)| > 1$. Определим функцию $g(z) \triangleq \frac{1}{f(z)}$ при $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$.

Очевидно, что функция g регулярна в проколотой окрестности $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$, причем $g(z) \neq 0$ и $|g(z)| < 1$ при всех $z \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$. Так как точка a есть полюс функции f, то существует предел $\lim\limits_{z\to a} g(z) = \lim\limits_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$, т.е. получаем, что точка a есть устранимая особая точка функции g. Следовательно, доопределив $g(a) = 0$, получаем, что функция g регулярна в круге $B_\delta(a)$, т.е. по теореме 5 (билет №34) она представима в виде сходящегося степенного ряда

$$g(z) = b_m (z-a)^m + b_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots, \quad \forall z \in B_\delta(a). \tag{23}$$

Так как функция $g(z) \not\equiv 0$, в равенстве (23) существует номер $m \geqslant 1$, при котором $b_m \neq 0$. Таким образом, $g(z) = (z-a)^m h(z)$, где $h(z) = b_m + b_{m+1}(z-a) + \ldots$, т.е. функция h как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге $B_\delta(a)$, причем $h(a) \neq 0$. Поэтому $h(z) \neq 0$ при всех z из некоторой окрестности $B_{\rho_1}(a)$, где $0 < \rho_1 < \delta$. Следовательно, функция $\frac{1}{h(z)}$ тоже регулярна в $B_{\rho_1}(a)$, и по теореме 5 (билет №34) она также представима в виде сходящегося степенного ряда

$$\frac{1}{h(z)} = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \ldots, \quad z \in B_{\rho_1}(a),$$

причем здесь $d_0 = \frac{1}{b_m} \neq 0$. В итоге получаем в $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{h(z)} = \frac{d_0}{(z-a)^m} + \frac{d_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d_{m-1}}{(z-a)} + d_m + d_{m+1}(z-a) + \ldots \tag{24}$$

Таким образом, правая часть в равенстве (24) есть ряд Лорана функции f с центром в точке a, причем главная часть $I_{\text{гл}}(z)$, очевидно, содержит конечное число ненулевых слагаемых.

4. *Достаточность*. Пусть справедливо представление функции f в проколотой окрестности $\overset{\circ}{B}_{\rho_1}(a)$ в виде сходящегося ряда Лорана (24), причем $d_0 \neq 0$. Тогда, вынося общий множитель, получаем

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}(d_0 + d_1(z-a) + \ldots) = \frac{p(z)}{(z-a)^m}. \tag{25}$$

В формуле (25) функция p как сумма сходящегося степенного ряда регулярна в круге $B_{\rho_1}(a)$ и $\lim\limits_{z\to a} p(z) = p(a) = d_0 \neq 0$. С другой стороны $\frac{1}{(z-a)^m} \to \infty$ при $z \to a$. Отсюда получаем, что $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

5. *Эквивалентность* покажем методом исключения. Предел может существовать в $\overline{\mathbb{C}}$ или не существовать. У главной части ряда $I_{\text{гл}}(z)$ может быть конечное число слагаемых или бесконечное. Эквивалентность существования предела в $\overline{\mathbb{C}}$ и конечности числа ненулевых слагаемых в ряде $I_{\text{гл}}(z)$ уже доказаны в пп. 1) и 2). Следовательно, если не существует предела функции f, то это эквивалентно бесконечному числу слагаемых в $I_{\text{гл}}(z)$.

II. Пусть функция f имеет особую точку $a = \infty$. Заменой аргумента $\zeta = \frac{1}{z}$ приходим к функции $\widetilde{f}(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$, у которой особой точкой является точка $\zeta = 0$, причем существование предела функции $\widetilde{f}(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ эквивалентно существованию предела функции $f(z)$ в ∞, т.е. тип особой точки $a = \infty$ у функции $f(z)$ и тип особой точки $\zeta = 0$ у функции $\widetilde{f}(\zeta)$ одинаков. В свою очередь, главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ с центром в точке ∞ при замене аргумента переходит в главную часть ряда Лорана функции $\widetilde{f}(\zeta)$ с центром в точке $\zeta = 0$. Так как необходимое соответствие в конечной точке $\zeta = 0$ уже установлено в пункте I, то это влечет требуемое соответствие при $a = \infty$. ■

Следствие 4. Точка $a \in \mathbb{C}$ является полюсом функции f тогда и только тогда, когда существуют окрестность $\overset{\circ}{B}_{\rho}(a)$, натуральное число $m \geqslant 1$ и регулярная в круге $B_\rho(a)$ функция p такие, что $p(a) \neq 0$ и

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^m}, \quad \forall z \in \overset{\circ}{B}_{\rho}(a). \tag{26}$$

В свою очередь, точка $a = \infty$ является полюсом функции f тогда и только тогда, когда существуют окрестность $\overset{\circ}{B}_{\rho}(\infty)$, число $m \geqslant 1$, регулярная в $\overset{\circ}{B}_{\rho}(\infty)$ функция h, у которой существует конечный предел $h(\infty) \neq 0$, такие, что

$$f(z) = z^m h(z), \quad z \in \overset{\circ}{B}_{\rho}(\infty). \tag{27}$$

Доказательство следует из только что доказанной теоремы 5. ■

Определение 5. Пусть $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — полюс функции f. Тогда число m в формулах (26) или (27) соответственно называется порядком полюса a функции f.

Определение 6. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $p > 0$, $m \geqslant 1$, пусть функция $g\colon B_\rho(a) \to \mathbb{C}$ регулярна и

$$g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(m-1)}(a) = 0, \quad g^{(m)}(a) \neq 0.$$

Тогда говорят, что функция g имеет в точке a *нуль m-го порядка* (*или m-й кратности*). Если же $g(a) \neq 0$, то говорят, что точка a не является нулем функции g (или для следствия 5: функция g имеет в точке a нуль нулевого порядка).

Следствие 5. Пусть функции $g, h\colon B_\rho(a) \to \mathbb{C}$ регулярны, причем функция h имеет в точке a нуль k-го порядка ($k \geqslant 0$), а функция g имеет в точке a нуль m-го порядка ($m \geqslant 1$). Тогда, если $m > k$, то функция $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ имеет в точке a полюс $(m-k)$-го порядка, а если $m \leqslant k$, то функция f имеет в точке a устранимую особую точку.

Доказательство. В силу определения (6) имеет для функций h и g представление

$$h(z) = (z-a)^k h_1(z), \quad g(z) = (z-a)^m g_1(z),$$

где функции $h_1, g_1\colon B_\rho(a) \to \mathbb{C}$ регулярны и $h_1(a) \neq 0$, $g_1(a) \neq 0$. Определим функцию $p(z) = \frac{h_1(z)}{g_1(z)}$. Эта функция регулярна в некоторой окрестности точки a. В итоге для функции f получили формулу (26) и по следствию (4) получаем утверждение следствия (5). ■

38. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов.

§38.1 Вычеты

Определение 1. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка регулярной функции $f \colon \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r \triangleq \{z \,|\, |z-a| = r\}$ — положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда *вычетом функции f в точке a* называется число

$$\operatorname*{res}_a f \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Отметим, что в формуле (1) интеграл не зависит от величины $r \in (0, \rho)$.

Для получения более удобных выражений вычисления вычета функции, представим функцию $f \colon \overset{\circ}{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ ее рядом Лорана с центром в точке a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

Так как

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,d\zeta, \quad r \in (0, \rho), \quad n \in \mathbb{Z},$$

то получаем, что интеграл (1) равен коэффициенту c_{-1}, т.е.

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}. \tag{3}$$

Приведем некоторые правила вычисления вычетов.

Лемма 1. Пусть a — полюс функции f порядка $m \leqslant m_0$. Тогда справедлива формула

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(m_0-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} [(z-a)^{m_0} f(z)]. \tag{4}$$

Доказательство. Представим функцию f в виде ряда Лорана (2) с центром в полюсе a порядка m. Так как число $m_0 \geqslant m$, то в ряде (2) коэффициенты $c_n = 0$ при всех $n < -m_0$. Итак,

$$f(z) = \frac{c_{-m_0}}{(z-a)^{m_0}} + \frac{c_{-m_0+1}}{(z-a)^{m_0-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots. \tag{5}$$

Умножая ряд (5) на $(z-a)^{m_0}$, получаем

$$(z-a)^{m_0} f(z) = c_{-m_0} + c_{-m_0+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m_0-1} + \ldots, \quad z \in \overset{\circ}{B}_\rho(a). \tag{6}$$

Так как полученный в правой части равенства (6) степенной ряд сходится в $B_\rho(a)$, то по теореме Абеля (Билет №34) он сходится абсолютно и равномерно внутри области $B_\rho(a)$. Поэтому по теореме 1 (Вейерштрасса) его можно почленно дифференцировать (m_0-1) раз, после чего получаем

$$\frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}}[(z-a)^{m_0}f(z)]=(m_0-1)!c_{-1}+m_0!c_0(z-a)+\ldots,\quad z\in\overset{\circ}{B}_\rho(a).\quad (7)$$

Левая часть равенства (7), очевидно, имеет предел при $z\to a$. Поэтому, переходя к пределу, в силу формулы (3) получаем формулу (4). ■

Лемма 2. Пусть функция $f\colon \overset{\circ}{B}_\rho(a)\to\mathbb{C}$ представима в виде

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},\quad z\in\overset{\circ}{B}_\rho(a),$$

где функции P и Q регулярны в круге $B_\rho(a)$, причем

$$P(a)\neq 0,\quad Q(a)=0,\quad Q'(a)\neq 0.\qquad (8)$$

Тогда справедлива формула

$$\operatorname*{res}_a f=\frac{P(a)}{Q'(a)}.\qquad (9)$$

Доказательство. В самом деле, в силу условия (8) точка a — полюс 1-го порядка функции f и по формуле (4) получаем

$$\operatorname*{res}_a f=\lim_{z\to a}\left[\frac{P(z)(z-a)}{Q(z)}\right]=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$ ■

Определение 2. Пусть функция $f\colon \overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty)\to\mathbb{C}$ регулярна (число $R_0\geqslant 0$). Тогда *вычетом функции f в бесконечности* называется число

$$\operatorname*{res}_\infty f\triangleq\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R^{-1}}f(z)\,dz,\qquad (10)$$

где число $R>R_0$, а окружность $\gamma_R^{-1}=\{z\,\big|\,|z|=R\}$ ориентирована движением по ходу часовой стрелки (т. е. отрицательно).

Аналогично случаю конечной точки оценим $\operatorname{res}_\infty f$ через ряд Лорана для функции f в окрестности $\overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty)$, учитывая, что его коэффициенты имеют вид

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta,\quad n\in\mathbb{Z},\qquad (11)$$

где окружность γ_R при $R>R_0$ ориентирована движением против хода часовой стрелки. Сравнивая выражения (11) и (10), убеждаемся в справедливости формулы

$$\operatorname*{res}_\infty f=-c_{-1},\qquad (12)$$

где c_{-1} — коэффициент разложения функции f в ряд Лорана с центром в бесконечности. Здесь появился знак минус за счет различной ориентации окружности γ_R в формулах (11) и (10).

Лемма 3. Пусть ∞ — устранимая точка функции f. Тогда $\operatorname{res}_\infty f$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty} [z(f(\infty) - f(z))]. \tag{13}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что ряд Лорана в некоторой окрестности $\overset{\circ}{B}_{R_0}(\infty)$ имеет вид

$$f(z) = f(\infty) + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots,$$

т.е.

$$z(f(\infty) - f(z)) = -c_{-1} - \frac{c_{-2}}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

что в пределе при $z \to \infty$ дает формулу (13). ■

Теорема 1 (Коши о вычетах). Пусть дана область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ (см. определения 14, 15 из билета №33). Пусть функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что все a_k различны и если $\infty \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f непрерывно продолжима на границу области G. Тогда справедлива формула

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f. \tag{14}$$

Доказательство.

1. Пусть область G ограничена. Так как число особых точек $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ конечно, то существует число $r>0$ такое, что $B_r(a_k) \subset G \quad \forall k \in \overline{1,n}$, причем замыкания этих кругов попарно не пересекаются. Определим множество $\widetilde{G} \triangleq G \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B_r(a_k)} \right)$.

Множество $\widetilde{G}$ тоже является областью с кусочно-гладкой границей $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k^{-1} \right)$, где γ_k суть окружности $\{z \,\big|\, |z - a_k| = r\}$, ориентированные движением против хода часовой стрелки, а γ_k^{-1} — они же, но ориентированные по ходу часовой стрелки. Получили, что f регулярна на $\widetilde{G}$ и непрерывна на $\overline{\widetilde{G}} = \widetilde{G} \cup \widetilde{\Gamma}$. Тогда по обобщенной теореме 5 Коши (Билет №33) получаем

$$0 = \int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \overset{(1)}{=\!=} \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{res}_{a_k} f,$$

что и дает формулу (14).

2. Пусть $\infty \in G$. Тогда особые точки $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ — конечны, а $a_n = \infty$. Так как по определению 14 (Билет №33) граница Γ состоит из ограниченных гладких компонент, то существует число $R > 0$ такое, что для каждого $z \in \Gamma \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} a_k\right)$ справедливо неравенство $|z| < R$.

Определим $\widetilde{G} = G \cap B_R(0)$. Тогда $\widetilde{G}$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \gamma_R$, где $\gamma_R = \{z \,\big|\, |z| = R\}$ — окружность, ориентированная движением против хода часовой стрелки (см. рис. ?). Для регулярной в $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ функции f по определению 2 справедлива формула

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz. \tag{15}$$

Так как область $\widetilde{G}$ ограничена, то, опираясь на результат п.1, получаем

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{a_k} f. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\, dz = \int_{\Gamma} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \overset{(15)}{=\!=\!=} \int_{\Gamma} f(z)\, dz - 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f,$$

откуда и из (16) следует (14). ■

Следствие 1. Пусть функция f регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Так как ∞, очевидно, является особой точкой данной функции f, то без ограничения общности полагаем, что $a_n = \infty$. Рассмотрим $R > 0$ такое, что все $a_k \in B_R(0) \quad \forall k \in \overline{1, n-1}$. Как обычно, обозначим через $\gamma_R \triangleq \{z \,\big|\, |z| = R\}$ окружность, ориентированную движением против хода часовой стрелки.

Тогда по теореме 1 для области $B_R(0)$ получаем

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{a_k} f. \tag{18}$$

С другой стороны, по определению 2,

$$-\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f,$$

что вместе с (18) дает равенство (17). ■

§38.2 Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов

I. Вычисление интегралов вида

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n,m}(x)\,dx, \tag{19}$$

где $R_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — рациональная функция,

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad Q_m(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0,$$

причем полагаем, что $Q_m(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^1$.

Известно, что интеграл J (19) сходится при условии $m > n+1$, что считаем выполненным.

Для вычисления интеграла (19) определим ориентированный движением против хода часовой стрелки контур $\gamma_R \triangleq [-R, R] \cup C_R$, где $R > R_0 = \max\{|z_k^+| \bigm| k \in \overline{1,l}\}$, а $\{z_k^+\}_{k=1}^l$ — совокупность всех различных нулей многочлена $Q_m(z)$, лежащих в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, полуокружность $C_R \triangleq \{z \bigm| |z|=R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Чтобы воспользоваться теоремой 1 (Коши о вычетах), определим интеграл

$$J_R = \int_{\gamma_R} R_{n,m}(z)\,dz.$$

По теореме 1 (Коши о вычетах), при каждом $R > R_0$

$$J_R = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+} R_{n,m} \right).$$

С другой стороны, имеет место представление интеграла $J_R = J_R^1 + J_R^2$, где

$$J_R^1 \triangleq \int_{-R}^{+R} R_{n,m}(x)\,dx, \quad J_R^2 \triangleq \int_{C_R} R_{n,m}(z)\,dz. \tag{20}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R^1 = J$. Осталось показать, что $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R^2 = 0$, откуда последует формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{n,m}(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+} R_{n,m}. \tag{21}$$

Докажем необходимое утверждение.

Лемма 4. Пусть $\Phi(z)$ — непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z \bigm| \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Пусть $C_R \triangleq \{z \bigm| |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $R > R_0$, — семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим

$$\varepsilon(R) \triangleq \max\{|\Phi(z)| \bigm| z \in C_R\} \quad \text{при} \quad R > R_0.$$

> Если $\lim\limits_{R\to+\infty}\varepsilon(R)R=0$, то $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\Phi(z)\,dz=0$.

Доказательство. Из условий леммы получаем оценки

$$\left|\int_{C_R}\Phi(z)\,dz\right|\leqslant\int_{C_R}|\Phi(z)||\,dz|\leqslant\varepsilon(R)\int_{C_R}|\,dz|=\varepsilon(R)\pi R\to 0. \qquad \blacksquare$$

Применим лемму 4 для случая рациональной функции $\Phi(z)=R_{n,m}(z)$ из правого интеграла в (20) при сформулированных выше условиях (т.е. при $m>n+1$).

При достаточно больших $|z|>R_0$ очевидно справедлива оценка $|\Phi(z)|\leqslant\leqslant 2|z|^{n-m}$, т.е. $\varepsilon(R)R\leqslant 2R^{n-m+1}\to 0$, откуда следует, что выполнены условия леммы 4, по которой получаем равенство $\lim\limits_{R\to+\infty}J_R^2=0$.

Таким образом, формула (21) обоснована полностью.

II. Вычисление интегралов вида

$$J=\int_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)\,d\varphi, \tag{22}$$

где $R(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$; P_n,Q_m — многочлены переменных x и y.

Сделаем замену $z=z(\varphi)=e^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Тогда
$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $dz=ie^{i\varphi}\,d\varphi$, т.е.

$$J=\int_0^{2\pi}R\left(\frac{z(\varphi)}{2}+\frac{1}{2z(\varphi)},\ \frac{z(\varphi)}{2i}-\frac{1}{2iz(\varphi)}\right)\cdot\frac{z'(\varphi)}{iz(\varphi)}\,d\varphi=$$
$$=\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}R_1(z)\,dz.$$

В итоге интеграл (22) свелся к интегралу по кругу $|z|=1$ от рациональной функции $R_1(z)$, который легко может быть вычислен с помощью теоремы 1 (Коши о вычетах).

III. Вычисление интегралов вида

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}R(x)\,dx, \tag{23}$$

где $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — рациональная функция, причем $m-n\geqslant 1$, α — действительное число, $\alpha>0$ и $Q_m(x)\neq 0$ при всех $x\in\mathbb{R}^1$ (т.е. интеграл (23) есть преобразование Фурье рациональной функции R).

Для получения условий сходимости интеграла (23) представим подынтегральную функцию в виде

$$R(x)e^{i\alpha x}=\frac{e^{i\alpha x}}{x^{m-n}}+O\left(\frac{1}{x^{m-n+1}}\right)\qquad |x|>1.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{x^{m-n}}\,dx$ сходится при $m-n\geqslant 1$ (по признаку Дирихле: функция $\int_1^x e^{i\alpha t}\,dt$ ограничена по модулю, а функция $\frac{1}{x^{m-n}}$ монотонно стремится к нулю при $z \to +\infty$). Интеграл $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{x^{m-n+1}}\right) dx$ сходится абсолютно, так как по условию $m - n + 1 \geqslant 2$. Сходимость интеграла (23) в $-\infty$ при $m - n \geqslant 1$ проверяется аналогично.

Рассмотрим, как и в пункте I, положительно ориентированный контур $\gamma_R \triangleq [-R, R] \cup C_R$. При достаточно больших $R > R_0 = \max\{|z_k^+| \mid k \in \overline{1, l}\}$ получаем

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} R(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+}(e^{i\alpha z} R(z)), \tag{24}$$

где через $\{z_k^+\}$ обозначены все различные нули многочлена $Q_m(z)$ (знаменателя функции $R(z)$), лежащие в верхней полуплоскости.

С другой стороны, справедливо представление интеграла

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} R(z)\, dz = \int_{-R}^{+R} e^{i\alpha x} R(x)\, dx + \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z)\, dz. \tag{25}$$

Первое слагаемое справа в (25), очевидно, стремится к искомому значению J интеграла (23) при $R \to +\infty$. Необходимо исследовать второе слагаемое в (25).

Лемма 5 (Жордана). Пусть $\Phi(z)$ — непрерывная функция на замкнутом множестве $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0,\ |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Пусть число $\alpha > 0$ и $C_R \triangleq \{z \mid |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $R > R_0$ — семейство полуокружностей в верхней полуплоскости. Обозначим

$$\varepsilon(R) \triangleq \max\{|\Phi(z)| \mid z \in C_R\} \quad R > R_0.$$

Если $\lim\limits_{R\to+\infty} \varepsilon(R) = 0$, то $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)\, dz = 0$.

Доказательство. Пусть $z \in C_R$, тогда $z = Re^{i\varphi} = R\cos\varphi + iR\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Поэтому при $z \in C_R$

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha(x+iy)}| = e^{-\alpha y} = e^{-\alpha R \sin\varphi}.$$

Воспользуемся для оценки неравенством

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi \qquad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{26}$$

Получаем

$$\left|\int_{C_R} e^{i\alpha z}\Phi(z)\, dz\right| \leqslant \int_{C_R} |\Phi(z)| e^{-\alpha R\sin\varphi} |\, dz| \leqslant \varepsilon(R) R \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin\varphi}\, d\varphi =$$
$$= 2\varepsilon(R) R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\varphi}\, d\varphi \leqslant 2\varepsilon(R) R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R 2\varphi/\pi}\, d\varphi \leqslant \frac{\pi}{\alpha}\varepsilon(R),$$

т.е. справедливо заключение леммы. ■

Возвращаясь к формуле (25), покажем с помощью леммы 5 Жордана, что второй интеграл в (25) стремится к нулю при $R \to \infty$. При достаточно больших $R > R_0$ в силу условий сходимости $m - n \geqslant 1$ получаем $\varepsilon(R) \leqslant \frac{2}{R^{m-n}} \leqslant \frac{2}{R} \to 0$. В силу леммы 5 имеет место равенство $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} R(z)\,dz = J$, а потому справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z_k^+}(e^{i\alpha z} R(z)). \tag{27}$$

Следствие 2. Интегралы вида

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x \cdot R(x)\,dx \quad \text{и} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x \cdot R(x)\,dx, \tag{28}$$

где $R(x)$ — рациональная функция, сводятся к интегралу вида (23), т.е.

$$J_1 = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx, \quad J_2 = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} R(x)\,dx.$$

Приложения

X

А. Формулы к письменному ГОСу[1]

§1.1 Тригонометрические формулы

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$

Формула Эйлера и ее следствия

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \quad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y};$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}.$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

Формулы понижения степени

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x; \qquad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x;$$

$$4 \sin^3 x = 3 \sin x - \sin 3x; \quad 4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x;$$

Формулы преобразования суммы

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}; \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

Формулы преобразования произведения

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y); \quad 2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y).$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y);$$

Формулы приведения

	$\pi/2 - x$	$\pi/2 + x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$3\pi/2 - x$	$3\pi/2 + x$	$2\pi - x$	$2\pi + x$
sin	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
cos	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
tg	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x$
ctg	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$

Алгоритм действий, который здесь работает:

1. Определите знак первоначальной функции в соответствующей четверти. Ставим этот знак перед новой функцией. Напомним знаки:

[1] Для компактности в данном разделе не указаны допустимые значения аргументов и параметров в большинстве случаев.

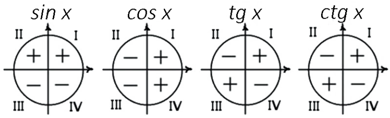


Рис. А.1

2. • При $\pi/2$ и $3\pi/2$ функция меняется на кофункцию.
   • При π и 2π функция не меняется на кофункцию.

§1.2 Гиперболические функции

Определение

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1};$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x};$$

Важное соотношение

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

Связь с тригонометрическими функциями

$$\operatorname{ch}(ix) = \cos x; \quad \operatorname{sh}(ix) = i \sin x; \quad \operatorname{th}(ix) = i \operatorname{tg} x;$$

$$\cos(ix) = \operatorname{ch} x; \quad \sin(ix) = i \operatorname{sh} x; \quad \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x.$$

Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x; \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

Формулы двойного угла

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x \qquad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \qquad \operatorname{cth} 2x = \frac{1}{2}(\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x)$$

Формулы понижения степени

$$2 \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1 \qquad 2 \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x - 1$$

$$4 \operatorname{sh}^3 x = \operatorname{sh} 3x - 3 \operatorname{sh} x \qquad 4 \operatorname{ch}^3 x = \operatorname{ch} 3x + 3 \operatorname{ch} x$$

Формулы преобразования произведения

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)}{2} \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)}{2}$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)}{2}$$

Формулы преобразования суммы

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2} \qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y} \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$$

§1.3 Обратные гиперболические функции

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ |x|<1.$$

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1});\ x \geqslant 1 \qquad \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \ |x|<1.$$

§1.4 Производные

Формулы для производных элементарных функций

$(C)' = 0\ (C = const)$; $(e^x)' = e^x$;

$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$; $(x^a)' = ax^{a-1},\ x > 0$;

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x,\ a > 0$; $(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

$(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$; $(\operatorname{arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$;

Формула Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$$

§1.5 Ряд Тейлора

Замечание. Здесь указаны ряды Тейлора при $x \to 0$, т.е. ряды Маклорена. За R обозначен радиус сходимости. Для ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ его можно определить по формуле Коши—Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Более удобная, но менее универсальная формула:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3);$ $\quad e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},\ R = \infty;$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5);$ $\quad \sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty;$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$ $\quad \cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ R = \infty;$

$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ $\quad \operatorname{tg} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{2n}\cdot(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1},\ R = \frac{\pi}{2};$ [2]

$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5);$ $\quad \operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty;$

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$ $\quad \operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ R = \infty;$

$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5);$ $\quad \operatorname{th} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{2n}4^n(4^n-1)}{(2n)!} x^{2n-1}, R = \frac{\pi}{2};$

$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5);$ $\quad \arcsin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, R = 1;$

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$ $\quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x;$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5);$ $\quad \operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ R = 1;$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$ $\quad \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, R = 1;$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3);$ $\quad \ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, R = 1;$

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + o(x^3);$ $\quad (1+x)^a = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_a^n x^n$, где $C_a^n = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!},\ R = 1;$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3);$ $\quad \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n;$

$\operatorname{arsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5);$ $\quad \operatorname{arsh} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, R = 1;$

$\operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5);$ $\quad \operatorname{arth} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, R = 1;$

[2] В этой формуле B_{2n} — это числа Бернулли. На самом деле, далеко не все формулы надо знать наизусть. Но левый столбец из формул Маклорена по-хорошему надо для ГОСа знать

Несколько рядов Лорана

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + o(x^3); \qquad \operatorname{cth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!}, \quad 0 < |x| < \pi;$$

$$\operatorname{arch} x = \ln 2x - \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right); \qquad \operatorname{arch} x = \ln 2x - - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right) \frac{x^{-2n}}{(2n)}, \ |x| > 1;$$

$$\operatorname{arcth} x = = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^5}\right); \qquad \operatorname{arcth} x = \sum_{\infty}^{n=1} \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}, x > 1.$$

§1.6 Основные неопределенные интегралы

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C; \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \ a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, \ |x| < a, \ a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C, \ a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \ a \neq 0, \ |x| < |a|.$$

§1.7 Вычисление площадей плоских фигур и длин кривых

§1.8 Вычисление объемов тел и площадей поверхностей

§1.9 Несобственные интегралы

Интеграл	сходится при	расходится при
$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$	$\alpha > 1$	$\alpha \leqslant 1$
$\int_0^{1} \frac{dx}{x^a}$	$\alpha < 1$	$\alpha \geqslant 1$
$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^a \lvert \ln x \rvert^\beta}$	$\alpha > 1, \forall\beta$	$\alpha < 1, \forall\beta$

	$\alpha=1,\ \beta>1$	$\alpha=1,\ \beta\leqslant 1$
$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^a\lvert\ln x\rvert^\beta}$	$\alpha<1,\ \forall\beta$	$\alpha>1,\ \forall\beta$
	$\alpha=1,\ \beta<1$	$\alpha=1,\ \beta\geqslant 1$

§1.10 Криволинейные интегралы

Первого рода

$$\int\limits_\Gamma F(x,y,z)ds=\int\limits_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

$$\int\limits_\Gamma F(x,y)ds=\int\limits_\alpha^\beta F(x,f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dt,\quad y=f(x)$$

Второго рода

$$\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_\alpha^\beta \left(Px'(t)+Qy'(t)+Rz'(t)\right)\,dt$$

Формула Грина

$$\oint\limits_{\Gamma+} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

§1.11 Поверхностные интегралы

Первого рода

$$I=\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)dS=\iint\limits_D f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right),z\left(u,v\right)\right)\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

$$E=\left(x_u'\right)^2+\left(y_u'\right)^2+\left(z_u'\right)^2,\quad F=x_u'\,x_v'+y_u'\,y_v'+z_u'\,z_v',\quad G=\left(x_v'\right)^2+\left(y_v'\right)^2+\left(z_v'\right)^2$$

$$I=\iint\limits_S f\left(x,y,z\right)dS=\iint\limits_D f(x,y)\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}dxdy,\quad z=z(x,y)$$

Второго рода

(считать как интеграл 1 рода)

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy{=}\iint\limits_S((P,Q,R),n)dS){=}\iint\limits_S det\begin{vmatrix} P & Q & R\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}dudv$$

$$n{=}[r_u,r_v],\quad r{=}r(u,v){=}(x(u,v),y(u,v),z(u,v),),\quad n{=}\frac{-z_xi-z_yj+k}{\sqrt{(z_x)^2+(z_y)^2+1}},\quad z=$$
$$=z(x,y)$$

Формула Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{S+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{G} (P_x + Q_y + R_z)\,dxdydz, \qquad \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = $$
$$= \oiint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

Формула Стокса

$$\int\limits_{\Gamma+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S+} det \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dudv, \qquad \int\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{\Sigma} =$$
$$= \int\limits_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

§1.12 Преобразование координат

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$$

Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad J = r^2\sin\theta \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad J = \rho \\ z = z. \end{cases}$$

§1.13 Векторное поле

- $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$

- $\operatorname{div}\ \mathbf{F} = (\nabla, \mathbf{F}) = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = \lim\limits_{V\to 0} \dfrac{\oiint\limits_{S} (\vec{F}, d\vec{S})}{V}$

- $\operatorname{rot}\ \mathbf{F} = [\nabla, \mathbf{F}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \lim\limits_{\Delta S\to 0} \dfrac{\oint\limits_{L} \mathbf{a}\cdot, \mathbf{dr}}{\Delta S}$

§1.14 Поверхности вращения

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx, \quad y = f(x),\ a \leq x \leq b \text{ вокруг Ox}$$

$$S = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt, \quad x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$$

$$S = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)|\sin\varphi|\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi, \quad r = \rho(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$$

§1.15 Ряды Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l})$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin(nx)dx,$$

2n - четность относительно $\frac{\pi}{2}$ такая же, как относительно 0

Равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$

§1.16 Признаки Даламбера и Коши

§1.17 3.9изКудрявцева

§1.18 Криволинейные интегралы

первого

$$\int\limits_\Gamma F\, ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

второго

$$\int\limits_{\Gamma} \left(P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t) \right) dt$$

грина

§1.19 Поверхностные интегралы

определение
гауссостроградский
стокса

§1.20 Теория поля

§1.21 Все для Фурье

§1.22 Вычеты

Определение (смотри точные формулировки в соответствующих параграфах):

- $\operatorname*{res}_a f = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_\rho^+} f(\xi)\,d\xi,\ \ a \in \mathbb{C}.$
- $\operatorname*{res}_a f = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_\rho^-} f(\xi)\,d\xi,\ \ a = \infty.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0$

Формулы для подсчета вычета в конечной точке $a \in \mathbb{C}$.

- Общая формула с использованием ряда Лорана:
$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}.$$
- Если a — устранимая особая точка, то
$$\operatorname*{res}_a f = 0.$$
- Если a — полюс первого порядка, то
$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z \to a} f(z) \cdot (z - a).$$
- Если a — полюс первого порядка, причем $f = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z),\ h(z)$ — регулярные в точке a, $g(a) \neq 0,\ \ h(a) = 0.\ h'(a) \neq 0$, то
$$\operatorname*{res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

- Если a — все еще полюс первого порядка и эта $h(z)=z-a$, т.е. $f=\dfrac{g(z)}{z-a}$, то
$$\operatorname*{res}_a f = g(a).$$

- Если a — полюс порядка $n \in \mathbb{N}$, то
$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z)(z-a)^n\right).$$

- Если a — полюс порядка $n \in \mathbb{N}$, то, в частности, если $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, где $h(z)$ — регулярная в точке a, то
$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a),$$
т.е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту при $(z-a)^{m-1}$ ряда Тейлора $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

- Если a — существенно особая точка, то, подчеркну, что
$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}.$$

Формулы для подсчета вычета в бесконечности

- Общая формула с использованием ряда Лорана:
$$\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1}.$$

- Если a — устранимая особая точка, то
$$\operatorname*{res}_\infty f = \lim_{z\to\infty} \left(f(\infty) - f(z)\right) \cdot z, \text{ где } f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z).$$

§1.23 Формулы из комбинаторики

Формулы де Моргана для множеств (законы двойственности)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Формула включений-исключений для мощности множества

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Размещения, перестановки и сочетания

- $A_n^k = (n)_k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ — размещения;
- $P_n = A_n^n = n!$ — перестановки;

- $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ — сочетания;

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_n^k \binom{n}{k} a^k b^{n-k};$$

Другие свойства биномиального коэффициента

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{k}{n}$;

$\sum_n^k \binom{n}{k} = 2^n$ $\sum_n^k (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Известная задача про шары и ящики (*Ссылка*)

Пусть у нас есть k шаров и n ящиков. Необходимо подсчитать количество способов распределить шары по ящикам с выполнением некоторых из следующих условий:

- *Упорядоченность шаров.* Шары могут быть как различимы друг от друга, так и неразличимы.
- *Упорядоченность ящиков.* Ящики могут быть как различимы друг от друга, так и неразличимы.
- *Исключения ящиков (Повторения шаров).* Если мы положили шар в ящик, то далее, мы можем исключаем этот ящик из рассмотрения и больше не кладем в него мячей. Иначе говоря, при этом условии ящики могут содержать не более, чем один шар.
- *Пустота ящиков.* Ящики можно или нельзя оставлять пустыми.

Шары	Ящики	Исключ.?	Нет пустых?	Количество размещений k шаров в n ящиков
Разл.	Разл.	Да		$(n)_k$
Разл.	Разл.	Да	Да	$\begin{cases} n!, & \text{если } k = n \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$
Разл.	Разл.	Нет		n^k
Разл.	Разл.	Нет	Да	$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$
Неразл.	Разл.	Да		$\binom{n}{k}$
Неразл.	Разл.	Да	Да	$\begin{cases} 1, & \text{если } k = n \\ 0, & \text{если } k \neq n. \end{cases}$
Неразл.	Разл.	Нет		$\binom{n+k-1}{k}$

Неразл.	Разл.	Нет	Да	$\binom{k-1}{n-1}$

§1.24 Теория вероятностей

Формула включений-исключений для вероятностей

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{k-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_k);$$

§1.25 Суммирование

Арифметическая прогрессия

$a_{n+1} = a_n + d;$

$a_n = a_1 + (n-1)d;$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$

$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n \geq 2;$

$a_k + a_{n-k} = a_1 + a_n,\ \ k \in \overline{1, n}.$

Геометрическая прогрессия

$b_n = b_1 q^{n-1};$

$S_n = b_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1;$

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}, n \geq 2,$

$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n,\ \ k \in \overline{1, n};$

Если $|q| < 1$, то $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$

Числовые неравенства

1) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab;$

2) Неравенства средних $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ и $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n};$

3) Неравенство Коши—Буняковского $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right).$

§1.26 Некоторые замечательные пределы.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$

$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$

§1.27 Асимптоты графиков

- Прямая $x = x_0$ — вертикальная асимптота графика $f(x)$, если

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

- Прямая $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x), x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

- Прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота графика $f(x), x \to \pm\infty$ (случай $k = 0$), если

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b.$$

§1.28 Дифференциальные уравнения

Точки равновесия

- Узел: $\lambda_1\lambda_2 > 0, \quad \mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0$ (на графике касается прямой с меньшим $|\lambda|$)
  - Устойчивый $\lambda_{1,2} < 0$)
  - Дикритический $\lambda_1 = \lambda_2$ (кратность 2)
  - Вырожденный $\lambda_1 = \lambda_2$ (кратность 1)
- Седло: $\lambda_1\lambda_2 < 0, \quad \mathrm{Im}\lambda_1 = \mathrm{Im}\lambda_2 = 0$
- Фокус: $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 \neq 0$
- Центр: $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0$

§1.29 Некоторые дискретные распределения

Распределение	Формула	Параметры	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$
Вырожденное	$P(\xi = a) = 1$	$a = const$	a	0
Биномиальное	$P(\xi=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Пуассона	$P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\lambda > 0$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$	λ	λ
Геометрическое	$P(\xi = k) = p(1-p)^k$	$0 < p \leqslant 1$, $k \in$ $\in \{0\} \cup \mathbb{N}$	$\dfrac{1-p}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$

§1.30 Некоторые абсолютно непрерывные распределения

Распределение	Формула	Параметры	$\mathbb{E}$	$\mathbb{D}$
Равномерное на отрезке $[a;b]$	$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a;b]; \\ 0, x \notin [a;b]. \end{cases}$	$a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Нормальное (или гауссовское)	$p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in$ $\in (0; +\infty)$	μ	σ^2
Показательное	$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0; \\ 0, x \leqslant 0. \end{cases}$	$\lambda > 0$	λ^{-1}	λ^{-2}

Гамма-распределение	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x>0;\\ 0, x\leqslant 0\end{cases}$ (здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$)	$\lambda>0,\ \alpha>0$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
Коши	$p(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{b}{1+b^2x^2},\ x\in\mathbb{R}$	$b>0$	не сущ.	$+\infty$

§1.31 Площади различных фигур

Фигура	Формула	Переменные
	Многоугольники	
Правильный треугольник	$a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	a — длина стороны треугольника
Прямоугольный треугольник	$\dfrac{ab}{2}$	a и b — катеты треугольника
Произвольный треугольник	$\dfrac{1}{2}ah$	a — сторона треугольника, h — высота, проведённая к этой стороне
	$\dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$	a и b — любые две стороны, α — угол между ними
	$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона)	a, b и c — стороны треугольника, p — полупериметр $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$;
	$\lvert\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}\rvert$	$(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — координаты вершин треугольника (обратите внимание на знак модуля).
Квадрат	a^2	a — длина стороны квадрата
Прямоугольник	ab	a и b — длины сторон прямоугольника (его длина и ширина)
Ромб	$\dfrac{1}{2}cd$	c и d — длины диагоналей ромба
Параллелограмм	ah или $ab\sin\alpha$	a и h — длины стороны и опущенной на неё высоты соответственно, b — соседняя к a сторона, α — угол между ними
Трапеция	$\dfrac{1}{2}(a+b)h$	a и b — основания трапеции, h — высота трапеции
Произвольный четырёхугольник	$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)\cdot \cdot(p-d)-abcd\cos\alpha}$ (формула Брахмагупты)	a, b, c, d — стороны четырёхугольника, p — его полупериметр, α — полусумма противолежащих углов четырёхугольника
Правильный шестиугольник	$a^2\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	a — длина стороны шестиугольника
Правильный восьмиугольник	$2a^2(1+\sqrt{2})$	a — длина стороны восьмиугольника
Правильный многоугольник	$\dfrac{P^2/n}{4\,\mathrm{tg}(\pi/n)}$	P — периметр, n — количество сторон

Фигура	Формула	Переменные
Произвольный многоугольник	$\frac{1}{2}\left\lvert\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}+y_i)\right\rvert$ (метод трапеций)	$(x_i; y_i)$ — координаты вершин многоугольника в порядке их обхода, замыкая последнюю с первой: $(x_{n+1}; y_{n+1}) = (x_1; y_1)$; при наличии отверстий направление их обхода противоположно обходу внешней границы многоугольника
Площади круга, его частей, описанных и вписанных в круг фигур		
Круг	πr^2 или $\frac{\pi d^2}{4}$	r — радиус, d — диаметр круга
Сектор круга	$\frac{\alpha r^2}{2}$	r — радиус круга, α — центральный угол сектора (в радианах)
Сегмент круга	$\frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$	r — радиус круга, α — центральный угол сегмента (в радианах)
Эллипс	πab	a, b — большая и малая полуоси эллипса
Треугольник, вписанный в окружность	$\frac{abc}{4R}$	a, b и c — стороны треугольника, R — радиус описанной окружности
Четырёхугольник, вписанный в окружность	$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (формула Брахмагупты)	a, b, c, d — стороны четырёхугольника, p — его полупериметр
Многоугольник, описанный около окружности	$\frac{1}{2}Pr$	r — радиус окружности, вписанной в многоугольник, P — периметр многоугольника
Прямоугольная трапеция, описанная около окружности	ab	a, b — основания трапеции
Площади поверхностей тел в пространстве		
Полная поверхность цилиндра	$2\pi r(r+h)$	r и h — радиус и высота соответственно
Боковая поверхность цилиндра	$2\pi rh$	r и h — радиус и высота соответственно
Полная поверхность конуса	$\pi r(l+r)$	r и l — радиус и образующая боковой поверхности соответственно
Боковая поверхность конуса	πrl	r и l — радиус и образующая боковой поверхности соответственно
Поверхность сферы (шара)	$4\pi r^2$ или πd^2	r и d — радиус и диаметр соответственно

В. Предметный указатель

У

Ф

Учебное издание

Подготовка к ГОСу по Матану