

例6 若 a, b, c 是正数, 解方程: $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$.

例7 已知关于 x 的方程 $ax + 6 = 5x - b$ 有无数个解, 试求 $a^2 + b$ 的值.

例7: $0 \cdot x = 0$

$$\begin{aligned} ax + 6 &= 5x - b \\ ax - 5x &= -b - 6 \\ (a-5)x &= -(b+6) \\ \text{若 } (a-5) \neq 0 &\text{ 则唯一解} \\ \therefore a-5 &= 0 \\ 0 \cdot x &\neq \text{非} 0 \\ \therefore b+6 &= 0 \\ a=5, b &= -6 \\ a^2 + b &= 19. \end{aligned}$$

关于 x 的方程 $ax = b$

- ① $a \neq 0, x = \frac{b}{a}$ (唯一)
- ② $a = 0, 0 \cdot x = b$, 若 $0 \cdot x = 1$ 无解.
 $b \neq 0$, 无解
- ③ $a = 0, b = 0$ (无数解)

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$$

设 $a+b+c = t$

$$\frac{x-(a+b+c)+c}{c} + \frac{x-(a+b+c)+a}{a} + \frac{x-(a+b+c)+b}{b} = 3$$

$$\frac{x-t+c}{c} + \frac{x-t+a}{a} + \frac{x-t+b}{b} = 3$$

$$\frac{x-t}{c} + 1 + \frac{x-t}{a} + 1 + \frac{x-t}{b} + 1 = 3$$

$$(x-t) \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

若 $x \neq t$, ① a, b, c 是正数, ② $x \neq 0$, ③ $0 = x - t$

$$\begin{aligned} \therefore x-t &= 0 \\ x &= t \\ x &= a+b+c \end{aligned}$$