ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'INÉGALITÉ $(i)^p + (i+1)^p < (i+2)^p$

AGBANDA MAGNOURÉWA DIDIER,L3 Mathématiques,UNIVÉRSITÉ DE LOMÉ

21 février 2026

Résumé

Tout commence avec cet exercice : Comparer les deux nombres :$2^{100} + 3^{100} et 4^{100}$. Pour sa résolution nous pouvons procéder comme suit :

$$2^{100} + 3^{100} < 3^{100} + 3^{100} = 2.3^{100} = 2.3^3.3^{97} = 54.3^{97} < 64.4^{97} = 4^3.4^{97} = 4^{100}$$

Alors la curiosité ici est de savoir ce qui se passait si nous essayons de faire la même comparaison avec trois autres entiers naturels consécutifs. Dans ce article, j' étudies numériquement et j'essaies de voir le comportement global de l'inéquation

$$(i)^p + (i+1)^p < (i+2)^p$$

où bien-sûr i et p sont des entiers naturels. Ici mon étude ne portera pas uniquement sur la variations des trois éléments consécutifs mais mais aussi sur la variation de l'exposant.

1 Introduction

Les inégalités faisant intervenir les puissances sont assez fréquentes dans le monde des mathématiques ,bien que certaines de ces inégalités aient une forme simple et élémentaire , leur comportement peut dépendre de manière subtile de leurs paramètres. Je vais m'intéresser ici à l'inéquation

$$(i)^p + (i+1)^p < (i+2)^p$$

où i et p sont des entiers naturels. D'abord nous allons vérifier si cette inéquation est vraie pour tout p

$$\in \{1, 2, \ldots, 100\},$$

. Si c'est le cas alors nous affirmons que l'inégalité est donc vraie pour p compris entre 0 et 100 ainsi nous pourrons essayer plus tard d'étendre cette inégalité sur un intervalle plus grand et pourquoi pas apporter une démonstration mathématique de sa véracité quelque soit p ?. Si l'inégalité n'est pas vérifiée alors j'essayerai de trouver une relation nécessaire et suffisante entre i et p pour qu'elle reste vraie.

2 Cadre de l'étude

Rappelons que dans toute la suite on considère :

$$i \in \{0, 1, 2, \ldots, 100\}, \quad p \in \{1, 2, \ldots, 100\}.$$

(Je changerai l'intervalle quand besoin sera.) Et que l'étude est menée selon 02 axes :

— pour une valeur fixée de p,on examine la validité de l'inégalité pour toutes les valeurs de i comprises entre 0 et 100 ;on répète cette étude pour plusieurs valeurs entières de p ;
— on cherche un intervalle de validité de l'inéquation

3 Observations élémentaires

Remarquons que :

Cas $p = 1$

Dans ce cas , l'inégalité devient

$$i + (i + 1) < i + 2,$$

ce qui équivaut à $2i + 1 < i + 2$. Et bien sur cette inégalité est fausse pour tout $i \geq 1$(mais vraie pour i=0)

Cas $p = 2$

Pour $p = 2$,on obtient

$$i^2 + (i + 1)^2 < (i + 2)^2.$$

ce qui est vérifiée juste pour un nombre fini de valeurs de i.(vraie pour i=0,1,2)

Ces premiers exemples montrent que l'inégalité ne peut être vraie pour toutes les valeurs de i pour un p fixé. Je vais me tourner vers le deuxième volet de mon étude, trouver une relation entre p et i pour laquelle l'inégalité est vérifiée. pour cela voici les codes python nécessaires :

4 Implémentation python

Cette section présente le code python utilisé pour tester numériquement l'inégalité étudiée.

```
def inegalite(i,p):
        return i**p+(i+1)**p<(i+2)**p
\end {lstlisting}
\subsection{\'Etude pour une valeur fix\'ee de $p$}
\begin {lstlisting}
def valeur_p_fixe(p,i_max=100):
        results=[]
        for i in range(0,101):
                if inegalite(i,p):
                        results.append(i)
        return results
```

Cette fonction renvoie la liste des entiers i pour lesquels l'inégalité est vérifiée pour une valeur de p.

4.1 Étude pour toutes les valeurs de p

```
def Etude_de_tout_p(p_max=100,i_max=100):
    test={}
    for p in range(1,p_max+1):
        for i in range(0,i_max+1):
                test[p-1]=len(valeur_p_fixe(p)
    return test
```

Cette fonction renvoie le nombre de i compris entre 0 et 100 pour lesquels l'inégalité est vérifiée : Par exemple nous pouvons remarquer que pour $p = 6$ nombre de i=12 ; pour p=14, le nombre de i =28

5 Observations et Conjecture

Nous constatons que l'inégalité reste vraie pour un certain nombre fini de valeurs de i qui n'est pas le même pour différentes valeurs de p. Ma remarque est donc celle ci : **pour tout i et p, entiers naturels, l'inégalité $(i)^p + (i+1)^p < (i+2)^p$ reste vraie pour "$(2p-1)$" i consécutifs en partant de 0. L'on pourrait s'en convaincre en augmentant l'intervalle de variation de i et de p.**

6 Conclusion

Cette étude numérique sur l'inégalité $(i)^p + (i+1)^p < (i+2)^p$ nous montre que toutes les valeurs de i n'obéissent pas à cette inégalité, mais nous rassure que les $2p-1$ premiers i quant à eux ,vérifient l'inéquation. Ainsi je pourrais déclarer sans vérification que

$$(20)^{20} + (21)^{20} < (22)^{20}$$

car i=20 fais partir des 39($2 * p - 1$) premiers termes , ou encore que

$$(100)^{100} + (101)^{100} < (102)^{100}$$

et cela parce que $100 \in [0, 2 * p - 1]$.

7 Bibliographie

-OBJECTIF OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUE,TOME1 :ALGEBRE Mohammed Aassila