Chapitre I : Logique, Ensembles, Applications et Relations

I- Logique

Dans ce paragraphe on va faire une introduction des premiers éléments de la logique classique.

1. Notions logique

1.1. <u>Définition</u> On appelle proposition logique toute relation P qui est soit vraie soit fausse.

- Quand la proposition est vraie, on lui affecte la valeur V
- Quand la proposition est fausse, on lui affecte la valeur F.

Ces valeurs sont appelées "Valeurs de vérité de la proposition".

Ainsi, pour définir une proposition logique, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tableau qu'on nommera "Table de vérités" ou "Tableau de vérités"

1.2. L'équivalence ⇔ : On dit que deux propositions logiques P et Q sont logiquement équivalents, ou équivalentes, si elles ont les mêmes valeurs de vérité. On note : P ⇔ Q.

Sa table de vérités est donnée par :

P	F	F	V	V
Q	F	V	F	V
P ⇔ Q	V	F	F	V

Il est clair que Si O, P et Q sont trois propositions logiques, alors : si O est équivalente à P et P équivalente à Q, alors O est équivalente à Q.

2. Opérations Logiques

2.1. La négation ¬ :

Etant donnée une proposition logique P, on appelle négation de P la proposition logique, qu'on note $\overline{P}$, qui est fausse quand P est vraie et qui est vraie quand P est fausse, donc on peut la représenter comme suit :

P	F	V
$\overline{P}$	V	F

En établissant les tables de vérités des propositions P ⇔ Q et $\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}$, on déduit que : $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q})$

Propriété 1 : La négation de la négation d'une proposition logique P est équivalente à P, donc : $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$

2.2. La Conjonction ∧ :

Etant données deux propositions logiques P et Q, on appelle conjonction de P et Q, la proposition logique P ∧ Q qui est Vraie quand P et Q sont vraies à la fois. Sa table de vérités est donnée par :

P	F	F	V	V
Q	F	V	F	V
P ∧ Q	F	F	F	V

Propriété 2 : Soit P une proposition logique, alors $P \wedge \overline{P}$ est une proposition fausse.

2.3. La Disjonction $\vee$:

Etant données deux propositions logiques P et Q, on appelle disjonction de P et Q, la proposition logique $P \vee Q$ qui est Vraie si l'une des propositions logiques P ou Q est vraie.
Sa table de vérités est donnée par :

P	F	F	V	V
Q	F	V	F	V
$P \vee Q$	F	V	V	V

Propriété 3 : Soit P une proposition logique, alors $P \wedge \overline{P}$ est une proposition fausse et $P \vee Q$ est toujours vraie.

2.4. Règles de De Morgan

Propriété 4 (Règles de De Morgan) : Soient P et Q deux propositions logiques, alors :

- $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$
- $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$

Preuve : Etablir les tableaux de vérités des propositions logiques correspondantes.

P	**F**	**F**	**V**	**V**
Q	**F**	**V**	**F**	**V**
$\overline{\mathbf{P}}$	**V**	**V**	**F**	**F**
$\overline{\mathbf{Q}}$	**V**	**F**	**V**	**F**
$\overline{\mathbf{P}} \vee \overline{\mathbf{Q}}$	**V**	**V**	**V**	**F**
$\overline{\mathbf{P}} \wedge \overline{\mathbf{Q}}$	**V**	**F**	**F**	**F**
$P \vee Q$	**F**	**V**	**V**	**V**
$\overline{\mathbf{P} \vee Q}$	**V**	**F**	**F**	**F**
$P \wedge Q$	**F**	**F**	**F**	**V**
$\overline{\mathbf{P} \wedge Q}$	**V**	**V**	**V**	**F**

2.5. L'Implication $\Longrightarrow$:

Etant données deux propositions logiques P et Q, on note $(P \Longrightarrow Q)$ la proposition logique qui est Fausse si P est Vraie et Q est Fausse. Quand la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ est Vraie, on dit que la proposition P implique la proposition Q.
Sa table de vérités est donnée par :

P	F	F	V	V
Q	F	V	F	V
$P \Longrightarrow Q$	V	V	F	V

Rq : Etant données deux propositions logiques P et Q, alors $(P \Longrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \vee \bar{P})$

2.6. La contraposée

Dans certaines situations, il est difficile de montrer directement l'implication $(P \Longrightarrow Q)$ alors on essaye de donner une autre proposition équivalente qui pourrait être plus facile à établir.

Propriété .5 : Etant données deux propositions logiques P et Q, alors les propositions suivantes sont équivalentes : $(P \Longrightarrow Q)$ et $(\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$.

Preuve : $(\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{\bar{Q}})$

$\Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$

$\Leftrightarrow (Q \vee \bar{P})$

$\Leftrightarrow (P \Longrightarrow Q)$

2.7. La réciproque

Etant données P et Q deux propositions logiques, on appelle la Réciproque de l'implication $(P \Longrightarrow Q)$ la proposition $(Q \Longrightarrow P)$

3. Propriétés des opérations logiques

Propriété 6 : Soient O, P et Q trois propositions logiques, alors

1. $((O \vee P) \vee Q) \Leftrightarrow (O \vee (P \vee Q))$ *(Associativité de* $\vee$*)*
2. $((O \wedge P) \wedge Q) \Leftrightarrow (O \wedge (P \wedge Q))$ *(Associativité de* $\wedge$*)*
3. $((O \vee P) \wedge Q) \Leftrightarrow ((O \wedge P) \vee (O \wedge Q))$ *(Distributivité de* $\wedge$ *par rapport à* $\vee$*)*
4. $((O \wedge P) \vee Q) \Leftrightarrow ((O \vee Q) \wedge (P \vee Q))$ *(Distributivité de* $\vee$ *par rapport à* $\wedge$*).*
5. $((O \Longrightarrow P) \wedge (P \Longrightarrow Q)) \Longrightarrow (O \Longrightarrow Q)$. *(Transitivité de* $\Longrightarrow$*).*

Preuve : TD.

Propriété 7 : *Etant données deux propositions logiques P et Q, alors*

$[P \Leftrightarrow Q] \Leftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)]$

4. Le Raisonnement

Pour faire une démonstration mathématique nous somme amené à raisonner. Plusieurs type de raisonnement s'offre a nous en l'occurrence :

4.1 Raisonnement par l'absurde

Soit P une proposition dont on cherche à démontrer qu'elle est vraie. Raisonner par l'absurde c'est faire l'hypothèse que P est fausse, autrement dit, on suppose non(P), on cherche alors à obtenir une contradiction.

Exemple : montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel par l'absurde :

On suppose que $\sqrt{2} \in Q$, on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs et premiers entre eux. En élevant au carré on a $2q^2 = p^2$, ce qui entraîne que p est pair et donc p = 2a avec a entier, d'où $2q^2 = 4a^2$ i.e. $q^2 = 2a^2$, donc q est pair lui aussi et par conséquent p et q ne sont pas premiers entre eux : contradiction.

4.2 Raisonnement par analyse-synthèse

Raisonner par analyse-synthèse lorsque l'on cherche la ou les solutions à un problème, c'est raisonner en deux étapes qui sont :

- l'analyse : on suppose que l'on a une solution du problème et on cherche à en déduire toutes les propriétés possibles de cette solution, l'objectif étant d'essayer de l'identifier au mieux,
- la synthèse : elle consiste à déterminer parmi tous les objets mathématiques ayant les propriétés requises (obtenues lors de l'analyse), ceux qui sont effectivement solutions du problème.

Exemple : Montrons que toute fonction $f : [0;1] \to R$ est la somme d'une fonction affine et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1.

Analyse : supposons qu'il existe une fonction g qui s'annule en 0 et en 1, ainsi que deux réels a et b tels que $\forall x \in R, f(x) = g(x) + ax + b$. En évaluant en 0 on doit avoir f (0) = b, en évaluant en 1 on doit avoir f (1) = a + b, d'où a = f (1) - b = f (1) - f (0). Maintenant que a et b sont connus, on en déduit que g est la fonction $x \rightarrow f(x) - ax - b$

Synthèse : posons $b = f(0), a = f(1) - f(0)$ et $g : x \rightarrow f(x) - ax - b$. Il est clair que $f(x) = g(x) + ax + b$, d'autre part

$g(0) = f(0) - b = 0$ et $g(1) = f(1) - a - b = f(1) - f(1) + f(0) - f(0) = 0$.

Donc a, b et g sont bien solution du problème et celle-ci est unique.

4.3 Démontrer une implication

Par définition, l'implication « P $\Rightarrow$ Q » est fausse lorsque P est vraie et Q fausse, elle est vraie dans les autres cas. En particulier, si P est fausse, l'implication est nécessairement vraie quelque soit la valeur de vérité de Q. Par contre lorsque P est vraie, tout dépend de Q. Nous savons également que l'implication « P $\Rightarrow$ Q » est équivalente à sa contraposée « $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ », donc démontrer l'une c'est démontrer l'autre. On peut procéder donc par :

- **Méthode directe :** on suppose que la proposition P est vraie (c'est l'hypothèse), on cherche alors à établir que nécessairement la proposition Q est vraie elle aussi.
- **Par l'absurde :** on suppose le contraire de P $\Rightarrow$ Q. On montre alors que ceci conduit à une contradiction, ce qui entraîne que l'hypothèse faite est fausse et par conséquent $P \Rightarrow Q$
- **Par contraposition :** on cherche à établir que : $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

4.4 L'équivalence

Par définition, l'équivalence « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité. Donc montrer l'équivalence c'est montrer une implication et réciproque. On peut procéder :

- **Par double implication** : on établit dans un premier temps que P $\Rightarrow$ Q, puis dans un deuxième temps on établit la réciproque, c'est à dire que Q $\Rightarrow$ P.
- **Méthode directe** : on suppose que la proposition P est vraie (**hypothèse**) puis on cherche à établir que Q est vraie **en s'assurant à chaque étape du raisonnement que l'équivalence est conservé.**

4.5 La récurrence

Soit P(n) un prédicat portant sur une variable $n \in N$

Si on a P(0) (initialisation) et si $\forall n \in N \ p(n) \Rightarrow p(n+1)$ (hérédité), alorsnécessairement $\forall n \in N \ p(n)$.

L'initialisation est juste une vérification, mais elle est indispensable..

Démontrer l'hérédité c'est démontrer une implication. En général on le fait par la méthode directe, on fait donc l'hypothèse P(n), c'est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence, et on essaie d'en déduire P(n +1).

Exemple :

i) Montrer que $\forall n \in N^*, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

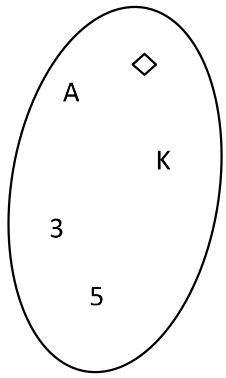
ii) Montrer que $\forall n \in N^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$

II- Eléments de la Théorie des ensembles

1. Les Ensembles

Définition On appelle ensemble E toute collection d'objets, appelés éléments de l'ensemble E. Si le nombre de ces objets est fini, on l'appelle cardinal de E et on le note Card (E), si E possède une infinité d'éléments, on dit qu'il est de cardinal infini et on note Card (E)= ∞.
Si un objet x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$. Si x n'est pas un élément de E, on note $x \notin E$.

- Pour définir un ensemble,
  - ou bien on connait la liste de tous ses éléments, on dit alors que l'ensemble est donné "par Extension",
  - ou bien on connait seulement les relations qui lient les éléments et qui nous permettent de les retrouver tous, on dit alors que l'ensemble est donné par "Compréhension".
- Pour représenter un ensemble E,
  - on met les objets qui forment l'ensemble entre deux accolades.
  - Il arrive de représenter un ensemble par un diagramme de Venn



L'ensemble E = $\{\diamond, A, K, 3, 5\}$

Exemple

- Soit A l'ensemble des étudiants bachelier en 2022. On ne connait pas tous ces étudiants mais on peut bien les retrouver, donc A est un ensemble donné par compréhension.
- Soit B = {V, 3, a, c, h, 7}. B est défini par extension, car on connait tous ses éléments, le cardinal de B est égal à 6 (Card (B) = 6).

Axiome : Il existe un ensemble, appelé l'ensemble vide et noté Φ, qui ne contient aucun élément. On a alors Card (Φ) = F.

2. Les quantificateurs

On utilise les symboles suivants :

1. $\exists$ le quantificateur existentiel. On écrit $\exists x$ pour lire "Il existe x".
2. $\forall$ le quantificateur universel. On écrit $\forall$ x pour lire "Pour tout x".
3. On écrit $\exists! x$ pour lire "Il existe un unique x".

Exercice : En utilisant ces quantificateurs, pour A un ensemble on a traduit si A est vide et si A est un singleton

3. Parties d'un ensemble

<u>**Définition:**</u> On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, ou que A est une partie de l'ensemble B, ou que A est un sous ensemble de B si tout élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$ et on a formellement : $A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x\ (x \in A \Longrightarrow x \in B)$
Quand A n'est pas une partie de B, on note $A \not\subset B$ et on a formellement :
$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x\ ((x \in A) \wedge (x \notin B))$
L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble A est noté P(A).

Exemple: Soit A = {a, α,2}, alors
P(A)) = { Φ ,{a},{ α},{ 2},{a, α},{a, 2},{ α,2},{a, α,2} }

Propriété : Soit A un ensemble, alors $\Phi \in P(A)$ et $A \in P(A)$.

<u>Définition:</u> Soient A et B deux ensembles, on dit que A est égal à B, on note A = B, s'ils ont les mêmes éléments.
Formellement on a :
$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B))$
$\quad\Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$

4. Opérations sur les ensembles

<u>Définition:</u> Soient A et B deux ensembles.

- On appelle intersection de A et B, l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de A appartenant aussi à B.
- On appelle réunion de A et B, l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de A et de ceux de B.
- On appelle la différence entre A et B, l'ensemble noté A\ B, des éléments de A qui ne sont pas de B.

Formellement, on a :
$A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
$A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$.
$A\backslash B = \{x; x \in A \wedge (x \notin B)\}$.

Exemple Soient A = {a, k, 7, 5, α, γ} et B = { γ, a, x, z}, alors :
$A \cap B = \{a, \gamma\}$ et $A \cup B = \{a, k, 7, 5, \alpha, \gamma, x, z\}$.

Propriété Soient A et B deux ensembles, alors

- $((A \cap B) \subset A) \wedge ((A \cap B) \subset B)$
- $(A \subset (A \cup B)) \wedge (B \subset (A \cup B))$

Si $Z \in P(A)$, on note :

- $\cap_{Y \in Z} Y = \{x; (\forall\ Y \in Z, x \in Y)\}$.
- $\cup_{Y \in Z} Y = \{x; (\exists\ Y \in Z, x \in Y)\}$.

<u>Définition:</u> Si $A \cap B = \Phi$, on dit que A et B sont deux ensembles disjoints, et si de plus $E = A \cup B$, on dit que A est le complémentaire de B dans E, ou que A et B sont deux ensembles complémentaires dans E, et on note : $A = C_E B$ ou $B = C_E A$ On note aussi : A = E\B
En d'autres termes,

Propriété Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $C_E A$ des éléments de E qui ne sont pas dans A.
Formellement on a :
$C_E A = \{x \in E, x \notin A)\}$.
Rq : si E est un ensemble alors $\Phi \subset E$ et $(\forall\ x \in E, x \notin \Phi)$, donc : $C_E \Phi = E$

Propriété Soient E un ensemble et A et B deux parties de E, alors :

1) $A \subset B \Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$.
2) $C_E(C_E A) = A$.
3) $C_E(A \cap B) = (C_E A \cup C_E B)$
4) $C_E(A \cup B) = (C_E A \cap C_E B)$

Preuve :

1) On a
$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow x \in E \ ((x \in A) \Longrightarrow (x \in B)) \\ &\Leftrightarrow x \in E \ ((x \notin B) \Longrightarrow (x \notin A)) \quad \text{Contraposée de l'implication} \\ &\Leftrightarrow x \in E \ ((x \in C_E B) \Longrightarrow (x \in C_E A)) \\ &\Leftrightarrow C_E B \subset C_E A \end{aligned}$$

2) Soit $x \in E$ alors
$$\begin{aligned} x \in C_E(C_E A) &\Leftrightarrow x \notin C_E A \\ &\Leftrightarrow \overline{(x \in C_E A)} \\ &\Leftrightarrow \overline{(x \notin A)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \end{aligned}$$
3) Soit $x \in E$ alors
$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Leftrightarrow (x \in C_E A) \vee (x \in C_E B) \\ &\Leftrightarrow x \in (C_E A \cup C_E B) \end{aligned}$$
4) Soit $x \in E$ alors
$$\begin{aligned} x \in C_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow (x \in C_E A) \wedge (x \in C_E B) \\ &\Leftrightarrow x \in (C_E A \cap C_E B) \end{aligned}$$

<u>Définition</u> On appelle partition d'un ensemble E, toute famille $F \subset P(E)$ telle que :

1. Les éléments de la famille F sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire
   $\forall A, B \in F, A \cap B = \Phi$
2. La famille F recouvre l'ensemble E ou que F est un recouvrement de E, c'est-à-dire
   $\bigcup_{A \in F} A = E$

Propriété Soit E un ensemble, alors pour toute partie A de E, $F = \{C_E A, A\}$ est une partition de E.

Exemple : Soit $E = \{V, a, \ell, 3, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma\}$, alors :
$F = \{a, \gamma\}, \{d, \alpha, \beta\}, \{c, V\}, \{3, \ell\}, \{b\}$, est une partition de l'ensemble E.

<u>Définition</u> Soient A et B deux ensembles non vides, on note $A \times B$ l'ensemble des couples ordonnés (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Il est appelé produit cartésien des ensembles A et B. On convient que
$\forall (x, y), (x', y') \in A \times B, (x, y) = (x', y') \Leftrightarrow ((x = x') \wedge (y = y'))$

Rq : $A \times B = B \times A$ si et seulement si $A = B$

III- Applications et Relations

1. Applications

Définition : On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui à tout élément x ∈ E fait correspondre un unique élément y ∈ F noté f(x).

- y = f(x) est appelé image de x et x est un antécédent de y.
- On représente l'application f de E dans F par f : E ⟶ F. E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f.

Une correspondance entre E et F est représentée par : f : E ⇝ F
Une application f entre E et F est aussi représentée par : f : E ⟶ F
x ⟶ f(x)

Formellement, une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si : ∀x, x′ ∈ E, ((x = x′) ⟹ (f(x) = f(x′)))

Exemple L'application Id_E : E → E telle que ∀ x ∈ E, $Id_E(x)$ = x est appelée application identité sur E.
Exemple Soient E et F deux ensembles non vides et a un élément de F, alors la correspondance f de E dans F définie par : ∀x ∈ E, x ⇝ a est une application dite application constante.

Définition : On dit que deux applications f et g sont égales si :

- Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.
- ∀x ∈ E, f(x) = g(x).

Image directe et image réciproque

Définition :

a) L'image directe : soit f : E ⟶ F et A ⊂ E, on appelle image directe de A par f un sous ensemble de F, noté f(A) tel que $f(A) = \{f(x) \in F \ / \ \ x \in A\}$,
Sachant que $f(A) \subset F$ et que A et f(A) sont des ensembles
b) L'image réciproque : soit f : E ⟶ F et B ⊂ F, on appelle image réciproque de B par f la partie de E, noté $f^{-1}(B)$ tel que $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$,
Sachant que $f^{-1}(B) \subset E$ et que B et $f^{-1}(B)$ sont des ensembles

Exemples :

i) Soit f l'application définie $\begin{array}{l} f: [0\,,3] \to [0\,,4] \\ x \to f(x) = 2x+1 \end{array}$; trouver $f([0\,,1])$

$f([0\,,1]) = \{f(x) \ / \ \ x \in [0\,,1]\} \ = \{2x+1 \ \ / \ 0 \le x \le 1\}$

On a $0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le 2x \le 2 \Rightarrow 1 \le 2x+1 \le 3 \ alors \ f([0\,,1]) = [1\,,3] \subset \ [0\,,4]$

ii) Soit f l'application définie $\begin{array}{l} f: [0\,,2] \to [0\,,4] \\ x \to f(x) = (2x-1)^2 \end{array}$; trouver $f^{-1}(\{0\}) et\, f^{-1}(]0\,,1[)$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [0\,,2]\,, f(x) \in \{0\}\} = \{x \in [0\,,2]\,, f(x) = 0\} = \{x \in [0\,,2]\,, (2x-1)^2 = 0\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$f^{-1}(]0\,,1[) = \{x \in [0\,,2]\,, f(x) \in]0\,,1[\} = \{x \in [0\,,2]\,, 0 < (2x-1)^2 < 1\}$$

On a $0 < (2x-1)^2 \ est \ vérifié \ pour \ tout \ x \ \in R \backslash \left\{\frac{1}{1}\right\}, x \in \ [0\,,2]$. $D'autrepart$

$(2x-1)^2 < 1 \Rightarrow |2x-1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \; et \; donc \; x \in \;]0\,,1[$

En regroupant les deux conditions on obtient

$$f^{-1}(]0\,,1[) = \left(\left[0\,,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,,2\right]\right) \cap \,]0\,,1[\, = \left]0\,,\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$$

Subjectivité, Injectivité et bijectivité

Définition

i) L'image f(E) de E par f est une partie de F. Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, on dit que f est une application surjective de E dans F on a: f(E) = F. $f \; est \; surjective \; \Leftrightarrow (\forall y \in F), (\exists \, x \in E) \; tel \; que \; f(x) = y$

ii) Quand on a deux éléments distincts de E correspondent par f à deux image différentes de F, f est dite application injective, on a alors :

$$f \; est \; injective \; \Leftrightarrow \forall \, x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$ou \quad f \; est \; injective \; \Leftrightarrow \forall \, x_1, x_2 \in E, \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \; x_1 = x_2$$

iii) L'application f est une bijective si elle injective et surjective, c'est à dire tout élément de F est l'image d'un unique élément de E, f est bijective si et seulement si : $f \; est \; bijective \; \Leftrightarrow (\forall y \in F), (\exists \, x! \in E) \; tel \; que \; f(x) = y$

Rq : Lorsqu'une application f est bijective cela veut dire que l'application inverse f^{-1} existe. f^{-1} est aussi bijective de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemple : vérifier si les fonctions $\begin{matrix} f_1: N \to N \\ n \to 4n+2 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} f_2: R \to R \\ x \to 5x+3 \end{matrix}$ sont bijectives.

- f_1 n'est pas surjective, en effet si on suppose qu'elle est surjective on aura $\forall y \in N, \exists \, x \in N \; tel \; que \; 4n + 2 = y \Rightarrow n = \frac{y-2}{4} \notin N$, Contradiction donc f_1 n'est pas surjective. Elle est par contre injective car :
  $\forall n_1, n_2 \in N, f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 4n_1 + 2 = 4n_2 + 2 \Rightarrow n_1 = n_2$
- f_2 *Est surjective car :* $\forall y \in R, \exists \, x \in R \; tel \; que \; 5x + 3 = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{5} \in R$,

f_2 *Est injective car :* $\forall x_1, x_2 \in N, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$

f_1 N'est pas bijective car elle n'est pas surjective, f_2 est bijective

Composition des applications

Définition : Soient E, F et G des ensembles et deux applications f, g telles que $\begin{matrix} f: E \to F \\ x \to f(x) = y \end{matrix}$ et $\begin{matrix} g: F \to G \\ y \to g(y) = z \end{matrix}$ on définit l'application composée par : $\begin{matrix} gof: E \to G \\ x \to gof(x) = z \end{matrix}$

Proposition :

- Si f et g sont injectives alors gof est injective.
- Si f et g sont surjectives alors gof est surjective.

Rq : Il s'ensuit que la composée de deux bijection et une bijection. En particulier, la composition de $f: E \to F$ et sa réciproque $f^{-1}: F \to E$ est l'application identité Id_E, $f^{-1}of = Id_E$; $fof^{-1} = Id_F$

Propriétés des applications : soit $f: E \to F$ une application on a :

- $A \subset B \; \Rightarrow f(A) \subset f(B\,)$
- $f(A \cup B) = \; f(A) \cup f(B)$

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Preuve : TD

Proposition : soit $f: E \to F$ et $g: F \to G$ on a :

- gof est injective, alors f est injective
- gof est surjective, alors g est surjective
- gof est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Preuve : TD

2. Relations binaire dans un ensemble

Définition : Soient $x \in E, y \in E$. Une relation R entre x et y est une correspondance entre x et y. Le couple (x, y) vérifie la relation R, on note x R y. Si E = F la relation est dite binaire.

Exemples :

$$i)\ \forall x, y \in N, xRy \Leftrightarrow x\ divise\ y$$

$$ii)\ \forall x, y \in R, xRy \Leftrightarrow x \geq y$$
$$iii)\ \forall A \subset E, B \subset F, xRy \Leftrightarrow A \subset B$$

Propriétés des relations binaires : Soient R une relation binaire dans l'ensemble E et x, y, z ∈ E, on dit que R est une relation !

1. Réflexive : $(\forall x \in E), (xRc)$.
2. Symétrique : $(\forall x, y \in E), (xRy \Rightarrow yRx)$
3. Antisymétrique : $\forall x, y \in E), ((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow x = y$
4. Transitive : $\forall x, y, z \in E), ((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow xRz$

Définition: Une relation est dite relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition: Une relation est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemples :

$i)\ \forall x, y \in N, xRy \Leftrightarrow x = y$ est une relation d'équivalence.

$ii)\ \forall A \subset E, B \subset E, xRy \Leftrightarrow A \subset B$ est une relation d'ordre en effet :

- $\forall A \subset E, A \subset A \Rightarrow ARA \Leftrightarrow$ R est réflexive
- $\forall A, B \subset E, ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow A = B \Leftrightarrow$ R est antisymétrique
- $\forall A, B, C \subset E), ((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow A \subset C \Leftrightarrow$ R est transitive

$iii)\ \forall x, y \in R, xRy \Leftrightarrow x \leq y$ est une relation d'ordre

Définition: Une relation d'ordre dans un ensemble E est dite d'ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables, $\forall x, t \in E\ on\ a\ xRy\ ou\ yRx.$

Une relation d'ordre est dite d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total.

Exemples :

1) $\forall x, y \in R, xRy \Leftrightarrow x \leq y$ est une relation d'ordre total sur R
   - R est réflexive car $\forall x \in R, x \leq x \Rightarrow ARA$
   - R est antisymétrique $\forall x, y \in R, ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow x = y$
   - R est tra nsitive $\forall x, y, z \in R), ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow x \leq z$
   - R est une relation d'ordre total $\forall x, y \in R, ((x \leq y)\ ou\ (y \leq x))$
2) $Soient\ (x, y); (x', y') \in R^2, (x, y)R(x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \wedge (y \leq y')$ est une relation d'ordre partiel en effet : $\exists\ (1, 2); (3, 0) \in R^2$,

   $(1, 2)\ n'estpas\ en\ relation\ avec\ (3, 0)\ et\ (3, 0)\ n'estpas\ en\ relation\ avec\ (1, 2)$

Définition: (Classe d'équivalence)

Soit R une relation d'équivalence, on appelle classe d'équivalence d'un élément x ∈ E l'ensemble des éléments y ∈ E qui sont en relation R avec x on note $\dot{x}\ ou\ C_x\ ou\ \bar{x} = \{y \in E, xRy\}$

Définition: L'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de E est appelée ensemble quotient de E par R, il est noté $E_{/R}$, on adonc $E_{/R} = \{\dot{x},\ x \in E\}$

Exemples :

$\forall x, y \in R, xRy \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$, R est-elle une relation d'équivalence ? Si oui chercher les classes d'équivalences $C_0, C_1, C_{\frac{1}{2}}$

i) $\forall x, \in R, x^2 - x = x^2 - x \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow R\ est\ reflexive$

ii) $\forall x, y \in R, xRy \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - y = x^2 - x \Leftrightarrow yRx \Leftrightarrow R\ symétrique$

iii) $\forall x, y, z \in R, (x^2 - x = y^2 - y) \wedge (y^2 - y = z^2 - z) \Rightarrow x^2 - x = z^2 - z \Leftrightarrow xRz \Leftrightarrow R\ est\ transitive$

R définie bien une relation d'équivalence sur l'ensemble des réels.

$C_0 = \{y \in R, 0Ry \Leftrightarrow 0 = y^2 - y\} = \{0, 1\}$
$C_1 = \{y \in R, 1Ry \Leftrightarrow 1^2 - 1 = y^2 - y \Leftrightarrow 0 = y^2 - y\} = \{0, 1\}$
$C_{\frac{1}{2}} = \left\{y \in R, \frac{1}{2}Ry \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = 0\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$