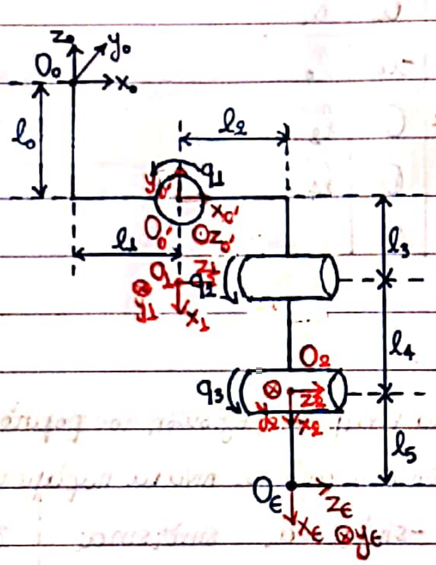
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής

Ρομποτική Ι: Ανάλυση, Έλεγχος, Εργαστήριο
Εξαμηνιαία Εργασία: Ρομποτικός Χειριστής 3 στροφικών βαθμών ελευθερίας

Θεοδώρα Στοίκου
ΗΜΜΥ, 7ο εξάμηνο
Α.Μ.: 03117085
e-mail: dido.stoikou@gmail.com



Α. Θεωρητική Ανάλυση

1. Στο σχήμα της κινηματικής δομής του ρομποτικού χειριστή που φαίνεται παραπάνω, έχουν τοποθετηθεί τα πλαίσια αναφοράς των συνδέσμων εφαρμόζοντας τη μέθοδο Denavit-Hartenberg (D-H). Συγκεκριμένα, λάβαμε υπόψη μας τους εξής κανόνες:

(α) Ο άξονας z_i έχει την κατεύθυνση του συνδέσμου i, δηλαδή για περιστροφικό σύνδεσμο, ο z_i άξονας είναι ο άξονας περιστροφής i.

(β) Ο άξονας x_i έχει τη διεύθυνση της κοινής καθέτου των αξόνων z_i και z_{i-1}.

(γ) Ο άξονας y_i ακολουθεί τον κανόνα του δεξιού χεριού, τοποθετείται δηλαδή με τρόπο που να εξασφαλίζει την ορθογωνιότητα στο (x_i, y_i, z_i).

(δ) Ο άξονας x_i τέμνει τον άξονα z_{i-1}. Το πλαίσιο O_i τοποθετείται στο σημείο τομής της κοινής καθέτου των z_i, z_{i-1} με τον άξονα z_i.

Επισήμανση για τον κανόνα (β): Αν δεν υπάρχει μοναδική κοινή κάθετος των z_i και z_{i-1}, ο άξονας x_i τοποθετείται στην κατεύθυνση της ευθείας που άγεται από τον z_{i-1} προς τον z_i.

Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας των παραμέτρων της μεθόδου D-H.

Δίνουμε τους συμβολισμούς για την κάθε παράμετρο:

- ϑ_i: περιστροφή ως προς τον άξονα z_{i-1} ώστε ο x_{i-1} να συμπέσει με τον x_i.
- a_i: περιστροφή ως προς τον x_i ώστε ο z_{i-1} να συμπέσει με τον z_i.
- d_i: μετατόπιση επί του z_{i-1} μεταξύ των O_{i-1} και O_i.
- α_i: μετατόπιση επί του x_i μεταξύ των O_{i-1} και O_i.

Σύνδεσμος i	ϑ_i	a_i	d_i	α_i
$0'$	0	$\pi/2$	$-l_0$	l_1
1	$-\frac{\pi}{2}+q_1$	$-\pi/2$	0	l_3
2	q_2	0	l_2	l_4
E	q_3	0	0	l_5

Για τη συνέχεια θεωρούμε $l_3=0$:

2. Θα προσδιορίσουμε την ευθεία κινηματική εξίσωση του ρομπότ μέσω των μητρών Denavit-Hartenberg που προκύπτουν από τον πίνακα παραμέτρων D-H.

Γενικά ισχύει:
$$A_i^{i-1}=\left[\begin{array}{ccc|c} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i\cos a_i & \sin\vartheta_i\sin a_i & \alpha_i\cos\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i\cos a_i & -\cos\vartheta_i\sin a_i & \alpha_i\sin\vartheta_i \\ 0 & \sin a_i & \cos a_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς: $\sin q_i = s_i$, $\cos q_i = c_i$.

Άρα:
$$A_{0'}^{0}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad A_1^{0'}=\left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$A_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & l_4c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad A_\epsilon^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & l_5c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Συνεπώς, η κινηματική εξίσωση (γεωμετρικό μοντέλο) του ρομποτικού βραχίονα είναι:

$$T(q) = A_\epsilon^0(q) = A_{0'}^0 \cdot A_1^{0'}(q_1) \cdot A_2^1(q_2) \cdot A_\epsilon^2(q_3) =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & l_4c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & l_5c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} c_2c_3 - s_2s_3 & -c_2s_3 - s_2c_3 & 0 & l_5c_3c_2 - l_5s_3s_2 + l_4c_2 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & l_5c_3s_2 + l_5s_3c_2 + l_4s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1(c_2c_3 - s_2s_3) & s_1(-c_2s_3 - s_2c_3) & c_1 & s_1(l_5c_3c_2 - l_5s_3s_2 + l_4c_2) + l_2c_1 + l_1 \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & l_5c_3s_2 + l_5s_3c_2 + l_4s_2 \\ -c_1(c_2c_3 - s_2s_3) & -c_1(-c_2s_3 - s_2c_3) & s_1 & -c_1(l_5c_3c_2 - l_5s_3s_2 + l_4c_2) + l_2s_1 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 \cdot \cos(q_2+q_3) & -s_1 \cdot \sin(q_2+q_3) & 0 & s_1l_5 \cdot \cos(q_2+q_3) + l_4c_2s_1 + l_2c_1 + l_1 \\ \sin(q_2+q_3) & \cos(q_2+q_3) & 0 & l_5 \cdot \sin(q_2+q_3) + l_4s_2 \\ -c_1 \cdot \cos(q_2+q_3) & c_1 \cdot \sin(q_2+q_3) & s_1 & -c_1l_5 \cdot \cos(q_2+q_3) - l_4c_1c_2 + l_2s_1 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1c_{23} & -s_1s_{23} & 0 & s_1l_5c_{23} + l_4c_2s_1 + l_2c_1 + l_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_5s_{23} + l_4s_2 \\ -c_1c_{23} & c_1s_{23} & s_1 & -c_1l_5c_{23} - l_4c_1c_2 + l_2s_1 - l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Έχουμε 3 περιστροφικές αρθρώσεις q_1, q_2, q_3, άρα η Ιακωβιανή μήτρα είναι της μορφής:

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} \\ \hline J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} \end{array}\right], \text{ όπου } \begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1} \times r_{i-1,\epsilon} \\ b_{i-1} \end{bmatrix}, \quad b_{i-1} = R_{i-1}^0 \cdot \bar{b}, \ \bar{b} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

$$r_{i-1,\epsilon} = A_n^0 \bar{r} - A_{i-1}^0 \bar{r}, \ \bar{r} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

Για τη στροφική άρθρωση q_1:

$$b_{0'} = R^0_{0'} \cdot \bar{b} = [0 \;\; -1 \;\; 0]^T$$

$$r_{0',E} = (A^0_E - A^0_{0'})\bar{r} = \begin{bmatrix} s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{bmatrix}$$

$$b_{0'} \times r_{0',E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 & l_5 s_{23} + l_4 s_2 & -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 & -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 & -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{vmatrix} j +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 & l_5 s_{23} + l_4 s_2 \end{vmatrix} k =$$

$$= (c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1) i + 0 \cdot j + (s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1) k = \begin{bmatrix} c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1 \\ 0 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$[J_{L_1}] = \begin{bmatrix} c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1 \\ 0 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 \end{bmatrix}, \quad [J_{A_1}] = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για τη στροφική άρθρωση q_2:

$$b_1 = R^0_1 \cdot \bar{b} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$r_{1,E} = A^0_E \cdot \bar{r} - A^0_1 \bar{r} = \begin{bmatrix} s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 + l_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 - l_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ -l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 \\ -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{bmatrix}$$

$$b_1 \times r_{1,E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 & l_5 s_{23} + l_4 s_2 & -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & s_1 \\ l_5 s_{23} + l_4 s_2 & -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 & -c_1 l_5 c_{23} - l_4 c_1 c_2 + l_2 s_1 \end{vmatrix} j +$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1 & l_5 s_{23} + l_4 s_2 \end{vmatrix} k =$$

$$= -s_1(l_5 s_{23} + l_4 s_2) i + (l_5 c_{23} + l_4 c_2) j + c_1 (l_5 s_{23} + l_4 s_2) k = \begin{bmatrix} -s_1(l_5 s_{23} + l_4 s_2) \\ l_5 c_{23} + l_4 c_2 \\ c_1(l_5 s_{23} + l_4 s_2) \end{bmatrix}$$

Άρα $[J_{L2}] = \begin{bmatrix} -s_1 l_5 s_{23} - s_1 l_4 s_2 \\ l_5 c_{23} + l_4 c_2 \\ c_1 l_5 s_{23} + c_1 l_4 s_2 \end{bmatrix}$, $[J_{A2}] = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$

Για τη στροφική άρθρωση q_3:

$$b_2 = R_2^0 \cdot \bar{b} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$r_{2,E} = A_E^0 \cdot \bar{r} - A_2^0 \cdot \bar{r} = \begin{bmatrix} s_1 l_5 c_{23} + \cancel{l_4 c_2 s_1} + \cancel{l_2 c_1} + \cancel{l_1} - \cancel{s_1 l_4 c_2} - \cancel{c_1 l_2} - \cancel{l_1} \\ l_5 s_{23} + \cancel{l_4 s_2} - \cancel{l_4 s_2} \\ -c_1 l_5 c_{23} - \cancel{l_4 c_1 c_2} + \cancel{l_2 s_1} - \cancel{l_0} + \cancel{l_4 c_2 c_1} - \cancel{s_1 l_2} + \cancel{l_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 l_5 c_{23} \\ l_5 s_{23} \\ -c_1 l_5 c_{23} \end{bmatrix}$$

$$b_2 \times r_{2,E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 l_5 c_{23} & l_5 s_{23} & -c_1 l_5 c_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & s_1 \\ l_5 s_{23} & -c_1 l_5 c_{23} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 l_5 c_{23} & -c_1 l_5 c_{23} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ s_1 l_5 c_{23} & l_5 s_{23} \end{vmatrix} k =$$

$$= -s_1 l_5 s_{23}\, i + l_5 c_{23}\, j + c_1 l_5 s_{23}\, k = \begin{bmatrix} -s_1 l_5 s_{23} \\ l_5 c_{23} \\ c_1 l_5 s_{23} \end{bmatrix}$$

Άρα $[J_{L3}] = \begin{bmatrix} -s_1 l_5 s_{23} \\ l_5 c_{23} \\ c_1 l_5 s_{23} \end{bmatrix}$, $[J_{A3}] = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$

Άρα η Ιακωβιανή μήτρα του διαφορικού κινηματικού μοντέλου του ρομποτικού βραχίονα είναι:

$$J(q_1,q_2,q_3)=\left[\begin{array}{c:c:c} c_1 l_5 c_{23}+l_4 c_1 c_2-l_2 s_1 & -s_1 l_5 s_{23}-s_1 l_4 s_2 & -s_1 l_5 s_{23} \\ 0 & l_5 c_{23}+l_4 c_2 & l_5 c_{23} \\ s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1 & c_1 l_5 s_{23}+c_1 l_4 s_2 & c_1 l_5 s_{23} \\ \hdashline 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{array}\right]$$

4. Επιθυμούμε να μελετήσουμε το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο του ρομπότ ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης. Θα βρούμε τον πίνακα J_L^{-1}:

$$J_L^{-1}=\frac{1}{\det J_L}\cdot \operatorname{adj} J_L$$

Ορίζουμε:

$$|J_{L11}|=\begin{vmatrix} l_5 c_{23}+l_4 c_2 & l_5 c_{23} \\ c_1 l_5 s_{23}+c_1 l_4 s_2 & c_1 l_5 s_{23}\end{vmatrix}=l_4 l_5 c_1(c_2 s_{23}-s_2 c_{23})$$

$$|J_{L12}|=\begin{vmatrix} 0 & l_5 c_{23} \\ s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1 & c_1 l_5 s_{23}\end{vmatrix}=-l_5 c_{23}(s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1).$$

$$|J_{L13}|=\begin{vmatrix} 0 & l_5 c_{23}+l_4 c_2 \\ s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1 & c_1 l_5 s_{23}+c_1 l_4 s_2\end{vmatrix}=-(l_5 c_{23}+l_4 c_2)(s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1)$$

$$|J_{L21}|=\begin{vmatrix} -s_1 l_5 s_{23}-s_1 l_4 s_2 & -s_1 l_5 s_{23} \\ c_1 l_5 s_{23}+c_1 l_4 s_2 & c_1 l_5 s_{23}\end{vmatrix}=0$$

$$|J_{L22}|=\begin{vmatrix} c_1 l_5 c_{23}+l_4 c_1 c_2-l_2 s_1 & -s_1 l_5 s_{23} \\ s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1 & c_1 l_5 s_{23}\end{vmatrix}=l_5 s_{23}(c_1^2 l_5 c_{23}+l_4 c_1^2 c_2-\cancel{l_2 s_1 c_1}+s_1^2 l_5 c_{23}+$$
$$+l_4 c_2 s_1^2+\cancel{l_2 c_1 s_1})=$$
$$=l_5 s_{23}[l_5 c_{23}(c_1^2+s_1^2)+l_4 c_2(c_1^2+s_1^2)]=l_5 s_{23}\cdot(l_5 c_{23}+l_4 c_2)$$

$$|J_{L23}|=\begin{vmatrix} c_1 l_5 c_{23}+l_4 c_1 c_2-l_2 s_1 & -s_1 l_5 s_{23}-s_1 l_4 s_2 \\ s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1 & c_1 l_5 s_{23}+c_1 l_4 s_2\end{vmatrix}=$$
$$=(c_1 l_5 c_{23}+l_4 c_1 c_2-l_2 s_1)(c_1 l_5 s_{23}+c_1 l_4 s_2)+(s_1 l_5 s_{23}+s_1 l_4 s_2)(s_1 l_5 c_{23}+l_4 c_2 s_1+l_2 c_1)=$$
$$=c_1^2 l_5^2 c_{23} s_{23}+c_1^2 l_4 l_5 s_2 c_{23}+c_1^2 c_2 l_4 l_5 s_{23}+c_1^2 c_2 l_4^2 s_2-\cancel{s_1 c_1 l_2 l_5 s_{23}}-\cancel{s_1 c_1 l_2 l_4 s_2}+$$
$$+s_1^2 l_5^2 s_{23} c_{23}+s_1^2 l_4 l_5 c_2 s_{23}+\cancel{s_1 c_1 l_2 l_5 s_{23}}+s_1^2 s_2 l_4 l_5 c_{23}+s_1^2 s_2 c_2 l_4^2+\cancel{s_1 s_2 c_1 l_2 l_4}=$$

$$= l_5^2 s_{23} c_{23}(c_1^2+s_1^2) + l_4 l_5 c_2 s_{23}(s_1^2+c_1^2) + l_4 l_5 s_2 c_{23}(s_1^2+c_1^2) + l_4^2 s_2 c_2 (s_1^2+c_1^2) =$$
$$= l_5^2 s_{23} c_{23} + l_4 l_5 c_2 s_{23} + l_4 l_5 s_2 c_{23} + l_4^2 s_2 c_2 =$$
$$= l_4 l_5 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23}) + l_5^2 s_{23} c_{23} + l_4^2 s_2 c_2 .$$

$$|J_{L31}| = \begin{vmatrix} -s_1 l_5 s_{23} - s_1 l_4 s_2 & -s_1 l_5 s_{23} \\ l_5 c_{23} + l_4 c_2 & l_5 c_{23} \end{vmatrix} =$$
$$= \cancel{-l_5^2 s_1 s_{23} c_{23}} - l_4 l_5 s_1 s_2 c_{23} + \cancel{l_5^2 s_1 c_{23} s_{23}} + l_4 l_5 s_1 c_2 s_{23} = l_4 l_5 s_1 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23}).$$

$$|J_{L32}| = \begin{vmatrix} c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1 & -s_1 l_5 s_{23} \\ 0 & l_5 c_{23} \end{vmatrix} = l_5 c_{23}(c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1).$$

$$|J_{L33}| = \begin{vmatrix} c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1 & -s_1 l_5 s_{23} - s_1 l_4 s_2 \\ 0 & l_5 c_{23} + l_4 c_2 \end{vmatrix} = (l_5 c_{23} + l_4 c_2)(c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1).$$

Επιπλέον: $\det J_L = (c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)\cdot|J_{L11}| + (s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1)\cdot|J_{L31}| =$
$$= (c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)\cdot l_4 l_5 c_1 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23}) + (s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1)\cdot l_4 l_5 s_1 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23}) =$$
$$= l_4 l_5 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})\cdot(c_1^2 l_5 c_{23} + c_1^2 c_2 l_4 - \cancel{l_2 s_1 c_1} + s_1^2 l_5 c_{23} + s_1^2 c_2 l_4 + \cancel{s_1 c_1 l_2}) =$$
$$= l_4 l_5 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})(l_4 c_2 + l_5 c_{23}) = l_4 l_5 s_3 (l_4 c_2 + l_5 c_{23})$$

$$\operatorname{adj} J_L = \begin{bmatrix} |J_{L11}| & -|J_{L21}| & |J_{L31}| \\ -|J_{L12}| & |J_{L22}| & -|J_{L32}| \\ |J_{L13}| & -|J_{L23}| & |J_{L33}| \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$J_L^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{l_4 c_2 + l_5 c_{23}} & 0 & \dfrac{s_1}{l_4 c_2 + l_5 c_{23}} \\ \dfrac{c_{23}(s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1)}{l_4 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})(l_4 c_2 + l_5 c_{23})} & \dfrac{s_{23}}{l_4 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})} & \dfrac{-c_{23}(c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1)}{l_4 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})(l_4 c_2 + l_5 c_{23})} \\ \dfrac{-(s_1 l_5 c_{23} + l_4 c_2 s_1 + l_2 c_1)}{l_4 l_5 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})} & \dfrac{-l_4 l_5 (c_2 s_{23} + s_2 c_{23}) - l_5^2 s_{23} c_{23} - l_4^2 s_2 c_2}{l_4 l_5 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})(l_4 c_2 + l_5 c_{23})} & \dfrac{c_1 l_5 c_{23} + l_4 c_1 c_2 - l_2 s_1}{l_4 l_5 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23})} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, δεδομένης της επιθυμητής ταχύτητας $\dot{p} = [v_E \ \ \omega_E]^T$ του τελικού στοιχείου δράσης (και αφού η $J(q)$ είναι αντιστρέψιμη), μπορούμε να βρούμε τις ταχύτητες των αρθρώσεων ως εξής: $\dot{q} = J^{-1}_{(q)}\cdot\dot{p}$

Προσδιορισμός ιδιόμορφων κινηματικών διατάξεων του συστήματος: $\det(J_{L(q)}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} s_3 = 0 \Rightarrow q_3 = 0 \text{ ή } q_3 = \pm k\pi \end{cases}$ (η q_3 είναι σε πλήρη έκταση ή πλήρη αναδίπλωση).
$ \ \ l_4 c_2 + l_5 c_{23} = 0$ (ο άξονας των q_2, q_3 "διπλώνει" ως προς τον άξονα της q_1).

Στην 1η περίπτωση, το ρομπότ δεν μπορεί να κινηθεί περαιτέρω στον άξονα x_E, ενώ στην 2η περίπτωση δεν έχουμε ικανότητα κίνησης στον άξονα z_E.

5. Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο του βραχίονα για δεδομένη θέση p_E του τελικού εργαλείου δράσης. Από τον πίνακα $A^0_E(q)$ λαμβάνουμε για τη θέση του τελικού στοιχείου δράσης:

$$\begin{cases} p_x = l_1 + l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 s_1 c_{23} \\ p_y = l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ p_z = -l_0 + l_2 s_1 - l_4 c_1 c_2 - l_5 c_1 c_{23} \end{cases}$$

Ορίζουμε: $p'_x = l_4 c_2 + l_5 c_{23}$

$$\text{Τότε: } \left.\begin{aligned} (p_x - l_1)^2 &= [l_2 c_1 + s_1(l_4 c_2 + l_5 c_{23})]^2 = (l_2 c_1 + s_1 p'_x)^2 \\ (p_z + l_0)^2 &= [l_2 s_1 - c_1(l_4 c_2 + l_5 c_{23})]^2 = (l_2 s_1 - c_1 p'_x)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 = l_2^2 c_1^2 + \cancel{2 l_2 c_1 s_1 p'_x} + s_1^2 p'^2_x + l_2^2 s_1^2 - \cancel{2 l_2 s_1 c_1 p'_x} + c_1^2 p'^2_x =$$

$$= l_2^2 (c_1^2 + s_1^2) + p'^2_x (s_1^2 + c_1^2) \Rightarrow (p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 = l_2^2 + p'^2_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'_x = \sqrt{(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2} = \sqrt{(l_2 c_1 + l_4 c_2 s_1 + l_5 s_1 c_{23})^2 + (l_2 s_1 - l_4 c_1 c_2 - l_5 c_1 c_{23})^2 - l_2^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{aligned} &l_2^2 c_1^2 + l_4^2 c_2^2 s_1^2 + l_5^2 s_1^2 c_{23}^2 + \cancel{2 l_2 l_4 c_1 c_2 s_1} + \cancel{2 l_2 l_5 c_1 c_{23} s_1} + 2 l_4 l_5 c_2 c_{23} s_1^2 + l_2^2 s_1^2 + l_4^2 c_1^2 c_2^2 + \\ &+ l_5^2 c_1^2 c_{23}^2 - \cancel{2 l_2 l_4 s_1 c_1 c_2} + 2 l_4 l_5 c_1^2 c_2 c_{23} - \cancel{2 l_2 l_5 c_1 c_{23} s_1} - l_2^2 \end{aligned}} =$$

$$= \sqrt{\cancel{l_2^2 (s_1^2 + c_1^2)} - \cancel{l_2^2} + l_4^2 c_2^2 (s_1^2 + c_1^2) + l_5^2 c_{23}^2 (s_1^2 + c_1^2) + 2 l_4 l_5 c_2 c_{23} (s_1^2 + c_1^2)} =$$

$$= \sqrt{l_4^2 c_2^2 + l_5^2 c_{23}^2 + 2 l_4 l_5 c_2 c_{23}} = \sqrt{(l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2} \Rightarrow p'_x = l_4 c_2 + l_5 c_{23}$$

$$\text{Άρα: } \left.\begin{aligned} (l_4 c_2 + l_5 c_{23})^2 &= (p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2 \\ p_y^2 &= l_4^2 s_2^2 + 2 l_4 l_5 s_2 s_{23} + l_5^2 s_{23}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_4^2 c_2^2 + 2 l_4 l_5 c_2 c_{23} + l_5^2 c_{23}^2 - p_y^2 = (p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2 - l_4^2 s_2^2 - 2 l_4 l_5 s_2 s_{23} - l_5^2 s_{23}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2 + p_y^2 = l_4^2 (c_2^2 + s_2^2) + 2 l_4 l_5 (c_2 c_{23} + s_2 s_{23}) + l_5^2 (c_{23}^2 + s_{23}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2 + p_y^2 = l_4^2 + l_5^2 + 2 l_4 l_5 c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2 + p_y^2 - l_4^2 - l_5^2}{2 l_4 l_5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_3 = \pm \arccos\left[\frac{(p_x - l_1)^2 + (p_z + l_0)^2 - l_2^2 + p_y^2 - l_4^2 - l_5^2}{2 l_4 l_5}\right]}$$

$$p_x - l_1 = l_2 c_1 + s_1 p'_x \quad (1)$$

$$p_z + l_0 = l_2 s_1 - c_1 p'_x \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow s_1 = \frac{p_z + l_0 + c_1 p'_x}{l_2} \quad (3)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} p_x - l_1 = l_2 c_1 + \frac{p'_x (p_z + l_0 + c_1 p'_x)}{l_2} \Rightarrow l_2 p_x - l_1 l_2 = l_2^2 c_1 + p'_x p_z + p'_x l_0 + p'^2_x c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(p_x'^2+l_2^2)=l_2p_x-l_1l_2-p_x'p_z-p_x'l_0 \Rightarrow c_1=\frac{l_2(p_x-l_1)-p_x'(p_z+l_0)}{p_x'^2+l_2^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_1=\pm\arccos\left[\frac{l_2(p_x-l_1)-p_x'(p_z+l_0)}{p_x'^2+l_2^2}\right]}$$

$p_y=l_4s_2+l_5s_{23}=l_4s_2+l_5(s_2c_3+c_2s_3)=l_4s_2+l_5s_2c_3+l_5c_2s_3=s_2(l_4+l_5c_3)+l_5c_2s_3$

Έχουμε: $\sqrt{(l_4+l_5c_3)^2+(l_5s_3)^2}=\sqrt{l_4^2+2l_4l_5c_3+l_5^2(c_3^2+s_3^2)}=\sqrt{l_4^2+2l_4l_5c_3+l_5^2}=d$

Άρα: $p_y=[\cos(\arctan2(l_5s_3,l_4+l_5c_3))s_2+\sin(\arctan2(l_5s_3,l_4+l_5c_3))\cdot c_2]\cdot d\Rightarrow$

$\Rightarrow p_y=\arcsin\left(\frac{p_y}{\sqrt{l_4^2+2l_4l_5c_3+l_5^2}}\right)$

Συνεπώς: $\boxed{q_2=-\arctan2(l_5s_3,l_4+l_5c_3)+\arcsin\left(\frac{p_y}{\sqrt{l_4^2+2l_4l_5c_3+l_5^2}}\right)}$

Επισήμανση για την q_1:

Αληθεύουν οι σχέσεις: $\left.\begin{aligned}p_x-l_1&=l_2c_1+s_1(l_5c_{23}+l_4c_4)\\ p_z+l_0&=l_2s_1-c_1(l_5c_{23}+l_4c_2)\end{aligned}\right\}$

και θεωρούμε την γωνία $\varphi=\arctan2(l_5c_{23}+l_4c_2,l_2)$. Άρα λαμβάνουμε:

$\left.\begin{aligned}l_5c_{23}+l_4c_2&=\sqrt{(l_5c_{23}+l_4c_2)^2+l_2^2}\cdot\cos\varphi\\ l_2&=\sqrt{(l_5c_{23}+l_4c_2)^2+l_2^2}\cdot\sin\varphi\end{aligned}\right\}$

Συνεπώς προκύπτει: $q_1=-\arctan2(l_5c_{23}+l_4c_2,l_2)+\arctan2[-(p_x,p_z)]$.